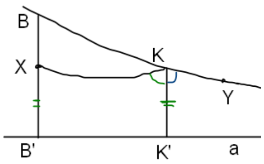
24. Паралелност у хиперболичкој равни

Теорема (31.1)

Нека је B теме полуправе паралелне правој a, K произвољна тачка те полуправе, а B' и K' подножја нормала из B и K на a. Тада је $KK' < BB'$.

Доказ.



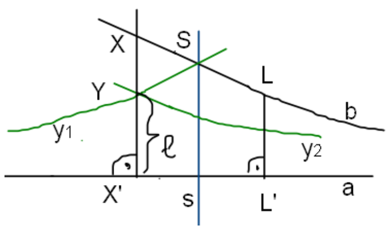
Нека је Y т.д. $\mathcal{B}(B, K, Y)$. Тада је $\angle K'KY$ угао паралелности за KK' па је у питању оштар угао. Зато је $\angle K'KB$ туп. Нека је X тачка полуправе $B'B$ т.д. је $B'X \cong K'K$.

Тада је $B'K'KX$ Сакеријев четвороугао и $\angle K'KX$ је угао на противосновици, па је оштар. Зато је $\angle K'KX < \angle K'KB$, па је и $\angle K'KX \subset \angle K'KB$, тј. полуправа KX припада $\angle K'KB$, па је и $\mathcal{B}(B', X, B)$. Зато $KK' \cong XB' < BB'$. □

Теорема (31.2)

Нека су a и b две паралелне праве и l произвољна дуж. Тада на правој b постоји јединствена тачка L, т.д. је $LL' \cong l$, где је L' подножје нормале из L на a.

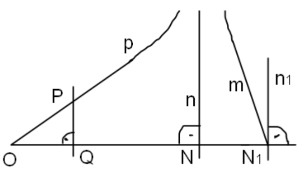
Доказ.



Због претходне теореме не могу постојати две такве тачке. Треба доказати постојање такве тачке.
Нека је $X \in b$ произвољна и X' подножје нормале из X на a.
Нека је Y тачка полуправе $X'X$ т.д. је $X'Y \cong l$. Ако је $X = Y$ онда је $X = L$.

Нека је $Y \neq X$. Покажимо тврђење за $\mathcal{B}(X, Y, X')$, слично се показује и у преосталом случају. Нека су y_1, y_2 праве кроз Y паралелне a, т.д. y_2 паралелна и правој b. Тада y_1 има тачке у углу $\angle(YX, y_2)$, а како је $y_2 \| b$, следи да y_1 сече b у некој тачки S. Нека је s права $S \in s$, $s \perp a$. Тада $\mathcal{S}_s : s, a, S, y_1 \mapsto s, a, S, y_1'$. Како $S \in y_1, y_1 \| a$ следи $S = \mathcal{S}_s(S) \in y_1', y_1' \| a$. Зато је $y_1' = b$. Нека је $L = \mathcal{S}_s(Y)$ и L' подножје нормале из L на a. Тада је и $\mathcal{S}_s(X') = L'$, па је $LL' \cong l$. □

Из претходне две теореме видимо да се растојање тачака праве b од праве а смањује како "се крећемо у смеру њихове паралелности", и то неограничено (за произвољно "малу" дуж l постоји тачка која је за $L(l)$ удаљена од а). Растојање два скупа је инфимум растојања њихових тачака. Зато можемо сматрати да је растојање између две паралелне праве у хиперболичкој равни 0. Можемо, неформално сматрати да се праве једног паралелног прамена секу у једној бесконачно далекој тачки.



Нека је $\angle pOq$ произвољан оштар угао. У хиперболичкој равни постоје праве нормалне на крак q које не секу крак p. Помоћу Дедекиндове теореме може се показати да међу свим нормалама на q постоји нормала n која не сече p, т.д. све нормале са једне стране n секу p, а са друге стране n не секу p. При том, права n је паралелна p, док за остале нормале на q то не важи. Зато важи:

Теорема (31.1)

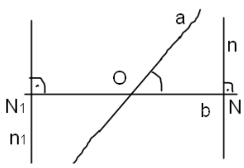
У хиперболичкој равни постоји јединствена права нормална на један крак, а паралелна другом краку оштрог угла. **БД**

Скуп свих подножја нормала из тачака лика Φ на праву или раван је **нормална пројекција** Φ на ту праву или раван.

Теорема (31.4)

Ако се праве a и b секу, нормална пројекција a на b је или тачка или отворена дуж.

Доказ. Ако је $a \perp b$ онда је пројекција a на b тачка.

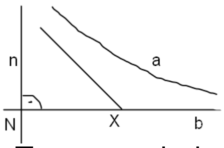


Нека сада $\neg a \perp b$. Тада a и b одређују пар унакрсних оштрих углова. Нека је $\angle BOA$ један од њих $A \in a$, $B \in b$. Нека је n права нормална на краку OB паралелна краку OA и $OB \cap n = \{N\}$. Тада су све тачке отворене дужи (ON) пројекције тачка полуправе OA. Важи $\mathcal{S}_O : a, b, O, N, n \mapsto a, b, O, N_1, n_1$. С обзиром да изометрије "чувају" пресеке, углове и паралелност, n_1 и b су нормале у N_1 и n_1 је паралелно a. Зато је (NN_1) пројекција a на b, а тачка O је њено средиште. □

Теорема (31.5)

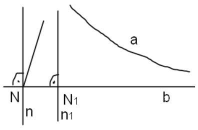
Нека су a и b паралелне праве. Тада је пројекција a на b отворена полуправа.

Доказ. Покажимо да постоји права n нормална на b и паралелна правој a.



Нека је $X \in b$ произвољна и x полуправа са теменом x паралена правој a, која не припада b. Ако је $x \perp b$ онда n садржи x. Ако $\neg x \perp b$, онда x и b одређују два напоредна угла од којих је један оштар.

Тада постоји јединствена права n ортогонална на крак тог оштрог угла који припада b и паралелна x. Тада је и $n \| a$.



Тада тачке праве b које се не налазе са исте стране праве n са које је права a очигледно нису пројекције тачака са a, као ни тачка N.

Нека је $N_1 \in b$, са исте стране n са које је и a. Претпоставимо да она није пројекција тачке са a, тј. да права n_1, $N_1 \in n_1$, $n_1 \perp b$ не сече a. Како је угао паралелности оштар, n и n_1 нису паралелне. Постоји полуправа m са теменом N паралелна n_1, која је са исте стране b као и a. Тада m не сече a, па по дефиницији n није паралелна a, ($\lightning$). Значи, пројекција a на b је отворена полуправа са теменом N и то она која је паралелна правој a. $\square$