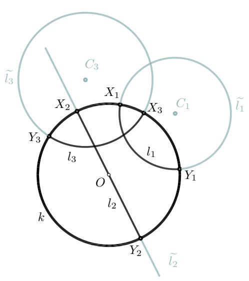
14. Поенкареов диск модел

Посматрајмо јединични круг $k : (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 = 1$ еуклидске равни $\mathbb{E}^2$. У комплексним координатама он је дат једначином $|z| = 1$.

Тачке Поенкареовог диск модела, које ћемо називати h-**тачкама**, су тачке унутрашњости овог круга $\mathbb{D}^2 = \{z||z| < 1\}$. Скуп свих h-тачака је h-**раван**, а сам круг називамо **апсолутом**. Специјално, тачку O дату са $z = 0$ називамо центром апсолуте.

h-**праве.** Нека је $\widetilde{l}$ уопштени круг равни $\mathbb{E}^2$, нормалан на апсолуту k. Тада $\widetilde{l}$ и k имају две заједничке тачке X и Y.



Тада је $\widetilde{l}$ у еуклидском смислу права ако и само ако $\widetilde{l}$ садржи центар апсолуте O. Скуп тачака уопштеног круга $\widetilde{l}$ које су уједно и h-тачке је h-**права** и означаваћемо је са l. Тачке пресека апсолуте и $\widetilde{l}$, X и Y, називамо **бесконачно далеким тачкама** h-праве l.

Ако је $\widetilde{l}$ у еуклидском смислу права, која онда садржи тачку O и ако је θ угао који $\widetilde{l}$ одређује са x_1 осом, онда је једначина $\widetilde{l}$ дата са

$$\sin\theta x_1 - \cos\theta x_2 = 0.$$

Нека је $\widetilde{l}$ у еуклидском смислу круг и нека је његов центар C дат координатом $c = a + ib$, а полупречник r. Ако је X једна заједничка тачка кругова k и $\widetilde{l}$ троугао OXC је правоугли, па је $1 + r^2 = |c|^2$. Зато је круг $\widetilde{l}$ дат једначином $|z - c| = r$, тј. $(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2 = a^2 + b^2 - 1$, односно

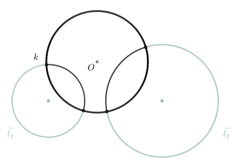
$$x_1^2 + x_2^2 - 2ax_1 - 2bx_2 + 1 = 0.$$

Уочимо да за две разне h-тачке A и B постоји тачно једна h-права l која их садржи. Тада $\widetilde{l}$ садржи и тачке $\psi_k(A)$ и $\psi_k(B)$.

Ако је $\widetilde{l}$ у еуклидском смислу круг, сматрамо да је h-тачка A h-**између** h-тачака B и C ако припада луку BC круга $\widetilde{l}$ који је подскуп унутрашњости апсолуте. Ако је $\widetilde{l}$ у еуклидском смислу права, h-тачка A h-**између** h-тачака B и C ако је и еуклидски A између B и C. Све h-тачке A које су h-између B и C је h-дуж BC.

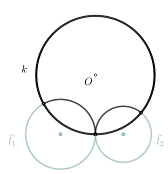
Ако уопштени круг $\widetilde{l}$ сече апсолуту у тачкама X и Y и садржи h-тачку A, онда су скупови тачака отворених лукова $\widehat{AX}$ и $\widehat{AY}$ који припадају h-равни, **отворене** h-**полуправе**.

Међусобни положај две h-**праве.** Два разна уопштена круга $\widetilde{l_1}$ и $\widetilde{l_2}$ који одређују h-праве, l_1 и l_2 могу да имају заједничке највише две тачке.

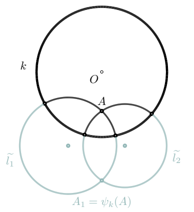


Ако немају заједничких тачака, тада се ни l_1 и l_2 не секу. Тада кажемо да су l_1 и l_2 **хиперпаралелне**.

С обзиром да се инверзијом у односу на круг k, $\widetilde{l_1}$ и $\widetilde{l_2}$ сликају у себе, ако је скуп заједничких тачака непразан, он се слика у себе.



Зато, ако се $\widetilde{l_1}$ и $\widetilde{l_2}$ додирују у једној тачки, она је инваријантна за инверзију, па припада апсолути k и није h-тачка. Тада кажемо да су l_1 и l_2 **паралелне** праве.

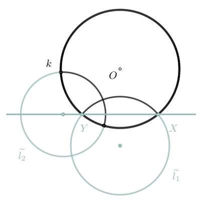


Ако се $\widetilde{l_1}$ и $\widetilde{l_2}$ секу у две тачке, једна припада унутрашњости, а друга спољашњости апсолуте, па се l_1 и l_2 секу у једној тачки. Тада кажемо да су оне **конкурентне**.

Угао. Мера угла између две h-праве је његова еуклидска мера, односно, угао између две h-праве l_1 и l_2 је угао између тангенти на l_1 и l_2 у пресечној тачки.

h - **нормале.** Нека је l_1 h-права са бесконачно далеким тачкама X и Y. Тада је уопштени круг $\widetilde{l_1}$ нормалан на апсолуту k. Одредимо h-праву l_2 нормалну на l_1.

Ако је $\widetilde{l_1}$ еуклидски права, тада је $\widetilde{l_2}$ или права ортогонална на $\widetilde{l_1}$ у O или круг са центром C који припада правој $\widetilde{l_1}$. При том је његов полупречник $r = \sqrt{OC^2 - 1}$.
Нека је $\widetilde{l_1}$ круг. Испитајмо када је уопштени круг $\widetilde{l_2}$ ортогоналан на k и $\widetilde{l_1}$.



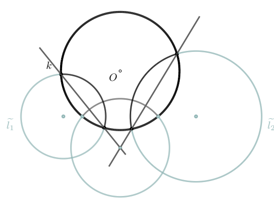
Ако је $\widetilde{l_2}$ права, тада она садржи центре кругова $\widetilde{l_1}$ и k. Ако је $\widetilde{l_2}(C, r)$ круг, тада тачка C има исту потенцију r^2 према круговима $\widetilde{l_1}$ и k, па тачка C припада радикалној оси XY ових кругова, а не припада дужи XY. При том важи $OC^2 = 1 + r^2$.
Ако круг $\widetilde{l_2}$ садржи h-тачку A, тада, с обзиром да је ортогоналан на k садржи и тачку $\psi_k(A) = A'$.

Сада лако следи наредно тврђење.

Теорема

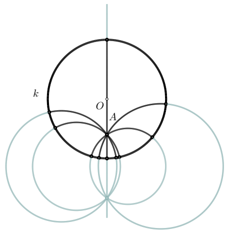
Постоји јединствена h-права n која садржи дату h-тачку A и нормална је на дату h-праву a.

Праву n називамо h-**нормалом**. Ако је A_0 заједничка тачка правих n и a, тада је A_0 h-**пројекција** h-тачке A на h-праву a.
Следеће тврђење наводимо без доказа.

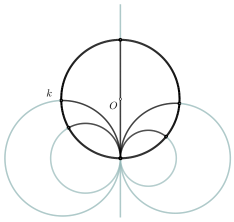


Тврђење

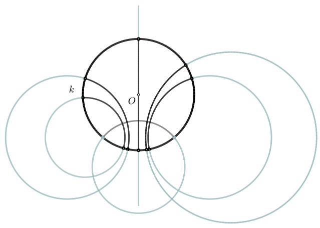
Две h-праве l_1 и l_2 су хиперпаралелне ако и само ако имају заједничку h-нормалу. При том, та нормала је јединствена.



Ако је A h-тачка, тада скуп свих h-правих које садрже A називамо **праменом конкурентних** правих или **елиптичким** праменом правих, са центром у A и означавамо $\mathfrak{X}_A$.



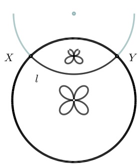
Ако је X тачка апсолуте, сви уопштени кругови који садрже X и који одређују h-праве се додирују у тачки X. Зато све h-праве које имају заједничку бесконачно далеку тачку X називамо **праменом паралелних** правих или **параболичким** праменом, са центом у X. Њега означавамо са $\mathfrak{X}_X$.



Ако је s h-права, тада скуп свих h-правих нормалних на s називамо **праменом хиперпаралелних** правих, односно **хиперболичким** праменом и означавамо са $\mathfrak{X}_s$.

Уочимо да за две разне h-праве постоји тачно један прамен $\mathfrak{X}$ који их садржи.

h-**рефлексије.** Нека је l h-права. Тада је $\widetilde{l}$ уопштени круг ортогоналан на апсолуту k. Уопштена инверзија $\psi_{\widetilde{l}}$ у односу на $\widetilde{l}$ тада слика круг k у себе.



При том, h-тачке h-праве l су инваријантне за ово пресликавање. h-права l разлаже унутрашњост круга k на две области које се пресликавањем $\psi_{\widetilde{l}}$ сликају једна у другу.

Рестрикцију $\psi_{\widetilde{l}}$ на h-раван називамо h-**рефлексијом** и означавамо са S_l.

Дефиниција

Композиција коначног броја h-рефлексија је h-**изометрија**. Уколико је h-изометрија композиција парног броја h-рефлексија онда је она **директна**, а ако је композиција непарног броја h-рефлексија **индиректна** h-изометрија.

Следеће тврђење следи директно.

Тврђење

Скуп свих h-изометрија је група.

Због особина уопштених инверзија важи и следеће тврђење.

Тврђење

Свака h-изометрија слика h-колинеарне тачке у h-колинеарне тачке и чува распоред. Слика h-праве у h-праве. При том, углови између две h-праве и њихових слика су једнаки. Конкурентне, паралелне, односно хиперпаралелне h-праве се сликају редом у конкурентне, паралелне, односно хиперпаралелне h-праве.

Нека је h-права l дата једначином $\sin\theta x_1 - \cos\theta x_2 = 0$. Нађимо фомуле h-рефлексије у односу на њу.
С обзиром да је $\widetilde{l}$ (еуклидски) права која садржи тачку O тражене формуле су формуле еуклидске рефлексије у односу на праву $\widetilde{l}$ односно формула h-рефлексије је

$$S_l(z) = e^{2i\theta}\overline{z}. \tag{1}$$

Ако је h-права l дата једначином

$$x_1^2 + x_2^2 - 2ax_1 - 2bx_2 + 1 = 0,$$

односно одређена еуклидским кругом са центром у $c = a + \imath b$ и полупречником $r^2 = |c|^2 - 1$ онда су формуле инверзије $\psi_{\widetilde{l}}$, а самим тим и S_l дате са $z \mapsto \frac{r^2}{\overline{z}-\overline{c}} + c = \frac{r^2+\overline{z}c-|c|^2}{\overline{z}-\overline{c}} = \frac{c\overline{z}-1}{\overline{z}-\overline{c}}$, односно

$$S_l(z) = \frac{c\overline{z}-1}{\overline{z}-\overline{c}}. \tag{2}$$

Примедба *Уочимо да су (1) и (2) антихомографије, које при том сликају $\mathbb{D}^2$ у $\mathbb{D}^2$. При том, оба се могу записати и као $z \mapsto \frac{a\overline{z}+b}{\overline{b}\overline{z}+\overline{a}}$, где је у првом случају $a = e^{\imath\theta}, b = 0$, а у другом $a = \imath c, b = -\imath$.*
С обзиром да су композиције антихомографија инверзивна пресликавања, видимо да су све h-изометрије инверзивна пресликавања која сликају $\mathbb{D}^2$ у себе.

Покажимо да су све хомографије којима се $\mathbb{D}^2$ слика у себе дате са $m : z \mapsto \frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}$ где $|b| < |a|$.
Нека је $m : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ хомографија која слика $k \mapsto k$.
$a = |a|e^{i\alpha}, \ldots, d = |d|e^{i\delta}$. С обзиром да свака сразмерна четворка комплексних бројева одређује исто пресликавање можемо узети да је $\delta = -\alpha$.

За тачке $1, -1, i$ круга k важи да је $|m(1)| = 1$, $|m(-1)| = 1$, $|m(i)| = 1$, што се своди (после пар редова рачуна) на $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2$ и $a\overline{b} = c\overline{d}$, тј. $|a||b| = |c||d|$ и $e^{i(\alpha-\beta)} = e^{i(\alpha+\gamma)}$.
Зато је $e^{i\gamma} = e^{-i\beta}$. Из осталих једначина следи да је или $|a| = |c| \wedge |b| = |d|$ или $|a| = |d| \wedge |b| = |c|$. У првом случају $ad - bc = 0$, па остаје да је $|a| = |d| \wedge |b| = |c|$. При том, за тачку $0 \in \mathbb{D}^2$ треба да важи $|m(0)| < 1$, па следи $|b| < |a|$.
С обзиром да антихомографија $S_p(z) = \overline{z}$ слика $\mathbb{D}^2 \mapsto \mathbb{D}^2$ следи и да су све антихомографије које сликају $\mathbb{D}^2 \mapsto \mathbb{D}^2$ облика $m \circ S_l$.

Нека је $m(z) = \frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}, |b| < |a|$ хомографија одређена матрицом

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{bmatrix}.$$

Покажимо да је она композиција две h-рефлексије.
Нека је $b = 0$. Тада можемо сматрати $a = e^{i\theta}$. Композиција $m \circ S_p : z \mapsto m(\overline{z})$ је антихомографија са матрицом M и представља h-рефлексију у односу на h-праву q која одређује угао θ са x_1-осом. Зато је $m = S_q \circ S_p$.
Ако $b \neq 0$, нека је $c = -\frac{\overline{a}}{\overline{b}}$ и $S_l : z \mapsto \frac{c\overline{z}-1}{\overline{z}-\overline{c}}$. Тада је $m \circ S_l$ антихомографија са матрицом

$$\begin{bmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -1 \\ 1 & -\overline{c} \end{bmatrix} = \left(\frac{|a|^2}{|b|^2} - 1\right) \begin{bmatrix} -b & 0 \\ 0 & \overline{b} \end{bmatrix},$$

односно h-рефлексија у односу на h-праву q која садржи тачку O. Зато је $m = S_q \circ S_l$.
Свака антихомографија овог облика је тада $m \circ S_p$ односно

Дакле

Теорема

Директне h-изометрије су дате са $m(z) = \frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}$, где $a, b \in \mathbb{C}$ и $|b| < |a|$, а индиректне $z \mapsto m(\overline{z})$.

Примедба *Дакле, група h-изометрија хиперболичке равније подгрупа групе инверзивних трансформација. При том, директна h-изометрија може представити као композиција две h-рефлексије, а свака индиректна је композиција до три h-рефлексије.*

Тврђење

Нека је A h-тачка различита од центра апсолуте O. Тада постоји јединствена h-рефлексија S_l која слика A у O.

Доказ. Нека је l h-права која не садржи тачку O, одређена кругом $\widetilde{l}$ са центром у C и координатом $c = a + \imath b$. Тада је $S_l(O) = \frac{1}{\bar{c}}$, видети (2). Ако је $A \neq O$ h-тачка и w њена комплексна координата, следи да је $c = \frac{1}{\bar{w}}$, центар еуклидског круга $\widetilde{l}$ који одређује h-праву l такву да је $S_l(A) = O$. $\square$

Дефиниција

h-права l такву да се h-рефлексијом S_l тачка A слика у B је h-симетрала дужи AB.

Дакле, ако је једна од тачака A и B центар апсолуте показали смо да постоји јединствена h-симетрала те дужи. Ако је S_q рефлексија којом се A слика у O а B у B_1 и l_1 h-симетрала дужи OB_1, тада је h-права $S_q(l)$ симетрала дужи AB. Зато важи следеће тврђење.

Тврђење

Нека су A и B две разне h-тачке. Тада постоји јединствена h-симетрала дужи AB.

Примедба *Ако је w комплексна координата тачке $A \neq O$ тада је формула h-рефлексије којом се A слика у O дата са* $S_l(z) = \frac{\frac{1}{w}\bar{z}-1}{\bar{z}-\frac{1}{\bar{w}}} = \frac{\frac{1}{w}\bar{z}-1}{\bar{z}-\frac{1}{w}}$ *односно*

$$S_l(z) = \frac{w}{\bar{w}}\frac{\bar{z}-\bar{w}}{w\bar{z}-1}. \tag{3}$$