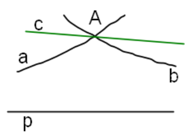
25. Хиперпаралелност



Нека су p и A права и тачка која јој не припада. Нека су a, b праве њихове равни паралелне p, т.д. $A \in a, b$, дисјунктне са p. Посматрајмо пар унакрсних углова које одређују a и b који не садрже p. Свака права c, $A \in c$, која им припада нема заједничких тачака са p. Зато важи:

Теорема (31.6)

У равни праве p и тачке A, $A \notin p$, постоји бесконачно много правих које садрже A и не секу p.

Дефиниција

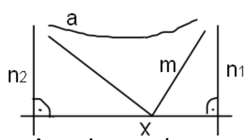
Две праве хиперболичке равни које се не секу, нити су паралелне су **хиперпаралелне**.

Ова релација је очигледно симетрична и НИЈЕ транзитивна.

Теорема (31.9)

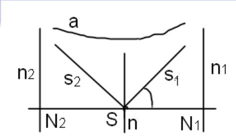
За две хиперпаралелне праве постоји тачно једна заједничка нормала.

Доказ. Нека су a и b хиперпаралелне.



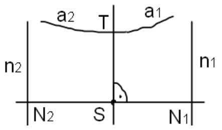
Прво, покажимо да постоје две праве n_1 и n_2 нормалне на b и паралелне правој a. Нека је $X \in b$ произвољна и m полуправа са теменом X паралелна a (у датом "смеру").

Ако је $m \perp b$ онда права која садржи m испуњава услов. Ако $\neg m \perp b$ онда m и b одређују два напоредна угла од којих је један оштар. Тада постоји права n_1 која је ортогонална на краку тог оштрог угла који припада b и паралелна m, а самим тим паралелна a у датом смеру. Слично, постоји n_2 нормална на b и паралелна a у другом "смеру".



Нека n_1 и n_2 секу b у N_1 и N_2 и нека је S средиште дужи N_1N_2. Нека је n права, $S \in n$, $n \perp b$. Нека су s_1 и s_2 полуправе са теменом S паралелне редом, n_1 и a, тј. n_2 и a.

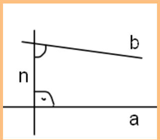
Угао између полуправих SN_1 и s_1 је оштар, као угао паралелности, па не садржи тачке праве n, а слично важи и за $\angle(SN_2, s_2)$ зато n има тачке у углу одређеном полуправама s_1 и s_2 коме припада и a, па n сече a у некој тачки T.



Важи $\mathcal{S}_n : n, T, b, N_1 \mapsto n, T, b, N_2$. Права n_1 кроз N_1 ортогонална на b слика се праву кроз N_2 ортогоналну на b, тј. у n_2, па и $\mathcal{S}_n(s_1) = s_2$. Нека су a_1 и a_2 полуправе праве a са теменом у T редом паралелне n_1 и s_1, односно n_2 и s_2.

Нека је $\mathcal{S}_n(a_1) = a_1'$. Тада је a_1' полуправа са теменом T паралелна n_2 и s_2, тј. $a_1' = a_2$. Зато $\mathcal{S}_n(a) = a$, па како је $a \neq n$ следи $a \perp n$. Ако би постојала још нека заједничка нормала n' праве a, b, n, n' би одређивале четвороугао са четири права угла, ($\lightning$). Зато је n јединствена заједничка нормала за a и b.

Примедба *Две праве које се секу очигледно немају заједничку нормалу.*



Слично, ако су a и b паралелне и n нормална на a и сече b, онда n сече b под оштрим углом (углом паралелности), па a и b немају заједничку нормалу.

Зато, две разне праве хиперболичке равни су хиперпаралелне акко имају заједничку нормалу.

Из доказа претходне теореме следи и да је пројекција праве a на праву b дуж N_1N_2, тј. важи

Теорема (31.10)

Ако су две праве хиперпаралелне нормална пројекција једне на другу је отворена дуж.

Примедба *Може се показати и да за произвољну тачку $L \in a$ и њену ортогоналну пројекцију L' на b важи $LL' \geq TS$ и $LL' \cong ST$ акко $L = T$.*

Дакле, разне две праве хиперболичке равни се или секу, или су паралелне или хиперпаралелне (тј. имају заједничку нормалу). Како две праве одређују тачно један прамен следи да у хиперболичкој равни постоје тачно три врсте праменова: конкурентни тј. елиптички, паралелни тј. параболички и ортогонални тј. хиперболички или прамен хиперпаралелних правих. Зато постоје и три врсте епицикала: кругови, еквидистанте и орицикли.

Нека су праве a и b паралелне. Композиција $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$ назива се **орицикличком ротацијом** или **паралелним померањем**.

Ако неформално сматрамо да се паралелне праве секу у бесконачно далекој тачки, добијамо мотивацију за први назив. Са друге стране, како су a и b дисјунктне, имамо мотивацију за други назив.

Сада директно следи

Теорема

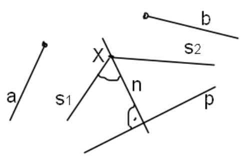
Директне изометрије хиперболичке равни су коинциденција, ротације, транслације и орициклички ротације.
Индиректне изометрије хиперболичке равни су осне и клизајуће рефлексије.

Два разна прамена.

Теорема (32.1)

Два разна параболичка прамена имају тачно једну заједничку праву.

Доказ. Два разне праве одређују тачно један прамен, па два разна прамена не могу имати више од једна заједничке праве.



Нека су праве два прамена паралелне редом полуправама a и b. Нека је X произвољна тачка и s_1 и s_2 полуправе са теменом X паралелне редом a и b. Ако су s_1 и s_2 комплементне, онда оне припадају правој која је паралелна и a и b.

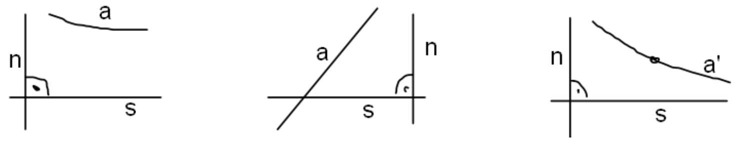
Ако s_1 и s_2 нису комплементне онда оне одређују један конвексан угао. Нека је n његова симетрала. Тада је $\angle(s_1, n)$ оштар. Нека је p права ортогонална на краку тог оштрог угла који припада n и паралелна s_1. С обзиром да $\mathcal{S}_n : n, s_1, p \mapsto n, s_2, p$ следи да је p паралелна и s_2 тј. p припада и једном и другом прамену. □

Када два разна прамена хиперболичке равни имају заједничку праву?

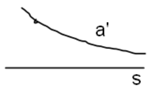
С обзиром да постоји права кроз дату тачку која припада задатом прамену, ако је један од праменова конкурентни, у том случају одговор је позитиван.

Ако су оба прамена параболички, одговор је позитиван (T32.1).

Ако су у питању два хиперболичка прамена $\mathcal{X}_a$ и $\mathcal{X}_b$ они имају заједничку праву p акко и само ако су праве a и b хиперпаралелне (јер p треба да буде њихова заједничка нормала).
Дакле, треба још да се размотри случај када је један прамен хиперболички $\mathcal{X}_s$, а други $\mathcal{X}$ параболички прамен који садржи праве паралелне полуправој a' праве a.



Раније смо показали да постоји права нормална на s а паралелна a у задатом смеру у случајевима када су a и s хиперпаралелне, кад се секу (спец. за $a \perp s$ је $n = s$) или кад је s паралелна полуправој комплементној a'.



У преосталом случају, кад је s паралелна a' или садржи a', не постоји права ортогонална на s и паралелна s, па је тада одговор негативан.