21. Паралелност у апсолутном простору

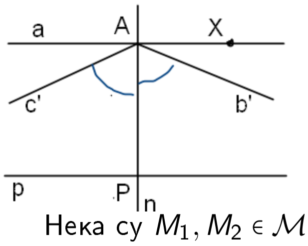
Прво ћемо доказати теорему на основу које ћемо моћи да уведемо појам паралелности.

Теорема (25.1)

Нека су A и p, тачка и права једне равни и $A \notin p$. Међу свим полуправама те равни са теменом A које не секу p постоје тачно две, b' и c', т.д. произвољна полуправа са теменом A сече праву p акко припада оном од углова са крацима b' и c' којем припада и p.

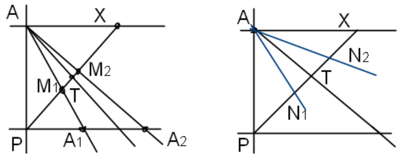
Полуправе b' и c' не секу p и p припада једном од углова њима одређеним. По теореми све полуправе тог угла са теменом A секу p, а b' и c' су "прве" које не секу p.

Доказ. Нека је n права, $A \in n$, $n \perp p$, $n \cap p = \{P\}$ и a права т.д. $A \in a$, $a \perp n$. Тада су a и p дисјунктне. Нека је $X \in a$, $X \neq A$. Покажимо да постоји $b' \subset \angle PAX$ која "раздваја" полуправе $\angle PAX$ са теменом A на оне које секу и које не секу p.



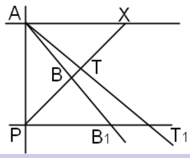
Свака од полуправих $\angle PAX$ сече дуж PX. Поделимо тачке дужи PX у скупове $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ т.д. тачка Y припада скупу $\mathcal{M}$ ако полуправа AY сече p, а иначе припада $\mathcal{N}$. Овим свака тачка припада тачно једном од скупова. При том $P \in \mathcal{M}$, $X \in \mathcal{N}$, па су они непразни.

Нека су $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$. Тада AM_1 и AM_2 секу a у неким тачкама A_1 и A_2. Ако је $\mathcal{B}(M_1, T, M_2)$, онда полуправа AT припада конвексном углу M_1AM_2, па сече и дуж A_1A_2 којој су темена на крацима тог угла. Дакле, тада $T \in \mathcal{M}$, тј. између две тачке скупа $\mathcal{M}$ нема тачака скупа $\mathcal{N}$.



Нека је $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$. Претпоставимо да постоји тачка $T \in \mathcal{M}$, т.д. $\mathcal{B}(N_1, T, N_2)$. Тада P, N_1, T, N_2 можемо линеарно уредити и P није између N_1 и N_2, нпр. $\mathcal{B}(P, N_1, T, N_2)$. Тада је $P, T \in \mathcal{M}$, па је и $N_1 \in \mathcal{M}$, $\lightning$. Значи и између две тачке из $\mathcal{N}$ нема тачака из $\mathcal{M}$.

По Дедекиндовој теореми тада постоји тачка $B \in PX$ која раздваја $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$.



Ком скупу припада B? Претпоставимо $B \in \mathcal{M}$. Тада AB сече p у B_1. Постоји T_1 т.д. $\mathcal{B}(P, B_1, T_1)$, а тада полуправа AT_1 припада $\angle B_1AX$ и сече дуж BX у T, па је $\mathcal{B}(P, B, T, X)$.

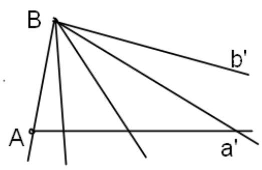
Сада $T \in \mathcal{M}$, па се тачке скупа $\mathcal{M}$ налазе са обе стране B и B не раздваја скупове, $\lightning$. Дакле $B \in \mathcal{N}$, и све полуправе отвореног угла $\angle(PAB)$ секу a, а полуправе $\angle[BAX]$ не секу a. Означимо $b' = AB$. Уочимо $\mathcal{S}_n : n, a, p \mapsto n, a, p$. Нека је $\mathcal{S}_n(b') = c'$. Тада и све праве отвореног $\angle(c', AP)$ секу p. Полуправе b', c' испуњавају услове теореме. $\square$

Дефиниција

Полуправе b', c' су **паралелене** правој p (пишемо $b' \| p$). Такође, ако је b права која садржи b' онда је и $b \| p$. Ако је p' полуправа праве p, т.д. b' и p' припадају истој полуравни чији руб садржи њихова темена онда су и полуправе b' и p' **паралелне**.

Примедба *Дакле, увели смо релацију на скупу правих, затим на скупу полуправих и између правих и полуправих. Ниједна од ових релација, по дефиницији, није рефлексивна.*

Примедба... *Такође, ако су c и b праве које садрже c' и b', важи $b \| p$, $c \| p$ (може се показати $p \| c$), али $b \cap c = \{A\}$, и релација на скупу правих није транзитивна.*

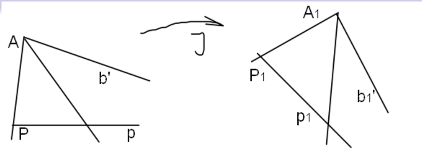


Дакле полуправа b' са теменом B је паралелна полуправој a' са теменом A ако су a' и b' дисјунктне, а све полуправе са теменом B из угла $\angle(BA, b')$ секу a'.

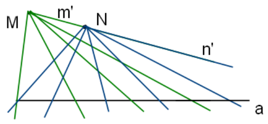
Дефиниција

Угао $\angle PAB = \angle(AP, b') \cong \angle(AP, c')$ је **угао паралелности** за тачку A и праву p, односно за дуж AP.

Ако су b' и c' полуправе праве a онда је угао паралелности прав, а иначе је оштар.

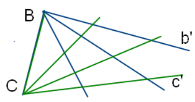


Нека је полуправа b' са теменом A паралелна правој p и P подножје нормале из A на p. Нека је $\mathcal{I}$ изометрија, $\mathcal{I} : b', p, P \mapsto b_1', p_1, P_1$. Како $\mathcal{I}$ "чува" колинеарност, $\mathcal{I}$ слика полуправе $\angle(PAB)$ које секу p у полуправе $\angle(P_1 A_1 B_1)$ које ће сећи p_1 па је и $b_1' || p_1$. Дакле, изометрије "чувају" паралелност.



Теорема (25.4)

(Теорема о трансмисибилности) Ако полуправа m' садржи полуправу n' тада је једна од њих паралелна правој a акко јој је паралелна и друга. **БД**



Теорема (25.5)

(Теорема о симетричности) Ако је полуправа c' паралелна полуправој b', онда је и b' паралелна c'. **БД**

Теорема (25.6)

(Теорема о транзитивности) Ако су a', b', c' три дисјунктне полуправе једне равни и ако је $a' || b'$ и $b' || c'$ онда је и $a' || c'$. **БД**

Теорема (25.8-9)

Нека су a и b две међусобно паралелне праве равни π и $C \notin \pi$. Пресек равни α и β које садрже тачку C и редом праве a и b је права c паралелна свакој од правих a и b. При том је она јединствена полуправа која садржи C и паралелна је a и b. **БД**

Теорема (25.11)

Скуп $\mathcal{X}$ који се састоји из праве која садржи полуправу p' равни π и свих правих равни π паралелних полуправој p' је прамен правих. **БД**

Дефиниција

Овај прамен називамо **параболичким** праменом, односно **праменом паралелних правих**. Одговарајући епицикл назива се **орициклом**.