14. Подударност троуглова и четвороуглова

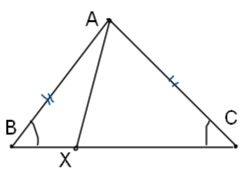
Два троугла су подударна ако постоји изомтерија која слика један у други. Доказаћемо сада ставове подударности троуглова.

Теорема (11.15)

Два троугла ABC и $A'B'C'$ су подударна акко:
1. (СУС) $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$, $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$;
2. (УСУ) $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$, $AB \cong A'B'$;
3. (ССС) $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$, $CA \cong C'A'$;
4. (ССУ) $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$, $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$ док су углови $\angle BAC$ и $\angle B'A'C'$ оба оштра, оба права или оба тупа;
5. (СУУ) $AB \cong A'B'$, $\angle ABC \cong A'B'C'$, $\angle BCA \cong \angle B'C'A'$.

У школи нисмо користили став СУУ. Показаћемо током курса да је збир углова у троуглу еуклидске равни подударан опруженом, па су онда ставови УСУ и СУУ, у еуклидском случају тривијално еквивалентни.

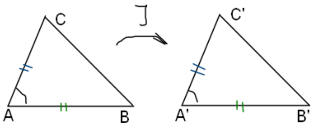
У хиперболичком случају збир углова у троуглу зависи од троугла, па су тада ова два става суштински различита.



Услов да је пар углова истог типа у ставу ССУ је неопходан. Рецимо, нека у $\triangle ABC$ важи $AB \cong AC$, па и $\angle ABC \cong \angle ACB$. Нека је X произвољна тачка основице BC. Троуглови XAB и XAC задовољавају прва три услова става ССУ, али не и последњи. Без тог услова би онда следило да су троуглови подударни, па и да је $XB \cong XC$.

Доказ. $\Rightarrow$: Ако су два троугла подударна, постоји изометрија која слика један у други па су сви парови одговарајућих страница и углова подударни.

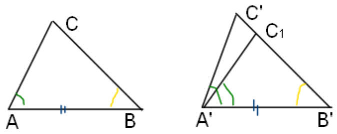
$\Leftarrow$:



1. Како је $\angle CAB \cong \angle C'A'B'$ постоји изометрија $\mathcal{I}$ која слика један угао у други и краке AB и AC редом у $A'B'$ и $A'C'$. С обзиром да је $AB \cong A'B'$ тада је $\mathcal{I}(B) = B'$ и слично $\mathcal{I}(C) = C'$. Зато $\mathcal{I}: A, B, C \mapsto A', B', C'$ и $\mathcal{I}(\triangle ABC) = \triangle A'B'C'$.

2.

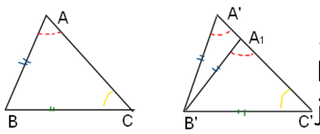
Да бисмо применили СУС потребно је да је $BC \cong B'C'$.



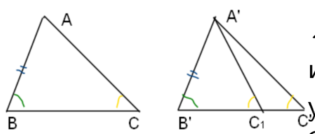
Претпоставимо да $\neg BC \cong B'C'$. Тада је једна дуж већа од друге, нпр. $B'C' > BC$. Следи, постоји тачка C_1, т.д. $\mathcal{B}(B', C_1, C')$ и $B'C_1 \cong BC$.

На основу СУС важи $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C_1$, па је и $\angle BAC \cong \angle B'A'C_1$, а даље $\angle B'A'C' \cong \angle B'A'C_1$. Међутим, како важи $\mathcal{B}(B', C_1, C')$ важи $\angle B'A'C' > \angle B'A'C_1$. $\lightning$
Зато је $BC \cong B'C'$ и на основу СУС $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

3. Како је $(A, B, C) \cong (A', B', C')$ постоји изометрија $\mathcal{I}: A, B, C \mapsto A', B', C'$, па и $\mathcal{I}(\triangle ABC) = \triangle A'B'C'$.



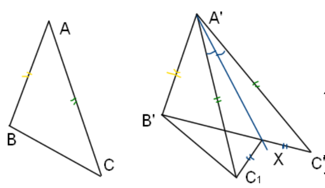
4. Претпоставимо $\neg CA \cong C'A'$, нпр. $C'A' > CA$. Тада постоји A_1, т.д. $\mathcal{B}(C', A_1, A')$ и $C'A_1 \cong CA$. Тада је $\triangle ABC \cong \triangle A_1B'C'$, по СУС, па је и $B'A_1 \cong BA$ и $\angle BAC$, $\angle B'A_1C'$ су истог типа. Како је $B'A' \cong B'A_1$, $\triangle B'A'A_1$ је једнакокраки па је $\angle B'A'C'$ оштар, а $\angle B'A_1C'$ туп. $\lightning$
Дакле $CA \cong C'A'$ и $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ по СУС.



5. Претпоставимо $\neg BC \cong B'C'$, нпр. $B'C' > BC$. Тада постоји C_1, т.д. $\mathcal{B}(B', C_1, C')$ и $BC \cong B'C_1$. Тада је $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C_1$, по СУС. Зато је $\angle A'C_1B' \cong ACB \cong A'C'B'$. При том су $\angle A'C_1B'$ и $\angle A'C'B'$ спољашњи и несуседни унутрашњи углови у $\triangle A'C'C_1$. $\lightning$
Зато $BC \cong B'C'$ и $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ по СУС. $\square$

Теорема (11.16)

Нека су $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ т.д. $AB \cong A'B'$ и $AC \cong A'C'$. Тада је $BC > B'C'$ акко је $\angle BAC > \angle B'A'C'$.



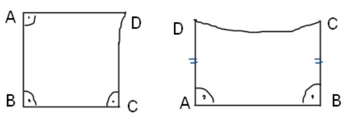
Претпоставимо да је $\angle BAC < \angle B'A'C'$. Тада постоји полуправа $A'p \subset \angle B'A'C'$ т.д. $\angle BAC \cong \angle(A'B', A'p)$. Нека је $C_1 \in A'p$ т.д. $AC \cong A'C_1$. Следи да је $\triangle BAC \cong \triangle B'A'C_1$, по СУС. Даље је и $BC \cong B'C_1$. Дакле треба да упоредимо $B'C_1$ и $B'C'$.

Ако $C_1 \in B'C'$, због $\angle B'A'C_1 < \angle B'A'C'$ следи $\mathcal{B}(B', C_1, C')$ па је $B'C_1 < B'C'$.
Ако $C_1 \notin B'C'$, нека је As бисектриса $\angle C_1A'C'$. Нека As сече $B'C'$ у X. Тада $A'XC_1 \cong A'XC'$ по СУС, па је и $XC_1 \cong XC'$. При том су B', X, C_1 неколинеарне тачке. Зато је $B'C' = B'X + XC_1 > B'C_1$.

Слично, из $\angle BAC > \angle B'A'C'$ следи $BC > B'C'$.
Обратно, ако је $BC < B'C'$ претпоставимо да је $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ или $\angle BAC > \angle B'A'C'$. Тада је или $BC \cong B'C'$ или $BC > B'C'$. $\lightning$ Дакле $\angle BAC < \angle B'A'C'$.
Сличо и у осталим случајевима. $\square$

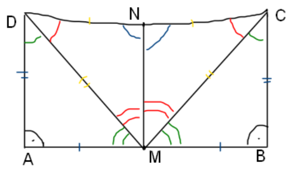
Дефиниција

Четвороугао $ABCD$ је **Ламбертов** ако су углови $\angle A, \angle B, \angle C$ прави. Ивице AB и BC су **основице** тог четвороугла.



Дефиниција

Четвороугао $ABCD$ такав да су углови $\angle A$ и $\angle B$ прави и да је $AD \cong BC$ је **Сакеријев**. Ивица AB је **основица**, ивица CD **противосновица**, а ивице AD и BC **бочне стране**.



Нека су M и N средишта основице AB и противосновице CD Сакеријевог четвороугла $ABCD$. Тада је $\triangle DAM \cong \triangle CBM$ по СУС. Зато је и

$$\angle ADM \cong \angle BCM, \quad (1)$$
$$\angle AMD \cong \angle BMC, \quad (2)$$
$$MD \cong MC.$$

Сад је и $\triangle DMN \cong \triangle CMN$ по ССС. Следи да је и

$$\angle NDM \cong \angle NCM, \quad (3)$$
$$\angle DMN \cong \angle CMN, \quad (4)$$
$$\angle DNM \cong \angle CNM. \quad (5)$$

Углови у (5) су при том и напоредни и подударни па су прави, дакле $\angle MND$ је прав.
Из (1) и (3) следи и да је $\angle ADN \cong \angle BCN$.
Слично, из (2) и (4) следи да је и $\angle AMN \cong \angle BMN$. При том, у питању су напоредни углови па су и они прави, тј. $\angle AMN$ је прав. Показали смо да важи:

Теорема (11.17-18)

Нека је $ABCD$ Сакеријев четвороугао и M и N средишта основице AB и противосновице CD. Тада важи да су углови на противосновици међусобно подударни, а четвороуглови $AMND$ и $BMNC$ су Ламбертови.