13. Подударност дужи и углова

Две дужи AB и CD су подударне ако постоји изометрија која слика AB у CD. При том се темена сликају у темена.

Дефиниција

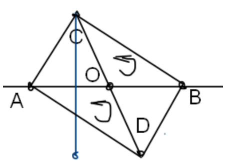
Средиште дужи AB је тачка O те дужи, таква да важи $AO \cong BO$.

Примедба *Уочимо да је довољно тражити у претходној дефиницији да је O тачка праве AB т.д. је $AO \cong BO$, онда она мора припадати дужи AB. Наиме, ако би нпр. важило $\mathcal{B}(O, A, B)$ и $AO \cong BO$ онда би постојале две разне тачке A и B на истој полуправој са теменом O за које би важило $OA \cong OB$.*

Теорема (11.1)

Свака дуж има јединствено средиште.

Доказ. Докажимо прво егзистенцију.



Нека је C тачка ван праве AB и D тачка т.д. важи $C, D \div AB$, и $(A, B, C) \cong (B, A, D)$ (у одговарајућој полуравни постоји тачно једна таква тачка). С обзиром да је $C, D \div AB$ следи да права AB сече дуж CD у некој тачки O.

С обзиром да је $(A, B, C) \cong (B, A, D)$, постоји јединствена изометрија $\mathcal{I}$ те равни, т.д. $\mathcal{I} : A, B, C \mapsto B, A, D$.
При том је $\triangle ABC \rightrightarrows \triangle BAD$ (нпр. ланац $ABCDBAD$ нема преоријентација), па је $\mathcal{I}$ директна изометрија.
С обзиром да је $\mathcal{I} : A, B \mapsto B, A$ права AB је инваријантна у изометрији $\mathcal{I}$.
Важи $\mathcal{I}(C) = D$. Шта је $\mathcal{I}(D)$? Нека је $\mathcal{I}(D) = C_1$.

Тада $\mathcal{I}: B, A, D \mapsto A, B, C_1$ па је $(B, A, D) \cong (A, B, C_1)$, па и $(A, B, C) \cong (A, B, C_1)$. У свакој полуравни дате равни са рубом AB постоји тачно једна таква тачка и једна од њих је C. При том, $\mathcal{I}$ је директна, па $C_1, D \div AB$. Зато је $C_1 = C$, тј. $\mathcal{I}(D) = C$.

Дакле $\mathcal{I}: C, D \mapsto D, C$ па је и права CD инваријантна за $\mathcal{I}$. Зато се тачка $O \in AB \cap CD$ слика у тачку пресека $\mathcal{I}(AB) \cap \mathcal{I}(CD) = AB \cap CD$, тј. $\mathcal{I}(O) = O$.

Дакле $\mathcal{I}: A, O \mapsto B, O$ па је $(A, O) \cong (B, O)$. С обзиром да O припада правој AB (видети примедбу) следи да је O средиште дужи AB.

Покажимо јединственост. Претпоставимо да је и $O_1 \neq O$ средиште AB и покажимо, прво да је тада и O_1 инваријантна тачка за $\mathcal{I}$. Наиме, Нека је $\mathcal{I}(O_1) = O_2$. Тада $\mathcal{I}: A, B, O_1 \mapsto B, A, O_2$, па је $AO_1 \cong BO_2$, $BO_1 \cong AO_2$, а како је и $AO_1 \cong BO_1$ све четири дужи су подударне. Зато је $AO_1 \cong AO_2$.

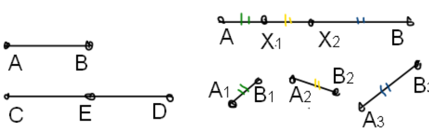
При том, како је $\mathcal{B}(A, O_1, B)$ и $\mathcal{I}$ "чува" распореде, онда је и $\mathcal{B}(A, O_2, B)$. Зато су O_1 и O_2 тачке исте полуправе са теменом A, такве да је $AO_1 \cong AO_2$, па је $O_1 = O_2$.

Дакле $\mathcal{I}(O_1) = O_1$. Зато су O и O_1 две разне тачке праве AB инваријантне за $\mathcal{I}$.
Пресликавање $\mathcal{I}|_{AB}$ је изометрија праве AB са бар две инваријантне тачке. Како је изометрија праве одређена двема тачкама у питању је коинциденција $\mathcal{I}|_{AB} = \mathcal{E}_{AB}$.
Међутим, тада би све тачке праве AB требало да буду фиксне, а важи да је $\mathcal{I}(A) = B \neq A$. ↯
Дакле, средиште је јединствено. □

Дефиниција

Нека су AB и CD две дужи. Ако постоји тачка E дужи CD таква да је $AB \cong CE$, онда је AB **мања** од CD (пишемо $AB < CD$), тј. CD је **већа** од AB (пишемо $CD > AB$).

Примедба *Релација* мање или једнако *($<$ или $\cong$) је релација потпуног поретка.*



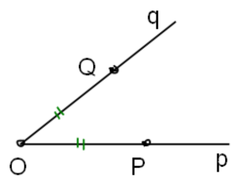
Дефиниција

Дуж AB је **збир** дужи $A_1B_1, \dots, A_nB_n$ (пишемо $AB = A_1B_1 + \dots + A_nB_n$) ако постоје тачке $X_1, \dots, X_{n-1}$ т.д. је $\mathcal{B}(A, X_1, \dots, X_{n-1}, B)$ и $AX_1 \cong A_1B_1$, $X_1X_2 \cong A_2B_2 \dots$, $X_{n-1}B \cong A_nB_n$.

Теорема

Постоји изометрија $\mathcal{I}$ равни која слика дати угао $\angle pq$ у себе, а краке p, q редом у q, p.

Доказ.



Покажимо за неопружени угао. Нека је O теме угла pq и $P \in p$, $Q \in q$, такве да је $OP \cong OQ$. Тада је $(O, P, Q) \cong (O, Q, P)$ па постоји изометрија равни $\mathcal{I}$ таква да $\mathcal{I} : O, P, Q \mapsto O, Q, P$.

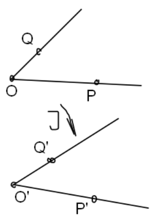
Даље је $\mathcal{I} : p, q, (PQ) \mapsto q, p, (QP)$, па се конвексни угао pq слика у себе и њему комплементни угао у себе. □

Ако постоји изометрија $\mathcal{I}_1$ којом се угао $\angle ab$ слика у pq, тако што $a \mapsto p, b \mapsto q$, онда компоновањем са $\mathcal{I}$, постоји и изометрија којом се $a \mapsto q$ и $b \mapsto p$.

Теорема (11.3)

Два конвексна (неконвексна) угла $\angle pOq$ и $\angle p'O'q'$ су подударна акко постоје тачке $P \in p$, $Q \in q$, $P' \in p'$, $Q' \in q'$ такве да је $(P, O, Q) \cong (P', O', Q')$.

Доказ. Покажимо за конвексне, неопружене углове.



$\Rightarrow$: Ако су углови подударни, постоји изометрија $\mathcal{I}$ којом се један слика у други, O у O', за због претходне теореме (види коментар) можемо претпоставити да $\mathcal{I} : p, q \mapsto p', q'$. Нека су $P \in p$, $Q \in q$ произвољне, $\mathcal{I}(P) = P'$, $\mathcal{I}(Q) = Q'$. Тада је $(P, O, Q) \cong (P', O', Q')$.

$\Leftarrow$: Нека постоје тачке P, Q, P', Q' такве да је $(P, O, Q) \cong (P', O', Q')$. Тада постоји изометрија $\mathcal{I}$, $\mathcal{I} : P, O, Q \mapsto P', O', Q'$.

Тада $\mathcal{I} : p, q \mapsto p', q'$ и $\mathcal{I}$ слика отворену дуж (PQ) у дуж (QP), па се и конвексни угао $\angle pq$ слика у конвексни $\angle qp$. □

Теорема (11.4)

Углови напоредни подударним угловима су такође подударни. **БД**

Теорема (11.5)

Унакрсни углови су међусобно подударни. **БД**

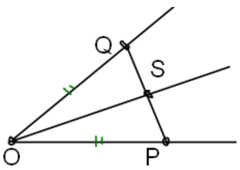
Дефиниција

Бисектриса угла $\angle pOq$ је полуправа Or тог угла која га разлаже на два међусобно подударна угла.

Теорема (11.7)

Сваки угао има јединствену бисектрису.

Доказ. Покажимо за конвексне, неопружене углове.



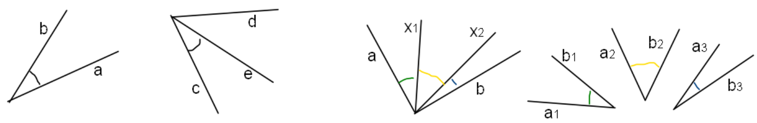
Егзистенција: Нека су $P \in p$ и $Q \in q$, т.д. $OP \cong OQ$. Нека је S средиште дужи PQ. Тада, тривијално важи $(P, O, S) \cong (Q, O, S)$, па су, према $T11.3$, углови $\angle POS$ и $\angle QOS$ подударни, па је полуправа OS бисектриса.

Јединственост: Нека је Os бисектриса. Она припада углу па сече дуж (PQ) у некој тачки S_1. При том $\angle POS_1 \cong QOS_1$, те постоји изометрија $\mathcal{I}$ која слика један на други, т.д. $\mathcal{I} : p, s, O \mapsto q, s, O$. Како је за тачку $P \in p$, $OP \cong OQ$, где $Q \in q$, следи да је $\mathcal{I}(P) = Q$. Слично $\mathcal{I}(S_1) = S_1$, те се дуж PS_1 слика у QS_1. Из $PS_1 \cong QS_1$, па је S_1 средиште дужи PQ, тј. $S = S_1$ и Os се поклапа са полуправом OS. □

Дефиниција

Нека су $\angle ab$ и $\angle cd$ два угла. Ако постоји полуправа e у углу $\angle cd$ која има са њим заједничко теме, таква да је $\angle ab \cong \angle ce$ онда је $\angle ab$ **мањи** од $\angle cd$ (пишемо $\angle ab < \angle cd$), односно $\angle cd$ је **већи** од $\angle ab$ ($\angle cd > \angle ab$).

Примедба *Релација* мање или једнако *($<$ или $\cong$) је релација потпуног поретка на скупу углова.*

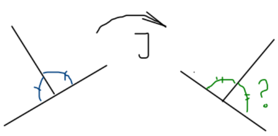


Дефиниција

Угао $\angle ab$ је **збир** углова $\angle a_1b_1$, $\angle a_2b_2$, $\dots \angle a_nb_n$ (пишемо $\angle ab = \angle a_1b_1 + \dots \angle a_nb_n$), ако постоје полуправе $x_1, \dots, x_{n-1}$ које разлажу угао $\angle ab$ на $\angle a_1x_1, \angle x_1x_2, \dots, \angle x_{n-1}b$, такве да су редом подударни $\angle a_1b_1, \angle a_2b_2, \dots, \angle a_nb_n$.

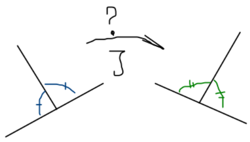
Дефиниција

Угао је **прав, оштар** или **туп** у зависности од тога да ли је подударан, мањи или већи од свог напоредног угла.



Теорема (11.9)

Угао подударан правом је прав. **БД**

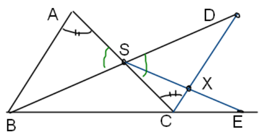


Теорема (11.10)

Прави углови су међусобно подударни. **БД**

Теорема

Спољашњи угао троугла је већи од несуседног унутрашњег угла.



Нека је E тачка таква да је $\mathcal{B}(B, C, E)$. Покажимо да је $\angle ACE > \angle BAC$. Нека је S средиште дужи AC и D таква да је $\mathcal{B}(B, S, D)$ и $BS \cong SD$. Тада су углови $\angle ASB$ и $\angle CSD$ подударни. Изометрија $\mathcal{I}$ која слика $\angle ASB$ у у $\angle CSD$ тако што се краци SA и SB сликају у SC и SD редом,

слика онда тачке A и B у C и D, јер $SA \cong SC$, $SB \cong SD$. Зато $(A, S, B) \cong (C, S, D)$. Стога је и $\angle SAB \cong \angle SCD$.

Треба зато показати да је $\angle SCD < \angle SCE$. Довољно је показати да полуправа CD припада углу $\angle ACE$.

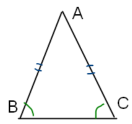
Посматрајмо $\triangle BSE$ и праву CD. Она сече ивицу BE у тачки C, $\mathcal{B}(B, C, E)$, а праву BS у тачки D, т.д. $\neg\mathcal{B}(B, D, S)$ па због Пашове аксиоме права CD сече дуж SE у тачки X. Зато права CD има тачке у углу $\angle ACE$ и њему унакрсном углу.

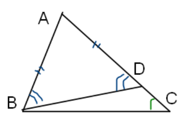
Посматрајмо $\triangle BCD$ и праву SE. Она сече BD у S, т.д. $\mathcal{B}(B, S, D)$, сече BC у E т.д. $\neg\mathcal{B}(B, E, C)$, па због Пашове аксиоме права SE сече дуж CD (у X). Дакле, тачке дужи CD, па и полуправе CD припадају конвексном углу $\angle ACE$, па је $\angle ACD < \angle ACE$. □

Теорема (11.12-13)

Наспрам подударних ивица неког троугла су подударни углови и обрнуто.
Једна ивица је већа од друге акко је наспрам ње већи угао.

Доказ. Ако је $AB \cong AC$ онда је $(A, B, C) \cong (A, C, B)$, па је и $\angle ABC \cong \angle ACB$.

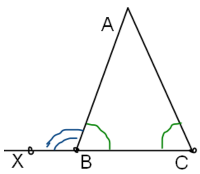




Ако је $AC > AB$, онда постоји тачка D, т.д. $\mathcal{B}(A, D, C)$ и $AB \cong AD$. Прво, због $\mathcal{B}(A, D, C)$ следи да је полуправа BD у углу $\angle ABC$, па је $\angle ABD < \angle ABC$. Са друге стране, из $\mathcal{B}(A, D, C)$ следи да је $\angle BDA$ спољашњи за троугао BDC, где је $\angle BCD$ један од несуседних унутрашњих, па је $\angle ADB > \angle ACB$.

Како је $AB \cong AD$, следи и да је $\angle ABD \cong \angle ADB$. Зато, из претходне три релације, добијамо $\angle ABC > \angle ACB$. Значи
$AC > AB \Rightarrow \angle ABC > \angle ACB$. Слично,
$AC < AB \Rightarrow \angle ABC < \angle ACB$.

Обратно, нека је $\angle ABC > \angle ACB$ и претпоставимо да је или $AC \cong AB$ или $AC < AB$. Из претходно доказаног онда би следило, редом, или $\angle ABC \cong \angle ACB$ или $\angle ABC < \angle ACB$. $\lightning$
Зато $\angle ABC > \angle ACB \Rightarrow AC > AB$.
Слично важи и у преостала два случаја. □



Дефиниција

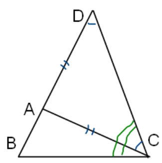
Троугао ABC за који важи $AB \cong AC$ је **једнакокраки**. Ивица BC је основица, а AC и AB су краци.

Примедба *Ако је $\mathcal{B}(X, B, C)$ важи $\angle XBA > \angle BCA \cong \angle CBA$, где је прва релација између спољашњег и несуседног унутрашњег угла. Зато је $\angle XBA$ туп, а $\angle CBA$ оштар.*

Теорема (11.14)

Збир две ивице у троуглу је већи од треће ивице.

Доказ.



Нека је D тачка т.д. $\mathcal{B}(B, A, D)$ и да је $AC \cong AD$. Тада је и $\angle ADC \cong \angle ACD$, а такође је и $BD = BA + AC$. Како је $\mathcal{B}(B, A, D)$ следи и да је $\angle BCD > \angle ACD$. Зато важи
$\angle BCD > \angle BDC$,

и при том су у питању углови $\triangle BCD$. Даље следи $BD > BC$, тј. $AB + AC > BC$. □