Euklidska geometrija, zadaci za domaći

1. Ako su A, B, C tri razne kolinearne tačke, tada važi jedna i samo jedna od relacija $A-B-C$, $\quad A-C-B$, $\quad C-A-B$.

2. Ako su P i Q unutrašnje tačke stranica AB i AC trougla ABC u ravni E^2, dokazati da se duži BQ i CP seku u nekoj tački S.

3. Ako su P, Q, R unutrašnje tačke stranica BC, CA, AB trougla ABC sadržanog u ravni E^2, dokazati da se duži AP i QR seku u nekoj tački S.

4. Ako u prostoru E^3 dve razne ravni α i β imaju zajedničku tačku C i seku neku ravan σ po dvema paralelnim pravama a i b, dokazati da se ravni α i β seku po pravoj c koja zadovoljava relacije $C \in c \parallel b$.

5. Ako su α i β dve paralelne ravni prostora E^3 i p prava u tom prostoru paralelna sa ravni α, dokazati da je $p \parallel \beta$.

6. Neka su α i β dve razne ravni prostora E^3. Ako u ravni α postoje dve prave p i q koje se seku u nekoj tački O i zadovoljavaju relacije $p \parallel \beta$ i $q \parallel \beta$, dokazati da je $\alpha \parallel \beta$.

7. Dokazati da simetrale unutrašnjih uglova trougla u ravni E^2 pripadaju konkurentnom pramenu pravih.

8. Dokazati da simetrala jednog unutrašnjeg ugla i simetrale spoljašnjih uglova kod druga dva temena trougla u ravni E^2 pripadaju konkurentnom pramenu pravih.

9. Neka je u ravni E^2 dat tetivan petougao $ABCDE$. Ako je pri tome $BC \parallel CE$ i $CD \parallel EA$, dokazati da se teme D nalazi na medijatrisi p stranice AB.

10. Ako su A, B, C tri nekolinearne tačke ravni E^2, dokazati da je $\mathcal{R}^2_{C,\measuredangle BCA} \circ \mathcal{R}^2_{B,\measuredangle ABC} \circ \mathcal{R}^2_{A,\measuredangle CAB} = \mathcal{E}$.

11. Neka je u ravni E^2 dat $\triangle ABC$ i neka su B', C' tačke pravih AB i AC takve da je $A-B-B'$ i $A-C-C'$. Ako je P_a tačka u kojoj spolja upisani krug koji odgovara temenu A dodiruje stranicu BC tog trougla, dokazati da je $\mathcal{R}_{C,\measuredangle C'CB} \circ \mathcal{R}_{A,\measuredangle BAC} \circ \mathcal{R}_{B,\measuredangle CBB'} = \mathcal{S}_{P_a}$.

12. Neka je $\mathcal{R}_{O,\omega}$ centralna rotacija i $\mathcal{S}_p$ osna refleksija iste ravni E^2. Ako je tačka O na pravoj p, dokazati da svaka od kompozicija $\mathcal{I}_1 = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{R}_{O,\omega}$ i $\mathcal{I}_2 = \mathcal{R}_{O,\omega} \circ \mathcal{S}_p$ predstavlja osnu refleksiju.

13. Centralna refleksija $\mathcal{S}_O$ i osna refleksija $\mathcal{S}_p$ ravni E^2 su dve komutativne transformacije ako i samo ako tačka O pripada pravoj p, naime biće $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_O = \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_p \iff O \in p$.

14. Ako su $\mathcal{S}_a$ i $\mathcal{S}_b$ osne refleksije ravni E^2 i $\mathcal{S}_C$ centralna refleksija te iste ravni, tada kompozicija $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_C \circ \mathcal{S}_a$ predstavlja neku centralnu refleksiju $\mathcal{S}_D$ ako i samo ako su prave a i b među sobom paralelne, naime biće $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_C \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_D \iff a \parallel b$.

15. Ako su $\mathcal{S}_P$, $\mathcal{S}_Q$ centralne refleksije ravni E^2 i $\mathcal{S}_m$ osna refleksija te iste ravni, dokazati da je $\mathcal{S}_P \circ \mathcal{S}_m = \mathcal{S}_m \circ \mathcal{S}_Q \iff \mathcal{S}_m(P) = Q$.

16. Translacija $\mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}}$ i osna refleksija $\mathcal{S}_p$ euklidske ravni E^2 su dve komutativne transformacije ako i samo ako je prava MN paralelna s pravom p, naime biće $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} \circ \mathcal{S}_p \iff MN \parallel p$.

17. Neka su $\mathcal{S}_A$, $\mathcal{S}_B$ centralne refleksije i $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PQ}}$ translacija ravni E^2. Odrediti vrstu transformacije $f : E^2 \to E^2$ koja zadovoljava relaciju

(a) $\mathcal{S}_A \circ f = \mathcal{S}_B$;

(b) $\mathcal{S}_A \circ f = \mathcal{T}_{\overrightarrow{PQ}}$;

(c) $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PQ}} \circ f = \mathcal{S}_A$;

(d) $\mathcal{S}_A \circ f \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_B$;

(e) $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PQ}} \circ f \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{PQ}} = \mathcal{S}_A$;

(f) $f \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{PQ}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{PQ}} \circ \mathcal{S}_A$.

18. Ako je $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PQ}}$ translacija i $\mathcal{S}_O$ centralna refleksija ravni E^2, dokazati da svaka od kompozicija $\mathcal{I}_1 = \mathcal{S}_O \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{PQ}}$ i $\mathcal{I}_2 = \mathcal{T}_{\overrightarrow{PQ}} \circ \mathcal{S}_O$ predstavlja centralnu refleksiju ravni E^2.

19. Ako prava p ne pripada osnovi π ravanske refleksije $\mathcal{S}_\pi$ prostora E^3, dokazati da je $\mathcal{S}_\pi(p) = p \Longleftrightarrow p \perp \pi$.

20. Ravanska refleksija $\mathcal{S}_\pi$ i osna refleksija $\mathcal{S}_p$ prostora E^3, kojima osa p ne pripada osnovi π, predstavljaju dve komutativne transformacije ako i samo ako je prava p upravna na ravni π, naime biće $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_\pi \Longleftrightarrow p \perp \pi$.

21. Centralna refleksija $\mathcal{S}_o$ i osna refleksija $\mathcal{S}_p$ prostora E^3 su dve komutativne transformacije ako i samo ako tačka O pripada pravoj p, naime biće $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_o = \mathcal{S}_o \circ \mathcal{S}_p \Longleftrightarrow O \in p$.

22. Translacija $\mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}}$ i osna rotacija$\mathcal{R}_{s,\omega}$ prostora E^3 su dve komutativne transformacije ako i samo ako su prave s i MN među sobom paralelne, naime biće $\mathcal{R}_{s,\omega} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} \circ \mathcal{R}_{s,\omega} \Longleftrightarrow MN \parallel s$.

23. Ako su A i B dve razne tačke prostora E^3, dokazati da važe sledeće relacije: (a) $(\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}})^{-1} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{BA}}$; (b) $\mathcal{T}_{\overrightarrow{BA}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{E}$

24. Ako su tačke A i B dve razne tačke neke ravni π koja se nalazi u prostoru E^3, dokazati da je (a) $(G_{\pi;\overrightarrow{AB}})^{-1} = G_{\pi;\overrightarrow{BA}}$; (b) $G_{\pi;\overrightarrow{BA}} \circ G_{\pi;\overrightarrow{AB}} = \mathcal{E}$.

25. Ako su A, B, C, D četiri razne tačke neke ravni π prostora E^3, dokazati da je
$G_{\pi;\overrightarrow{DA}} \circ G_{\pi;\overrightarrow{CD}} \circ G_{\pi;\overrightarrow{BC}} \circ G_{\pi;\overrightarrow{AB}} = \mathcal{E}$.

26. Ako je u prostoru E^3 tačka O van prave p, dokazati da svaka od narednih dveju kompozicija $\mathcal{I}_1 = \mathcal{S}_o \circ \mathcal{S}_p$ i $\mathcal{I}_2 = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_o$ predstavlja klizajuću refleksiju prostora E^3.

27. Ako u prostoru E^3 prava p i ravan π nemaju zajedničkih tačaka, dokazati da svaka od narednih dveju kompozicija $\mathcal{I}_1 = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_\pi$ i $\mathcal{I}_2 = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_p$ predstavlja klizajuću refleksiju prostora E^3.

28. Dokazati da se svako zavojno kretanje prostora E^3 može predstaviti kao kompozicija jedne klizajuće i jedne ravanske refleksije.

29. Dokazati da kompozicija dvaju zavojnih poluobrtanja $\mathcal{Z}_{\overrightarrow{OP}}$ i $\mathcal{Z}_{\overrightarrow{OQ}}$ prostora E^3, kojima su ose OP i OQ upravne medju sobom, predstavlja osnu refleksiju tog prostora.

30. Ako je F tačka u kojoj simetrala spoljašnjeg ugla A seče pravu određenu stranicom BC trougla ABC koji se nalazi u ravni E^2, dokazati da središta S_b i S_c spolja upisanih krugova koji dodiruju stranice CA i AB zadovoljavaju relacije $AS_b \colon S_bF = AS_c \colon S_cF = (AB - AC) \colon BC$.

31. Neka je u ravni E^2 dat prav ugao POQ. Ako obeležimo sa A proizvoljnu tačku polupravе OP i sa B, C, D tačke poluprave OQ takve da je $\mathcal{B}(O, B, C, D)$ i $OA \cong OB \cong BC \cong CD$, dokazati da je $\triangle ABC \sim \triangle DBA$.

32. Ako prava određena visinom AD trougla ABC koji se nalazi u ravni E^2 dodiruje opisani krug tog trougla, dokazati da je $AD^2 = BD \cdot CD$.

33. Ako su A, B, C tri razne tačke nekog kruga k koji se nalazi u ravni E^2, a B' i C' podnožja upravnih iz tačaka B i C na pravoj t koja u tački A dodiruje krug k, dokazati da je visina AD trougla ABC određena obrascem $AD^2 = BB' \cdot CC'$.

34. Ako su M i N tačke u kojima prava kroz presek O dijagonala AC i BD uporedna sa osnovicama AB i CD trapeza $ABCD$ koji se nalazi u ravni E^2, dokazati da je tačka O središte duži MN.

35. Ako su AB i CD osnovice jednakokrakog trapeza $ABCD$ opisanog oko kruga poluprečnika r koji se nalazi u ravni E^2, dokazati da je $AB \cdot CD = 4r^2$.

36. Dokazati da kod $\triangle ABC$ u ravni E^2 simetrale spoljašnjih uglova seku prave određene naspramnim stranicama u kolinearnim tačkama.

37. Dokazati da podnožja upravnih iz bilo koje tačke kruga opisanog oko $\triangle ABC$ koji se nalazi u ravni E^2 na pravama BC, CA, AB pripadaju jednoj pravoj.

38. Primenom Čevijeve teoreme dokazati da se prave određene visinama $\triangle ABC$ u ravni E^2 seku u jednoj tački.

39. Dokazati da se dva razna kruga ABC i $A'B'C'$ ravni E^2 dodiruju među sobom ako i samo ako je zadovoljena relacija $\text{Ģ}_{\overrightarrow{CA}} \circ \text{Ģ}_{\overrightarrow{BC}} \circ \text{Ģ}_{\overrightarrow{AB}} = \text{Ģ}_{\overrightarrow{CA'}} \circ \text{Ģ}_{\overrightarrow{BC'}} \circ \text{Ģ}_{\overrightarrow{AB'}}$.

40. Dokazati da je četvorougao $ABCD$ neke ravni E^2 tetivan ako i samo ako je $\text{Ģ}_{\overrightarrow{DA}} \circ \text{Ģ}_{\overrightarrow{CD}} \circ \text{Ģ}_{\overrightarrow{BC}} \circ \text{Ģ}_{\overrightarrow{AB}} = \text{Ȩ}$.

41. U ravni E^2 dati su prava s i s raznih strana od te prave dve tačke A i B. Konstruisati tačku $X \in s$ takvu da razlika duži AX i BX bude maksimalna.

42. Dokazati da za svake četiri tačke A, B, C, D ravni E^2 važi relacija $AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD$. Jednakost važi ako i samo ako je $ABCD$ konveksan tetivan četvorougao.

43. Primenim inverzije konstruisati u ravni E^2 krug k koji sadrži dve date tačke A i B i dodiruje dati krug l.

44. Ako u inverziji $\psi_k \colon E^2_* \to E^2_*$ tačkama A i B koje su nekolinearne sa središtem kruga k odgovaraju tačke A' i B', dokazati da tačke A, B, A', B' pripadaju jednom krugu koji je ortogonalan na krugu k.