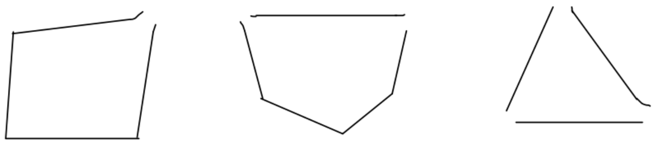
26. Асимптотски полигони и функција Лобачевског

Ако допустимо да две суседне ивице полигона не буду дужи већ две међусобно паралелне полуправе (или праве), добијени лик звaћемо **асимптотским полигоном**. Сматрамо да тим двема паралелним полуправама одговара **несвојствено теме**. Асимптотски полигон може имати више несвојствених темена.

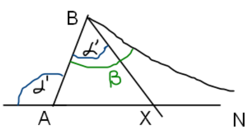
Сетимо се да можемо сматрати да се паралелне праве секу у бесконачно далекој тачки. У тим терминима, асимптотски полигон има бар једно теме које је бесконачно далека тачка и које називамо несвојственим.

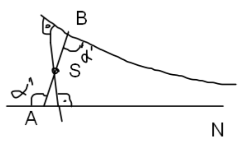


Теорема (33.1)

Спољашњи угао α' код својственог темена A троугла коме је теме N несвојствено, већи је од унутрашњег угла β код својственог темена B.

Доказ. Претпоставимо супротно, нека је $\alpha' < \beta$ или $\alpha' \cong \beta$. Ако је $\alpha' < \beta$, онда у углу β постоји полуправа Bx која са BA одређује угао α'. Како је полуправа BN паралелна AN, полуправа Bx сече AN у некој тачки X. Тада троугао ABX има подударне спољашњи и несуседни унутрашњи угао, ($\lightning$).





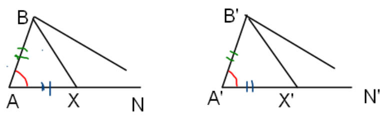
Ако је $\alpha' \cong \beta$, нека је S средиште дужи AB. Тада се централном симетријом $\mathcal{S}_S$ тачка A слика у B и обратно, права AB у себе, а права AN која у тачки A заклапа са AB оријентисани угао α' у праву кроз B која са BN заклапа исти оријентисани угао, дакле у BN.

Нека је n права $S \in n$, ортогонална на AN. С обзиром да садржи S, она се слика у себе, па су n и BN, као слике n и AN, такође ортогоналне. Дакле, онда паралелне праве AN и BN имају заједничку нормалу, ($\lightning$). $\square$

Теорема (33.2)

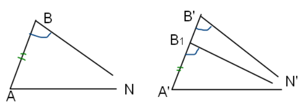
Троуглови ABN и $A'B'N'$ са несвојственим теменима су међусобно подударни акко су:
(1) међусобно подударни углови A и A' и $AB \cong A'B'$;
(2) међусобно подударни парови углова A и A', и B и B'.

Доказ. Ако су троуглови подударни постоји изометрија која слика један у други, и тада су им сви одговарајући углови и странице међусобно подударни. Покажимо да важи и обратно.



(1) Нека су X и X' тачке полуправих AN и $A'N'$ т.д. $AX \cong A'X'$.

Тада је $\triangle BAX \cong \triangle B'A'X'$, због СУС и постоји изометрија $\mathcal{I}$ која слика један у други. Тада се полуправа AN слика у полуправу $A'N'$. Како изометрија "чува" паралелност, права BN се слика у праву кроз B' паралелну $A'N'$ тј. $B'N'$. Дакле $\mathcal{I}$ слика ABN у $A'B'N'$.



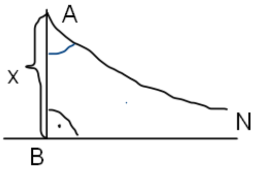
(2) Претпоставимо $\neg AB \cong A'B'$. Тада је једна дуж већа од друге, нпр. $A'B' > AB$.

Зато постоји тачка B_1 т.д. $\mathcal{B}(A', B_1, B')$ и $A'B_1 \cong AB$. Тада су асимптотски троуглови ABN и $A'B_1N'$ међусобно подударни, због претходне ставке. Зато је $\angle B \cong \angle B_1$. Даље следи да су код асимптотског троугла $B_1B'N'$ подударни спољашњи и несуседни унутрашњи угао, ($\lightning$).
Дакле $AB \cong A'B'$, па су је и $\triangle ABN \cong A'B'N'$. $\square$

Можемо посматрати два несвојствена троугла ABN и $A'B'N'$ т.д. су углови у тачкама B и B' прави. Претходна теорема имплицира:

Теорема (33.3)

Ако су ABN и $A'B'N'$ асимптотски троуглови са несвојственим теменима N и N' и правим угловима у теменима B и B' онда важи: $\angle A \cong A'$ акко $AB \cong A'B'$.



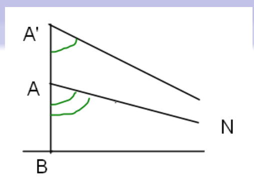
Сада можемо дефинисати функцију Π, **функцију Лобачевског**, која ће дужи AB мере x доделити угао $\angle A = \Pi(x)$ (одговарајући угао паралелности). Дакле $\Pi : D \to (0, \frac{\pi}{2})$.

Због претходне теореме подударним дужима одговарају подударни углови паралелности и обрнуто.

Теорема (33.6)

Ако је A' тачка полуправе BA онда је $A'B > AB$ акко $\Pi(A'B) < \Pi(AB)$.

Доказ. Нека је p, $B \in p$, $p \perp AB$ и нека су s и s' полуправе са теменима A и A' међусобно паралелне и паралелне p. Оне одређују асимптотске троуглове ABN и $A'BN$.



Ако је $AB < A'B$ тада је $\angle BAN$ спољашњи за асимптотски троугао $AA'N$, па је $\angle BAN > \angle BA'N$, тј. $\Pi(A'B) < \Pi(AB)$. Слично, $AB > A'B$ повлачи $\Pi(A'B) > \Pi(AB)$.

Обратно, ако важи $\Pi(A'B) < \Pi(AB)$ а претпоставимо да важи $AB > A'B'$ или $AB \cong A'B'$ због претходног добијамо контрадикцију. Зато је $AB < A'B'$. $\square$

Сада видимо да је функција Лобачевског монотоно опадајућа.

Може се показати да је, за једну одабрану меру дужи у хиперболичкој равни, функција Лобачевског дата са

$$\Pi(x) = 2\arctan(e^{-x}).$$

Одавде се најлакше види да је за $x \to \infty$, $\Pi(x) \to 0^+$. Слично, за $x \to 0+$ важи $\Pi(x) \to \frac{\pi}{2}^-$, односно угао паралелности тежи $\frac{\pi}{2}$. Зато можемо сматрати да се у хиперболичкој равни на малим растојањима реализује геометрија која је практично еуклидска.