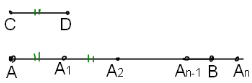
19. Аксиоме непрекидности

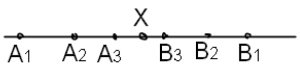
Четврта група аксиома садржи две аксиоме, на којима се заснива геометријска теорија непрекидности.

IV1 (Архимед-Еудоксова аксиома) Нека су AB и CD две дужи. На полуправој AB постоји коначан низ тачака $A_1, \dots, A_n$ т.д. важи $\mathcal{B}(A, A_1, \dots, A_n)$, $\mathcal{B}(A, B, A_n)$ и
$AA_1 \cong A_1A_2 \cong \dots \cong A_{n-1}A_n \cong CD$.



Дакле, постоји $n \in \mathbb{N}$ т.д. је $n \cdot CD > AB$.

IV2 (Канторова аксиома) Ако је $[A_1B_1], [A_2B_2], \dots, [A_nB_n], \dots$ низ затворених дужи једне праве т.д. за свако n важи $[A_{n+1}B_{n+1}] \subset [A_nB_n]$, онда постоји бар једна тачка X таква да $X \in [A_nB_n]$, за свако n.

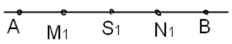


Теорема (21.5)

(Дедекиндова теорема) Нека су све тачке неке праве p (полуправе, дужи) подељене у два скупа $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ тако да важи:
1. свака тачка из p припада тачно једном од скупова $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$,
2. скупови $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ су непразни,
3. Између две тачке једног скупа нема тачка другог скупа.

Тада постоји јединствена тачка $X \in p$ таква да су све тачке из $\mathcal{M} \setminus \{X\}$ са једне, а из $\mathcal{N} \setminus \{X\}$ са друге стране тачке X.

Доказ. Нека су $M_1 \in \mathcal{M}$ и $N_1 \in \mathcal{N}$ произвољне.



Нека је A таква да је $\mathcal{B}(A, M_1, N_1)$. Ако би $A \in \mathcal{N}$ онда би између две тачке A и N_1 скупа $\mathcal{N}$ постојала тачка скупа $\mathcal{M}$ што није могуће. Зато $A \in \mathcal{M}$. Слично, ако је $\mathcal{B}(M_1, N_1, B)$ онда је $B \in \mathcal{N}$.
Нека је S_1 средиште дужи M_1N_1. Тачка S_1 припада једном од ова два скупа. Нпр. нека $S_1 \in \mathcal{M}$.

Означимо тада $M_2 = S_1$, $N_2 = N_1$. Уочимо да све тачке између M_1 и M_2 припадају скупу $\mathcal{M}$.

Наставимо овај поступак: нека је S_n средиште дужи M_nN_n. Ако $S_n \in \mathcal{M}$ онда $M_{n+1} = S_n, N_{n+1} = N_n$, а у супротном $M_{n+1} = M_n$ и $N_{n+1} = S_n$. Све тачке између M_n и M_{n+1} припадају скупу $\mathcal{M}$, а све тачке између N_n и N_{n+1} припадају $\mathcal{N}$ (ако нпр. $N_n = N_{n+1}$ онда то важи тривијално).

На овај начин добијамо бесконачан низ затворених дужи $[M_1N_1]$, $[M_2N_2]$,..., $[M_nN_n]$, ... где је свака дуж садржана у претходној. Зато, на основу $IV2$ постоји бар једна тачка X која им свима припада. При том су све тачке $M_i \neq X$ са једне, а $N_i \neq X$ са друге стране X.

Претпоставимо да постоји тачка $X_1 \neq X$ која припада свим дужима $[M_nN_n]$. Уочимо да је

$$M_1N_1 = M_2N_2 + M_2N_2 = 2M_2N_2$$
$$= \ldots = 2^{n-1}M_nN_n > 2^{n-1}XX_1.$$

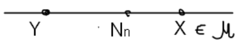
Значи, тада би за произвољно n збир 2^{n-1} дужи подударних XX_1 био мањи од M_1N_1 што је у контрадикцији са $IV1$. Дакле, X је јединствена тачка која припада свим овим дужима.

Нека нпр. $X \in \mathcal{M}$. Тада су по поставци све тачке полуправе са теменом X која садржи M_i из скупа $\mathcal{M}$.

Нека је Y тачка комплементне полуправе. Треба показати да $Y \in \mathcal{N}$. За произвољно i важи $N_iX < N_iM_i$. Постоји n т.д. је $M_1N_1 < 2^{n-1}XY$. Тада

$$2^{n-1}N_nX < 2^{n-1}M_nN_n = M_1N_1 < 2^{n-1}XY,$$

па је $N_nX < XY$ и $N_n \in (XY)$. Ако би $Y \in \mathcal{M}$ онда би између две тачке Y и X скупа $\mathcal{M}$ постојала тачка другог скупа ($\lightning$).



Зато $Y \in \mathcal{N}$. $\square$

Кажемо да X **раздваја** скупове $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$.

Уз претпоставку да важе прве три групе аксиома може се показати да су аксиоме $IV1$ и $IV2$ еквивалентне Дедекиндовом тврђењу.

Једна од најважнијих последица аксиома непрекидности је могућност да се уведе *мера дужи.*

Дефиниција

Функција $L : D \to R^+$, где је D скуп свих дужи, је **мера дужи** ако за њу важи:
1. постоји $d \in D$, $L(d) = 1$,
2. ако је $d_1 \cong d_2$ онда је $L(d_1) = L(d_2)$,
3. ако за $d_1, d_2, d_3 \in D$ важи $d_1 + d_2 = d_3$ онда је и $L(d_1) + L(d_2) = L(d_3)$.

Дуж d, за коју је $L(d) = 1$, је јединична дуж.

Лако се може показати за меру дужи L:

1. $a < b \Leftrightarrow L(a) < L(b)$,
2. $a \cong b \Leftrightarrow L(a) = L(b)$.

Теорема (22.2)

Нека је L мера дужи. Тада је функција L' такође мера дужи акко постоји позитиван реалан број λ т.д. $L' = \lambda L$. **БД**

Теорема (22.3)

Ако је d произвољна дуж, онда постоји јединствена мера L т.д. $L(d) = 1$. **БД**

Теорема (22.4)

Ако је L дата мера и α позитиван реалан број, онда постоји дуж d т.д. је $L(d) = \alpha$. **БД**

Нека је L мера дужи. Пресликавање ρ из скупа парова тачака у R_0^+, дато са

$$\begin{aligned} \rho(A, A) &= 0, \\ \rho(A, B) &= L(AB) \end{aligned}$$

је функција **растојања** или **метрика**. Она чини апсолутни простор метричким простором.

На сличан начин, можемо увести функцију **мере угла** која угловима додељује позитивне бројеве, т.д. подударни углови имају исту меру и која је усаглашена са сабирањем углова.

Све мере углова су међусобно сразмерне, а ми ћемо надаље користити ону која правом углу додељује вредност $\frac{\pi}{2}$.

Сличност. Друга важна последица аксиома непрекидности је могућност увођења појма сличности.

Дефиниција

Пресликавање $\mathcal{P}$ праве, равни или простора на себе је **сличност** са коефицијентом k, $k > 0$ ако за произвољне две тачке A, B важи $\rho(\mathcal{P}(A), \mathcal{P}(B)) = k\rho(A, B)$.

Уочимо да су изометрије сличности са коефицијентом $k = 1$.

Дефиниција

Ако постоји сличност $\mathcal{P}$ таква да је $\mathcal{P}(\Phi) = \Phi'$ онда су ликови Φ и Φ' слични и пишемо $\Phi \sim \Phi'$.

Свака сличност је бијекција. У аналогији са изометријама, може се показати да за сличности $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$, са истим доменом, важи да су $\mathcal{P}_1^{-1}$ и $\mathcal{P}_1 \circ \mathcal{P}_2$ сличности.

Зато је скуп свих сличности са истим доменом група у односу на композицију трансформација, а релација $\sim$ је релација еквиваленције.

Теорема (22.11-14)

Нека је $\mathcal{P}$ сличност. Тада важи:
1. $\mathcal{B}(A, B, C) \Rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{P}(A), \mathcal{P}(B), \mathcal{P}(C))$,
2. $(A, B) \cong (C, D) \Rightarrow (\mathcal{P}(A), \mathcal{P}(B)) \cong (\mathcal{P}(C), \mathcal{P}(D))$,
3. за произвољни угао α важи $\mathcal{P}(\alpha) \cong \alpha$. **БД**

Примедба *Дакле, $\mathcal{P}$ "чува" колинеарност, па слика праве у праве, равни у равни,... Такође, сличност "чува" углове.*