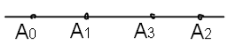
10. Оријентација

Оријентација праве.

Дефиниција

Дуж A_0A_1 чија су темена уређени пар тачака (A_0, A_1) је **оријентисана**. Две оријентисане дужи A_0A_1 и B_0B_1 једне праве су **надовезане** ако је $B_0 = A_1$. Коначан низ оријентисаних дуж једне праве у ком су сваке две узастопне уједно и надовезане је **ланац** оријентисаних дужи.

Ланац састављен од дужи $A_0A_1, A_1A_2, \dots, A_nA_{n+1}$ означавамо краће $A_0A_1A_2 \dots A_{n+1}$. Уколико се прва и последња оријентисана дуж у ланцу поклапају онда је ланац **затворен**.



Дефиниција

Две надовезане дужи A_0A_1 и A_1A_2 чине **преоријентацију** ако $\neg\mathcal{B}(A_0, A_1, A_2)$.

Дефиниција

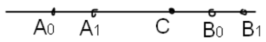
Парност броја преоријентација парова узастопних дужи једног ланца је **парност** тог ланца.

Видимо како бисмо могли да "упоредимо оријентцију" неке две дужи у једном ланцу-провером парности броја преоријентација између њих. Питање је како то да урадимо за две произвољне оријентисане дужи једне праве. Прво ћемо показати да се оне могу повезати ланцем. Одабир таквог ланца није јединствен. Зато ћемо показати и да резултат не зависи од избора ланца.

Теорема (9.1)

За сваке две оријентисане дужи једне праве постоји ланац који их повезује.

Доказ.



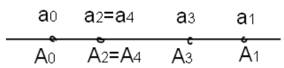
Тражимо ланац $A_0A_1\ldots?\ldots B_0B_1$. Сваке две узастопне тачке у запису ланца представљају темена једне дужи, па су различите тачке.

Зато, нека је C тачка праве којој припадају A_0A_1 и B_0B_1 различита од A_1 и B_0. Ланац $A_0A_1CB_0B_1$ испуњава услове. $\square$

Теорема (9.2)

Затворени ланци су парни.

Доказ.



Нека је $A_0A_1\ldots A_{n-1}A_nA_0A_1$ један затворени ланац. Уколико је $|\{A_0,\ldots,A_n\}|\geq 3$, овај скуп се може линеарно уредити, нпр. $\mathcal{B}(A_r, A_j = A_l, A_p,\ldots,A_q)$.

Овим тачкама монотоно у складу са тим уређењем можемо доделити реалне бројеве a_i, (у примеру $a_r < a_j = a_l$ $< a_p \cdots < a_q$). Дакле, тако да важи

$$(a_i - a_j)(a_j - a_k) > 0 \quad \text{акко} \quad \mathcal{B}(A_i, A_j, A_k).$$

Исто можемо урадити и ако учествују само две тачке.
Сада, пар дужи A_0A_1 и A_1A_2 чине преоријентацију акко и само ако $(a_0 - a_1)(a_1 - a_2) < 0$.
Зато ће парност броја преоријентација бити одређена знаком производа

$$\prod(a_i - a_{i+1})(a_{i+1} - a_{i+2}) = \prod(a_i - a_{i+1})^2 > 0,$$

јер се свака разлика у производу лево појављује два пута. $\square$

Теорема (9.3)

Ланци оријентисаних дужи који имају исти почетак и крај су исте парности.

Доказ. Нека ланци L_1 и L_2 повезују дужи d и d'. Нека је L ланац који повезује d' са d. Тада је ланац добијен спајањем (конкатенацијом) L_1 и L затворен ланац који повезује d са d и зато је и паран.
Следи да су ланци L_1 и L исте парности. Слично важи да су L_2 и L исте парности, па и L_1 и L_2. $\square$

Дефиниција

Две оријентисане дужи d и d' једне праве су **истосмерне**, пишемо $d \rightrightarrows d'$ ако су ланци који их повезују парни, а у супротном су **супротносмерне** и пишемо $d \rightleftarrows d'$.

Теорема (9.4)

Релација истосмерности оријентисаних дужи једне праве је релација еквиваленције са тачно две класе.

Доказ. (Рефлексивност) Ланац који спаја d са d је затворен, па и паран, те је $d \rightrightarrows d$.
(Симетричност) Нека је $d \rightrightarrows d'$ и нека је L_1 ланац који их повезује и који је стога паран. Нека је L_2 ланац који повезује d' са d. Тада је ланац добијен спајањем L_1 и L_2 ланац који спаја d са d, па је затворен и паран. Зато су L_1 и L_2 исте парности, тј. и L_2 је паран, тј. $d' \rightrightarrows d$.
(Транзитивност) Нека је $d \rightrightarrows d'$ и $d' \rightrightarrows d''$ јер их, редом, повезују парни ланци L_1 и L_2. Тада је ланац добијен спајањем L_1 и L_2 такође паран, а спаја d и d''. Зато је $d \rightrightarrows d''$.

Одредимо број класа еквиваленције. Нека је A_0A_1 оријентисана дуж дате праве. Тада је $A_0A_1A_0$ непаран ланац, па је $A_0A_1 \rightleftarrows A_1A_0$, тј.$[A_0A_1] \neq [A_1A_0]$. Нека је d произвољна оријентисана дуж те праве и L ланац који је повезује са A_0A_1. Претпоставимо да $d \notin [A_0A_1]$, тј. да је L непаран. Тада ланац добијен од L додавањем ор. дужи A_1A_0 има једну преоријентацију више, па је он паран и $d \in [A_1A_0]$. Зато постоје тачно две класе. □

Дефиниција

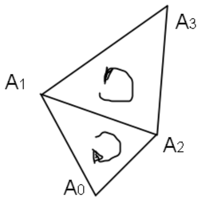
Сваку од ових класа еквиваленције називамо **смеровима** те праве.

Оријентација равни.

Дефиниција

Троугао $A_0A_1A_2$ чија су темена уређена тројка тачака (A_0, A_1, A_2) је **оријентисан**. Два оријентисана троугла $A_0A_1A_2$ и $B_0B_1B_2$ једне равни су **надовезана** ако је $B_0 = A_1, B_1 = A_2$. Коначан низ оријентисаних троуглова једне равни у ком су свака два узастопна уједно и надовезана је **ланац** оријентисаних троуглова.

Ланац састављен од троуглова $A_0A_1A_2, A_1A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_nA_{n+1}$ означавамо краће $A_0A_1A_2\ldots A_{n+1}$. Уколико се први и последњи оријентисани троугао у ланцу поклапају онда је ланац **затворен**.



Дефиниција

Два надовезана троугла $A_0A_1A_2$ и $A_1A_2A_3$ чине **преоријентацију** ако је $A_0, A_3 \div A_1A_2$.

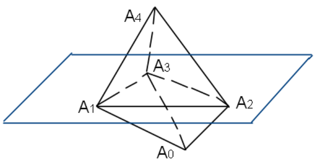
Слично као у случају ор. дужи уводи се или доказује: Парност броја преоријентација у ланцу је **парност** ланца, за свака два оријентисана троугла једне равни постоји ланац који их повезује, затворени ланци су парни, сви ланци који повезују два дата троугла су исте парности. Аналогно се уводе појмови истосмерности и смерова равни.

Оријентација простора.

Дефиниција

Тетраедар $A_0A_1A_2A_3$ чија су темена уређена четворка тачака (A_0, A_1, A_2, A_3) је **оријентисан**. Два оријентисана тетраедра $A_0A_1A_2A_3$ и $B_0B_1B_2B_3$ су **надовезана** ако је $B_0 = A_1, B_1 = A_2, B_2 = A_3$. Коначан низ оријентисаних тетраедара у ком су свака два узастопна уједно и надовезана је **ланац** оријентисаних тетраедара.

Ланац састављен од тетраедара $A_0A_1A_2A_3, A_1A_2A_3A_4, \dots, A_{n-1}A_nA_{n+1}A_{n+2}$ означавамо краће $A_0A_1A_2 \dots A_{n+2}$. Уколико се први и последњи оријентисани тетраедар у ланцу поклапају онда је ланац **затворен**.



Дефиниција

Два надовезана тетраедра $A_0A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_3A_4$ чине **преоријентацију** ако је $A_0, A_4 \div A_1A_2A_3$.

Појмови парности ланца, истосмерности и смерова простора уводе се аналогно одговарајућим појмовима везаним за оријентисане дужи.

Обратимо пажњу да је појам истосмерности уведен у сва три случаја коришћењем распореда тачака или релација "са исте стране" праве или равни.