

6. Афине трансформације у $R^n = 1, 2$

Афина трансформација праве дата је једначином
 $x' = ax + b, a \neq 0$.

Теорема

Нека су A, B и A_1, B_1 два пара разних тачака једне праве. Тада постоји јединствена афина трансформација σ те праве таква да је $\sigma(A) = A_1, \sigma(B) = B_1$.

Претпоставимо прво да је $a = 1$. Тада је трансформација изометрија и то **коинциденција** ε за $b = 0$, односно **транслација** τ_b за $b \neq 0$.

Нека је сада $a \neq 1$. Тада трансформација има тачно једну инваријантну тачку S . При том она има координату $S = \frac{b}{1-a}$. Зато је трансформација дата са

$$x' = ax + (1 - a)S$$

и у питању је хомотетија $H_{S,a}$.

При том, уочимо да је хомотетија $H_{S,a}$ праве уједно и дилатација праве са основом S и коефицијентом a , паралелно вектору праве.

Афине трансформације праве

афина трансформација	инв. тачке	сопст. вредн.
ε	све	1
τ_v	\emptyset	1
$H_{S,a} = \mathcal{D}_{S,a}$	S	$a \neq 1$

Сетимо се и да је $\tau_{2\vec{AB}} = S_B \circ S_A$, где је $S_A = H_{S,-1} = \mathcal{D}_{S,-1}$ централна рефлексија. Зато директно важи следеће тврђење.

Тврђење

Свака афина трансформација праве може се представити као композиција не више од две дилатације од којих највише једна није и рефлексија.

Нека је дата афина трансформација равни $\sigma : X' = AX + B$, где је A квадратна матрица.

Важи следеће тврђење, слично као код изометрија.

Тврђење

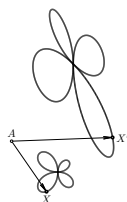
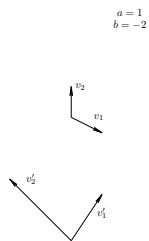
Нека су A, B, C и A_1, B_1, C_1 две тројке неколинеарних тачака једне равни. Тада постоји јединствена афина трансформација σ те равни таква да је $\sigma(A) = A_1$, $\sigma(B) = B_1$, $\sigma(C) = C_1$.

Нека су λ_1 и λ_2 сопствене вредности матрице A . Оне могу бити или обе реалне или конјуговано комплексне.

1. Претпоставимо да су $\lambda_{1,2} = a + ib$ конјуговано комплексни бројеви, $b \neq 0$. Тада $\lambda = 1$ није сопствена вредност и трансформација има тачно једну инваријантну тачку S . При том, ако је $A(v_1 + iv_2) = (a + ib)(v_1 + iv_2)$, а самим тим и $A(v_1 - iv_2) = (a - ib)(v_1 - iv_2)$, важи да је

$$Av_1 = av_1 - bv_2,$$

$$Av_2 = bv_1 + av_2.$$



Како су конјуговано комплексни сопствени вектори за вредности λ_1 и λ_2 независни, линеарно су независни и v_1, v_2 .

У бази (v_1, v_2) матрица пресликавања дата са

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

Ово пресликавање је **уопштена ротација** \mathcal{R}_S .

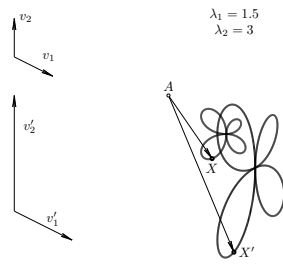
Ако су вектори v_1 и v_2 **ортогонални и јединични**, уопштена ротација је композиција хомотетије $H_{S, \sqrt{a^2+b^2}}$ и еуклидске ротације око тачке S .

Надаље, нека су $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Тада постоји база равни састављена од сопствених вектора у којој је матрица пресликавања дата са

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

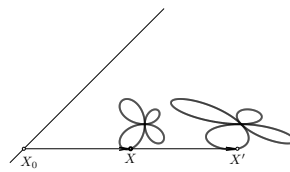
2.

Уколико $\lambda_1, \lambda_2 \neq 1$ афина трансформација има тачно једну инваријантну тачку S . Ову трансформацију називамо **уопштеном хомотетијом** и означавамо $\mathcal{H}_{S, \lambda_1, \lambda_2}$.

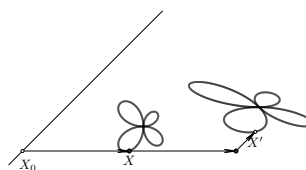


Нека је $\lambda_1 = 1$.

3а. Ако трансформација има бар једну инваријантну тачку S и ако су v_1, v_2 сопствени вектори за $\lambda_1 = 1$ и λ_2 , све тачке праве $p = S + \mathcal{L}\{v_1\}$ су инваријантне, а афина трансформација је **дилатација** $\mathcal{D}_{p, v_2, \lambda_2}$ са основом p , паралелно вектору v_2 са коефицијентом λ_2 .



3б. Ако трансформација нема инваријантних тачака, онда постоји вектор v колинеаран вектору v_1 и дилатација $\mathcal{D}_{p, v_2, \lambda_2}$, где је p права паралелна вектору v_1 такви да је $\sigma = \tau_v \circ \mathcal{D}_{p, v_2, \lambda_2}$. Трансформацију можемо назвати **клизајућом дилатацијом**.



4.

Претпоставимо сада да је $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Тада постоји база у којој је матрица пресликавања дата са

$$A_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \text{ или } A_2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}.$$

Нека је матрица дата са A_1 .

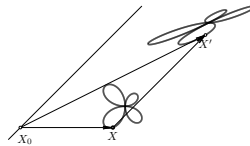
4а. Тада, ако је $\lambda_1 \neq 1$ трансформација има тачно једну инваријантну тачку S и при том се произвољни вектор v слика у $\lambda_1 v$. Зато је трансформација **хомотетија** $\mathcal{H}_{S, \lambda_1}$.

4б и в. Ако је $\lambda_1 = 1$ трансформација је или **коинциденција** ε када има бар једну инваријантну тачку или **транслација** τ_v када их нема.

Нека је коначно матрица трансформације дата са A_2 .

4г. Ако је $\lambda_1 \neq 1$ афина трансформација има тачно једну инваријантну тачку S . Нека је v_1 сопствени вектор за λ_1 . Ако је $\mathcal{H}_{S, \lambda_1}$ хомотетија са центром у S , а \mathcal{T}_{p, v_1} трансвекција, где је $p = S + \mathcal{L}\{v_1\}$, тада директно добијамо да је $\sigma = \mathcal{H}_{S, \lambda_1} \circ \mathcal{T}_{p, v_1}$.

4д. Ако је $\lambda_1 = 1$ и постоји бар једна инваријантна тачка трансформације, онда је трансформација **трансвекција** \mathcal{T}_{p, v_1} где је v_1 сопствени вектор за λ_1 и $p = S + \mathcal{L}\{v_1\}$.



4ђ. Ако је $\lambda_1 = 1$ и σ нема инваријантних тачака, тада је $\sigma = \tau_v \circ \mathcal{T}_{p, v_1}$, где је v произвољни вектор.

Може се показати и да важи следећа теорема, у аналогији са одговарајућом теоремом о изометријама равни.

Теорема

Свака афина трансформација равни може се представити као композиција не више од три дилатације равни, међу којима највише једна није и афина рефлексива.

Афине трансформације равни

аф. тран.	инв. тачке	сопс. вредности	база од сопс. вект.
ε	све	$\lambda_{1,2} = 1$	ДА
τ_v	\emptyset	$\lambda_{1,2} = 1$	ДА
\mathcal{T}_{p,v_1}	$P \in p$	$\lambda_{1,2} = 1$	НЕ
$\tau_v \circ \mathcal{T}_{p,v_1}$	\emptyset	$\lambda_{1,2} = 1$	НЕ
$\mathcal{D}_{p,v_2,\lambda_2}$	$P \in p$	$\lambda_1 = 1, \lambda_2 \neq 1$	ДА
$\tau_v \circ \mathcal{D}_{p,v_2,\lambda_2}$	\emptyset	$\lambda_1 = 1, \lambda_2 \neq 1$	ДА
$\mathcal{H}_{S,\lambda_1,\lambda_2}$	S	$\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2 \neq 1$	ДА
$\mathcal{H}_{S,\lambda_1}$	S	$\lambda_1 = \lambda_2 \neq 1$	ДА
$\mathcal{H}_{S,\lambda_1} \circ \mathcal{T}_{p,v_1}$	S (важи $S \in p$)	$\lambda_1 = \lambda_2 \neq 1$	НЕ
\mathcal{R}_S	S	$\lambda_{1,2} = a \pm ib$	НЕ