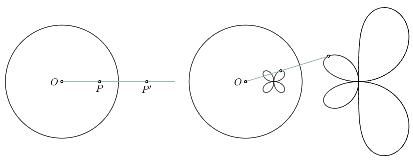
12. Инверзија у односу на круг

Дефиниција

Нека је $k(O,r)$ круг еуклидске равни $\mathbb{E}^2$. Инверзија у односу на круг k је пресликавање $\psi_k : \mathbb{E}^2\backslash\{O\} \to \mathbb{E}^2\backslash\{O\}$ које произвољну тачку P слика у тачку P' полуправе OP, такву да је

$$OP \cdot OP' = r^2. \tag{1}$$

Тачка O је **центар инверзије**.



Нека је O координатни почетак. Уочимо да су тада формуле инверзије ψ_k, где је $k(O,r)$ у стандардним еуклидским координатама дате са

$$\psi_k(x_1,x_2) = \Big(\frac{r^2x_1}{x_1^2+x_2^2}, \frac{r^2x_2}{x_1^2+x_2^2}\Big). \tag{2}$$

Очигледно је да је инверзија у односу на круг бијективно пресликавање. Такође, јасно је да је $\psi_k(P') = P$, те је ψ_k и инволутивно пресликавање, односно важи $\psi_k^2 = \varepsilon$.

Нека је $P \in \mathbb{E}^2\backslash\{O\}$ произвољна. С обзиром да је $OP \cdot OP' = r^2$, директно следи и да је $OP < r$ ако и само ако је $OP' > r$, односно да се инверзијом у односу на круг k тачке из његове унутрашњости сликају у тачке које припадају спољашњости круга k, и обрнуто, спољашњост се слика у унутрашњост.

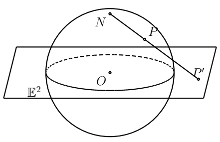
Ако је $OP = r$ тада је и $OP' = r$, односно $P = P'$ те је тачка P инваријантна за трансформацију ψ_k. Дакле важи следеће тврђење.

Тврђење

Једине инваријантне тачке инверзије у односу на круг k су тачке круга k.

Можемо еуклидској равни придружити једну, **бесконачно далеку**, тачку ∞, а добијени скуп можемо звати **проширеном еукллидском равни**. Тада, можемо дефинисати и да је $\psi_k(O) = \infty$, $\psi_k(\infty) = O$. Такође, уочимо да формула (2) има смисла $0 \cdot \infty = r^2$, у контексту граничних вредности. При том, проширена еуклидска раван је бијективно еквивалентна сфери.

Примедба(*Стереографска пројекција*) *Нека је дата јединична сфера еуклидског простора* $\mathcal{S} = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$. *Постоји узајамно једнозначна кореспонденција између тачака сфере* $\mathcal{S}^2$ *и тачака проширене еуклидске равни* $x_3 = 0$, *која се назива* **стереографском пројекцијом**.



Нека је $N(0,0,1)$ "северни пол" сфере. Ако је $P \in \mathcal{S}^2$, $P \neq N$, тада права PN сече раван у коначној тачки P' и тада дефинишемо да је $\pi(P) = P'$. Посебно, тачки $P = N$ придружујемо бесконачно далеку тачку проширене еуклидске равни.

Ако је $\pi : \mathcal{S}^2 \to \mathbb{E}^2 \cup \{\infty\}$ стереографска пројекција, а (x_1, x_2, x_3) координате тачке P сфере, тада су координате тачке P' дате са

$$\pi(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3}\right), & x_3 \neq 1 \\ \infty, & x_3 = 1. \end{cases}$$

Инверзно пресликавање је дато са

$$\pi^{-1}(x_1, x_2) = \left(\frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \frac{x_1^2 + x_2^2 - 1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}\right),$$
$$\pi^{-1}(\infty) = (0, 0, 1).$$

Произвољни круг k сфере $\mathcal{S}^2$ је пресек те сфере и неке равни $\alpha : ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$. Нађимо његову слику у стереографској пројекцији. Ако су $(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$ координате еуклидске равни, тада тачка припада слици круга k ако и само ако је $\pi^{-1}(\overline{x}_1, \overline{x}_2) \in \alpha$ односно ако и само ако је

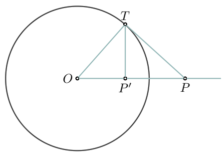
$$a\frac{2\overline{x}_1}{\overline{x}_1^2 + \overline{x}_2^2 + 1} + b\frac{2\overline{x}_2}{\overline{x}_1^2 + \overline{x}_2^2 + 1} + c\frac{\overline{x}_1^2 + \overline{x}_2^2 - 1}{\overline{x}_1^2 + \overline{x}_2^2 + 1} + d = 0.$$

Еквивалентно је

$$(c + d)(\overline{x}_1^2 + \overline{x}_2^2) + 2a\overline{x}_1 + 2b\overline{x}_2 + (d - c) = 0,$$

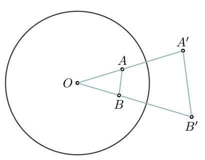
па је у питању круг, за $c + d \neq 0$ или права за $c + d = 0$. Услов $c + d = 0$ је еквивалентан услову $N \in \alpha$, па видимо да се у праве (проширене тачком ∞) сликају кругови који садрже тачку N.

У проширеној еуклидској равни, сада и праву можемо сматрати кругом који при том садржи бесконачно далеку тачку, а праве и кругове заједно називати **уопштеним круговима**.
Нагласимо да се може показати и да стереографска пројекција "чува углове". Ако се неке две криве на сфери секу под углом ϕ, тада се и њихове слике у еуклидској равни секу под истим углом.



Пронађимо слику тачке $P \in \mathbb{E}^2 \backslash \{O\}$. Претпоставимо да P припада спољашњости круга k. Нека је T додирна тачка једне тангенте из P на k и P' подножје нормале из T на OP.

Уочимо да су троуглови $OP'T$ и OTP слични. Зато је $OP \cdot OP' = OT^2 = r^2$, односно $P' = \psi_k(P)$. Како је $\psi_k(P') = P$ јасно је и како конструишемо слику у инверзији тачке која припада унутрашњости круга k.



Ако је OAB троугао и $\psi_k(A) = A'$, $\psi_k(B) = B'$, тада из $OA'/OB' = OB/OA$ закључујемо и да су троуглови OAB и $OB'A'$ слични. Зато је

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OB'}{OA} = \frac{r^2}{OB \cdot OA}.$$

Дефиниција

Нека су A, B, C, D четири произвољне разне тачке (не нужно колинеарне или концикличне). Тада број $\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}$ називамо **дворазмером** те четири тачке и означавамо $[A, B; C, D]$.

Уколико су тачке колинеарне очигледно важи
$|(A, B; C, D)| = [A, B; C, D]$.

Нека су A', B', C', D' слике тачака A, B, C, D у инверзији ψ_k.
Тада је

$$[A', B'; C', D'] = \frac{A'C'}{C'B'} : \frac{A'D'}{D'B'} = \frac{\frac{r^2 AC}{OC \cdot OA}}{\frac{r^2 CB}{OB \cdot OC}} : \frac{\frac{r^2 AD}{OD \cdot OA}}{\frac{r^2 DB}{OB \cdot OD}} = [A, B; C, D].$$

Дефиницију дворазмере можемо проширити, коришћењем граничних вредности, и за тачке O и ∞ у проширеној еуклидској равни, а претходна једнакост важи и у том случају.

Дакле, важи следеће тврђење.

Тврђење

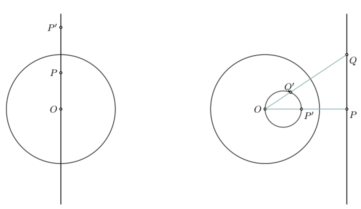
Инверзија у односу на круг "чува" дворазмеру.

Следе тврђења која показују да се праве и кругови, односно уопштени кругови проширене еуклидске равни, сликају у уопштене кругове.

Теорема

Нека је p права равни $\mathbb{E}^2$. Тада важи:
а) Ако $O \in p$ онда $\psi_k(p \backslash \{O\}) = p \backslash \{O\}$.
б) Ако O не припада правој p тада постоји круг равни l који садржи тачку O, такав да је $\psi_k(p) = l \backslash \{O\}$.

Доказ.



а) Нека је $P \in p$. Тада су тачке P, O, P' колинеарне, па све припадају правој p, па је и $P' \in p$. С обзиром да је ψ_k инволуција важи и скуповна једнакост $\psi_k(p \backslash \{O\}) = p \backslash \{O\}$.

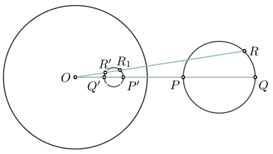
б) Нека је P подножје нормале из O на p и $\psi_k(P) = P'$. Нека је l круг са пречником OP'. Нека је $Q \in p$, $Q \neq P$ произвољна тачка. Тада, с обзиром да су троуглови OPQ и $OQ'P'$ слични, следи и да је $\angle OQ'P' = \angle OPQ$ прав. Зато тачка Q' припада кругу са пречником OP, односно l.

Обрнуто, ако је $Q' \in l \backslash \{O\}$, тачка Q' се инверзијом ψ_k слика у тачку Q полуправе OQ' за коју важи и да је $\angle OPQ = \angle OQ'P'$ те Q припада и правој ортогоналној у P на OP', односно правој p. Зато важи скуповна једнакост $\psi_k(p) = l \backslash \{O\}$. □

Теорема

Нека је l круг еуклидске равни. Тада важи:
а) Ако је $O \in l$, онда је $\psi_k(l \backslash \{O\})$ нека права p те равни која, при том не садржи тачку O.
б) Ако l не садржи тачку O тада је $\psi_k(l) = l'$ такође круг који не садржи тачку O. При том, постоји и хомотетија са центром у O којом се l слика у l'.

Доказ.
а) С обзиром да је ψ_k инволуција, тврђење директно следи из Теореме 1 под б).



б) Нека је S центар круга l и A и B тачке у којима права OS сече l. Нека је $R \in l$ произвољна. Права OR сече круг l још у тачки R_1. Посебно, ако је OR тангента на l, тада је $R = R_1$. Нека је $\psi_k(R) = R'$.

При том, због потенције тачке O у односу на круг l следи да је $OR \cdot OR_1 = OA \cdot OB$. Како је и $OR \cdot OR' = r^2$, следи да је и $\frac{OR'}{OR_1} = \frac{r^2}{OA \cdot OB} = const$. Зато тачка R' припада кругу l', слици круга l у хомотетији са центром у тачки O и коефицијентом $\frac{r^2}{OA \cdot OB}$. Како је ψ_k инволуција следи и да важи скуповна једнакост $\psi_k(l) = l'$. □

Тврђење

Композиција две инверзије са истим центром је хомотетија.

Доказ. Нека су $k_1(O, r_1)$ и $k_2(O, r_2)$ концентрични кругови и P произвољна тачка. Ако је $\psi_{k_1}(P) = P_1$ и $\psi_{k_2}(P_1) = P'$ тада је $OP \cdot OP_1 = r_1^2$ и $OP_1 \cdot OP' = r_2^2$ па је

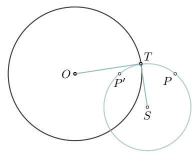
$$\frac{OP'}{OP} = \frac{r_2^2}{r_1^2}.$$

Зато је $P' = H_{O, \frac{r_2^2}{r_1^2}}(P)$, па је $H_{O, \frac{r_2^2}{r_1^2}} = \psi_{k_2} \circ \psi_{k_1}$. □

Тврђење

Нека тачка P не припада кругу k и нека је $P' = \psi_k(P)$. Ако круг l садржи тачке P и P' онда су кругови k и l ортогонални.

Доказ.



Нека је $k(O, r)$. Потенција тачке O у односу на круг l је $OP \cdot OP' = OT^2$, где је T додирна тачка тангенте из O на l. Зато је $r = OT$, па тачка T уједно припада и кругу k. Тада се тангенте на k и l у T секу под правим углом па су кругови ортогонални. □

Следећа тврђења наводимо без доказа.

Тврђење

Нека су k и l два круга еуклидске равни. Тада је $\psi_k(l) = l$ ако и само ако су кругови k и l ортогонални или $k = l$.

Тврђење

Нека су A, B, P, Q четири разне колинеарне тачке и k круг са пречником PQ. Тада важи $\psi_k(A) = B$ ако и само ако је $H(A, B, P, Q)$.

Теорема

Нека су l_1 и l_2 уопштени кругови еуклидске равни. Њихове слике l_1' и l_2' у инверзији ψ_k се секу под истим углом као l_1 и l_2 али супротне оријентације.

Сада се лако може се показати и да инверзија "чува углове" и између произвољних кривих које се секу, али мења оријентацију.

Уочимо такође да су и рефлексија у односу на праву и инверзија у односу на круг бијективна пресликавања, инволуције, које сликају једну од области равни коју граниче у другу.

Њихове инваријантне тачке су тачке основе рефлексије/инверзије. Ако се тачка P слика у P' тада је права PP' ортогонална на основицу трансформације.

Ако PP' сече ту основицу у тачкама P_1 и P_2 у случају инверзије важи да је $H(P, P', P_1, P_2)$. У случају рефлексије, поред једне коначне тачке P_1 две праве обе садрже и бесконачно далеку тачку ∞, па је $P_2 = \infty$. Тада и у случају рефлексије важи да је $H(P, P', P_1, P_2)$.

Зато у проширеној еуклидској равни, где су и праве уопштени кругови, можемо сматрати да је рефлексија у односу на праву, заправо, инверзија у односу на уопштени круг.