11. Конике у пројективној равни

Сетимо се да је једначина криве другог реда у еуклидској равни, у афиним координатама, дата са

$$a_{11}\overline{x}_1^2 + 2a_{12}\overline{x}_1\overline{x}_2 + a_{22}\overline{x}_2^2 + 2a_{13}\overline{x}_1 + 2a_{23}\overline{x}_2 + a_{33} = 0.$$

С обзиром да је $\overline{x}_1 = \frac{x_1}{x_3}, \overline{x}_2 = \frac{x_2}{x_3}$, где су $(x_1 : x_2 : x_3)$ одговарајуће пројективне координате, претходна једначина у пројективним координатама има следећи облик

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0,$$

односно $\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j = 0$. Матрично једначину криве другог реда у пројективним координатама записујемо $X^tAX = 0$, где је A симетрична матрица.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Све пропорционалне, не-нула матрице задају исту криву. При том, уочимо да нам је неопходно, у општем случају пет разних тачака да би крива била одређена на јединствен начин.
Нека је $X = QX'$ промена хомогених координата (или пројективно пресликавање). Тада директно добијамо да у новим координатама крива другог реда има једначину $X'^tQ^tAQX' = 0$, односно да је матрица криве дата са Q^tAQ.
С обзиром да је матрица A симетрична, она је дијагонализабилна, односно, постоји ортогонална матрица Q таква да је $Q^tAQ = D[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]$. Уколико је $\lambda_1 \neq 0$ тада променом координата $x_1' = \sqrt{|\lambda_1|}x_1, x_2' = x_2, x_3' = x_3$, добијамо да је нова матрица криве је облика $D[\pm 1, \lambda_2, \lambda_3]$.

Сличним поступком долазимо до закључка да постоји промена координата (или пројективно пресликавање), такво да је у новим координатама матрица криве облика $A_1 = D[1,0,0]$, $A_2 = D[1,1,0], A_3 = D[1,-1,0], A_4 = D[1,1,1], A_5 = D[1,1,-1]$.

1. Ако је матрица криве A_1, онда је једначина криве $x_1^2 = 0$, па је крива заправо права $x_1 = 0$.
2. Матрицама A_2 и A_3 одговарају криве са једначинама $x_1^2 + x_2^2 = 0$ и $x_1^2 - x_2^2 = 0$, те су у питању, редом тачка $(0:0:1)$ и унија две праве $x_1 + x_2 = 0$ и $x_1 - x_2 = 0$.
3. Ако је крива дата матрицом A_4 има једначину $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, чија су решења $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, али с обзиром да не постоји тачка чије су све хомогене координате нула, у питању је празан скуп.
4. Матрици A_5 одговара једначина $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$, односно у афиним координатама $\overline{x}_1^2 + \overline{x}_2^2 = 1$, те је у питању јединични круг.

У прва четири случаја смо добили дегенерисане криве другог реда. С обзиром да пројективне трансформације сликају праве у праве, тачке у тачке, закључујемо да пети случај одговара свим недегенерисаним коникама. Дакле важи следећа теорема.

Теорема

Све недегенерисане конике пројективне равни пројективно су еквивалентне јединичном кругу.

Директна последица је и да су сваке две недегенерисане конике међусобно еквивалентне.

Пол и полара. Нека је $\Gamma : \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j = 0$ недегенерисана коника.

Дефиниција

Две тачке A и B су хармонијски спрегнуте (хармонијски конјуговане) у односу на Γ ако важи $H(A,B,C,D)$, за неке две тачке $C, D \in \Gamma$.

Тада тачке C и D припадају правој AB и важи

$$\overrightarrow{C} = \overrightarrow{A} + \lambda_1 \overrightarrow{B}, \quad \overrightarrow{D} = \overrightarrow{A} + \lambda_2 \overrightarrow{B},$$

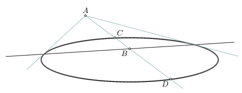
где је $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Можемо у овој дефиницији допустити и да се тачке C и D поклапају, тада је $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, те писати и да је $H(A,B,A,A)$. При том, тада права AB има са кривом једну заједничку тачку те је AB тангента на Γ у тачки A. Тада такође сматрамо да је тачка B спрегнута са A.

Такође, права AB не мора да има заједничких (реалних) тачака са Γ. Тада формално постоје $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, односно права AB сече Γ у имагинарним тачкама. Ако је $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ и тада ћемо сматрати да су A и B спрегнуте у односу на Γ. Приметимо да, с обзиром да пројективне трансформације сликају спрегнуте тачке у спрегнуте тачке, директно следи да је и однос пол-полара у односу на криву инваријантан при пројективним трансформацијама.

Нека су $(\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3)$ и $(\beta_1 : \beta_2 : \beta_3)$ хомогене координате тачака A и B.
Тачке C и D припадају Γ ако и само ако је

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}(\alpha_i + \lambda\beta_i)(\alpha_j + \lambda\beta_j) = 0,$$

где је $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$.



Услов $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ еквивалентан је, на основу Вијетових формула, томе да је коефицијент у претходној квадратној једначини λ једнак нули, односно $\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}\alpha_i\beta_j = 0$. Сад видимо да је скуп тачака равни спрегнутих са A у односу на Γ дат једначином $\sum_{i,j=1}^{3} \alpha_i x_j = 0$, и представља праву.

Дефиниција

Праву a која је скуп свих тачака хармонијски спрегнутих са A у односу на криву Γ називамо **поларом** те тачке у односу на криву. Тачка A је **пол** праве a.

Ако је A матрица криве, видимо да се хомогене координате поларе добијају као

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

С обзиром да је релација хармонијске спрегнутости у односу на тачке C и D симетрична по A и B, директно следи наредно тврђење.

Тврђење

Нека су редом, A и a, односно B и b парови пол-полара у односу на дату криву Γ. Тада важи да тачка A припада правој b ако и само ако тачка B припада правој a.

Тврђење

Нека су P и p пол и полара у односу на криву Γ. Тада важи да тачка P припада правој p ако и само ако припада кривој Γ.

Доказ. Нека је крива дата једначином $X^t AX = 0$. Означимо са P колону координата исте тачке, а са $u^t = [u_1 : u_2 : u_3]$ координате поларе p. Тада је $AP = u$.
Тачка P припада полари ако и само ако је $u^t P = 0$ што је еквивалентно са $P^t AP = 0$ односно томе да тачка P припада кривој Γ. $\square$

Елипса, парабола и хипербола у пројективној равни.
Посматрајмо елипсу дату у канонском облику $\frac{\overline{x}_1^2}{a^2} + \frac{\overline{x}_2^2}{b^2} = 1$.
Одговарајућа пројективна једначина је $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - x_3^2 = 0$, а матрица криве је

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \text{ те је } A^{-1} = \begin{bmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Зато је пол бесконачно далеке праве $x_3 = 0$ тачка $(0:0:1)$, односно центар елипсе. Уочимо да елипса и права $x_3 = 0$ немају заједничких тачака.

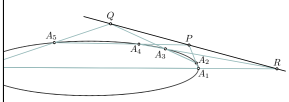
Нека је дата хипербола у канонском облику $\frac{\overline{x}_1^2}{a^2} - \frac{\overline{x}_2^2}{b^2} = 1$. Слично као у случају елипсе, матрица криве је

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

па је пол бесконачно далеке праве $x_3 = 0$ тачка $(0:0:1)$, односно центар хиперболе. Хипербола и бесконачно далека права $x_3 = 0$ имају две заједничке тачке $(a:b:0)$ и $(a:-b:0)$. Оне су бесконачно далеке тачке правих $\frac{x_1}{a} - \frac{x_2}{b} = 0$ и $\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} = 0$, односно асимптота хиперболе. Асимптоте хиперболе су тангенте на ту криву из центра хиперболе, а додирују криву (у пројективном смислу) у бесконачно далеким тачкама.

Нека је дата парабола у канонском облику $\overline{x}_2^2 = 2p\overline{x}_1$, односно, $x_2^2 = 2px_1x_3$. Бесконачно далека права има једну заједничку тачку са параболом $(1:0:0)$, то је бесконачно далека тачка осе параболе. Како је права $x_3 = 0$ тангента на параболу у датој тачки, тачка $(1:0:0)$ је пол бесконачно далеке праве, те је у аналогији са претходним примерима можемо сматрати центром параболе.
Нагласимо да се свака друга елипса, парабола или хипербола пресликавају у дате афиним трансформацијама, у којима се бесконачно далека права слика у себе (тј. остаје бесконачно далека). Зато можемо рећи да је недегенерисана коника елипса, парабола или хипербола у зависности од тога да ли има две, једну или ниједну заједничку тачку са бесконачно далеком правом.

Наведимо, у наставку, две важне теореме везане за недегенерисане конике пројективне равни.



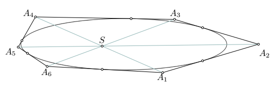
Теорема

(Паскалова) Нека су $A_1, \ldots, A_6$ тачке недегенерисане конике пројективне равни. Нека се парови правих A_1A_2 и A_4A_5, A_2A_3 и A_5A_6, A_3A_4 и A_6A_1 редом секу у тачкама P_1, P_2, P_3. Тада су тачке P_1, P_2 и P_3 колинеарне.

Теорема

(Обрнута Паскалова теорема) Нека су $A_1, \ldots, A_6$ тачке једне равни од којих су сваке три у општем положају. Нека се парови правих A_1A_2 и A_4A_5, A_2A_3 и A_5A_6, A_3A_4 и A_6A_1 редом секу у тачкама P_1, P_2, P_3. Ако су тачке P_1, P_2, P_3 колинеарне тада постоји недегенерисана коника која садржи тачке $A_1, \ldots, A_6$.

Ако се тачка A_2 конике, "приближава" тачки A_1, тада права A_1A_2 тежи положају тангенте у тачки A_1. Нагласимо да можемо у Паскаловој теореми посматрати и специјалне случајеве, када је уместо једног пара консеквентних тачака у низу дата тачка и тангента на криву у тој тачки.
Теорема дуална Паскаловој је Брианшонова.



Теорема

(Брианшонова) Нека су тачке $A_1, \ldots A_6$ такве да су сваке три од њих у општем положају и да недегенерисана коника додирује праве $A_1A_2, A_2A_3, \ldots A_6A_1$. Тада су праве A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6 конкурентне. Важи и обрнуто: ако за тачке $A_1, \ldots A_6$ важи да су A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6 конкурентне праве онда постоји коника која додирује праве $A_1A_2, A_2A_3, \ldots A_6A_1$.

Слично као и у случају Паскалове теореме можемо допустити специјалне случајеве, рецимо, ако допустимо да су тачке A_1, A_6, A_5 колинеарне, тада теорема важи за тачку A_6 која је додирна тачка тангенте A_1A_5 на криву.