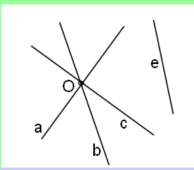
17. Праменови правих и епицикли

Дефиниција

Максималан подскуп $\mathcal{X}$ скупа свих правих једне равни таквих да за произвољне $a, b, c \in \mathcal{X}$ важи да је $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$ осна рефлексија је **прамен правих.**

Примедба *Ако је* $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_d$*, онда је* $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_d$*, па је* $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_c = \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_c = \mathcal{S}_{\mathcal{S}_c(d)}$*. Слично се покаже и за остале пермутације осних рефлексија* $\mathcal{S}_a, \mathcal{S}_b, \mathcal{S}_c$ *да дефиниција не зависи од редоследа у композицији.*

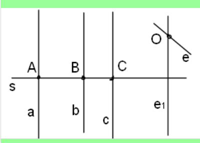
Пример *(обавезан) Нека је* $\mathcal{X}$ *скуп свих правих једне равни које садрже тачку* O*. Нека* $a, b, c \in \mathcal{X}$*.*



Тада је композиција $\mathcal{I} = \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$ *индиректна трансформација. При том* $\mathcal{I}(O) = \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a(O) = \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b(O)$ $= \mathcal{S}_c(O) = O$*, па* $\mathcal{I}$ *има бар једну фиксну тачку, те је у питању осна рефлексија.*

Пример *...Дакле* $\mathcal{I} = \mathcal{S}_d$ *за неку праву* d*. При том је* $\mathcal{S}_d(O) = O$*, па и* $O \in d$*, тј.* $d \in \mathcal{X}$*.*
Да ли је овај скуп максималан такав? Нека $O \notin e$*. Претпоставимо да је* $\mathcal{S}_e \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$ *осна рефлексија* $\mathcal{S}_f$*. Тада је* $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_e \circ \mathcal{S}_f$*, па како је* $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a(O) = O$ *следи и* $\mathcal{S}_e \circ \mathcal{S}_f(O) = O$*, те је* $O \in e \cap f$*.* $\lightning$
Дакле $\mathcal{X}$ *је прамен. Зовемо га праменом конкурентних правих,* O *је центар тог прамена и још га означавамо са* $\mathcal{X}_O$*. Уочимо, ако се* a *и* b *секу у* O *е*$, a, b$ *припадају истом прамену акко* $O \in e$*.*

Пример *(обавезан) Нека је* $\mathcal{X}$ *скуп свих правих дате равни ортогоналних на праву* s*.*



Нека $a, b, c \in \mathcal{X}$ *секу* s *у* A, B, C*. Како је* $s \perp a$*, следи* $\mathcal{S}_a(s) = s$*. Тада је* $\mathcal{S}_a|_s$ *изометрија праве* s*, са фиксном тачком* A *која при том није идентичка. Зато* $\mathcal{S}_a|_s = \mathcal{S}_A$ *је централна рефлексија праве* s*.*

Пример ...*Нека је $\mathcal{I} = \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$. Следи да је $\mathcal{I}(s) = s$, а $\mathcal{I}|_s = \mathcal{S}_C \circ \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_A$ индиректна изометрија праве, па је $\mathcal{I}|_s$ централна рефлексија праве $\mathcal{S}_D$. Дакле постоји $D \in s$ т.д. је D фиксна за $\mathcal{I}$. При том је $\mathcal{I}$ индиректна, као композиција три индиректне трансформације. Зато је $\mathcal{I}$ осна рефлексија равни $\mathcal{S}_d$.*

Важи да је $\mathcal{S}_d(s) = \mathcal{I}(s) = s$, па је или $s = d$ или $s \perp d$. Ако би било $s = d$ онда би $\mathcal{S}_d|_s = \mathcal{I}_s$ била коинциденција праве s, $\mathcal{E}_s$, директно пресликавање праве ($\lightning$). Зато $s \perp d$ те је и $d \in \mathcal{X}$.

Да ли је $\mathcal{X}$ максималан такав? Нека је $e \notin \mathcal{X}$, нека је $\mathcal{S}_e \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$ осна рефлексија $\mathcal{S}_f$ и $a \neq b$. Нека је $O \in e$ и нека је e_1 права, $O \in e_1$, $e_1 \perp s$. Тада је и $\mathcal{S}_{e_1} \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_{f_1}$, $f_1 \perp s$.

$$\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_e \circ \mathcal{S}_f = \mathcal{S}_{e_1} \circ \mathcal{S}_{f_1} \Rightarrow$$
$$\mathcal{S}_e \circ \mathcal{S}_{e_1} = \mathcal{S}_f \circ \mathcal{S}_{f_1},$$
$$\mathcal{S}_e \circ \mathcal{S}_{e_1}(O) = O \Rightarrow \mathcal{S}_f \circ \mathcal{S}_{f_1}(O) = O \Rightarrow O \in f \cap f_1.$$

Пример ...*Тада $O \in e_1, f_1$, $e_1, f_1 \perp s$, па је $e_1 = f_1$ а онда и $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{E}$, тј. $a = b$ $\lightning$.*

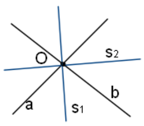
Зато је $\mathcal{X}$ прамен, зовемо га прамeном ортогоналних правих и означавамо га са $\mathcal{X}_s$, s је његова основица. Уочимо, ако су a, b ортогоналне на s, тада e, a, b припадају једном прамену акко $e \perp s$.

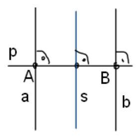
Теорема

Ако $a, b, c \in \mathcal{X}$ тада је $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_c$.

Може се показати да важи еквиваленција, ми ћемо доказати један смер.

Доказ. Ако $a, b, c \in \mathcal{X}$ онда је $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_d$, а како је $\mathcal{S}_d = \mathcal{S}_d^{-1}$ следи $\mathcal{S}_d = (\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a)^{-1} = \mathcal{S}_a^{-1} \circ \mathcal{S}_b^{-1} \circ \mathcal{S}_c^{-1}$
$= \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_c$. □





Ако се a и b секу у O, њихове осе симетрије садрже O.
Ако a и b имају заједничку нормалу p, коју секу у A и B, нека је O средиште AB. Права $s \perp p$, $O \in s$ је оса симетрије a и b а по теореми Хјелмслева других оса симетрије за a и b нема.
Дакле ако $a, b \in \mathcal{X}_O$ или $a, b \in \mathcal{X}_p$ и њихова оса симетрије припада истом прамену.

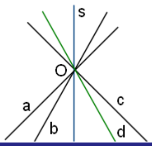
Теорема (16.1)

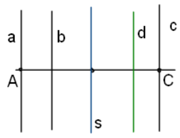
Нека су a, b, c, d четири праве једног конкурентног или ортогоналног прамена. Тада је $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_d$ акко је оса рефлексије правих a и c истоветна са осом рефлексије b и d.

Доказ. Нека је s оса симетрије правих a и c. Тада је $\mathcal{S}_c = \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_s$. Даље је

$$\begin{aligned} & \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a \\ =& \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_a \circ \underbrace{\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a} \\ =& \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_a \circ \underbrace{\mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_s} \quad (jer \;\; s, b, a \in \mathcal{X}) \\ =& \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_s = \mathcal{S}_{\mathcal{S}_s(b)}. \end{aligned}$$

□



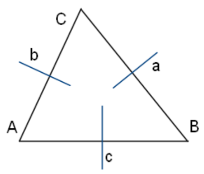


Теорема (16.2)

Медијатрисе ивица троугла припадају једном прамену.

Не нужно конкурентном!

Доказ.

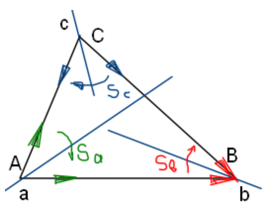


Нека су a, b, c медијатрисе ивица BC, CA и AB троугла ABC. Нека је $\mathcal{I} = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_c$. Тада је $\mathcal{I}$ индиректна трансформација. При том $\mathcal{I}(A) = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_c(A) = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a(B) = \mathcal{S}_b(C) = A$, па $\mathcal{I}$ има и бар једну фиксну тачку. Зато је $\mathcal{I}$ осна рефлексија. Скуп $\{a, b, c\}$ се може допунити до максималног $\mathcal{X}$ т.д. је $\mathcal{X}$ прамен, па a, b, c припадају једном прамену. □

Теорема (16.3)

Симетрале унутрашњих углова троугла припадају конкурентном прамену.

Доказ. Нека су a, b, c симетрале $\angle BAC$, $\angle CBA$, $\angle ACB$.



Изометрија $\mathcal{I} = \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$ је индиректна. При том се оријентисана дуж AC слика путем $\mathcal{S}_a$ у дуж истосмерну са AB, која се затим путем $\mathcal{S}_b$ слика у дуж истосмерну са CB, а она се даље путем $\mathcal{S}_c$ слика у дуж истосмерну са CA. Дакле $\mathcal{I}$ слика праву CA у себе и при том је $\mathcal{I}|_{AC}$ је индиректна, односно постоји тачка $D \in AC$ т.д. $\mathcal{I}|_{AC} = \mathcal{S}_D$.
Зато $\mathcal{I}$ има бар једну инваријантну тачку, те је у питању осна рефлексија, а онда праве a, b, c припадају једном прамену.
Симетрала унутрашњег угла $\angle BAC$ сече BC у E, а симетрала $\angle ABE$ сече AE у S. Дакле две симетрале се секу, па је у питању прамен конкурентних правих. □

Теорема (16.8)

Праве које садрже висине троугла припадају једном прамену. **БД**

Не нужно конкурентном.

Теорема (16.11-14)

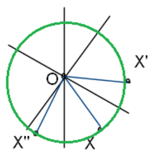
Ако су a и b две разне праве једне равни тада постоји јединствени прамен правих те равни такав да садржи a и b. (Означавамо га $\mathcal{X}(a,b)$.)
Ако је P тачка те равни онда постоји јединствена права p, т.д. $P \in p$ и $p \in \mathcal{X}(a,b)$. **БД**

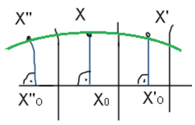
Теорема (16.15-17)

Нека је $a, b, c \in \mathcal{X}$. Тада је $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_d$ акко је оса симетрије a и c истоветна са осом симетрије b и d. У том случају је и $d \in \mathcal{X}$. **БД**

Дефиниција

Нека је $\mathcal{X}$ прамен правих равни π и $X \in \pi$ тачка која не припада свим правама $\mathcal{X}$. Скуп свих тачака равни π осносиметричних тачки X у односу на праве прамена $\mathcal{X}$ је **епицикл** $\mathcal{E}(\mathcal{X}, X)$.





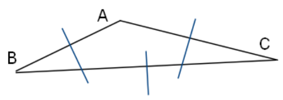
Пример *Нека је $\mathcal{X}_O$ прамен конкурентних правих. Тада $X' \in \mathcal{E}(\mathcal{X}_O, X)$ акко $OX \cong OX'$. Овај епицикл је* **круг**, *који још означавамо са $k(O, OX)$, O је његов* **центар**, *а OX* **полупречник**.

Пример *Нека је $\mathcal{X}_s$ ортогонални прамен. Нека су X_0 и X_0' пројекције тачака X, X' на s. Тада је $X' \in \mathcal{E}(\mathcal{X}_s, X)$ акко $X'X_0' \cong XX_0$ и $X, X' \doteq s$. Овај епицикл је* **еквидистанта**, *s је њена* **основа**, *а XX_0 њена* **висина**.

Примедба *У општем случају, у апсолутној равни, еквидистанта НИЈЕ права. Ипак ако је висина еквидистанте $\mathcal{E}$ нула, онда је $\mathcal{E} = s$ права.*

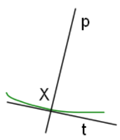
Теорема

Два епицикла $\mathcal{E}(\mathcal{X}, X)$ и $\mathcal{E}(\mathcal{X}_1, X_1)$ су истоветна акко $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1$ и $X_1 \in \mathcal{E}(\mathcal{X}, X)$. **БД**



Ако две тачке припадају епициклу, симетрала дужи њима одређене припада одговарајућем прамену. Како је прамен одређен двема правама, епицикл је одређен са три своје тачке. Нека су A, B, C произвољне тачке. Ако су колинеарне, симетрале дужи BC, CA, AB припадају једном ортогоналном прамену. Ако су неколинеарне, онда су три медијатрисе ивица троугла $\triangle ABC$ праве једног прамена. Зато, за сваке три тачке постоји тачно један епицикл који их садржи.

Зато, два разна епицикла (или права и епицикл) могу имати највише две тачке заједничке.



Дефиниција

Нека је $\mathcal{E}$ епицикл одређен праменом $\mathcal{X}$, $X \in \mathcal{E}$ и $p \in \mathcal{X}$, $X \in p$. Права t, т.д. $X \in t$, $t \perp p$ је **тангента** епицикла $\mathcal{E}$ у X.

Може се показати:

- ако епицикл није линеаран онда његова тангента са њим има тачно једну заједничку тачку;
- све тачке нелинеарног епицикла су са исте стране његове произвољне тангенте;
- епицикл "ограничава" конвексну област.