10. Пројективне трансформације праве и равни

Пројективне трансформације праве.

Свака пројективна трансформација праве одређе на је са три произвољне тачке те праве и њиховим сликама.

Дакле трансформација која има бар три разне инваријантне тачке је идентитет. С обзиром да је матрица пресликавања квадратна, њене сопствене вредности могу бити конјуговано комплексне, једна реална двострука или две разне реалне сопствене вредности.

У првом случају не постоје одговарајући (реални) сопствени вектори те трансформација нема инваријантних тачака. Такву трансформацију називамо **елиптичком**.

Ако је сопствена вредност реална и двострука, а пресликавање није идентичко, сопствени потпростор за ту вредност је једнодимензион. Ако је $\overrightarrow{M}$ један од вектора који га разапиње, тачка M је инваријантна. Пројективна трансформација са тачно једном инваријантном тачком је **параболичка**.

Ако су сопствене вредности реалне и разне, одговарајући сопствени потпростори су једнодимензиони. Ако су разапети, редом, векторима $\overrightarrow{M}$ и $\overrightarrow{N}$, тада су одговарајуће тачке M и N инваријантне. Пројективна трансформација праве са тачно две инваријантне тачке назива се **хиперболичком**.

Пример *Посматрајмо транслацију праве* $\overline{x}' = \overline{x} + b, b \neq 0$. *У пројективним координатама можемо је записати као* $\frac{x_1'}{x_2'} = \frac{x_1}{x_2} + b$, *односно*

$$\lambda x_1' = x_1 + bx_2, \quad \lambda x_2' = x_2,$$

те је одређена матрицом

$$A = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Сопствене вредности су $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ *а сопствени вектор је колинеаран са* $(v_1, 0)$. *Зато ова трансформација има јединствену инваријантну тачку* $(v_1 : 0) = (1 : 0)$, *бесконачно далеку тачку. Дакле, пројективно гледано, транслација је параболичко пресликавање.*

Пример *Нека је дата хомотетија праве* $H_{S,a} : \overline{x'} = ax + (1-a)s, a \neq 1$, *где је* s *афина координата тачке* S. *Тада у пројективним координатама ово пресликавање има формуле*

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & (1-a)s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Матрица има две разне сопствене вредности $\lambda_1 = a, \lambda_2 = 1$. *За* $\lambda_1 = a$ *добијамо сопствене векторе* (sv_2, v_2), *па је одговарајућа инваријантна тачка* $(s : 1)$, *односно тачка* S. *За* $\lambda_2 = 1$ *су сопствени вектори облика* $(v_2, 0)$ *па је одговарајућа инваријантна тачка бесконачно далека* $(1 : 0)$.

Пројективне трансформације равни.
Сетимо се да је свака пројективна трансформација равни на јединствен начин одређена са произвољне четири тачке у општем положају и њиховим сликама.
Хиперравни дводимензионе равни су праве. Нека је права p дата једначином $u^t X = 0$ где су $[u_1 : u_2 : u_3]$ хомогене координате те праве. Нека је пројективна трансформација дата са $\lambda X' = AX$. Тада су координате слике тачке X сразмерне са $A^{-1}X'$ па се једначина праве своди на $u^t A^{-1} X' = 0$. Зато су хомогене координате слике праве p $u'^t = \mu u^t A^{-1}$ односно важи $\mu u = A^t u'$. Дакле, хомогене координате правих се приликом пројективне трансформације мењају по истом принципу као и хомогене координате тачака. Зато је права p инваријантна у једној трансформацији ако и само ако њене координате одређују вектор који је сопствени за матрицу A^t.

При том, сетимо се да су две матрице A и D сличне, онда су сличне и A^t и D^t. Посебно ће нам бити занимљив случај када је матрица D дијагонална.
Посматрајмо један посебан случај. Нека је матрица A слична дијагоналној матрици $D[\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2]$ са елементима на дијагонали $\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2$.
Сопствени потпростор V за λ_1 је дводимензион. Афина раван $O + V$ тада сече раван $\mathbb{R}^2$ по правој чије су све тачке инваријантне у овој трансформацији. Дакле, постоји права чије су све тачке инваријантне. Такву праву зовемо **осом** трансформације.
Уочимо да важи и обрнуто: ако трансформација има осу, постоји дводимензиони сопствени потпростор, те је матрица A слична дијагоналној матрици $D[\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2]$.

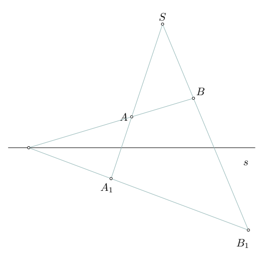
Тада је и матрица A^t слична $D[\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2]$, те постоји и дводимензиони сопствени потпростор за λ_1 матрице A^t. Ако су $[u_1, u_2, u_3]$ и $[v_1, v_2, v_3]$ два неколинеарна решења, сва решења су дата са $\alpha[u_1, u_2, u_3] + \beta[v_1, v_2, v_3], \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.
Дакле та решења одговарају прамену правих, односно постоји тачка кроз коју је свака права инваријантна. Таква тачка назива се **центром** пресликавања. Као и у случају тачака важи и обратно: ако пресликавање има центар, тада је матрица A^t слична некој дијагоналној $D[\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2]$.Показали смо да важи следећа теорема.

Теорема

Пројективно пресликавање равни има осу ако и само ако има центар.

Дефиниција

Пројективно пресликавање равни које има осу и центар назива се **хомологијом**. При том, ако центар припада оси онда је хомологија **параболичка**, а ако не припада оси онда је хомологија **хиперболичка.**



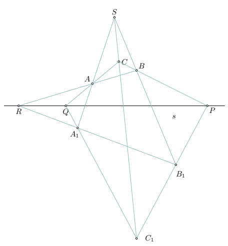
Приметимо и следеће. Ако се у хомологији са центром S и осом s, произвољна тачка A слика у A_1, тада су S, A, A_1 колинеарне тачке. Ако се права a слика у праву a_1, тада су праве a, a_1, s конкурентне. Такође, ако је нека права p инваријантна у пројективном ресликавању σ равни, не значи да је она оса. Да би била оса, неопходно је да бар три њене тачке буду инваријантне, тада је пресликавање $\sigma|_p$ идентичко пресликавање праве.

С обзиром на дуални карактер правих и тачака у равни, исто важи и за прамен правих кроз тачку. Ако је тачка P инваријантна, не значи да је она центар пресликавања. Да би тачка P била центар неопходно је да бар три праве које је садрже буду инваријантне, тада ће све праве које садрже P бити инваријантне.
Докажимо сада две важне теореме пројективне геометрије.

Теорема

(Дезаргова) Нека су A, B, C и A_1, B_1, C_1 две тројке неколинеарних тачака пројективног простора $\mathbb{R}P^3$, таквих да су праве AA_1, BB_1 и CC_1 конкурентне. Тада се праве BC и B_1C_1, AC и A_1C_1, AB и A_1B_1 секу у колинеарним тачкама P, Q и R, редом.

Доказ. Нека су A, B, C, A_1, B_1, C_1 тачке једне равни и нека се праве AA_1, BB_1, CC_1 секу у тачки S.



Четворке тачака S, A, B, C, као и S, A_1, B_1, C_1 су такве да су сваке три тачке у једној четворки у општем положају. Зато постоји јединствена пројективна трансформација равни σ којом се S, A, B, C сликају редом у S, A_1, B_1, C_1. Уочимо да су праве SA, SB, SC инваријантне. Зато је S центар, а σ хомологија.
При том, праве BC, CA, AB се редом сликају у B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 па одговарајуће пресечне тачке P, Q и R припадају оси пресликавања σ.
Нека тројке тачака A, B, C, A_1, B_1, C_1 припадају разним равнима π и π_1.

С обзиром да су праве AA_1 и BB_1 конкурентне, постоји раван која их садржи, па су уједно компланарне и праве AB и A_1B_1, те постоји њихов пресек R. При том $R \in \pi \cap \pi_1$. Слично, постоје тачке P, Q и такође припадају пресечној правој равни π и π_1, те су колинеарне. $\square$

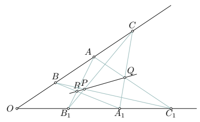
Слично се доказује и обрнута Дезаргова теорема.

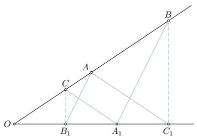
Теорема

Нека су A, B, C и A_1, B_1, C_1 две тројке неколинеарних тачака пројективног простора $\mathbb{R}P^3$, такве да се праве BC и B_1C_1, AC и A_1C_1, AB и A_1B_1 секу у колинеарним тачкама P, Q и R, редом. Тада су праве AA_1, BB_1, CC_1 конкурентне.

Теорема (Папус)

Нека су A, B, C и A_1, B_1, C_1 две тројке колинеарних тачака једне равни. Тада су тачке P, Q и R пресека парова правих B_1C и BC_1, C_1A и CA_1, A_1B и AB_1, редом, колинеарне тачке.





Доказ. С обзиром да пројективна пресликавања "чувају" колинеарност, можемо претпоставити да су тачке Q и R бесконачно далеке. Еуклидски, праве A_1B и AB_1, односно A_1C и AC_1 су паралелне.
Нека је тачка O пресек правих AB и A_1B_1 коначна. Тада је, на основу Талесове теореме $\frac{OC}{OA} = \frac{OA_1}{OC_1}$ и $\frac{OB}{OA} = \frac{OB_1}{OC_1}$. Зато важи и $\frac{OC}{OB} = \frac{OB_1}{OC_1}$, те су и B_1C и BC_1 паралелне. Пројективно, њихова пресечна тачка P је бесконачно далека, па су P, Q, R колинеарне.

Уколико је O бесконачна тачка, четвороуглови ACA_1C_1 и ABA_1B_1 су паралелограми, па се слично добија да је и $B_1C \| BC_1$. $\square$