KOMPLEKSNE FUNKCIJE

Prof. dr MIODRAG MATELJEVIĆ

April 6, 2006

0.1 Oznake i formule

Kompleksan broj $z = x + i\,y,\ w = u + i\,v,\ |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$,
sfera $\mathrm{S} = \mathrm{S}^2$;
$\mathrm{B} = \mathrm{B}(a; r)$ krug sa središtem u tački a poluprečnika r;
$\mathrm{B}' = \mathrm{B}'(a; r)$ probušen krug
$\mathrm{K} = \mathrm{K}(a; r)$ kružnica sa središtem u tački a poluprečnika r;
$\mathcal{K} = \mathcal{K}_r = \mathcal{K}_r(a)$ orijentisana kružnica
$\mathcal{C} = \mathcal{C}_r = \mathcal{C}_r(a)$ orijentisana polukružnica
$\mathrm{T_r}$, $\mathrm{U_r}$, specijalno, kružnica (respektvno krug) sa središtem u koordinatnom početku
T jedinična kružnica; $\mathrm{T}_\alpha = \mathrm{T}\setminus\{e^{i\,\alpha}\}$; U jedinični krug; sa U_a i B_a označavamo krugove sa središtem u a
$\mathrm{E}_R = \{z : |z| > R\}$ spoljašnjost kruga; $\mathrm{E} = \{z : |z| > 1\}$
e euklidsko, ρ sferno rastojanje
$H = H^+$ gornja poluravan; H^- donja poluravan;
Π^+ desna poluravan; Π^- leva poluravan
$\mathrm{Z} = \mathrm{p(z)}$ stereografska projekcija
$\lim_{z\to a} f(z)$ granična vrednost
f', izvod; df diferencijal, linearni operator
$\mathcal{H}(\Omega)$ klasa holomorfnih funkcija na Ω,
linearni operator l
$h = g \circ f$, $h' = g'(f(z))\,f'(z)$, izvod kompozicije
$[z, w]$ segment
$\operatorname{cis} t = \cos t + i \sin t = \exp(it)$
$\mathbb{R}^+ = \{x : x > 0\}$, $\mathbb{R}^- = \{x : x < 0\}$, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$
arg, grana argumenta arg
$z = r\ \operatorname{cis}\varphi$, trigonometrijski oblik kompleksnog broja
$\mathrm{I} = [0, 1]$ interval, $\mathrm{I}_\alpha = (\alpha, \alpha + 2\,\pi]$
$e = \exp$ eksponencijalna funkcija; cos sin trigonometrijske funkcije
$z = r\ \mathrm{e}^{i\,\varphi}$ polarna forma kompleksnog broja
$\Lambda_\alpha = \{\rho e^{i\,\alpha} : 0 < \rho < +\infty\}$ poluprava; $O_\alpha = \mathbb{C}^* \setminus \Lambda_\alpha$ oblast
$\Pi_\alpha = \{z : \alpha < y < \alpha + 2\,\pi\}$ pojas;
$\boldsymbol{\Pi}_k = \{z : \alpha + 2\,k\,\pi < y < \alpha + 2\,(k+1)\,\pi\}$; $\mathrm{J}_\alpha = (\alpha,\, \alpha + 2\,\pi)$ interval; $\mathrm{I}_\alpha = (\alpha,\, \alpha + 2\,\pi]$ interval; $\mathcal{J}_k = (\alpha + 2\,k\,\pi,\, \alpha + 2\,(k+1)\,\pi)$
Arg všz funkcija argument, arg grana argumenta
Ln višeznačna funkcija logaritam; ln grana logaritma
za fiksirano $\alpha \in \mathbb{R}$
$\ln_k$, grana logaritma, na O_α, sa vrednostima u $\boldsymbol{\Pi}_\mathbf{k}$
$\arg_k$, grana argumenta, na O_α, sa vrednostima u $\mathcal{J}_k$;
$\arg_k = \operatorname{Im}\ln_k$; $\ln'_k = \mathcal{J}$
Ako je $0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$ pogodno je umesto $\Omega = \{re^{i\varphi} : 0 < r < +\infty, \alpha < \varphi < \beta\}$ pisati kratko $\Omega = \{\alpha < \varphi < \beta\}$
$I = I_\gamma = I_\gamma f = \int_\gamma f\,dz$ kompleksni integral
kontura: deo po deo gladak put, luk: deo po deo neprekidno-diferencijabilan put
uobičajene oznake:

G konturna oblast; Γ pozitivno orijentisana granica; D elementarna oblast
$\mathcal{A}(\Omega)$ klasa regularno -analitičkih funkcija na Ω,
put γ, trag puta γ^*, $\Gamma = f \circ \gamma$
$\partial f = Df = \frac{1}{2}(\mathrm{f_x} - \mathrm{i\,f_y})$, $\overline{\partial} f = \overline{D} f = \frac{1}{2}(\mathrm{f_x} + \mathrm{i\,f_y})$
KIT', Košijeva integralna teorema o izvodu
$\mathrm{Gr\,el - Oy}$, Grinova teorema za elementarne Oy oblasti
$\mathrm{O\,Gr\,T} - \overline{\partial}$, Kompleksna verzija opšte Grinove teoreme
$\mathrm{O\,KIT}_a$ Opšta Košijeva integralna teorema za analitičke funkcije
$\mathrm{LKJ\,Rep}\,\mathcal{A}$, Lema o reprodukciji
$|c_k| \le \frac{M_\rho}{\rho^k}$ Košijeva nejednakost
$\mathrm{TK - Go\,1}$ Teorema Koši-Goursa $\mathcal{H} = \mathcal{A}$
$\mathrm{KIT}\,\Delta$ Košijeva integralna teorema za trougao
$\mathrm{KIT}\,\Delta\,1$ Košijeva integralna teorema za trougao sa ispuštenom tačkom
$f(z) = K_\Gamma[f](z)$, Opšta Košijeva integralna formula za konturne oblasti
$K(z,\zeta) = \frac{1}{z-\zeta}$ Košijevo jezgro, $K_a(z) = \frac{1}{z-a}$ Košijevo jezgro
$\mathcal{J}$; $\mathcal{J} = K_0$ kompleksna inverzija
$K_\gamma[h](z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma K(z,\zeta)\,h(\zeta)\,d\zeta$; ako je $h \equiv 1$ pišemo K_γ ili Ind_γ umesto $K_\gamma[h]$
$K_\gamma\, z$ ili $\mathrm{Ind}_\gamma\, z$, Indeks zatvorenog puta γ u odnosu na z
$n_\gamma z$ ili $n = n(\gamma, z)$ broj obilazaka zatvorenog puta γ u odnosu na z,
$\mathrm{V = V(a,b;r,R)} = \{z : |z-a| > r,\ |z-b| < R\}$ prsten; $\mathrm{A = A(a;r,R)}$ pravilan prsten
$\mathcal{F}$ ili F primitivna za f $F' = f$
Za funkciju f uvodimo oznake $f_k(\zeta) = f_k(\zeta, a) = \frac{1}{2\pi i} f(\zeta)\,(\zeta - a)^{-k-1}$, $c_k = c_k[\gamma] = c_k[\gamma, f] = \int_\gamma f_k(\zeta)\,d\zeta$
$f = F_1 + f_1$, F_1 glavni deo Loranovog reda; $F = f^* = f \circ \mathcal{J}$
$\mathrm{Res}(f,a)$ rezidum funkcije f u tački a
$\mathrm{Res}(f,a) = c_{-1}$
$\mathrm{Res}(f,a) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$, gde je $f = \varphi/\psi$, $\psi'(a) \neq 0$.
Ako funkcija f ima pol reda n u tački a, pišemo $\Phi = (z-a)^n f$, $\Psi = \frac{(\Phi)^{n-1}}{(n-1)!}$,
$\mathrm{Res}(f,a) = c_{-1} = \Psi(a)$
$\mathrm{Ln\,Res}(f,a) = \mathrm{Res}\Big(\frac{f}{f'}, a\Big)$ Logaritamski rezidum
$\mathrm{Res}(f,\infty)$ rezidum funkcije f u tački ∞
$\mathrm{Res}(f,\infty) = -c_{-1}$
S suma reziduma
S^+ suma reziduma u H,
$\mathrm{N = N_h = N(h,G)}$ broj nula funkcije h u oblasti G, $\mathrm{P = P_h = P(h,G)}$ broj polova

$\mathcal{R} = \dfrac{\mathcal{P}}{\mathcal{Q}}$ racionalna funkcija
$\mathrm{O}_\alpha = \mathrm{O}(\alpha)$ Ojlerov integral,
$\mathrm{O}^*_\alpha = \mathrm{O}_1(\alpha) = \text{v.p.} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1-x}\,dx = \pi\, ctg\,(\alpha\,\pi)$ Ojlerov integral druge vrste (u smislu glavne vrednosti)
$\mathrm{B} = \mathrm{B(p, q)}$ Beta funkcija
$I = I[f] = I_\gamma[f] = \dfrac{1}{2\,\pi\, i} \displaystyle\int_\gamma \frac{f'}{f}\,dz,\ J = J[f] = J_\gamma[f] = \int_\gamma \frac{f'}{f}\,dz$ Logaritamski rezidum u odnosu na konturu
$\Delta \mathrm{Arg}\,\gamma$ promena argumenta duž puta γ
$\Delta_\gamma \mathrm{Arg}\,f$ promena argumenta funkcije f duž puta γ
$N - P = \dfrac{1}{2\,\pi}\,\Delta\,\mathrm{Arg}\,\Gamma$ Princip *argumenta*
$M \Subset \Omega$, M kompaktno pripada Ω
$D_\alpha = \mathbb{C}^\alpha = \{-\pi + \alpha < \varphi < \pi + \alpha\}$, $D_\alpha = O_{\alpha-\pi} = -O_\alpha$
Ako je $a = |a|e^{i\alpha} \neq 0$, pogodno je, respektivno, pisati Λ^a, O^a i $\mathbb{C}_a = D^a$ umesto Λ_α, O_α i $\mathbb{C}^\alpha = D_\alpha$.
Sa f_α i g_α obično označavamo, respektivno, glavnu granu korena i logaritma na O_α (odnosno $\mathbb{C}^\alpha$).
$A(\zeta) = i\dfrac{1-\zeta}{1+\zeta}$ (A preslikava U na H), $B(\omega) = \dfrac{i-\omega}{i+\omega}$, $B = A^{-1}$
Funkcija Žukovskog definisana sa $w = Z(z) = \dfrac{1}{2}(z + z^{-1})$
Inverzna funkcija je $z = Z^{-1}(w) = w + \sqrt{(w^2-1)}$
$Rz = iz$, $R_1\zeta = -i\zeta$
$\sin = Z \circ R_1 \circ e \circ R$
$\mathrm{Arcsin} = R^{-1} \circ \mathrm{Ln} \circ R_1^{-1} \circ Z^{-1}$, $\mathrm{Arcsin}\,z = -i\mathrm{Ln}\,(iz + \sqrt{1-z^2})$
$\mathrm{Arcsin}\,z = -i\mathrm{Ln}(iz + \sqrt{1-z^2})$
$\cos = Z \circ e \circ R$, $\mathrm{Arccos}\,z = i\mathrm{Ln}\,(z + \sqrt{z^2-1})$
$\mathrm{tg} = A \circ e \circ R_2$, $R_2 z = 2iz$
$\mathrm{Arctg}\,z = \dfrac{1}{2i}\mathrm{Ln}\,\dfrac{i-z}{i+z}$
Inverzija J je data sa $J\zeta = \zeta^{-1}$, $\mathrm{ctg} = J \circ \mathrm{tg}$, $\mathrm{Arcctg} = (\mathrm{Arctg}) \circ J$
$B_1 = B \circ J = -J \circ B$, $\mathrm{Arcctg}\,z = \dfrac{1}{2i}\mathrm{Ln}\,\dfrac{z+i}{z-i}$
kružni analitički element $\mathcal{F} = (U_a, f_a)$, analitički element $\mathcal{F}_t = (B_t, f_t)$
Za konturna oblasti koristi se i naziv deo po deo regularne (ponekad kratko regularne)

KA (Kompleksna Analiza), RA (Realna Analiza), PF (Polarna Forma), JTF (Jedinost Trigonometrijske Forme), JPF (Jedinost Polarene Forme), EPF (Jednakost Polareni Formi), PMM (Princip Maksimuma Modula), KIT (Košijeva Integralna Teorema), OKIT (Opšta Košijeva Integralna Teorema), KIF (Košijeva Integralna Formula), POOb (Princip očuvanja oblasti)

Predgovor

Udžbenik je napisan prema važećem programu predmeta Kompleksna analiza Matematičkog fakulteta u Beogradu. Glave 1, 2 i 3, deo Glave 5 i deo Sekcije 6.1 sadrže materijal namenjen studentima N, V i R smera.
Udžbenik sadrži standardani materijal:
1. O kompleksnim brojevima 2. Osnovni pojmovi 3. Kompleksni brojevi i elementarna geometrija 4. Eksponencijalna funkcija, Ln i Arg 5. Integracija i holomorfne funkcije 6. Izolovani singulariteti 7. Rezidum i primene u integraciji
8. Tipovi Integrala
9. Konformna i bilinearna preslikavanja:
    1. Konformno preslikavanje (konf ču) 2. Bilinearna preslikavanja
10. Analitičko produženje, Postojanje grana, Regularne grane i Integrali
11. Geometrijski principi
    1. Princip Argumenta 2. Princip očuvanja oblasti 3. Princip maksimuma modula (PMM) i lema Švarca
12. Teorema Rimana*
13. Korespondencija granica i princip simetrije
14. Promena argumenta duž puta i Žordanove teoreme*
15. Harmonijske funkcije
16. Grane, promena argumenta, Indeks i primene

Tekst se sastoji iz sedam glava:

Gl 1 **Osnovni pojmovi - holomorfne funkcije**, 1.1-1.6;
Gl 2 **Integracija i holomorfne funkcije**, 2.1-2.5;
Gl 3 **Konformna i bilinearna preslikavnja**, 3.1-3.3;
Gl 4 **Dodatak A**, 4.1-4.4;
Gl 5 **Analitičko produženje i regularne grane**, 5.1-5.4;
Gl 6 **Osnovi geometrijske teorije**, 6.1-6.3;
Gl 7 **Dodatak B (Holomorfne funkcije 2)**, 7.1-7.7.

Teorija je ilustrovana primerima i Vežbanjima.
Udžbenik ne zahteva specijalna predznanja. Na primer, trigonometrijske funkcije se uvode na dva načina pomoću modela jediničnog kruga i eksponencijalne funkcije i daju se jednostavni dokazi adicionih formula.

Sekcija o exp funkciji, koja je baza za razumevanje kursa, pokazuje da ova funkcija u vezi sa logaritmom i argumentom ima osnovnu ulogu u Kompleksnoj analizi.
U odnosu na klasičnu literaturu precizirani su, na primer, pojmovi i svojstva grane argumenta, istaknuta je uloga oblasti O-tipa, promene argumenta i indeksa.
Često je u primenama neophodno izračunati indeks tačke u odnosu na put (broj obilazka puta oko tačke) u raznim situacijama i koristiti neke verzije Žordanove teoreme (koja ima važnu ulogu u kursu): prosta zatvorena kontura γ deli $\mathbb{C}$ na tačno dve komponente, unutrašnju $\mathrm{Int}(\gamma)$ i spoljašnju $\mathrm{Ext}(\gamma)$, i da je $\mathrm{Ind}_\gamma z = \pm 1$ za svako $z \in \mathrm{Int}(\gamma)$.
U knjizi se sistematski razvija metod za koji ćemo koristiti naziv metod *argumenta - indeksa*.
Verzija metoda *argumenta - indeksa* daje stroge dokaze, na primer, Teoreme o postojonju grana (Sekcija 5.2), Principa argumenta, Ruševe teoreme, *homološke verzije OKIT*, ... itd.

Razne verzije Košijeve Integralne Teoreme (KIT), koja je centralni rezultat klasične Kompleksne analize (KA), dokazuju se pomoću:

1. metoda podele i
2. metoda *argumenta - indeksa*.

U Glavi 2, dokazuje se Košijeva Integralna Teorema (KIT) za jednostavne oblasi pomoću metoda podele (slično kao u kursu Analize 2, izvodi se Grinova formula), a u Glavi 7 pomoću metoda *argumenta - indeksa*.

Metod podele i metoda *argumenta - indeksa* mogu se razmatrati kao komplementarni. Na primer, metoda *argumenta - indeksa* primenjuje se na konture koje pripadaju oblasti u kojoj je funkcija holomorfna, a pomoću metoda podele dokazuje se da se svaka deo po deo regularna oblast može podeliti na konačan broj oblasti od kojih je svaka elementarna ili u pravcu x-ose ili u pravcu y-ose.

U klasičnoj literaturi *OKIT* (Opšta Košijeva Integralna Teorema) se dokazuje pomoću postupka koji referišemo kao *metod zaseka*.
Na primer, Šabat kombinuje *metod zaseka* sa osobinama *homotopije* (intuitivno neprekidnih deformacija puteva) i izvodi *homotopsku verziju OKIT*. Ovaj postupak referišemo kao *metod zaseka-homotopije* (videti Podsekciju 2.1.13).
Analiza raznih varijacija *metod zaseka* pokazuje da postoje teškoće da se ovaj postupak strogo zasnuje.
Ova činjenica, pedagoški razlozi, kao i prirodan nastavak metoda Analize, uticali su na opredeljenje da se u knjizi prvo dokaže *OKIT* za jednostavne oblasti bez pozivanja na *metod zaseka*.
Po mišljenju autora metod homotopije je primenljiv kada dovoljno razvijemo teoriju tako da možemo konstruisati neprekidne deformacije puteva (na primer, pomoću Rimanove teoreme).
Ahlfors je verovatno prvi u udžbeniku dokazao *OKIT* pomoću pojma i osobina indeksa (*homološka verzija OKIT* koristeći radove Artina). Ovaj pristup je prihvaćen u poslediplomskoj nastavi.

Iz pedagoških raloga neke teoreme su dokazane na razne načine; specijalno, Ruševoa teorema, *PMM*, *POOb*, *PKOb*, ...

U prvom čitanju može se proučiti samo jedan dokaz. Veoma je bitno napomenuti da simbol $*$ znači da se tekst može izostaviti u prvom čitanju, dok simbol $**$ označava da se tekst može izostaviti u prvom čitanju i da se dokazi sastoje od složenijih ili apstrakrtnijih elementa.

U prvoj fazi učenja obratiti pažnju na osnovne definicije i svojstva (holomorfne funkcije, Koši-Rimanovi uslovi, eksponencijalna funkcija, argument, logaritam, trigonometrijske funkcije, rezidum, formule za računanje reziduma, konformna i bilinearna preslikavanja), primere, osnovne teoreme (KIT i KIF teorema za jednostavne oblasti, Tejlorova teorema, Loranova teorema, karakterizacija singulariteta pomoću Loranove teoreme, Košijevu teoremu o sumi reziduma, teoreme o konformnim i bilinearnim preslikavanjima) i eventualno zapamtiti skice dokaza.

U drugoj fazi učenja pokušati detaljnije shvatiti teže osnovne pojmove. Na primer, integraciju pomoću podele na jednostavne oblasti, regularne grane i primene u integraciji, detaljnije tipove integrale, itd.
Studenti, koji polažu jednosemestralni kurs, mogu u završnoj fazi proučavati npr. pojam i svojstva promene argumenta duž puta, PMM, *POOb*, itd.

U vezi programa za studente M-smera, teme koje su na granici između redovnih i poslediplomskih studija: na primer, apstraktni pojmovi kao homotopija, promena argumenta duž puta, prosto povezane oblasti (homotopska definicija), razne definicije analitičkog produženja, argumenta duž puta, itd. mogu se prvo shvatiti intuitivno i tako objasniti na predavanjima.
Ovo se specijalno odnosi na Glavu 7. Čitalac može razmotriti, recimo, sekciju 7.3, Integracija duž konture, Košijeva Integralna Teorema i Posledice, u kojoj se razmatraju i neke veze sa drugim oblastima.

Studenti M-smera (ako se opredele da studiraju veći deo materijala prezentiranog u knjizi i stignu do završne faze) mogu razne dokaze (ili skice) Rimanove, Karateodorijeve, Žordanove teoreme o podeli i sekciju Integracija duž konture, Košijeva Integralna Teorema i Posledice, koja sadrži neke najvažnije rezultate kursa i koja je pisana apstraktnije (i za poslediplomce) studirati detaljnije i uočiti razliku u odnosu na pristup u prethodnim glavama (npr. u Glavi 2).

Glava 7 uključuje važne sekcije: 7.1, Promena argumenta duž puta i Žordanove teoreme; 7.2 Analitičko produženje 2. deo; 7.3 Integracija duž puta, Košijeva Integralna Teorema (KIT) i Posledice*; 7.5 Podela regularnih oblasti na $*$-elementarne i dokaz Grinove formule .

U tekstu ima originalnih delova tako da je potrebna vremenska distanca da budu u potpunosti prihvaćeni (ili eventualno korigovani; na primer, Sekcije 7.1 i 7.5).

Prvu verziju skripte otkucale su studentkinje R - smera Biserka Vulović, Ivana Stefanović i Tamara Tomšić. Neke delove su otkucali docent Ivan Aranđelović,

diplomirani matematičar Miloljub Albijanić. Asistent Miljan Knežević otkucao je neke delove teksta, a student Milena Vasiljević otkucala je neke delove za Izborni predmet. Asistent u Banja Luci Slađana Babić, studenti Anja Banković, Jasna Blagojević, Ivana Božić, studenti iz Banja Luke Siniša Bubonja i Slavko Brdar, Danijela Vasiljevć, Ivan Dimitrijević, Nevena Golubović, Nataša Đurđevac, Tatjana Jakšić, Tijana Kostić, Jelena Knežević, Verica Obradović, Marek Svetlik, Milena Merička, Ivan Mitrović, Bogdan Radaković, Ana i Tanja Ravić, Radmila Sazdanović, Tatjana Simčević, Jelena Spasojević, Sonja Telebaković, Anđelija Vukić, Staša Vujičić, Dejan Vesić i Bojan Živković pažljivo su pročitali neke delove teksta i dali niz vrlo korisnih sugestija. Posebno ističemo da je Đorđe Stakić pročitao ceo tekst, dao niz vrlo korisnih sugestija i veliki doprinos u tehničkoj obradi. Prof. Dobrilo Tošić nacrtao je većinu slika, pažljivo pročitao ceo tekst i dao niz vrlo korisnih sugestija; Petar Glišović nacrtao je deo slika. Zahvaljujem se pomenutim kolegama i studentima matematike koji su podsticali autora da napiše skriptu.
Posebno se zahvaljujemo recenzentima profesorima Stevanu Pilipoviću, Mirku Budinčeviću i Miroljubu Jevtiću na korisnim sugestijama. Čitaoci mogu na veb strani autora `http://www.matf.bg.ac.yu/~miodrag/` naći neobjavljene autorove rukopise koji se citiraju u ovom udžbeniku. Autor će po mogućnosti odgovarati na primedbe čitalaca i vršiti odgovarajuće korekcije.

U Beogradu, april 2006,
Miodrag Mateljević

GLAVA 1

Osnovni pojmovi - holomorfne funkcije

1.1 O kompleksnim brojevima

Definicije

U skupu $\mathbb{R}$ realnih brojeva nema rešenje tako jednostavna jednačina kao što je

$$z^2 + 1 = 0,$$

te zahtev da se reši ova jednačina dovodi do uvođenja i za koje je

$$i^2 = -1. \tag{1.1}$$

U literaturi (specijalno, u srednjoj školi) se imaginarna jedinica definiše i kao $\sqrt{-1}$, mada je koren u realnoj analizi definisan samo za nenegativne brojeve.
Brojevi oblika $a + ib$, gde su a i b realni brojevi, nazivaju se kompleksni brojevi.
Pojam kompleksnog broja postaje jasniji ako se identifikuje sa uređenim parom (a, b), tj. ako skup $\mathbb{C}$ kompleksnih brojeva identifikujemo sa vektorskim prostorom $\mathbb{R}^2$.
Pokušajmo, u nameri da damo motivaciju za Definiciju 1.1, da definišemo množenje kompleksnih brojeva tako da je distributivno u odnosu na sabiranje i da važi (1.1).
Ako su x i y realni brojevi, i

$$z = x + iy,$$

definišemo

$$iz = i(x + iy) = ix + i(iy) = ix + i^2 y = -y + ix = (-y, x).$$

Dakle,

$$i(x, y) = (-y, x), \tag{1.2}$$

tj.

$$i(x+iy) = -y + ix.$$

Ponovimo da se u vektorskom prostoru $\mathbb{R}^2$ definiše množenje realnog skalara λ i vektora $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pomoću

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y).$$

Koristeći (1.2) može se definisati množenje kompleksnog skalara $a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ i vektora

$$z = (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

$$\begin{aligned} (a+ib)z &= az + i(bz) = a(x, y) + ib(x, y) \\ &= (ax, ay) + i(bx, by) \\ &= (ax, ay) + (-by, bx) \\ &= (ax - by, ay + bx) \end{aligned}$$

Dakle,

$$(a+ib)(x, y) = (ax - by, ay + bx) \qquad (a, b, x, y \in \mathbb{R})$$

1.1.1 Strogo uvođenje kompleksnih brojeva

Ova relacija daje motivaciju da se množenje kompleksnih brojeva definiše na sledeći način:

$$(a+ib)(x+iy) = (ax - by) + i(ay + bx) \quad (a, b, x, y \in \mathbb{R}) \tag{1.3}$$

Pogodno je da za kompleksne brojeve koristimo oznake

$$z = (x, y),\ z_1 = (x_1, y_1), \ldots, w = (u, v),\ \zeta = (\xi, \eta),$$

gde su x, y, x_1, $y_1, \ldots, u$, v, ξ, η, realni brojevi.

Definicija 1.1 *Skup kompleksnih brojeva, u oznaci $\mathbb{C}$, je skup svih uređenih parova $z = (x, y)$, $\quad x, y \in \mathbb{R}$, za koji su jednakost, sabiranje i množenje definisani:*
Dva kompleksna broja (x, y) i (u, v) su jednaka akko $x = u$ i $y = v$.
Suma kompleksnih brojeva z i w definisana je

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v).$$

Proizvod kompleksnih brojeva z i w definisan je

$$(x, y)(u, v) = (xu - yv, xv + yu).$$

Na osnovu definicije može se neposredno dokazati da su sabiranje i množenje kompleksnih brojeva komutativne i asocijativne operacije, i da je množenje distributivno u odnosu na sabiranje.

1.1.2 Algebarska svojstva

Par $(0, 0)$ je neutralan pri sabiranju, jer je

$$(x, y) + (0, 0) = (x, y).$$

Par $(1, 0)$ je neutralan element pri množenju, jer je

$$(x, y)(1, 0) = (x, y).$$

Propozicija 1.1 *Svaki kompleksan broj $z = (x, y) \neq (0, 0)$ ima inverzni element $w = (u, v)$ pri množenju*

$$w = z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right). \tag{1.4}$$

Dokaz: Zaista, jednakost $zw = (1, 0)$ je ekvivalentna sistemu jednačina

$$xu - yv = 1,\ xv + yu = 0$$

čije je rešenje (1.4). □

Oduzimanje kompleksnih brojeva je operacija inverzna sabiranju.
Koristeći postojanje inverznog elementa za množenje, dokazujemo:

Propozicija 1.2 *Ako je $zw = 0$, tada je nula bar jedan od faktora z ili w.*

Dokaz: Zaista, pretpostavimo da je $zw = 0$ i $z \neq 0$. Inverzni element z^{-1} postoji i na osnovu definicije množenja proizvod kompleksnog broja i nule je nula. Otuda:

$$w = 1w = (z^{-1}z)w = z^{-1}(zw) = z^{-1}0 = 0.$$

□

Deljenje sa kompleksnim brojem definišemo:

$$w/z = wz^{-1} \quad (z \neq 0).$$

Kompleksan broj definisan prethodnom relacijom naziva se količnik kompleksnih brojeva w i z.
Ako je $z \neq 0$ i $\zeta = \dfrac{w}{z}$, tada je $\zeta z = w$, i ova jednačina ima rešenje po ζ.
Bijektivna korespondencija $x \to (x, 0), x \in \mathbb{R}$, je izomorfizam $\mathbb{R}$ na polje kompleksnih brojeva oblika $(x, 0)$, zbog čega kompleksan broj $(x, 0)$ identifikujemo sa realnim brojem x, i pišemo $(x, 0) = x$; specijalno: $(0, 0) = 0$ i $(1, 0) = 1$.
Kao i u $\mathbb{R}$, uvodimo stepenovanje: $z^2 = zz$, $z^3 = z^2 z$, itd.

Propozicija 1.3 *Jednačina $z^2 + 1 = 0$ ima dva rešenja u skupu $\mathbb{C}$.*

Dokaz: Jednačina $z^2 + 1 = 0$ se može napisati u obliku

$$(x, y)(x, y) + (1, 0) = (0, 0).$$

Koristeći definiciju množenja i oduzimanja, dobijamo:

$$(x^2 - y^2, 2xy) = (-1, 0)$$

tj. sistem jednačina

$$x^2 - y^2 = -1,\ 2xy = 0.$$

Za $y = 0$, sistem se svodi na jednačinu $x^2 = -1$, koja nema realnih rešenja; a za $x = 0$, na jednačinu $y^2 = 1$, koja ima dva rešenja $y = \pm 1$.
Otuda sistem ima dva rešenja $x = 0$, $y = 1$ i $x = 0$, $y = -1$; tj. $(0, 1)$ i $(0, -1)$. $\square$
Ova rešenja imaju važnu ulogu u operacijama sa kompleksnim brojevima.

Definicija 1.2 *Kompleksni broj $(0, 1)$ zovemo imaginarna jedinica i označavamo ga sa i.*

Dokazali smo da je $i^2 = -1$ i da su $\pm i$ rešenja jednačine $z^2 + 1 = 0$ u $\mathbb{C}$. U suštini, za svako z u $\mathbb{C}$, $z^2 + 1 = (z + i)(z - i)$. Opštije, ako su z i w kompleksni brojevi, dobijamo:

$$z^2 + w^2 = (z + iw)(z - iw).$$

Teorema 1.1 *Svaki kompleksan broj može se predstaviti na jedinstven način u obliku $x + iy$, koji se zove algebarski oblik kompleksnog broja z.*

Dokaz: Kako je

$$i \cdot y = (0, 1) \cdot (y, 0) = (0 \cdot y - 1 \cdot 0, 0 \cdot 0 + 1 \cdot y) = (0, y),$$

dobijamo

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + iy.$$

$\square$

Neka je kompleksan broj $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ dat u algebarskom obliku. Realan broj x naziva se *realni deo kompleksnog broja* i označava sa $\operatorname{Re} z$. Realan broj y naziva se *imaginarni deo kompleksnog broja* z i označava sa $\operatorname{Im} z$. Ako je $\operatorname{Re} z = 0$, kaže se da je broj z čisto imaginaran.
Bez teškoća dokazuju se jednakosti:

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re} z_k, \quad \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Im} z_k.$$

1.1.3 Konjugovano kompleksan broj

Broj $\overline{z} = x - iy$ zove se konjugovano kompleksan broj kompleksnog broja $z = x + iy$ i označava se sa $\overline{z}$, tj. $\overline{z} = x - iy$. Iz jednakosti $z = x + iy$ i $\overline{z} = x - iy$ dobijamo

$$x = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \quad y = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$$
$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$$

Neposredno se dokazuju jednakosti:

$$\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w}, \ \overline{zw} = \overline{z}\ \overline{w}, \ \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}} \ (w \neq 0).$$

Indukcijom se dokazuje

$$\overline{\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)} = \sum_{k=1}^{n} \overline{z_k},$$

1.1.4 Modul kompleksnog broja

Modul kompleksnog broja $z = x + iy$ je realan, nenegativan broj $\sqrt{x^2 + y^2}$ i označava se sa $|z|$.

Proizvod kompleksnog broja z, i njemu konjugovanog kompleksnog broja $\overline{z}$ je:

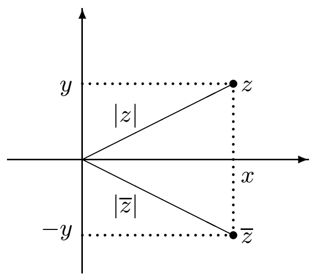
$$z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$$

što znači da je

$$|z|^2 = z \cdot \overline{z} \tag{1.5}$$

i specijalno, ako je $z \neq 0$, tada je

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$



Slika 1.1: Modul kompleksnog broja

Iz definicije modula sledi:

$$|z| = 0 \ \text{ akko } \ z = 0,$$
$$-|z| \leq \operatorname{Re} z \leq |z|, \quad -|z| \leq \operatorname{Im} z \leq |z|,$$
$$|z| = |\overline{z}|.$$

Koristeći (1.5) takođe dokazujemo

$$|zw| = |z||w| \tag{1.6}$$

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \ (w \neq 0) \tag{1.7}$$

Da dokažemo (1.6), pišemo:

$$|zw|^2 = (zw)\overline{(zw)} = (z\overline{z})(w\overline{w}) = |z|^2|w|^2,$$

i odavde, kako je modul nenegativan, sledi (1.6).

Opštom tehnikom dokazujemo:

Propozicija 1.4 *Za svako $z, w \in \mathbb{C}$ važe sledeće formule:*

$$|z+w|^2 = |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w}) + |w|^2, \tag{1.8}$$

$$|z-w|^2 = |z|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w}) + |w|^2, \tag{1.9}$$

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2). \tag{1.10}$$

Dokaz: Kako je

$$|z+w|^2 = (z+w)\overline{(z+w)} = (z+w)(\overline{z}+\overline{w}),$$

množenjem na desnoj strani dobijamo

$$|z+w|^2 = z\overline{z} + (z\overline{w} + \overline{z\overline{w}}) + w\overline{w}$$

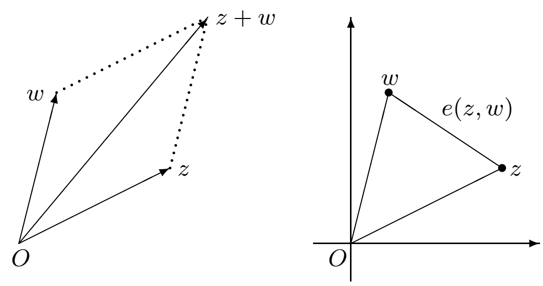
Odavde, s obzirom na to da je

$$(z\overline{w} + \overline{z\overline{w}}) = 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w}),$$

sledi (1.8). Na sličan način se dokazuje (1.9). Takođe, kako je $\mathrm{Re}(z\overline{(-w)}) = -\mathrm{Re}(z\overline{w})$, iz (1.8) sledi (1.9). Sabiranjem (1.8) i (1.9) dobija se (1.10). □

Ponovimo da smo kompleksne brojeve identifikovali sa uređenim parovima u ravni $\mathbb{R}^2$. Kompleksne brojeve sabiramo kao vektore. Ako su z *i* w u $\mathbb{C}$, tačke 0, z, w i $z+w$ su temena paralelograma.
U $\mathbb{C}$ uvodimo euklidsko rastojanje između z *i* w sa

$$e(z,w) = |z-w|.$$



Slika 1.2: Sabiranje, euklidsko rastojanje

Sada, (1.10) je pravilo paralelograma: suma kvadrata dužina ivica paralelograma jednaka je sumi kvadrata dužina dijagonala. Podvucimo da se formule (1.8) i (1.9) popularno nazivaju kosinusna teorema.

Osnovno svojstvo ovog rastojanja je da zadovoljava nejednakost trougla

$$|z_1 - z_2| \;\leq\; |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2|.$$

Ako zamenimo $z = z_1 - z_3$ i $w = z_3 - z_2$, jasno je da treba samo da dokažemo

$$|z + w| \;\leq\; |z| + |w|. \tag{1.11}$$

Kako je

$$\mathrm{Re}\,(z\overline{w}) \;\leq\; |z||w|,$$

na osnovu (1.8), sledi

$$|z + w|^2 \;\leq\; |z|^2 + \; 2|z||w| + |w|^2,$$

tj.

$$|z + w|^2 \;\leq\; (|z| + |w|)^2.$$

Kako je modul nenegativan broj, iz ove nejednakosti sledi (1.11). Koristeći (1.11), neposredno se dokazuje

$$\Big||z| - |w|\Big| \leq\; |z - w|. \tag{1.12}$$

Zaista

$$|z| = |(z - w) + w| \;\leq\; |z - w| + |w|,$$

tj.

$$|z| - |w| \leq\; |z - w|. \tag{1.13}$$

Ovo je nejednakost (1.12), ako je $|z| \geq |w|$. Ako je $|z| \leq |w|$ treba promeniti uloge z i w u nejednakosti (1.13) tako da se dobije $-(|z| - |w|) \leq\; |z - w|$.

1.1.5 Polarna-trigonometrijska-eksponencijalna forma

U nameri da izlaganje povežemo sa kursevima koji obično prethode kursu KA, skiciramo sledeći pristup; precizniji pristup je dat u sekcijama Kompleksan broj i elementarna geometrija 1.5 i eksponencijalna funkcija 1.6.

Argument kompleksnog broja $z \neq 0$ može se geometrijski interpretirati kao ugao, meren u radijanima, između pozitivnog dela x-ose i poluprave sa početkom u 0 koja sadrži z. Prema ovoj definiciji argument ima beskonačno vrednosti koje se razlikuju za celobrojne umnožke 2π; označimo skup ovih vrednosti sa $\mathrm{Arg}z$ i neka je $r = |z|$ i $\varphi \in \mathrm{Arg}z$. Pogodno je uvesti oznaku $\mathrm{cis}\varphi = \cos\varphi + i\sin\varphi$. U daljem tekstu (posle uvođenja exp funkcije) dokazuje se Ojlerova formula $\mathrm{cis}t = e^{i\,t}$; do tada je u nekim situacijama pogodno koristi $e^{i\,t}$ samo kao oznaku za $\mathrm{cis}t$.

Ako se prihvate srednjoškolska geometrijska razmatranja, tada je $x = r\cos\varphi$ i $y = r\sin\varphi$ i stoga se dobija polarno-eksponencijalna forma

$$z = r\mathrm{cis}\varphi = re^{i\,\varphi}.$$

Forma $z = r\mathrm{cis}\varphi$ se naziva polarna reprezentacija kompleksnog broja z.

Na osnovu definicije tangensa, sledi da je $\tan\varphi = y/x$. Ova formula se takođe može koristiti da se definiše argument z, ako se precizra kvadrant u kome se nalazi kompleksan broj z.

Koristeći polarnu formu jednostavno se množe kompleksni brojevi. Neka je $z = rcis\varphi$ i $w = \rho cis\theta$. Tada koristeći trigonometrijske identitete za sinus i cosinus i pravilo za množenje, se dobija

$$\begin{aligned} zw &= r\,cis\varphi\,\rho\,cis\theta = r\rho cis\varphi cis\theta \\ &= r\rho\,[(\cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta + i(\cos\varphi\sin\theta + \sin\varphi\cos\theta)] \\ &= r\rho[\cos(\varphi+\theta) + i\sin(\varphi+\theta)] = r\rho cis(\varphi+\theta)\,. \end{aligned}$$

Otuda, ako je n prirodan broj, specijalno se dobija
$z^n = r^n cis\, n\,\varphi$ i
Moavrova formula $cis^n\varphi = cis\, n\,\varphi$.

Iz definicije jednakosti dva kompleksna brojeva jasno je da je $\mathrm{cis}\varphi = \mathrm{cis}\theta$ ako i samo ako je $\cos\varphi = \cos\theta$ i $\sin\varphi = \sin\theta$.

Vežba 1.1.1 $\mathrm{cis}\,\varphi = \mathrm{cis}\,\theta$ *ako i samo ako* $\varphi - \theta = 2\pi k_0$, *gde je* k_0 *ceo broj* .

Dokaz:Tvrđenje sledi neposredno, na osnovu definicije cis-a pomoću modela jediničnog kruga, koji je opisan u sekciji Kompleksan broj i elementarna geometrija 1.5.
Ovde ćemo dokaz bazirati na osnovnim osobinama funkcija cos i sin.
Kako je $\cos\varphi = \cos\theta$ ako i samo ako je $\varphi - \theta = 2\pi k_1$, gde je k_1 ceo broj, ili $\varphi = -\theta + 2\pi k_2$, gde je k_2 ceo broj.
Dovoljno je dokazti da iz druge mogućnosti sledi da su φ i θ celobrojni multipli od 2π.

Ako je $\varphi = -\theta + 2\pi k_2$, zamenom ovog izraza u jednačinu $\sin\varphi = \sin\theta$, dobija se $\sin(-\theta) = \sin\theta$. Otuda, kako je sin neparna funkcija, sledi $\sin\theta = 0$ i stoga $\theta = \pi k_3$, gde je k_3 ceo broj. Sada, kako je $\varphi - \theta = -2\,\theta + 2\pi k_2$, sledi da je $\varphi - \theta$ celobrojan multipl od 2π. □

Propozicija 1.5 (jednakost polarnih formi) *Dva kompleksna broja* $z = r\mathrm{cis}\varphi$ *i* $w = \rho\mathrm{cis}\theta$ *data u polarnoj formi su jednaka akko su jednaki moduli* $r = \rho$ *i* $\varphi - \theta \equiv 2\pi k_0$, *gde je* k_0 *ceo broj.*

Kako je cis periodična funkcija sa periodom 2π jasno je da je uslov dovoljan.
Pretpostavimo dva kompleksna broja z i w data u polarnoj formi i da je $z = w$. Kako je $|\mathrm{cis}\varphi| = |\mathrm{cis}\theta| = 1$, sledi $|z| = |w|$ i otuda prvo $\mathrm{cis}\varphi = \mathrm{cis}\theta$ i stoga $\varphi - \theta \equiv 2\pi k_0$, gde je k_0 ceo broj; otuda na osnovu Vežbe 1.1.1 sledi da su uslovi potrebni.

Dakle, dva kompleksna broja z i w data u polarnoj formi su jednaka akko su jednaki moduli, a argumenti se se razlikuju za celobrojne umnožke 2π.

Ponovimo, precizniji pristup je dat u sekcijama Kompleksan broj i elementarna geometrija 1.5 i eksponencijalna funkcija 1.6 (u kojoj se pokazuje da eksponencijalna funkcija ima osnovnu ulogu) ; ove sekcije čitalac može čitati uporedo.

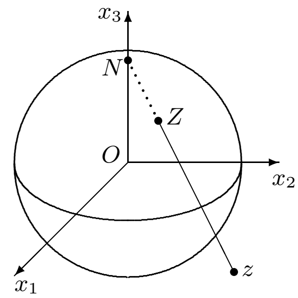
1.2 Osnovni pojmovi

U radu sa kompleksnim brojevima pogodno je da se doda jedan element, koji nazivamo beskonačno daleka tačka i označavamo sa ∞. Tako dobijen skup naziva se proširena kompleksna ravan, i označava sa $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Želimo da uvedemo rastojanje u $\overline{\mathbb{C}}$ u nameri da razmatramo svojstva funkcija koje uzimaju vrednost ∞. Da postignemo ovo, i da dobijemo konkretnu sliku $\overline{\mathbb{C}}$, predstavimo $\overline{\mathbb{C}}$ kao jediničnu Rimanovu sferu u $\mathbb{R}^3$:

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Neka je $N = (0,0,1)$ severni pol. Takođe, $\mathbb{C}$ identifikujemo sa $\{(x_1, x_2, 0) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$. Za svaku tačku z u $\mathbb{C}$ prava linija određena sa z i N preseca sferu tačno u jednoj tački $Z \neq N$. Preslikavanje p definisano sa $Z = p(z)$ naziva se stereografska projekcija.

Preslikavanje p je bijekcija ($1-1$ i na) kompleksne ravni $\mathbb{C}$ na $S \setminus \{N\}$. Dakle, identifikujemo $\mathbb{C}$ sa Rimanovom sferom bez severnog pola $S \setminus \{N\}$. Tačka N se ne razlikuje od drugih tačaka na sferi i zato izgleda prirodno kompleksnoj ravni dodati jednu tačku $\infty = p^{-1}(N)$, koju nazivamo beskonačno daleka tačka.



Slika 1.3: Stereografska projekcija

U sfernoj metrici pod rastojanjem između z_1 i z_2 podrazumeva se euklidsko rastojanje između slika $p(z_1)$ i $p(z_2)$ u trodimenzionom prostoru $\mathbb{R}^3$, tj.

$$\rho(z_1, z_2) = |p(z_1) - p(z_2)|,$$

$$\rho(z_1, z_2) = 2\, \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1 + |z_1|^2}\sqrt{1 + |z_2|^2}},$$

Ova se formula proširuje i na $\overline{\mathbb{C}}$:

$$\rho(z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}}.$$

Za ovo rastojanje koristi se i naziv tetivno rastojanje na sferi.

Ako je $\overline{U}_R = \{z : |z| \leq R\}$, $R > 0$, zatvoren krug, tada je

$$2\frac{|z_1 - z_2|}{1 + R^2} \leq \rho(z_1, z_2) \leq 2|z_1 - z_2|, \quad \text{za svako } z_1, z_2 \in \overline{U}_R.$$

Vežba 1.2.1 (a) *Dokazati da su koordinate tačke* $p(z) = Z = (x_1, x_2, x_3)$ *date sa:*

$$x_1 = \frac{2x}{1+|z|^2},\ x_2 = \frac{2y}{1+|z|^2},\ x_3 = \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}. \tag{1.14}$$

(b) *Dokazati*

$$z = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}. \tag{1.15}$$

(c) *Dokazati formule za tetivno rastojanje na sferi.*

Uputstvo za (a) i (b): Prava kroz N i z data je sa $\{\big((1-t)x, (1-t)y, t\big) : -\infty < t < +\infty\}$; u tački preseka $t = \dfrac{|z|^2-1}{|z|^2+1}$.

Uputstvo za (c): Može se koristiti npr. sličnost trouglova ili (a). □

1.2.1 Definicije

Neka je $\epsilon > 0$; ϵ - okolina tačke $a \in \overline{\mathbb{C}}$ je skup tačaka $z \in \overline{\mathbb{C}}$, za koje važi $\rho(z,a) < \epsilon$; a šuplja ε-okolina je skup tačaka definisan sa $0 < \rho(z,a) < \epsilon$.
Za $R > 0$, pogodno je sa

$$E_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\} \ \text{ i } \ B_R = B_R(\infty) = E_R \cup \{\infty\}$$

označiti respektivno šuplju okolinu, okolinu ∞.

Definicija 1.3 *Ako je* $r > 0$ *i* a *kompleksan broj,*

$$B(a;r) = \{z : |z-a| < r\} \tag{1.16}$$

je otvoren krug (kružni disk) sa centrom u a*, poluprečnika* r*.* $\overline{B}(a;r)$ *je zatvorenje* $B(a;r)$ *i*

$$B'(a;r) = \{z : 0 < |z-a| < r\} \tag{1.17}$$

je probušen krug (disk) sa centrom u a*, poluprečnika* r*.*
Kažemo da je na skupu $M \subset \overline{\mathbb{C}}$ *zadata funkcija (kompleksna funkcija), ako je zadato pravilo, tako da svakoj tački* z *dodelimo tačno jedan kompleksan broj iz* $\overline{\mathbb{C}}$*, i pišemo* $f : M \to \overline{\mathbb{C}}$*; u praksi je pogodno pisati* $w = f(z)$*. Ako je* $f \neq \infty$ *tada*

$$u : M \to \mathbb{R},\ \ v : M \to \mathbb{R}, \tag{1.18}$$

gde je $u = \operatorname{Re} f$ *i* $v = \operatorname{Im} f$*. Kratko pišemo* $f = u + iv$*.*
Neka je funkcija f *zadata u šupljoj okolini tačke* $a \in \overline{\mathbb{C}}$*; kažemo da je* $A \in \overline{\mathbb{C}}$ *granična vrednost funkcije* f *kada* z *teži* a*, i pišemo*

$$\lim_{z \to a} f(z) = A,$$

ako za proizvoljnu okolinu U_A *tačke* A*, postoji šuplja okolina* U'_a*, tako da* $f(U'_a) \subset U_A$*.*

Neka je funkcija f zadata u okolini tačke $a \in \overline{\mathbb{C}}$; kažemo da je f neprekidna u tački a, ako postoji

$$\lim_{z \to a} f(z) = f(a);$$

ako je $f(a) \neq \infty$ kažemo da je neprekidna u smislu $\mathbb{C}$; ako je $f(a) = \infty$ neprekidna u smislu $\overline{\mathbb{C}}$ (ili uopšteno neprekidna).

Primetimo da kad $z \mapsto \infty$, tačka $p(z) \mapsto N$, gde je p stereografska projekcija.

Vežba 1.2.2 *Neka je $f(z) = 1/z^2$. Tada je*

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = 0$$

jer je

$$\left| \frac{1}{z^2} - 0 \right| < \varepsilon \text{ kada } |z| > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}},$$

i

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \infty$$

jer

$$\rho\left(\frac{1}{z^2}, \infty\right) = \frac{2|z|}{\sqrt{1+|z|^2}} \to 0, \text{ kada } |z| \to 0.$$

Vežba 1.2.3 *Neka je $f(z) = \dfrac{z}{1+|z|}$. Ako definišemo $f(\infty) = 1$, funkcija f nije neprekidna u ∞.*
Proveriti da $|f| \to 1$ kada $z \to \infty$. $|f|$ je neprekidna na $\overline{\mathbb{C}}$ i dostiže maksimum $1 = |f(\infty)|$ u ∞, i $f(\overline{\mathbb{C}}) = U \cup \{1\}$, gde je U otvoren jedinični krug.

Niz a_n konvergira ka a (pišemo $a_n \to a$) ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji n_0 tako da $\rho(a_n, a) < \varepsilon$ za $n \geq n_0$.

Neka je $a_n = \alpha_n + i\beta_n$ i $a = \alpha + i\beta$, $a \in \mathbb{C}$. Tada $a_n \to a$ akko $\alpha_n \to \alpha$ i $\beta_n \to \beta$.

Tačka z_0 naziva se tačka nagomilavanja skupa M ako svaka šuplja okolina tačke z_0 sadrži bar jednu tačku skupa M. To znači da postoji niz različitih kompleksnih brojeva a_n iz M tako da $a_n \to z_0$

Skup tačaka nagomilavanja skupa M označava se sa M'. Zatvorenje skupa M je $M \cup M'$; označava se sa $\overline{M}$.

Princip kompaknosti: Svaki beskonačan skup M ima bar jednu tačku nagomilavanja u $\overline{\mathbb{C}}$.

Skup $\mathbb{Z}$ je zatvoren u $\mathbb{C}$, ali nije zatvoren u $\overline{\mathbb{C}}$ (∞ je tačka nagomilavanja skupa $\mathbb{Z}$).

Definicija 1.4 (Granična vrednost kroz skup) *Neka je funkcija f zadata na skupu M i neka je $a \in \overline{\mathbb{C}}$ tačka nagomilavanja skupa M, kažemo da je $A \in \overline{\mathbb{C}}$ granična vrednost funkcije f kada z teži a, kroz M, i pišemo*

$$\lim_{M \ni z \to a} f(z) = A,$$

ako za proizvoljnu okolinu U_A tačke A, postoji šuplja okolina U'_a, tako da važi $f(U'_a \cap M) \subset U_A$.

U kompleksnoj analizi automatski se prenose elementarne teoreme o funkcijama, neprekidnost u tački (neprekidnost sume, zbira, proizvoda).
Kako je $\overline{\mathbb{C}}$ kompaktan podskup, svaki zatvoren skup u $\overline{\mathbb{C}}$ je kompaktan. Neka je f neprekidna (u smislu $\mathbb{C}$) na zatvorenom (u smislu $\overline{\mathbb{C}}$) skupu K. Tada je

a) funkcija $|f|$ ograničena na K,

b) funkcija $|f|$ dostiže na K maksimum i minimum,

c) funkcija $|f|$ je ravnomerno neprekidna na K.

Definicije puta, luka i konture

Definicija 1.5 ***Put*** *u* $\mathbb{C}$ *je neprekidno preslikavanje* γ *kompaktnog intervala* $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ *u* $\mathbb{C}$.
Pišemo

$$\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}.$$

Trag (slika) puta γ *je skup*

$$\gamma^* = \{\gamma(t) : \alpha \leq t \leq \beta\}.$$

Put γ *je Žordanov ako je* γ $1-1$ *preslikavanje.*
Put γ *je zatvoren ako je* $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$.
Zatvoren put γ *je zatvoren Žordanov ako je* γ $1-1$ *na* (α, β).
Put γ *koji je deo po deo neprekidno diferencijabilan, zove se* ***luk****. Preciznije, postoji konačno mnogo tačaka* s_k, $\alpha = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = \beta$ *takvih da restrikcija* γ *na svaki interval* $[s_k, s_{k+1}]$ *ima neprekidan izvod; ipak u tačkama* $s_1, \ldots, s_{n-1}$ *levi i desni izvod mogu biti različiti.*
Dakle, put γ *je luk ako je* γ' *deo po deo neprekidna funkcija.*
Put γ *je* ***gladak put*** *ako je*

1. γ' *neprekidna na* $[\alpha, \beta]$,

2. $\gamma'(t) \neq 0, \ t \in [\alpha, \beta]$.

Ako je γ *gladak put, onda je* γ *luk. Obrnuto ne važi.*
Kontura *je deo po deo gladak put u ravni.*

Put $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ se naziva *rektificibilnim* ako je γ funkcija *ograničene varijacije* (videti [Al], [Ka-Ad]) na $[\alpha, \beta]$.

Ako je $s = s(t)$ dužina dela puta na intervalu $[\alpha, t]$, gde je $\alpha \leq t \leq \beta$ i ako put γ parametrizujemo pomoću s, tada je $|\gamma(s_2) - \gamma(s_1)| \leq |s_2 - s_1|$.

Dva puta

$$\gamma_1 : [\alpha_1, \beta_1] \to \overline{\mathbb{C}} \ \text{ i } \ \gamma_2 : [\alpha_2, \beta_2] \to \overline{\mathbb{C}}$$

nazivaju se ekvivalentnim ($\gamma_1 \sim \gamma_2$), ako postoji neprekidno, rastuće i **na** preslikavanje

$$\tau : [\alpha_1, \beta_1] \xrightarrow{\text{na}} [\alpha_2, \beta_2] \tag{1.19}$$

tako da je $\gamma_1 = \gamma_2\big(\tau(t)\big)$ za svako $t \in [\alpha_1, \beta_1]$. Jednostavno se proverava da ova relacija zadovoljava aksiome ekvivalentnosti.

Definicija 1.6 *Klasa ekvivalentnih puteva naziva se kriva.*

Kako neprekidna i rastuća zamena parametra (1.19) može prevesti gladak put u negladak, pojam glatkosti nije invarijantan u odnosu na takve zamene.

Klasa puteva dobijena iz glatkog puta zamenama parametra (1.19), gde je τ neprekidno diferencijabilna funkcija sa pozitivnim izvodom, naziva se glatka kriva.

Analogno definišemo deo po deo glatke i rektificibilne krive. U prvom slučaju zahtevamo da je dopustiva zamena parametra neprekidna i izuzev u eventualno konačno tačaka ima neprekidan i pozitivan izvod (a u isključenim tačkama ima jednostrane pozitivne izvode!). U drugom slučaju zahtevamo da se dopustiva zamena parametra ostvaruje strogo rastućom neprekidnom funkcijom.

Ponovimo, put γ je rektificibilan ako je γ ograničene varijacije.
Obzirom da u odnosu na reparametrizaciju pomoću dužine $s = s(t)$ funkcija γ je apsolutno neprekidna, može se uvesti po definiciji da je rektificibilan put zadat pomoću apsolutno neprekidne parametrizacije (za apsolutno neprekidne funkcije videti kurseve Analize 3, na primer, [Al] i [Ru]).

U tom slučaju zahtevamo da se dopustiva zamena parametra ostvaruje strogo rastućom apsolutno neprekidnom funkcijom i tada važi

$$|\gamma| = \int_{\alpha}^{\beta} |\gamma'(t)|dt.$$

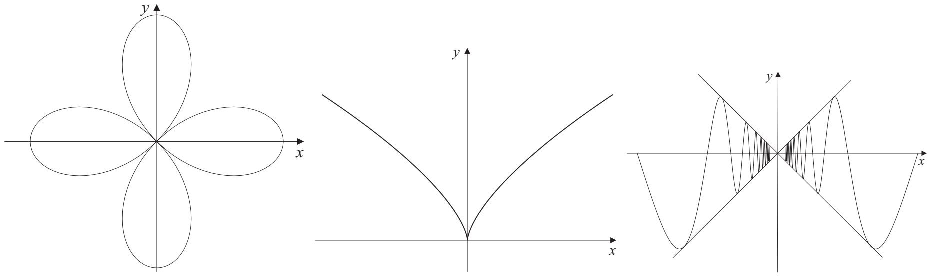
Na ovaj način izbegavamo parametrizacije pomoću singularnih funkcija, videti kurseve Analize 3, kao što je Kantorova funkcija, za koje prethodna formula ne važi.

Primer 1 *Neka su dati putevi:* $\gamma_1(t) = t,\ t \in [0,1]$; $\gamma_2(t) = \sin t,\ t \in [0, \pi/2]$; $\gamma_3(t) = \cos t,\ t \in [0, \pi/2]$ *i* $\gamma_4(t) = \sin t,\ t \in [0, \pi]$. *Sva četiri puta imaju isti trag - segment* $[0,1]$. *Međutim samo je* γ_1 *ekvivalentno sa* γ_2. *Putevi* γ_3 *i* γ_4 *nisu ekvivalentni sa prva dva i nisu međusobno ekvivalentni.* γ_1 *i* γ_2 *su ekvivalentni sa* γ_3^-, *koji se dobija iz* γ_3 *promenom orijentacije.*

Primer 2 *Putevi* γ_1, γ_2 *i* γ_3 *iz prethodnog Primera su Žordanovi putevi, a* γ_4 *nije Žordanov. Kružnica* $z = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, *je zatvoren Žordanov put (gladak); ruža sa četiri lista* $z = (\cos 2t)\, e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, *je zatvoren gladak put koji nije Žordanov; polukubna parabola* $z = t^2(t + i)$, $t \in [-1, 1]$, *je Žordanov i neprekidno diferencijabilan put. Put* $z = t\Big(1 + i \sin \dfrac{1}{t}\Big)$, $t \in \Big[-\dfrac{1}{\pi}, \dfrac{1}{\pi}\Big]$, *je Žordanov nerektificibilan put. Polukubna parabola može se reparametrizovati tako da je deo po deo glatka (videti Primer 3).*

Primer 3 (Polukubna parabola) *Naći parametrizaciju kubne parabole u kojoj je deo po deo glatka.*

Rešenje: Kako je za polukubnu parabolu $\gamma'(t) = 3t^2 + 2t\, i$ i specijalno $\gamma'(0) = 0$, ovaj put u ovoj parametrizaciji nije deo po deo gladak put.



Slika 1.4: Tragovi puteva iz prethodnih primera

Reparametrizacije $\tau = \tau(t) = t^2$ za $t \in [0,1]$, i $\tau = \tau(t) = -t^2$ za $t \in [-1,0]$; definišu $\gamma_1(\tau) = (\sqrt{\tau})^3 + i\tau$ za $\tau \in [0,1]$ i $\gamma_1(\tau) = -(\sqrt{-\tau})^3 - i\tau$ za $\tau \in [-1,0]$.

Otuda je $\gamma_1(\tau) = \operatorname{sgn}\tau\,(\sqrt{|\tau|})^3 + i|\tau|$ za $\tau \in [-1,1]$ i $\gamma_1'(\tau) = \dfrac{3}{2}\sqrt{\tau} + i$ za $\tau \in [0,1]$ i specijalno $\gamma_1'(\tau) \neq 0$. Dakle ovaj deo luka γ_1 je gladak u parametrizaciji sa τ. Slično se pokazuje da je deo luka parametrizovan sa $\tau \in [-1,0]$. □

Holomorfne funkcije

Slovo Ω od sada označava otvorene skupove u ravni.
Neka je f kompleksna funkcija definisana na Ω. Ako $z_0 \in \Omega$, i ako postoji konačna granična vrednost,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{1.20}$$

kažemo da funkcija f ima izvod (kompleksan izvod) u z_0, i označavamo ovu graničnu vrednost sa $f'(z_0)$. Ako $f'(z_0)$ postoji za svako $z_0 \in \Omega$, kažemo da je f *holomorfna* (u literaturi se koristi i naziv *analitička*) na Ω. Klasu funkcija holomorfnih na Ω označavamo sa $\mathcal{H}(\Omega)$.
Kažemo da je funkcija f holomorfna u tački $z \in \mathbb{C}$ ako f ima izvod u nekoj okolini tačke z. Funkcija f je holomorfna u ∞ ako je funkcija $g(z) = f\left(\dfrac{1}{z}\right)$ holomorfna u tački $z = 0$; podvucimo da je $g(0) = f(\infty)$.

Kažemo da je funkcija f holomorfna na $A \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ ako je holomorfna u svakoj tački skupa A, tj. ako postoji otvoren skup $\Omega \supseteq A$ tako da je f holomorfna na Ω

Pogodno je definisati *kompleksnu inverziju.* Funkcija J (kompleksna inverzija) definiše se sa

$$z = J(\zeta) = \frac{1}{\zeta}. \tag{1.21}$$

Kako je $J(0) = \infty$, J preslikava okolinu tačke 0 u okolinu beskonačno daleke tačke; preciznije, J preslikava $U_r = \{\zeta : |\zeta| < r\}$ na $E_R \cup \{\infty\}$, gde je $R = 1/r$ i U_r' na E_R. Otuda sledi da je J neprekidna u uopštenom smislu u 0.

Pogodno je koristiti notaciju $F = f \circ J$; funkcija f je holomorfna u ∞ ako je funkcija F holomorfna u tački $z = 0$.

Vežba 1.2.4 *Ako f ima izvod, proveriti da postoje parcijalni izvodi i da važi $f' = f_x = -if_y$. Obrnuta implikacija nije tačna.*

Uputstvo: Zameniti $z - z_0 = h_1$, $h_1 \in \mathbb{R}$ u formuli (1.20). Kada h_1 teži nuli dobija se $f'(z_0) = f_x(z_0)$. Slično, zamenom $z - z_0 = ih_2$, $h_2 \in \mathbb{R}$ kada h_2 teži nuli dobija se $f'(z_0) = -if_y(z_0)$. Otuda $f_x = -if_y$. Ova jednačina naziva se Koši-Rimanova jednačina (Koši-Rimanovi uslovi) u kompleksnoj formi. Čitalac može videti više detalja u podsekciji 1.2.3 u vezi sa Koši-Rimanovim uslovima.

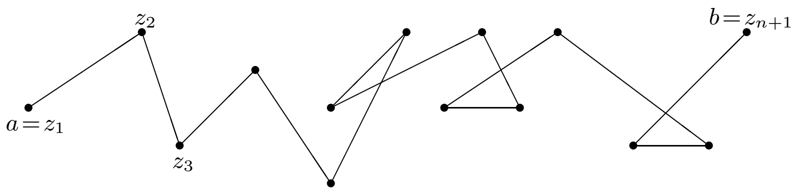
U kompleksnoj analizi (KA) za $1-1$ preslikavanje koristi se i naziv jednolisno.

1.2.2 Definicija oblasti

Ako su z i w u $\mathbb{C}$, označimo segment od z do w sa

$$[z, w] = \{tw + (1-t)z : 0 \leq t \leq 1\}.$$

Poligon (poligonalna linija) iz a u b je skup $P = \bigcup\limits_{k=1}^{n} [z_k, z_{k+1}]$, gde je $z_1 = a$, $z_{n+1} = b$.



Slika 1.5: Poligon

Poligonalna linija koja se sastoji od horizontalnih i vertikalnih intervala naziva se *specijalna poligonalna linija.*
Za otvorene skupove povezanost se može jednostavno iskazati.

Definicija 1.7 (poligonalna) *Otvoren skup Ω je povezan ako za svake dve tačke a, b u Ω postoji poligon iz a u b, koji pripada Ω.*

Definicija 1.8 (topološka definicija) *Skup X je nepovezan ako postoji njegov poskup A tako da su A i $X \setminus A$ neprazni i zatvoreni (u odnosu na X). U ovoj situaciji skupovi A i $X \setminus A$ su takođe otvoreni u odnosu na topologiju skupa X.*
Skup je povezan ako nije nepovezan

Povezanost je komplementaran pojam u odnosu na nepovezanost. Ponovimo, skup je povezan ako nije nepovezan.
Npr. interval je povezan skup.
Čitalac može proveriti da je za otvorene skupove topološka definicija povezanosti saglasna sa poligonalnom definicijom povezanosti.

Definicija 1.9 *Oblast je otvoren i povezan skup u* $\mathbb{C}$.

Skup A je otvoren (respektivno, zatvoren) u odnosu na X, ako je A presek otvorenih (zatvorenih) skupova sa $X \subset \mathbb{C}$.
Npr. interval $(-1, 1)$ je zatvoren skup u odnosu na otvoren jedinični krug $\mathbb{U}$.
Iz definicije povezanosti sledi, topološko svojstvo povezanosti:

Ako je skup X *neprazan i povezan i ako je* $A \subset X$ *neprazan zatvoreno-otvoren skup u odnosu na* X*, tada je* A *jednako* X.

Specijalno, ovo svojstvo ćemo primenjivati ako je X oblast ili interval.
Maksimalan povezan podskup skupa $M \subset \overline{\mathbb{C}}$ naziva se *povezana komponenta* skupa M. Dokazuje se da je svaki skup unija (konačnog ili beskonačnog broja) komponenti.

Definicija 1.10 *Oblast* $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ *je prosto povezana ako je* $\partial\Omega$ *povezan u* $\overline{\mathbb{C}}$ *(definicija prosto povezane oblasti pomoću granice).*

U prvom delu korsa pogodno je koristiti i poligonalnu definiciju prosto povezanosti: oblast D u $\mathbb{C}$ je prosto povezana (poligonalno) ako za svaku specijalnu zatvorenu prostu poligonalnu liniju Λ, koja pripada oblasti D, poligon koji ograničava Λ, u oznaci $\mathrm{Int}\Lambda$, pripada D.
Skup koji se sastoji od izolovanih tačaka (tj. nema tačaka nagomilavanja) naziva se *diskretan*. Svaka tačka ovog skupa je povezana komponenta.
Ako je M neki skup u ravni, funkcija $f : M \to \mathbb{Z}$ se naziva celobrojna funkcija.

Propozicija 1.6 *Ako je* f *neprekidna funkcija na nepraznom povezanom skupu* M *i* $f(M)$ *diskretan, tada je* $f \equiv c$*, gde je* c *konstanta. Specijalno, ako je* f *neprekidna i celobrojna funkcija na povezanom skupu* M*, tada je* $f \equiv k_0$*, gde je* k_0 *ceo broj.*

Uputstvo: Kako je f neprekidna funkcija na povezanom skupu M, $f(M)$ je povezan skup. Neka je $c \in f(M)$. Kako je $\{c\}$ komponenta, $f(M) = \{c\}$.

Definicija 1.11 M *kompaktno pripada oblasti* Ω *ako* $\overline{M} \subset \Omega$ *(u smislu* $\overline{\mathbb{C}}$*); kompaktnu pripadnost označavamo sa* $M \Subset \Omega$.

Ako $\Omega \Subset \mathbb{C}$, tj. ako je $\overline{\Omega}$ kompaktan skup u $\mathbb{C}$ kratko kažemo da je Ω kompaktna oblast.

1.2.3 Linearni operator

U ovom paragrafu samo su skicirana osnovna svojstva koja se odnose na diferencijabilnost.

Funkcija $l : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ naziva se, respektivno, $\mathbb{R}$-linearna ($\mathbb{C}$-linearna) ako

(a) $l(z_1 + z_2) = l(z_1) + l(z_2)$, za svako $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

(b) $l(\lambda z) = \lambda l(z)$, za svako $z \in \mathbb{C}$ i $\lambda \in \mathbb{R}$,

ili, respektivno,

(c) $l(\lambda z) = \lambda l(z)$ za svako $z \in \mathbb{C}$ i $\lambda \in \mathbb{C}$.

Dakle, funkcija l je $\mathbb{R}$-linearna ako zadovoljava svojstva (a) i (b); a $\mathbb{C}$-linearna ako zadovoljava svojstva (a) i (c); primetimo da iz (c) sledi (a) i (b) (objasniti!).
1. Svaka $\mathbb{R} - linearna$ funkcija ima oblik

$$l(z) = az + b\overline{z},$$

gde su a i b proizvoljne kompleksne konstante.
Uputstvo: $l(z) = l(x + iy) = l(x) + l(iy) = l(x \cdot 1) + yl(i) = xl(1) + yl(i)$. □

Ako je l $\mathbb{C} - linearna$ funkcija, tada je $l(z) = l(z \cdot 1) = zl(1)$. Otuda nalazimo
2. Svaka $\mathbb{C} - linearna$ funkcija ima oblik

$$l(z) = az,$$

gde je $a = l(1)$ proizvoljna kompleksna konstanta.
Prvo dajemo motivaciju za definiciju diferencijala.
Za $z_0 \in \mathbb{C}$ tangetni prostor T_{z_0} može se opisati kao skup vektora sa početkom u tački z_0.

Pretpostavimo da f preslikava $\Omega \subset \mathbb{C}$ u $\mathbb{R}^2$, $z_0 \in \Omega$, i da f ima parcijalne izvode u tački z_0. Kao u analizi, preslikavanju f pridružujemo linearni operator

$$l = df = df(z_0).$$

Ako f ima izvod u z_0 tada

$$l(h) = f'(z_0)h.$$

Opštije, ako samo pretpostavimo da f ima parcijalne izvode u tački z_0, pišemo

$$df = f_x dx + f_y dy,$$

odakle, formalno, koristeći formule $dx = \dfrac{dz + d\overline{z}}{2}$ i $dy = i\dfrac{d\overline{z} - dz}{2}$, nalazimo da je

$$l = df = \partial f dz + \overline{\partial} f d\overline{z},$$

gde je

$$\partial f = Df = \frac{1}{2}(f_x - if_y), \quad \overline{\partial} f = \overline{D} f = \frac{1}{2}(f_x + if_y).$$

Preciznije

$$l(h) = df(h) = \partial f\, h + \overline{\partial} f\, \overline{h},$$

gde $h \in T_{z_0}$ i T_{z_0} označava tangentni prostor (za detalje videti izvođenje formule (1.25)).

Definiciju diferencijala i Koši-Rimanovi uslovi.
Fiksirajmo tačku z_0 i neku njenu okolinu U; funkcija $f : U \to \mathbb{C}$ naziva se $\mathbb{R}$-diferencijabilna ($\mathbb{C}$-diferencijabilna) u tački z_0, ako je

$$f(z_0+h) = f(z_0) + l(h) + o(h), \quad h \to 0,$$

gde je l $\mathbb{R} - linearna$ ($\mathbb{C} - linearna$) funkcija, a $\dfrac{o(h)}{h} \to 0$ kada $h \to 0$; tj. $o(h) = \varepsilon(h)h$, gde $\varepsilon(h) \to 0$ kada $h \to 0$.

Uvođenje linearnog operatora (linearnog dela) $l = df$, funkcije f, čitaocu može izgledati apstraktno, ali je to pogodno za neke dokaze i neke osobine preslikavanja koje zavise samo od linearnog dela (videti na primer dokaze Teoreme 1.3, Teoreme konformno čuva uglove, itd.).

Za parcijalni izvod po x, koristimo oznake $\dfrac{\partial f}{\partial x} = f_x$; ako je $f = u+iv$, definišemo $f_x = u_x + i\,v_x$.
Ponovimo

Definicija 1.12 *Neka je data tačka $z \in \mathbb{C}$ i njena okolina U; funkcija $f : U \to \mathbb{C}$ naziva se $\mathbb{R}$-diferencijabilna (respektivno $\mathbb{C}$-diferencijabilna) u tačka z ako se može predstaviti u obliku*

$$f(z+h) = f(z) + l(h) + o(h), \quad h \to 0, \tag{1.22}$$

gde je l $\mathbb{R}$-linearno (respektivno $\mathbb{C}$-linearna).
Funkcija l naziva se diferencijal funkcije f u tački z i označava sa df.

Ako zamenimo $h = h_1 + ih_2$, u slučaju $\mathbb{R}$-diferencijabilnosti, $l(h) = h_1 l(1) + h_2\, l(i)$. Zamenom $h = h_1$ u (1.22), podelom obe strane sa h_1 i prelaskom na graničnu vrednost kada $h_1 \to 0$, kako je $z + h_1 = (x + h_1, y)$, dobija se

$$l(1) = \lim_{h_1 \to 0} \frac{f(z+h_1) - f(z)}{h_1} = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Slično, zamenom $h = i\,h_2$, kako je $z + ih_2 = (x, y+h_2)$, dobija se

$$l(i) = \lim_{h_2 \to 0} \frac{f(z+i\,h_2) - f(z)}{h_2} = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Dakle, diferencijal $\mathbb{R}$-diferencijabilne funkcije je

$$d\,f(h) = f_x h_1 + f_y h_2. \tag{1.23}$$

Zamenom $h_1 = \dfrac{1}{2}(h + \overline{h})$, $h_2 = \dfrac{1}{2\,i}(h - \overline{h})$ i uvođenjem oznaka

$$\partial f = \frac{1}{2}(f_x - if_y), \; \overline{\partial} f = \frac{1}{2}(f_x + if_y); \tag{1.24}$$

tada se iz (1.23) dobija

$$df(h) = \partial f\, h + \overline{\partial} f\, \overline{h}. \tag{1.25}$$

Propozicija 1.7 *Predstavljanje diferencijala $\mathbb{R}$-diferencijabilne funkcije u obliku (1.25) je jedinstveno, tj. ako je $df(h) = a\,h + b\,\overline{h}$, tada je $a = \partial f$, $b = \overline{\partial} f$.*

Dokaz: Zamenom u jednačinu $df(h) = a\,h + b\,\overline{h}$, respektivno, $h = 1$ i $h = i$, dobija se $df(1) = f_x = a + b$, $df(i) = f_y = i(a - b)$. Otuda je $a = \frac{1}{2}(f_x - if_y) = Df$, $b = \frac{1}{2}(f_x + if_y) = \overline{D}f$. Specijalno, ako je f $\mathbb{C}$-diferencijabilna, tada je $df(h) = ah$, gde je $a = Df$; podvucimo da je u ovom slučaju $b = \overline{D}f = 0$. $\square$

Otuda sledi

Teorema 1.2 *$\mathbb{R}$-diferencijabilna u tački z funkcija f je $\mathbb{C}$-diferencijabilna u tački z ako i samo ako*

$$\overline{\partial} f(z) = 0. \tag{1.26}$$

Ponovimo, ako je f $\mathbb{R}$-diferencijabilna u tački z i $\overline{\partial} f(z) = 0$ tada je na osnovu formule (1.25) $df(h) = \partial f h$, a to znači da je f $\mathbb{C}$-diferencijabilna u tački z

Ako je $f = u + iv$, tada je na osnovu formule (1.24) $\overline{\partial} f(z) = 0$ ako i samo ako $f_y = i\,f_x$. Otuda se kompleksna jednačina (1.26) može napisati pomoću dve realne jednačine

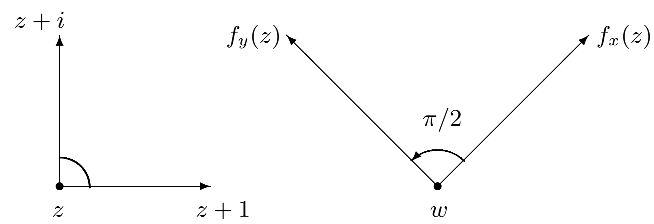
$$u_x = v_y, \;\; u_y = -v_x. \tag{1.27}$$

U ovom obliku uslovi kompleksne diferencijabilnosti pojavili su se u radovima Dalambera-Ojlera i kasnije (u jasnijoj formi) u radovima Koši-Rimana.

Jednačine (1.27) obično se nazivaju **Koši-Rimanove jednačine** (C-R uslovi). Jednačina (1.26) obično se naziva Koši-Rimanova jednačina (uslov) u kompleksnoj formi. Da iz $\mathbb{C}$-diferencijabilnosti slede Koši-Rimanovi uslovi može se zaključiti i na sledeći način: ako je f $\mathbb{C}$-diferencijabilna u tački z, tada je $l = df$ $\mathbb{C}$-linearan i otuda $f_y = l(i) = l(i\,1) = il(1) = if_x$; geometrijska interpretacija data je na slici 1.6; rotacijom vektora $1 \in T_z$ u pozitivnom smeru za $\pi/2$ dobija se vektor $i \in T_z$; a rotacijom vektora $f_x(z) \in T_w$ u pozitivnom smeru za $\pi/2$ dobija se vektor $f_y(z) \in T_w$.

Konstrukcija funkcije neprekidne nigde diferencijabilne u realnom smislu izvodi se sa izvesnim teškoćama.

Nigde diferencijabilne u kompleksnom smislu su vrlo jednostavne funkcije. Na primer, $f(z) = x + 2iy$ je nigde $\mathbb{C}$-diferencijabilna: $v_x = 1$,



Slika 1.6: $\mathbb{C}$-diferencijabilnost

$u_y = 2$ i uslovi (1.27)
nisu ispunjeni.

Neka je f $\mathbb{R}$-diferencijabilna u z, $a = \partial f(z)$ i $b = \overline{\partial} f(z)$. Ponovimo

$$\Delta f = f(z+h) - f(z) = a\rho e^{i\theta} + b\rho e^{-i\theta} + o(\rho),$$

gde je $h = \rho e^{i\theta}$.
Izvod f u tački z po pravcu θ:

$$\partial_\theta f(z) = \lim_{\rho \to 0} \frac{\Delta f}{\rho e^{i\theta}} = a + be^{-2i\theta}. \tag{1.28}$$

Ako je $b = \overline{\partial} f(z) \neq 0$, izvod $\partial_\theta f(z)$ zavisi od pravca θ i samo u slučaju $b = \overline{\partial} f(z) = 0$, tj. u slučaju $\mathbb{C}$-diferencijabilnosti funkcije f u tački z, izvodi po svim pravcima su jednaki.
Jasno je da u tom i samo tom slučaju postoji izvod funkcije f u tački z, po definiciji jednak

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta f}{h}, \tag{1.29}$$

gde se limes uzima u smislu topologije $\mathbb{C}$. Jasno je takođe ako $f'(z)$ postoji, da je $f'(z) = a = \partial f(z)$.

Iz prethodnog izlaganja sledi:

Propozicija 1.8 *Neka je f $\mathbb{R}$-diferencijabilna u tački z_0. Tada f ima izvod u tački z_0 ako i samo ako $\overline{\partial} f(z_0) = 0$.*

Iz ove Propozicije i Teoreme 1.2, neposredno sledi:

Teorema 1.3 *Sledeći uslovi su ekvivalentni:*
(a) f ima izvod u tački z,
(b) funkcija f je $\mathbb{C}$-diferencijabilna u tački z,
(c) f je $\mathbb{R}$-diferencijabilna u tački z i $\overline{\partial} f(z) = 0$.

Navedimo direktan dokaz da je (a) ekvivalentno (b) koji ne zavisi of formule (1.28).

$\underline{\Rightarrow}$ (uslov je potreban): Ako postoji $f'(z)$, to je po definiciji

$$\frac{\Delta f}{h} = f'(z) + \varepsilon(h), \quad \text{gde} \quad \varepsilon(\mathrm{h}) \to 0 \quad \text{kada} \quad \mathrm{h} \to 0.$$

Otuda je $\Delta f = f'(z)h + o(h)$, gde je $o(h) = \varepsilon(h)h$. Dakle, $(a) \Rightarrow (b)$.

Dodatno nalazimo, na osnovu Propozicije 1.7, $f' = Df$ i $\overline{D} f = 0$; dakle $(a) \Rightarrow (c)$.

$\underline{\Leftarrow}$ (uslov je dovoljan): Ako je $\mathbb{C}$-diferencijabilna, tada je $\Delta f = ah + o(h)$, gde je $o(h) = \varepsilon(h)h$ i $\varepsilon(h) \to 0$ kada $h \to 0$. Otuda postoji

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta f}{h} = a = f'(z),$$

tj. postoji izvod funkcije f u tački z. Dakle, $(b) \Rightarrow (a)$. $\square$

Ponovimo (varijacijom prethodnog razmatranja) samo da iz (a) sledi (c). Kako izvod funkcije $f = u + iv$, ako postoji ne zavisi od pravca, može se izračunati u pravcu x-ose: $f'(z) = f_x = u_x + iv_x$. Slično $f'(z) = -if_y$ i otuda $\overline{\partial} f = \overline{D} f = 0$.

Dakle, ako postoji izvod funkcije $f = u + iv$, izvod ne zavisi od pravca, i može se izračunati u pravcu x-ose:

$$f'(z) = f_x = u_x + iv_x. \tag{1.30}$$

Vežba 1.2.5 *Neka je $f(z) = |z|^2$. Ispitati $\mathbb{C}$-diferencijabilnost funkcije f.*

Rešenje: Komponentne funkcije su $u(x,y) = x^2 + y^2$ i $v(x,y) = 0$. Otuda je $u_x = 2x$ i $v_y = 0$; $u_y = 2y$ i $v_x = 0$. Kako su $C-R$ jednačine zadovoljene samo za $x = y = 0$, izvod $f'(z)$ ne postoji ako je $z \neq 0$. Kako je f $\mathbb{R}-$diferencijabilna u 0, na osnovu Teoreme 1.2, postoji izvod $f'(0)$ i na osnovu formule (1.30) sledi $f'(0) = 0$. $\square$

Vežba 1.2.6 *Neka je $f(z) = z^5/|z|^4$ i $f(0) = 0$. Proveriti da f zadovoljava CR-uslove, ali da nema izvod u 0.*
Da li to znači da f nije $\mathbb{R}$-diferencijabilna u 0?

Vežba 1.2.7 *Neka je $f(z) = x^3 + i(1-y)^3$. Pokazati da je ispravno pisati $f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = 3x^2$ samo u tački $z = i$.*

Uputstvo: $u = x^3$, $v = (1-y)^3$; kako je $u_x = 3x^2$, $v_y = -3(1-y)^2$, na osnovu Koši-Rimanovih uslova, $3x^2 = -3(1-y)^2 \Leftrightarrow x = 0,\ y = 1$. Otuda f je diferencijabilna u tački $z = i$. $\square$

1.3 Osnovne osobine holomorfnih funkcija

Propozicija 1.9 *Ako $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$, tada $f + g \in \mathcal{H}(\Omega)$ i $fg \in \mathcal{H}(\Omega)$.*

Teorema 1.4 (Izvod kompozicije) *Ako je $f \in \mathcal{H}(\Omega), f(\Omega) \subset \Omega_1, g \in \mathcal{H}(\Omega_1)$ i $h = g \circ f$, tada je $h \in \mathcal{H}(\Omega)$, i*

$$h'(z) = g'(f(z))f'(z). \tag{1.31}$$

Dokaz: Neka je fiksirano $z_0 \in \Omega$ i $w_0 = f(z_0)$. Tada je

$$f(z) - f(z_0) = (f'(z_0) + \epsilon(z))\,(z - z_0), \tag{1.32}$$

gde $\epsilon(z) \to 0$ kada $z \to z_0$; i

$$g(w) - g(w_0) = (g'(w_0) + \eta(w))\,(w - w_0), \tag{1.33}$$

gde je $w = f(z)$ i $\eta(w) \to 0$ kada $w \to w_0$; zamenimo (1.32) u (1.33): ako je $z \neq z_0$,

$$\frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0} = \Big(g'(f(z_0)) + \eta(f(z))\Big)\Big(f'(z_0) + \epsilon(z)\Big). \tag{1.34}$$

Kako f ima izvod u z_0, f je neprekidna u z_0. Odavde iz (1.34) sledi (1.31). □

Dokaz sledeće Leme je sličan dokazu Teoreme o izvodu kompozicije i ostavlja se za vežbu.

Lema 1.1 *Neka je $\gamma : [\alpha, \beta] \to \Omega$ diferencijabilno preslikavanje (diferencijabilan put) u Ω, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ i $\Gamma = f \circ \gamma$. Tada je Γ diferencijabilan put i važi $\Gamma'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t)$ za $t \in [\alpha, \beta]$.*

Teorema 1.5 (Izvod inverzne funkcije) *Pretpostavimo*

(a) f je homeomorfizam oblasti Ω na oblast Ω_1, g inverzna funkcija funkcije f,

(b) g je holomorfna na Ω_1,

(c) $g'(w) \neq 0$ za svako $w \in \Omega_1$.

Tada je f holomorfna na Ω i

$$f'(z) = \frac{1}{g'(f(z))}. \tag{1.35}$$

Dokaz: Fiksirajmo $z_0 \in \Omega$ i neka je $w_0 = f(z_0)$. Tada je

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{w - w_0}{g(w) - g(w_0)}. \tag{1.36}$$

Kako g ima izvod u w_0, različit od nule,

$$\lim_{w \to w_0} \frac{w - w_0}{g(w) - g(w_0)} = \frac{1}{g'(w_0)}. \tag{1.37}$$

Preciznije, s obzirom na to da je g homeomorfizam važi teorema o smeni promenljive za graničnu vrednost (limes) u formuli (1.36); objasniti!.

Odavde, s obzirom na (1.36) i (1.37), sledi da f ima izvod u z_0, i da je $f'(z_0) = \dfrac{1}{g'(w_0)}$.

Kako je z_0 proizvoljna tačka, f je holomorfna u Ω, i sledi (1.35). □

Teorema 1.5 je dovoljna za primene u teoriji holomorfnih funkcija. Sledeća vežba daje jedno uopštenje ove teoreme. Podvucimo da se u Glavi 6 dokazuje, ako je funkcija g holomorfna u nekoj okolini tačke w_0 i $g'(w_0) \neq 0$, tada je g jednolisna u nekoj okolini tačke w_0.

Vežba 1.3.1 *Pretpostavimo g je jednolisna u nekoj okolini V tačke w_0, postoji $g'(w_0) \neq 0$, skup $W = g(V)$ sadrži neki krug sa središtem u $z_0 = g(w_0)$ i da je funkcija $f = g^{-1}$, definisana na $W = g(V)$, neprekidna u $z_0 = g(w_0)$.*
Tada je $f'(z_0) = \dfrac{1}{g'(w_0)}$.

Uputstvo: Neka je $g^*(w) = \dfrac{w - w_0}{g(w) - g(w_0)}$, za $w \neq w_0$ i $g^*(w_0) = \frac{1}{g'(w_0)}$, i $\tilde{f}(z) = \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$, za $z \neq z_0$. Tada, je $g^* \circ f = \tilde{f}$ i funkcije g^* i $g^* \circ f$ su neprekidne respektivno u w_0 i z_0.

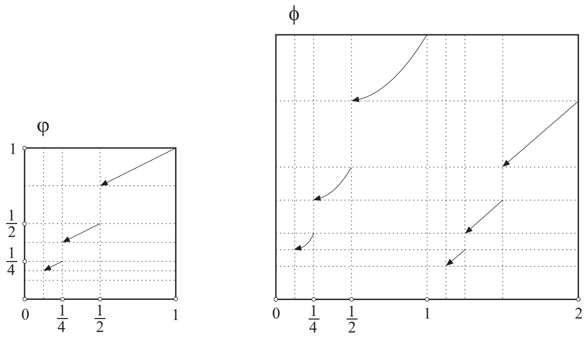
Vežba 1.3.2 * *Pretpostavimo da je g jednolisna u nekoj okolini V tačke w_0 i da postoji $g'(w_0) \neq 0$.*
Objasniti zašto nije korektno sledeće razmatranje.
Kako g ima izvod u w_0, g je neprekidna u w_0; tako da $z \to z_0$ kada $w \to w_0$ i stoga $f'(z_0) = \dfrac{1}{g'(w_0)}$. Da li iz pretpostavki ove vežbe sledi da postoji $f'(z_0)$?

Uputstvo: Ne; videti sledeću vežbu (1.3.3).

Vežba 1.3.3 *Neka je f jednolisna u okolini 0, $f(0) = 0$; postoji $f'(0) = 1$ i f preslikava okolinu 0 na okolinu 0.*
Da li inverzna funkcija ima izvod u 0?

Uputstvo: Konstrukcija 1. Neka je $a_k = \frac{1}{2^k}$, $b_k = a_{k-1}$, $c_k = \frac{a_k + b_k}{2}$, $I_k = (a_k, a_{k-1}]$, $A_k = (c_k, b_k]$, $J_k = I_k + 1 = (a_k + 1, b_k + 1)$, $k \geq 1$. Konstruišimo deo po deo linearnu funkciju φ na $[0, 2]$, koja preslikava I_k na A_k, $k \geq 1$; definišimo $\psi(x) = x\varphi(x)$, $\varphi(0) = 0$ i

$\phi(x) = x + \psi(x)$ na $[0, 1]$.
Tada ϕ preslikava I_k na $I_k^* = (\phi^+(a_k), \phi(b_k)]$, gde $\phi^+(a_k)$ označava desnu graničnu vrednost; produžimo ψ prvo na $[0, 2]$ tako da se intervali J_k linerano preslikavaju na $(\phi(a_k), \phi^+(a_k)]$,$k \geq 1$, a zatim na $[-2, 2]$ tako da je neparna funkcija. Proveriti da ϕ preslikava interval $[-2, 2]$ uzajamno jednoznačno na sebe,
$\phi(0) = 0$, $\phi'(0) = 1$ i da $\phi(x) \to 0$, kada $x \to 0$ i $x \to 1$ i stoga
inverzna funkcija je prekidna u 0.



Slika 1.7:

Razmotriti funkciju $f(z) = \phi(x) + iy$; f je jednolisna u okolini 0, $f'(0) = 1$. Da li inverzna funkcija ima izvod u 0?
Konstrukcija 2. Neka je $d_k = a_k(1 + \frac{1}{k+1})$, $B_k = (d_k, a_{k-1})$; neka je χ deo po deo linearna funkcija na $[0, 2]$, koja preslikava I_k na B_k, a $J_k = I_k + 1$ na $(a_k, d_k]$, $k \geq 1$; proširimo χ na $[-2, 2]$ tako da je neparna funkcija; neka je $g(z) = \chi(x) + i\,y$. □

Primer 4 *Za $n = 0, 1, 2, \ldots$, z^n je holomorfna u celoj ravni, odakle su polinomi po z holomorfni; proveriti da je $(z^n)' = nz^{n-1}$. Jednostavno se proverava da je $\dfrac{1}{z}$*

holomorfna u $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. *Odavde, primenjujući Teoremu 1.4 (formula (1.31)) na funkciju* $g(w) = \frac{1}{w}$, *sledi: ako su* f_1 *i* f_2 *u* $\mathcal{H}(\Omega)$ *i* Ω_0 *otvoren podskup* Ω, *na kome* f_2 *nema nula, tada je* $\frac{f_1}{f_2} \in \mathcal{H}(\Omega_0)$.

Sa $\mathbb{H}$ obično označavamo gornju poluravan.

Vežba 1.3.4 *Funkcija* $w = f(z) = z^2$ *se može predstaviti u* $\mathbb{H}$ *u polarnim koordinatama. Koristeći polarne forme* $z = re^{i\varphi}$ $(0 < \varphi < \pi)$ *i* $w = \rho e^{i\psi}$, *preslikavanje se može zapisati u sledećem obliku*

$$\rho = r^2, \quad \psi = 2\varphi$$

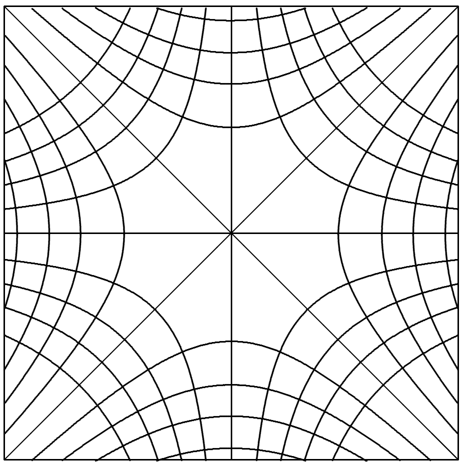
Otuda se polukrug $\{r = r_0, 0 < \varphi < \pi\}$ *preslikava u krug bez jedne tačke* $\{\rho = r_0^2, 0 < \psi < 2\pi\}$, *a zrak* $\{0 < r < +\infty, \varphi = \varphi_0\}$ *u zrak* $\{0 < \rho < +\infty, \psi = 2\varphi_0\}$. *Gornja poluravan se preslikava u ravan bez pozitivne poluose.*

Napomena: Ako je Ω neka oblast i γ put u Ω, za skup $\Omega \setminus \gamma^*$ koristi se naziv Ω sa zasekom duž γ. U tom smislu u situaciji opisanoj prethodnom vežbom može se reći: Gornja poluravan se preslikava u ravan sa zasekom duž pozitivne poluose.

Vežba 1.3.5 *Neka je* $f(z) = z^2$. *Ako je* $y_0 \neq 0$, *slika prave* $L_{y_0} = \{z : y = y_0\}$ *je parabola* L': $u = \frac{v^2}{4y_0^2} - y_0^2$.
Neka je $l_{x_0} = \{z : x = x_0\}$. *Ako je* $x_0 \neq 0$, *slika prave* l_{x_0} *je parabola* l': $u = x_0^2 - \frac{v^2}{4x_0^2}$.
Ako je $z_0 \neq 0$, *objasniti da iz* $C - R$ *uslova sledi da se putevi* L' *i* l' *„seku" pod pravim uglom.*
Razmotriti slučaj $z_0 = 0$.

Uputstvo: Iz $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, dobija se $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. Pravci tangenti u tački preseka puteva L' i l' određeni su respektivno vektorima $f_y(z_0)$ i $f_x(z_0)$. Iz CR- uslova, $f_y(z_0) = i\,f_x(z_0)$ za $z_0 \neq 0$. □

Vežba 1.3.6 *Neka je* $f(z) = z^2$ *i neka su* $l_{u_0} = \{z : u(z) = u_0\}$, $L_{v_0} = \{z : v(z) = v_0\}$ *nivo linije komponentnih funkcija. Ortogonalnost ove dve familije prikazana je na slici 1.8 i dokazuje se pomoću C-R uslova. Objasniti zašto krive* l_0 *i* L_0 *koje se seku u koordinatnom početku nisu ortogonalne.*



Slika 1.8: Mreža za z^2

1.4 Stepeni redovi

Red $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} z_k$ je konvergentan ako njegov niz

parcijalnih suma $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} z_k$ ima konačnu graničnu vrednost s; ta granična vrednost zove se suma reda.

Neka je $z_n = x_n + iy_n$ i neka je dat red

$$\sum_{k=0}^{+\infty} z_k. \tag{1.38}$$

Propozicija 1.10 *Red $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} z_k$ konvergira akko konvergiraju redovi $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} x_k$ i $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} y_k$. Štaviše, ako je $\sigma = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} x_k$ i $\tau = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} y_k$, tada je $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} z_k = \sigma + i\tau$.*

Red $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} z_k$ apsolutno konvergira ako red $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} |z_k|$ konvergira.

Iz nejednakosti $|x_n|, |y_n| \leq |z_n| \leq |x_n| + |y_n|$, sledi red $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} z_k$ apsolutno konvergira ako konvergiraju redovi $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} |x_k|$ i $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} |y_k|$, tj. ako apsolutno konvergiraju redovi $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} x_k$ i $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} y_k$.

Vežba 1.4.1 *Neka je $z_k = \dfrac{i^k}{k}$. Dokazati $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} z_k = -\dfrac{1}{2} \ln 2 + i\dfrac{\pi}{4}$.*

Primenjujući Košijev kriterijum za nizove dobijamo opšti kriterujem konvergencije redova:
Red $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} z_k$ konvergira akko

za svako $\varepsilon > 0$ postoji n_0 tako da $\left|\sum\limits_{k=n}^{n+p} z_k\right| < \varepsilon$ za $n \geq n_0$ i $p \geq 1$.
Za $p = 1$ dobijamo neophodan uslov konvergencije: $|z_n| \to 0$; harmonijski red $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} 1/k$ pokazuje da ovaj uslov nije dovoljan (mada niz $1/k \to 0$, harmonijski red divergira).

Propozicija 1.11 *Ako konvergiraju redovi $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} z_k = a$ i $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} w_k = b$, tada konvergira i red $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} (z_k \pm w_k) = a \pm b$. Pri dodatnom uslovu apsolutne konvergencije ovih redova konvergira i red $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_n$, gde je $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} z_k w_{n-k}$ i suma ovog reda je $a \cdot b$.*

Uputstvo: Neka je $\sum_{k=0}^{+\infty} |z_k| = \sigma$ i $\sum_{k=0}^{+\infty} |w_k| = \tau$ i $C_n = \sum_{k=0}^{n} |z_k||w_{n-k}|$. Iz RA, red $\sum_{k=0}^{+\infty} C_n$ konvergira ka $\sigma \cdot \tau$; $|c_n| \leq C_n = \sum_{k=0}^{n} |z_k||w_{n-k}|$. □

Funkcionalni red $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(z)$, gde su funkcije f_k definisane na nekom skupu M, nazivamo ravnomerno konvergentnim na M, ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $n_0 = n_0(\epsilon)$ tako da

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(z) \right| < \epsilon$$

za svako $n > n_0$ i svako $z \in M$. Jednostavno se proverava da iz ravnomerne konvergencije reda na skupu M sledi da red konvergira za svako $z \in M$ i u običnom smislu. Kao i u realnoj analizi, dokazujemo

Vajerštrasov test

Neka je M_n niz nenegativnih brojeva, funkcije f_k definisane na nekom skupu E, i neka su ispunjeni sledeći uslovi:

(a) $|f_n(z)| \leq M_n$ *za svako* $z \in E$*,*

(b) $\sum_{n=0}^{+\infty} M_n$ *konvergira.*

Tada red $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(z)$ *ravnomerno konvergira na* E*.*

Propozicija 1.12 (neprekidnost sume reda) *Neka je M podskup $\overline{\mathbb{C}}$ i neka su su ispunjeni sledeći uslovi:*
(a) f_k *su neprekidne na* M*,*
(b) $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(z)$ *ravnomerno konvergira na* M*.*
Tada je funkcija f definisana sa $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(z)$ *neprekidna na* M*.*

dokaz kao u RA.

Primer 5 *Geometrijski red* $\sum_{k=0}^{+\infty} z^k$ *konvergira za* $|z| < 1$ *i njegova suma je*

$$s(z) = \frac{1}{1-z}.$$

Na osnovu identiteta

$$(1-z)s_n(z) = (1-z)(1+z+z^2+\cdots+z^n) = 1 - z^{n+1},$$

sledi

$$s_n(z) = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, \ z \neq 1.$$

Sledi:

(a) *ako je* $|z| \geq 1$, *red divergira,*

(b) *ako je* $|z| < 1$, $s_n(z) = \dfrac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$ *konvergira ka* $s(z) = \dfrac{1}{1-z}$.

Red oblika

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - a)^k \tag{1.39}$$

zove se *stepeni red* oko tačke a.

Teorema 1.6 (Abelova teorema) *Ako stepeni red (1.39) konvergira u nekoj tački* z_0, *tada konvergira i na krugu* $B = \{z : |z - a| < |z_0 - a|\}$, *i na svakom kompaktnom podskupu skupa* B *konvergira apsolutno i ravnomerno.*

Uputstvo: Neka $z \in B$ i neka je $q = \dfrac{z - a}{z_0 - a}$; tada je $|q| < 1$ i $a_k(z - a)^k = a_k(z_0 - a)^k q^k$, $k \geq 0$. Kako red konvergira u tački z_0, niz $\{a_k(z_0 - a)^k\}$ je ograničen, i može se primeniti Vajerštrasov test.

Posledica 1.1 *Ako je funkcija* f *zadata stepenim redom (1.39) u* $B'(a; r) = \{z : 0 < |z - a| < r\}$, *za neko* $r > 0$, *tada se funkcija* f *može dodefinisati u tački* a, *tako da je nova funkcija neprekidna u tački* a.

Teorema 1.7 (Koši-Adamara, K-Ad) *Neka je*

$$\Lambda = \overline{\lim_{n \to +\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \quad i \quad R = \frac{1}{\Lambda}.$$

Tada

(a) *ako je* $\Lambda = +\infty$ (*tj.* $R = 0$), *red (1.39) konvergira samo u tački* a.

(b) *ako je* $\Lambda = 0$ (*tj.* $R = +\infty$), *red (1.39) konvergira za svako* $z \in \mathbb{C}$.

(c) *ako je* $0 < \Lambda < \infty$, *red (1.39) apsolutno konvergira na* $B(a; R)$; *a ako je* $|z - a| > R$, *divergira.*

R *se zove radijus konvergencije stepenog reda.*

Kažemo da se funkcija f definisana u Ω može predstaviti stepenim redovima u Ω, ako za svaki krug $B(a; r) \subset \Omega$ postoji stepeni red oko a, koji konvergira za svako $z \in B(a; r)$ ka $f(z)$.

Teorema 1.8 (Teorema o holomorfnosti sume stepenog reda) *Ako se f može predstaviti stepenim redovima u Ω, tada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ i f' se može predstaviti stepenim redovima u Ω. Preciznije: ako je*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-a)^k \tag{1.40}$$

za $z \in B(a;r)$, tada je za ove z takođe

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k (z-a)^{k-1}. \tag{1.41}$$

Sledi da f ima izvode svih redova, i da važi sledeće:

Posledica 1.2 *Ako je funkcija f zadata stepenim redom (1.40) u $B'(a;r) = \{z : 0 < |z-a| < r\}$, za neko $r > 0$, tada se funkcija f može dodefinisati u tački a sa $f(a) = a_0$, tako da je nova funkcija holomorfna u tački a.*

Posledica 1.3 *Ako važi (1.40), tada važi*

1. $f^{(n)}(z) = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1) a_k (z-a)^{k-n}$.

Odavde, specijalno:

2. $f^{(n)}(a) = n!\, a_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Dokaz Teoreme 1.8: Neka je $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n$, $z \in B(a;r)$. Formalnim diferenciranjem stepenog reda, član-po-član, dobija se $g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, c_n (z-a)^{n-1}$. Na osnovu Koši-Adamarovog testa, nalazimo da je funkcija g definisana na krugu $B(a;r)$. Pretpostavimo najpre, bez gubitka opštosti, da je $a = 0$. Fiksirajmo tačku $w \in B(a;r)$ i izberimo ρ, tako da je $|w| < \rho < r$. Ako je $z \neq w$, tada je

$$\frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \left(\frac{z^n - w^n}{z - w} - n w^{n-1} \right). \tag{1.42}$$

Ostavljamo čitaocu da dokaže da je izraz u zagradi jednak 0, za $n = 1$, i

$$(z - w) \sum_{k=1}^{n-1} k w^{k-1} z^{n-k-1} \tag{1.43}$$

ako je $n \geq 2$ (videti Vežbu 1.4.3). Sa druge strane, ako je $|z| < \rho$, apsolutna vrednost sume manja je od

$$\frac{n(n-1)}{2} \rho^{n-2}, \tag{1.44}$$

tako da je

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w) \right| \leq |z - w| \sum_{n=2}^{+\infty} n^2 |c_n| \rho^{n-2}. \tag{1.45}$$

Kako je $\rho < r$, red konvergira i otuda leva strana (1.45) teži 0, kada $z \to w$. $\square$

Vežba 1.4.2 *Neka je* $|z|$, $|w| < \rho$ *i*

$$p_n(z,w) = \frac{z^n - w^n}{z - w} - nw^{n-1}.$$

Tada važi

$$|p_n(z,w)| \le |z-w| \, \frac{n(n-1)}{2} \rho^{n-2}. \tag{1.46}$$

Primetimo da je prethodna nejednakost ključna u dokazu prethodne teoreme.

Rešenje: Neka je

$$p_n(z,w) = \sum_{k=0}^{n-1} (z^k w^{n-k-1} - w^{n-1}) = \sum_{k=1}^{n-1} w^{n-k-1}(z^k - w^k). \tag{1.47}$$

Kako je $z^k - w^k = (z-w)\sum_{j=0}^{k-1} z^j w^{k-j-1}$, dobija se da je
$|z^k - w^k| \le |(z-w)| \, k \, \rho^{k-1}$
i otuda

$$|p_n(z,w)| \le |z-w| \sum_{k=1}^{n-1} \rho^{n-k-1} \, k \, \rho^{k-1}.$$

Vežba 1.4.3 *Dokazati da je* $p_n(z,w) = 0$ *za* $n = 1$ *i* $(z-w)\sum_{k=1}^{n-1} kw^{k-1}z^{n-k-1}$ *za* $n \ge 2$.

1.5 Kompleksni brojevi i elementarna geometrija

1.5.1 Funkcije cos, sin, cis

Jedinična kružnica u kompleksnoj ravni definiše se sa

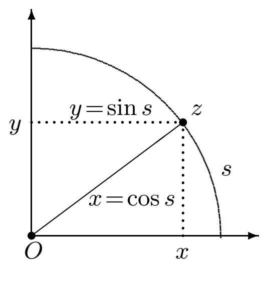
$$T = \{w : |w| = 1\}.$$

Neka tačke a, b pripadaju kružnici T. Tačke a, b dele kružnicu na dva luka; označimo sa ℓ_{ab} pozitivno orijentisan luk i za $z \in T$ neka je $\ell_z = \ell_{1z}$ i neka je $s = s(z)$ dužina luka ℓ_z.
Broj π definišimo tako da je dužina jedinične kružnice 2π.

Ako je s dužina luka ℓ_z, definišu se funkcije kosinus i sinus sa

$$\cos s = x \quad \text{i} \quad \sin s = y.$$

Funkcije kosinus i sinus produžuju se periodično na $\mathbb{R}$, sa periodom 2π.



Slika 1.9:

Pogodno je uvesti funkciju cis definisanu sa
$\operatorname{cis} t = \cos t + i \sin t$.
Dakle, svakoj tački $z \in T$ dodeljujemo „dužinu"
$s = s(z)$ i s preslikava T na $[0, 2\pi)$; definišemo
funkciju cis sa $\operatorname{cis} s = z$. Jasno je da je funkcija cis inverzna funkcija funkcije s i da cis preslikava uzajamno jednoznačno $[0, 2\pi)$ na T. Ova činjenica igra važnu ulogu u izgradnji teorije i zato je izdvajamo kao posebno tvrđenje (nazivamo je Teorema o jedinstvenosti polarne forme (JPF)).

Sada objasnimo detaljnije prethodno razmatranje.

Parametrizacija lukova ℓ_z

Pogodno je definisati gornju i donju polukružnicu

$$T_+ = \{z \in T : \operatorname{Im} z \geq 0\}, \quad T_- = \{z \in T : \operatorname{Im} z \leq 0\}.$$

Ponovimo da koristimo oznaku $z = x + iy$. Ako $z \in T$, tada je $x^2 + y^2 = 1$ i stoga $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$; specijalno ako $z \in T_+$, tada je $y = \sqrt{1 - x^2}$.
Otuda, svako $z \in T_+$ jedinstveno se predstavlja u obliku $z = x + i\sqrt{1 - x^2}$, a svako $z \in T_-$ jedinstveno se predstavlja u obliku $z = x - i\sqrt{1 - x^2}$.

Za $z \in T_+$, neka je γ_z kružni luk definisan sa $\gamma_z(t) = t + i\sqrt{1 - t^2}$, $x \leq t \leq 1$. Tada je $\ell_z = \gamma_z^-$.

Dužina $s = s(z) = s(x)$ luka ℓ_z definiše se kao supremum dužina „upisanih" poligonalnih linija. Na osnovu poznate formule, koja ne zavisi od uvođenja trigonometrijskih funkcija, za dužinu luka nalazi se

$$s = |\ell_z| = \int_x^1 |\gamma_z'(t)|\, dt = \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}\, dt. \tag{1.48}$$

Ako je dodatno $x \geq 0$, kružni luk γ_z može se parametrizovati i na sledeći način: $\gamma_z(t) = t + i\sqrt{1 - t^2}$, $0 \leq t \leq y$. Otuda je

$$s = |\ell_z| = \int_0^y |\gamma_z'(t)|\, dt = \int_0^y \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}\, dt. \tag{1.49}$$

Specijalno luk ℓ_{-1} označavamo sa K^+ i nazivamo orijentisana gornja polukružnica.

Definicija 1.13 (broj π) *Broj π se definiše kao dužina polukružnice K^+.*

Dakle,

$$\pi = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}\, dt. \tag{1.50}$$

Podvucimo da je broj π definisan pomoću nesvojstvenog integrala.

Napomena: Može se pokazati da funkcija cos preslikava $[0,\pi]$ uzajamno jednoznačno na $[-1,1]$; označimo sa arccos inverznu funkciju ove funkcije, koja preslikava $[-1,1]$ na $[0,\pi]$. Iz $x=\cos s$, sledi da je $s=\arccos x$, $-1\leq x\leq 1$, tako da je integral na desnoj strani jednačine (1.48) jednak $\arccos x$.
Čitalac može pokušati da definiše arccos pomoću integrala na desnoj strani jednačine (1.48), a cos kao inverznu funkciju ove funkcije i da otuda izvede svojstva funkcije cos.

Ako je $z\in T_-\setminus\{1\}$, neka je $\tilde{\ell_z}=\tilde{\gamma_z}=\tilde{\gamma_x}$ deo kružnog luka definisan sa

$$\tilde{\gamma_x}(t)=t-i\sqrt{1-t^2},\quad -1\leq t\leq x,$$

i neka je ℓ_z deo kružnog luka koji se sastoji od K^+ i $\tilde{\gamma_x}$.
Ako je $z\in T_-\setminus\{1\}$,

$$s=s(z)=\pi+\int_{-1}^{x}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt. \tag{1.51}$$

Za $z\neq 0$ definišimo funkciju $\arg z=s(\hat{z})$, gde je $\hat{z}=z/|z|$; u daljem tekstu pokazuje se da je arg glavna vrednost argumenta.
Ako sa $s^+(1)$ i $s^-(1)$ označimo granične vrednosti kada $z\to 1$, respektivno, kroz T_+ i T_-, jasno je da je $s^+(1)=0$ i $s^-(1)=2\pi$. Ako se granične vrednosti definišu u odnosu na H^+ (gornja poluravan) i H^- (donja poluravan), nalazimo da je $\arg^+(t)=0$ i $\arg^-(t)=2\pi$, $t>0$ (videti podsekciju 1.6.5 za definicije i detalje).

Ponovimo, ako je s dužina luka ℓ_z definišimo funkcije kosinus i sinus sa $\cos s=x$ i $\sin s=y$. Funkcije kosinus i sinus produžuju se periodično na $\mathbb{R}$, sa periodom 2π. Pogodno je uvesti funkciju cis definisanu sa $\operatorname{cis} t=\cos t+i\sin t$.

Kažemo da su ovde navedene definicije funkcija cos, sin i cis-a date pomoću modela jediničnog kruga.

Funkcija cis preslikava interval $I=[0,2\pi)$ uzajamno jednoznačno na T i otuda kako je cis periodična funkcija sa periodom 2π, cis preslikava interval $I=(-\pi,\pi]$ uzajamno jednoznačno na T. Iz prethodnog izlaganja sledi:

Teorema 1.9 (cis preslikava $\mathbb{R}$ na T; Teorema o cis – u) *Važe sledeća tvrđenja:*

- (a) cis *preslikava* $\mathbb{R}$ *na* T
- (b) cis *preslikava interval* $I=(-\pi,\pi]$ *uzajamno jednoznačno na* T.

(b) tvrdi da za svako $z\in T$ postoji jedinstveno $t\in(-\pi,\pi]$ tako da je $z=\operatorname{cis} t$. Ova Teorema daje parametrizaciju jedinične kružnice (pomoću dužine luka) i omogućava da se jednostavno definiše *ugao* i *merni broj ugla*.

Posledica 1.4 (Trigonometrijska-polarna forma kompleksnog broja) *Svako* $z\in\mathbb{C}^*$ *može se predstaviti u obliku*

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi), \tag{1.52}$$

gde je $r=|z|$ *i* $\varphi\in\mathbb{R}$.

Dokaz: Ako $z \in \mathbb{C}^*$, tada $\frac{z}{|z|} \in T$ i na osnovu Teoreme 1.9 (a)(o cis-u), sledi $\frac{z}{|z|} = \operatorname{cis}\varphi$, tj. $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, gde je $r = |z|$ i $\varphi \in \mathbb{R}$. □

Izdvajajući realni i imaginarni deo formule (1.52), dobija se:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \tag{1.53}$$

Jednačina (1.53) definiše *polarne koordinate* (r, φ) kompleksnog broja $z = (x, y)$. Polarni ugao φ naziva se *argument* ili *amplituda* kompleksnog broja i označava se sa $\operatorname{Arg} z$ (za precizniju definiciju videti sekciju Argument).

U sledećoj sekciji uvodimo eksponencijalnu funkciju i dokazujemo *Ojlerovu formulu* $\operatorname{cis} t = e^{it}$ i stoga umesto trigonometrijska forma kaže se i polarna-eksponencijalna forma (ovde koristimo e^{it} samo kao oznaku za $\operatorname{cis} t$).

Kako je $\operatorname{cis} t = e^{it}$, $t \in \mathbb{R}$, iz Teoreme 1.9, sledi:

Lema 1.2 (Trigonometrijsko-Eksponencijalna Forma, L Tr F) *Svako $z \in \mathbb{C}$ može se predstaviti u obliku $z = |z|e^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$.*

Dokaz: Sledi iz prethodne posledice. □

Ponovimo da je $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Za $\alpha \in \mathbb{R}$ neka je $I_\alpha = [\alpha, \alpha + 2\pi)$. Kako, na osnovu Teoreme 1.9 (b)(o cis-u) i periodičnosti funkcije cis sa periodom 2π, cis injektivno preslikava I_α na T, dobija se

Teorema 1.10 (Jedinstvenost trigonometrijske forme, JTF) *Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$. Svako $z \in \mathbb{C}^*$ može se jedinstveno predstaviti u obliku*

$$z = |z|\operatorname{cis}\varphi, \quad \varphi \in I_\alpha.$$

Kasnije, kada pokažemo da je $\operatorname{cis}\varphi = e^{i\varphi}$, ovu Teoremu ćemo nazivati Jedinstvenost trigonometrijske-polarne forme i koristiti skraćenicu JPF.
Podvucimo da na osnovu Teoreme 1.10 (u suštini iz Teoreme 1.9 (b)(o cis-u)), sledi

Posledica 1.5 *Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$. Funkcija* cis *injektivno preslikava $J_\alpha = (\alpha, \alpha + 2\pi)$ na $T_\alpha = T \setminus \{e^{i\alpha}\}$.*

Vežba 1.5.1 *Kompleksan broj $1 - i$ pripada četvrtom kvadrantu i može se napisati u formi*

$$1 - i = \sqrt{2}\operatorname{cis}(-\pi/4).$$

Umesto $-\pi/4$ može se koristiti svaka od vrednosti $\varphi = -\pi/4 + 2n\pi$, gde je n prirodan broj. Na primer

$$1 - i = \sqrt{2}\operatorname{cis}(7\pi/4).$$

1.5.2 Adicione formule za trigonometrijske funkcije

Dokaz adicione formule za trigonometrijske funkcije pokušajmo da prilagodimo nastavi u srednjoj školi pomoću sledećih tačaka.

1. *Skalarni proizvod* vektora a i b definiše se sa $(a, b) = \mathrm{Re}(a\,\overline{b})$ (proveriti).

2. Rotacija R_τ za ugao τ je izometrija.
   U nastavi, u srednjoj školi, obično ne definišemo kompleksnu eksponencijalnu funkciju. Ipak, za $\tau \in \mathbb{R}$ možemo definisati $R_\tau z = (\operatorname{cis}\tau)z$. Može se pokazati da je preslikavanje R_τ rotacija za ugao τ. Specijalno, nije teško proveriti da je R_τ izometrija.

   Iz $|\operatorname{cis}\tau| = 1$, sledi
   $$R_\tau z\overline{R_\tau\varsigma} = (\operatorname{cis}\tau)\, z\,\overline{(\operatorname{cis}\tau)\,\varsigma} = (\operatorname{cis}\tau)\, z\,\overline{\operatorname{cis}\tau}\,\overline{\varsigma} = z\overline{\varsigma}$$

   i otuda
   $$(R_\tau z, R_\tau\varsigma) = (z, \varsigma)$$
   i specijalno
   $$|R_\tau z - R_\tau\varsigma| = |(\operatorname{cis}\tau)(z-\varsigma)| = |z - \varsigma|.$$

   Preslikavanje R_τ naziva se rotacija za ugao τ (pogodno je pridružiti ovom pojmu mentalnu geometrijsku sliku). R_τ se, takođe, može predstaviti i u sledećem obliku:

   Iz
   $$(\operatorname{cis}\tau)z = (\cos\tau + i\sin\tau)(x+iy) = x\cos\tau - y\sin\tau + i(x\sin\tau + y\cos\tau)$$

   sledi
   $$R_\tau z = x\cos\tau - y\sin\tau + i(x\sin\tau + y\cos\tau)$$
   i otuda
   $$R_\tau z = (x\cos\tau - y\sin\tau, x\sin\tau + y\cos\tau).$$

3. Definicija ugla

   Uglom nazivamo deo ravni ograničen dvema polupravama OA i OB sa zajedničkim početkom O. Polupravе OA i OB nazivamo kracima ugla; njihov zajednički početak je teme ugla. Neka su $a, b \in T$ i $a = \operatorname{cis}\alpha$. Tada postoji jedinstveno $\beta \in I_\alpha = [\alpha, \alpha + 2\pi)$ tako da je $b = \operatorname{cis}\beta$; označimo sa ℓ_{ab} luk definisan sa
   $$\ell_{ab}(t) = \operatorname{cis} t,\ \alpha \le t \le \beta. \tag{1.54}$$

   Za $a \in \mathbb{C}^*$ označimo sa $\Lambda_a = \{\rho a : 0 < \rho < +\infty\}$. Jasno je, ako je $a = |a| \operatorname{cis}\alpha$ tada su $\Lambda_\alpha = \{\rho\, e^{i\alpha} : 0 < \rho < +\infty\}$ poluprave sa početkom u koordinatnom početku koje „zaklapaju” ugao α sa x osom.

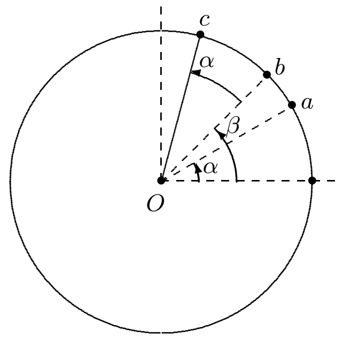
Ugao kao konveksan skup

U srednjoškolskoj nastavi može se postupiti na sledeći način: ako $b \notin \Lambda_{-a}$, ugao aOb može se definisati i kao najmanji konveksan skup koji sadrži tačku 0 i polupravе Λ_a i Λ_b; ako $b \in \Lambda_{-a}$ (tj. tačke A, O i B pripadaju pravoj), ugao aOb definiše se kao poluravan, koja sadrži luk $\ell_{a_0 b_0}$. Ako luk $\ell_{a_0 b_0}$ pripada uglu, *merni broj* ugla aOb je dužina ovog luka (luka koji je presek ugla sa jediničnom kružnicom T); ako luk $\ell_{a_0 b_0}$ ne pripada uglu merni broj ugla aOb je negativan, dužina ovog luka sa znakom minus.

4. Dokaz adicione formule za trigonometrijske funkcije

$$\operatorname{cis}(\alpha+\beta) = \operatorname{cis}\alpha \operatorname{cis}\beta$$

Dokaz: Kako je cis periodična funkcija sa periodom 2π, može se pretpostaviti da $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$. Neka je $a = \operatorname{cis}\alpha$, $b = \operatorname{cis}\beta$ i neka je $c = R_\alpha b$. Tada su respektivno dužine lukova ℓ_{1a} i ℓ_{1b}, α i β; kako je R_α izometrija, $R_\alpha 1 = a$ i $R_\alpha b = c$, dužine lukova ℓ_{1b} i ℓ_{ac} su jednake i otuda dužina luka ℓ_{ac} je β, pa je dužina luka nastalog nadovezivanjem lukova ℓ_{1a} i ℓ_{ac} jednaka $\alpha+\beta$ (tj. dužina luka ℓ_{1c} je $(\alpha+\beta)(\operatorname{mod} 2\pi)$); preciznije dužina luka ℓ_{1c} je $\alpha+\beta-2\pi$, ako je $\alpha+\beta \geq 2\pi$, a dužina luka ℓ_{1c} je $\alpha+\beta$, ako je $\alpha+\beta < 2\pi$. Dakle, s obzirom na definiciju cis,



Slika 1.10:

$$c = \operatorname{cis}(\alpha+\beta),$$

i kako je

$$c = R_\alpha b = \operatorname{cis}\alpha \operatorname{cis}\beta,$$

otuda dobijamo adicione formule za trigonometrijske funkcije

$$\operatorname{cis}(\alpha+\beta) = \operatorname{cis}\alpha \operatorname{cis}\beta.$$

□

Podvucimo da se dokaz adicione formule bazira na

(a) R_α je izometrija,

(b) Dužina luka je aditivna funkcija.

Vežba 1.5.2 (Moavrova formula (A. de Moivre)) *Primenom principa matematičke indukcije, dokazati formulu:*

$$(\operatorname{cis}\varphi)^n = \operatorname{cis} n\varphi, \ n \in \mathbb{N}.$$

Ova formula daje ekstremno jednostavan način da se izraze $\cos n\varphi$ i $\sin n\varphi$ pomoću $\cos\varphi$ i $\sin\varphi$. Naime,

$$\cos n\theta = \sum_{0\le 2k\le n} (-1)^k \binom{n}{2k} \cos^{n-2k}\theta\, \sin^{2k}\theta.$$

Uputstvo: Za $a = \cos\theta$ i $b = \sin\theta$, na osnovu Moavrove i binomne formule, nalazimo da je

$$\cos n\theta + i\, \sin n\theta = (a+ib)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}(ib)^k.$$

1.5.3 Binomna jednačina

Na osnovu Vežbe 1.5.2 dobija se da je $n-$ti stepen broja $z = r\,\mathrm{cis}\,\varphi$ dat sa

$$z^n = r^n\,\mathrm{cis}\, n\varphi. \tag{1.55}$$

Za $r = 1$ ovaj rezultat se svodi na *Moavrovu formulu* (A. de Moivre)

$$(\mathrm{cis}\,\varphi)^n = \mathrm{cis}\, n\varphi. \tag{1.56}$$

Definicija 1.14 *n-ti koren ko mpleksnog broja a je skup rešenja jednačine*

$$z^n = a. \tag{1.57}$$

Pretpostavimo da je $a = r\,\mathrm{cis}\,\alpha$ i $z = \rho\,\mathrm{cis}\,\varphi$. Tada jednačinu (1.57) pišemo u obliku

$$z^n = \rho^n\,\mathrm{cis}\, n\varphi = r\,\mathrm{cis}\,\alpha. \tag{1.58}$$

Ako je $\rho^n = r$ i $n\varphi = \alpha$, tada jasno važi (1.58). U suštini, (1.58) važi ako se $n\varphi$ razlikuje od α za celobrojni umnožak punog ugla. Ako se uglovi izražavaju u radijanima, pun ugao je 2π i na osnovu Propozicije 1.5 o jednakosti polarnih formi, (1.58) važi akko $\rho = \sqrt[n]{r}$ i

$$\varphi = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \tag{1.59}$$

gde je k ceo broj. Ipak, samo vrednosti $k = 0, 1, \ldots, n-1$ daju različite vrednosti $z = \rho\,\mathrm{cis}\,\varphi$. Otuda

$$z_k = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{cis}\,\frac{\alpha + 2k\pi}{n} = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{cis}\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Svaki kompleksan broj različit od nule ima n n-tih korena. Geometrijski, n-ti koreni su temena pravilnog n-tougla.

Uvedimo još oznaku $e^{i\varphi} = \mathrm{cis}\,\varphi$.

Dakle, ako je $a = r\,\mathrm{cis}\,\alpha = re^{i\alpha} \neq 0$ dat u polarnoj formi i n prirodan broj, $\sqrt[n]{a}$ je skup rešenja jednačine $z^n = a$ po z, tj. skup

$$\{z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\varphi_k} \;:\; k = 0, 1, \ldots, n-1\}, \tag{1.60}$$

gde je

$$\varphi_k = \frac{\alpha + 2k\pi}{n} = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n},$$

mada se u literaturi sa $\sqrt[n]{a}$ ponekad označava i neki od n-tih korena iz a.

Slučaj $a = 1$ je posebno interesantan. Koreni jednačine $z^n = 1$ nazivaju se *n-ti koreni jedinice* i ako se uvede oznaka

$$\omega = \operatorname{cis} \frac{2\pi}{n}, \tag{1.61}$$

sa $1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$ su dati svi n-ti koreni jedinice. Takođe je jasno da ako je z_0 neki n-ti koren iz a, tj. $z_0 \in \sqrt[n]{a}$, tada je $\sqrt[n]{a} = \{\, \omega^k z_0 : k = 0, 1, \ldots, n-1 \,\}$.

Skup vrednosti $z^{1/n}= \{z_0, z_1, ..., z_{n-1}\}$ su temena odgovarajućeg pravilnog n-tougla.

Vežba 1.5.3 *Ako su $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ n-ti koreni broja $z \in \mathbb{C}$, dokazati*

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} z_k = 0. \tag{1.62}$$

Ako je $\phi = 2\pi/n$, da li formula $S \operatorname{cis} \phi = S$ ima jasnu geometrijsku interpretaciju?

Uputstvo: $z_{k+1} = e^{i\phi} z_k$, $k = 0, \ldots, n-1$, gde je $z_n = z_0$. □

U nameri da ilustrujemo formulu (1.60) nađimo vrednosti $(-8i)^{1/3}$. Kako je

$$-8i = 8 \exp\left(i(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi)\right),$$

vrednosti trećeg korena $-8i$, $(-8i)^{1/3}$, su

$$z_k = 2 \exp\left(i(-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3})\right), \quad k = 0, 1, 2.$$

Otuda, $z_0 = \sqrt{3} - i$, $z_1 = 2\,i$ i $z_2 = -\sqrt{3} - i$.

Vežba 1.5.4 *a) Pokazati da je $z^4 + 4 = (z^2 + 2z + 2)(z^2 - 2z + 2)$.*
b) Na osnovu a), rešiti jednačinu $z^4 + 4 = 0$.
c) Odrediti $\sqrt[4]{-4}$ i na osnovu toga proveriti rezultate dobijene u tački b).

1.5.4 Skalarni proizvod

Propozicija 1.13 *Neka $a, b \in T$ i neka je γ oznaka mernog broja ugla aOb. Tada je $(a, b) = \cos\gamma$.*

Dokaz: Neka je $a = \operatorname{cis}\alpha$ i $z = R_{-\alpha} b$. Kako je $R_{-\alpha}$ izometrija i $1 = R_{-\alpha} a$, $R_{-\alpha}$ preslikava ugao aOb na ugao $1Oz$ i

$$x = (z, 1) = (b, a).$$

Otuda je $\cos\gamma = x = (a, b) = \operatorname{Re}(a\bar{b})$. □

Propozicija 1.14 *Neka $a, b \in \mathbb{C}$ i neka je γ oznaka mernog broja ugla aOb. Tada je*

$$(a, b) = |a||b| \cos \gamma. \tag{1.63}$$

Dokaz: Ako je a ili b nula jasno je da su obe strane (1.63) jednake nuli; ako $a, b \in \mathbb{C}^*$ i $a_0 = a/|a|$ i $b_0 = b/|b|$, tada (1.63) sledi primenom Propozicije 1.13 na a_0 i b_0. □

Dokaz adicione formule (pomoću vektora)

U nastavi, u srednjoj školi, pojavljuje se i dokaz adicione formule pomoću vektora. Prvo, razmotrimo još jednom definiciju ugla i mernog broja ugla. Postoji više mogućnosti da se definiše orijentisan ugao. Navedimo definiciju, koja uključuje i konkavne uglove (za definiciju koja uključuje konveksne uglove videti podsekciju 1.5.2).

Na primer, neka su $a, b \in T$ i $a = \operatorname{cis} \alpha$. Tada postoji jedinstveno $\beta \in I_\alpha = [\alpha, \alpha + 2\pi)$ tako da $b = \operatorname{cis} \beta$. Definišimo ugao $aOb = \{\rho \operatorname{cis} \varphi : \rho > 0, \alpha \leq \varphi \leq \beta\}$; merni broj ugla aOb je $\gamma = \beta - \alpha$ i merni broj označavamo sa $\overline{aOb}$. Ako $a, b \in \mathbb{C}^*$, $a_0 = a/|a|$ i $b_0 = b/|b|$, definišemo ugao aOb pomoću ugla $a_0 O b_0$.

Vežba 1.5.5 *Objasniti razlike između dve definicije ugla i mernog broja ugla.*

Vratimo se dokazu *Adicione formule.*
Dokaz: Neka $a, b \in T$ i neka je γ oznaka mernog broja ugla aOb. Tada je

$$(a, b) = \cos \gamma. \tag{1.64}$$

S druge strane,

$$(a, b) = \operatorname{Re}(a\bar{b}) = \operatorname{Re}(\operatorname{cis} \alpha \operatorname{cis}(-\beta)) = \operatorname{Re}((\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta - i \sin \beta))$$

i otuda

$$(a, b) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta. \tag{1.65}$$

Kako je, s obzirom na gornju notaciju, $\gamma = \beta - \alpha$, iz (1.64) i (1.65) sledi

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

□

Vežba 1.5.6 *Ispisati vektorsku verziju prethodnog dokaza.*

Sledeća propozicija daje predstavljanje proizvoljnog kompleksnog broja (vektora) u odnosu na ortonormirani sistem a_0 i ia_0 (a_0 je jedinični vektor); interesantno je da se dokaz adicione formule može izvesti pomoću posledice ove propozicije.

Propozicija 1.15 *Neka je $a_0 \in T$ i b kompleksan broj. Tada je*

$$b = \lambda_1 a_0 + \lambda_2 i a_0, \tag{1.66}$$

gde je $\lambda_1 = (b, a_0)$ i $\lambda_2 = (b, ia_0)$.

Dokaz: Neka je $a_0 = \operatorname{cis}\alpha$ i $z = R_{-\alpha}(b)$. Tada je $z = x + iy$, gde je $x = (z, 1)$ i $y = (z, i)$. Kako je R_α izometrija i $R_\alpha(1) = a_0$, $R_\alpha(i) = ia_0$, sledi (1.66). □

Posledica 1.6 *Neka je $a_0 \in T$, b kompleksan broj različit od nule i neka je γ merni broj ugla a_0Ob. Tada je*

$$b = |b|((\cos\gamma)a_0 + (\sin\gamma)ia_0) \tag{1.67}$$

Vežba 1.5.7 *Izvesti dokaz adicione formule pomoću ove posledice.*

1.5.5 Kosinusna teorema

Propozicija 1.16 *Neka su z i w kompleksni brojevi i γ mera orijentisanog ugla zOw. Tada je*

$$|z - w|^2 = |z|^2 - 2|z||w|\cos\gamma + |w|^2.$$

Dokaz sledi na osnovu Propzicije 1.14 i relacije (1.9) (Propozicija 1.4).

Propozicija 1.17 *Neka su a, b i c kompleksni brojevi i γ mera orijentisanog ugla bac. Tada je*

$$|b - c|^2 = |b - a|^2 - 2|b - a||c - a|\cos\gamma + |c - a|^2.$$

Kako je preslikavanje T_a, definisano sa $T_a(\varsigma) = \varsigma - a$, izometrija dokaz sledi primenom prethodne Propozicije na vektore $z = b - a$ i $w = c - a$.

1.5.6 Argument

Preslikavanje $F : M \to \mathcal{P}\mathbb{C}$ naziva se višeznačna funkcija (všz). Podvucimo, svakom $z \in M$ všz. funkcija F dodeljuje $F(z) = F_z$, podskup kompleksne ravni.
Ako je $f : M \to \mathbb{C}$ neprekidno preslikavanje tako da je $f(z) \in F_z$, $z \in M$, f nazivamo grana višeznačne funkcije F. Podvucimo da za razliku od všz F, grana f je jednoznačna funkcija (funkcija); dakle, svakom $z \in M$ dodeljuje tačno jedan kompleksan broj iz skupa F_z.

U sledećoj sekciji uvodimo i dokazujemo *Ojlerovu formulu* $\operatorname{cis} t = e^{it}$; u ovoj sekciji koristimo e^{it} samo kao oznaku umesto $\operatorname{cis} t$.

Za $z \in \mathbb{C}^*$ definišemo

$$\operatorname{Arg} z = \{\varphi \in \mathbb{R} : z = |z|\operatorname{cis}\varphi\} = \{\varphi \in \mathbb{R} : z = |z|e^{i\varphi}\}.$$

Podvucimo da je Arg višeznačna funkcija.

Propozicija 1.18 *Ako je $z, w \in \mathbb{C}^*$ i $\operatorname{Arg} z = \operatorname{Arg} w$, tada je $z = sw$, gde je $s > 0$ (tj. tačke z i w pripadaju polupravoj sa početkom u 0).*

Dokaz: Izaberimo $\varphi \in \operatorname{Arg} z$, tada i $\varphi \in \operatorname{Arg} w$; otuda, s obzirom na definiciju Arg, dobija se $z/|z| = e^{i\varphi}$ i $w/|w| = e^{i\varphi}$. Otuda je $z/|z| = w/|w|$ i tvrđenje sledi. □

Propozicija 1.19 $\operatorname{cis}\varphi = \operatorname{cis}\theta$ *akko* $\theta = \varphi + 2k\pi$, *gde je* $k \in \mathbb{Z}$.

Dokaz: Kako je cis periodična sa periodom 2π iz $\theta = \varphi + 2k\pi$ sledi $\operatorname{cis}\varphi = \operatorname{cis}\theta$. Važi i obrnuto: neka je $\operatorname{cis}\varphi = \operatorname{cis}\theta$; tada postoji $k \in \mathbb{Z}$ tako da $\theta - 2k\pi \in [\varphi, \varphi + 2\pi)$ i otuda, kako je cis preslikavanje $1-1$ na intervalu $[\varphi, \varphi + 2\pi)$, sledi $\theta - 2k\pi = \varphi$, tj. $\theta = \varphi + 2k\pi$. □

Specijalno, ako $\varphi_0 \in \operatorname{Arg} z$ tada je $\operatorname{Arg} z = \{\varphi_0 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Na osnovu prethodnih razmatranja, jednostavno se dokazuje sledeća, korisna lema.

Lema 1.3 (Jednakost trigonometrijskih-polarnih formi, EPF) *Neka su* $w, z \in \mathbb{C}^*$. *Tada*

(*a*) $w = z$ *akko* $|w| = |z|$ *i* $\operatorname{Arg} w = \operatorname{Arg} z$.

Ako je $w = \rho e^{i\theta}$ *zadato u* PF *tada je*

(*b*) $w = z$ *akko* $\rho = |z|$ *i* $\theta \in \operatorname{Arg} z$.

Dokaz (b): Na primer, neka je $\rho = |z|$ i $\theta \in \operatorname{Arg} z$. Tada je $z = |z|e^{i\theta}$ i otuda $z = \rho\, e^{i\theta} = w$.

Propozicija 1.20 *Ako* $z, w \in \mathbb{C}^*$, *tada*

(*a*) $\operatorname{Arg}(zw) = \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w$ *(osnovno pravilo)* .

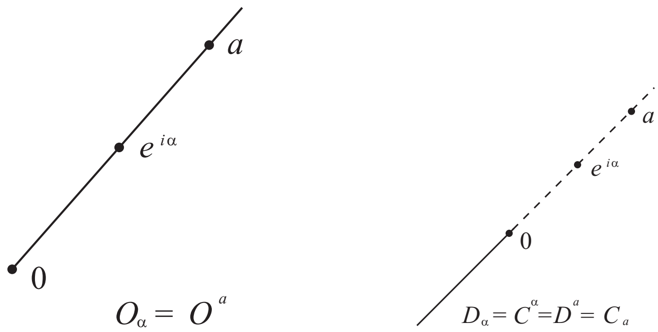
Pravilo (*a*) daje duboko i neočekivano opravdanje geometrijske reprezentacije kompleksnog broja.
Dokaz: (*a*) Neka $\varphi \in \operatorname{Arg} z$ i $\theta \in \operatorname{Arg} w$. Iz definicije višeznačne funkcije Arg dobija se $z = |z|e^{i\varphi}$, $w = |w|e^{i\theta}$. Otuda prvo sledi $zw = |z||w|e^{i(\varphi+\theta)}$, i stoga $(\varphi + \theta) \in \operatorname{Arg}(zw)$. □

Postoji grana argumenta na O_α.

Ako je realna funkcija φ neprekidna na oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{C}^*$ i ako je $z = |z|\operatorname{cis}\varphi(z) = |z|e^{i\varphi(z)}$ (tj. $\varphi(z) \in \operatorname{Arg} z$) za svako $z \in \Omega$, φ se naziva grana višeznačne funkcije Arg (kratko grane argumenta) na Ω i obično označava sa arg. Za primere grana argumenta videti Posledici 1.7 i razmatranja koja slede posle ove posledice.

Za $\gamma \in \mathbb{R}$ označimo sa $\Lambda_\gamma = \{\rho \operatorname{cis}\gamma = \rho e^{i\gamma} : 0 < \rho < +\infty\}$ poluprave sa početkom u koordinatnom početku koje „zaklapaju" ugao γ sa x osom. Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$ i $O_\alpha = \mathbb{C}^* \setminus \Lambda_\alpha$. Ako je $a = |a|e^{i\alpha}$ pogodno je koristiti i oznake Λ^a i O^a respektivno umesto Λ_α i O_α.

Definicija 1.15 **($\mathbb{C}^\alpha$, $\mathbb{C}_a$)** *Za* $\alpha \in \mathbb{R}$ *definišemo* $\mathbb{C}^\alpha = D_\alpha = \{\alpha - \pi < \varphi < \alpha + \pi\}$. *Ako je* $a = |a|e^{i\alpha} \neq 0$, *pogodno je, respektivno, pisati* Λ_a, O^a *i* $\mathbb{C}_a = D^a$ *umesto* Λ_α, O_α *i* $\mathbb{C}^\alpha = D_\alpha$.



Slika 1.11:

U prvom čitanju oznake iz prethodne definicije mogu dovesti do konfuzije. Na primer $\mathbb{C}_1 = \mathbb{C}_{\pi/2}$ i ovi skupovi su jednaki $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$; a kako je $i = e^{i\pi/2}$ onda važi $\mathbb{C}^{\pi/2} = \mathbb{C}_i$ i ovi skupovi su jednaki $\mathbb{C}^* \setminus \Lambda^{-i}$.

Čitalac može izabrati da u vezi sa oznakama $D_\alpha = \mathbb{C}^\alpha = D^a = \mathbb{C}_a$ koristi samo donje indekse tj. oznake D_α i $\mathbb{C}_a$.

Podvucimo, ako je $a = |a|e^{i\alpha} \neq 0$ zadato u polarnoj formi, da je $D_\alpha = O_{\alpha-\pi}$, $\mathbb{C}_a = \mathbb{C}^* \setminus \Lambda^{-a}$, $\mathbb{C}_a = -O^a$, $a \in \mathbb{C}_a$ i $-a \in O_a$. Primetimo da su skupovi $\mathbb{C}^\alpha$ i $\mathbb{C}_a$ jednaki, ali kada koristimo oznaku $\mathbb{C}^\alpha$ obično podrazumevamo da je grana argumenta na ovoj oblasti određena sa vrednostima u $(\alpha-\pi, \alpha+\pi)$, koju nazivamo glavna grana argumenta na $\mathbb{C}^\alpha$.

Na osnovu razmatranja u paragrafu o cis-u (specijalno Teorema 1.10) dokazuje se sledeća neposredna posledica Teoreme 1.10.

Posledica 1.7 (Po P-F) *Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$. Svako $z \in O_\alpha$ može se jedinstveno predstaviti u obliku $z = |z|\mathrm{cis}\,\varphi = |z|e^{i\varphi}$, $\varphi \in (\alpha, \alpha+2\pi)$ tj.*

$$O_\alpha = \{\rho\,\mathrm{cis}\,\varphi = \rho e^{i\varphi} : 0 < \rho < +\infty,\ \alpha < \varphi < \alpha + 2\pi\}.$$

Dokaz: Neka je $T_\alpha = T \setminus \{e^{i\alpha}\}$. Tada $z \in O_\alpha$ ako i samo ako $z/|z| \in T_\alpha$. Otuda tvrđenje sledi iz Posledice 1.5. □

Ponovimo, na osnovu Teoreme 1.10, svako $z \in O_\alpha$ može se jedinstveno predstaviti u obliku

$$z = |z|\mathrm{cis}\,\varphi = |z|e^{i\varphi},\ \ \varphi \in J_\alpha = (\alpha, \alpha + 2\pi).$$

Na ovaj način svakom $z \in O_\alpha$ jednoznačno je „dodeljeno" $\varphi = \varphi(z)$ u intervalu J_α, tj. definisana je funkcija $\varphi : O_\alpha \to J_\alpha$ koja je grana višeznačne funkcije Arg (grana argumenta) na O_α. Ako želimo da podvučemo da je φ grana Arg onda umesto φ koristimo oznake arg ili $\arg_\alpha$.

Ako je

$$J_k = J_k(\alpha) = (\alpha + 2k\pi, \alpha + 2(k+1)\pi),\ \ k \in \mathbb{Z}$$

postoji grana argumenta $\varphi_k : O_\alpha \to J_k$. Koristi se i oznaka $\arg_k$ umesto φ_k.

Definicija 1.16 *Sa* arg *označavamo neku granu argumenta; obično granu sa vrednostima u* $(0, 2\pi)$ *ili* $(-\pi, \pi)$ *nazivamo glavna grana; ako želimo da razlikujemo ove dve grane onda izbor argumenta sa vrednostima u* $[0, 2\pi)$ *nazivamo prva glavna vrednost argumenta, a sa vrednostima u* $(-\pi, \pi]$ *nazivamo druga glavna vrednost argumenta.*

Podvucimo da je glavna vrednost argumenta definisana na skupu $\mathbb{C}^*$, a da je prva glavna grana argumenta na $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$.

Ponovimo, ako sa $s^+(1)$ i $s^-(1)$ označimo granične vrednosti kada $z \mapsto 1$, respektivno, kroz T_+ i T_-, jasno je da je $s^+(1) = 0$ i $s^-(1) = 2\pi$. Ako se granične vrednosti definišu u odnosu na H^+ (gornja poluravan) i H^- (donja poluravan), nalazimo da za prvu glavna vrednost argumenta važi: $\arg^+(t) = 0$ i $\arg^-(t) = 2\pi$, $t > 0$ (videti podsekciju 1.6.5 za definicije i detalje).

Propozicija 1.21 *1. Neka su* φ_1 *i* φ_2 *grane argumenta na oblasti* Ω*, tada* $\varphi_2 - \varphi_1 \equiv 2\pi k_0$*, gde je* k_0 *ceo broj.*
2. Ne postoji grana argumenta na $\mathbb{C}^*$*.*

Uputstvo: 1. Funkcija $\dfrac{\varphi_2 - \varphi_1}{2\pi}$ neprekidna i celobrojna funkcija na povezanom skupu Ω.
2. Suprotno pretpostavimo da postoji grana argumenta φ na $\mathbb{C}^*$ i neka je φ_0 prva glavna grana argumenta na $\mathbb{C}_{-1}$, tada je $\varphi - \varphi_0 \equiv 2\pi k_0$ na $\mathbb{C}_{-1}$, gde je k_0 ceo broj. Otuda je φ prekidna funkcija na $\mathbb{R}^+$, što je kontradikcija sa pretpostavkom da je φ neprekidna na $\mathbb{C}^*$.

Primer 6 *Pokazati da nije tačno* $\arg(zw) = \arg z + \arg w$*.*

Rešenje: Neka je, na primer, arg grana argumenta na $O_0 = \mathbb{C}^* \setminus \Lambda_0$, sa vrednostima u $(0, 2\pi)$ i $z = w = -i$. Tada je

$$\arg z = \arg w = \arg(-i) = \frac{3\pi}{2}.$$

Otuda je

$$\arg z + \arg w = 3\pi.$$

□

Vežba 1.5.8 *Objasniti razliku između Propozicije 1.20 i Primera 6.*

Primer 7 *Neka je* $\ell = (0, +\infty i) = \Lambda_i$*,* $O = \mathbb{C}^* \setminus \ell$ *i neka je grana argumenta* arg *na* O *određena sa*

(a) $$\arg(1) = 0,$$

(b) $$\arg(1) = 2\pi.$$

Da li je u slučaju (a) grana arg *određena sa vrednostima u* $\left(-\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ *i* $\arg(-i) = -\pi/2$*, a u slučaju (b)* $\arg(-i) = 3\pi/2$*?*

(*c*) *Da li postoje grane* Arg *sa vrednostima u* $\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{5\pi}{2}+2k\pi\right)$ *na* O*?*

Uputstvo: Primetimo da $i = e^{i\pi/2}$ i da je $O = O_{\pi/2}$. □

1.5.7 Exp i cis

Ojlerova formula

Sa D označavamo izvod funkcije jedne promenljive; $Df = f'$.
Iz adicione teoreme, izvodi se $D \cos = -\sin$ i $D \sin = \cos$ (za diskusiju i razne dokaze ove formule videti sledeću podsekciju). Zatim nalazimo prvo izvode ovih funkcija u nuli, i otuda Tejlorove razvoje

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \tag{1.68}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{1.69}$$

U realnoj analizi takođe važnu ulogu ima *eksponencijalna* funkcija, koja se označava sa exp ili e. Na primer, eksponencijalna funkcija može da se definiše kao rešenje diferencijalne jednačine $f'(x) = f(x)$ sa početnim uslovom $f(0) = 1$. Otuda, iz Tejlorove formule sledi

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{1.70}$$

Podvucimo da je exp monotono rastuća funkcija na $\mathbb{R}$ i da izgleda potpuno različito od trigonometrijskih funkcija cos i sin. Zamenjujući realnu promenljivu x sa kompleksnom promenljivom z u (1.70) definiše se

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, \ z \in \mathbb{C}. \tag{1.71}$$

Osoba koja proučava kalkulus s tačke gledišta realnih brojeva ne očekuje vezu između exp i *trigonometrijskih* funkcija. Zaista, izgleda da su ove funkcije izvedene iz potpuno različitih izvora. Čitalac može uočiti sličnost između *Tejlorovih* razvoja ovih funkcija i ako želi da koristi imaginarni argument može izvesti *Ojlerovu formulu*

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \tag{1.72}$$

kao formalni identitet.
Iz (1.71) sledi:

$$\exp(ix) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^n}{n!}.$$

Kako je $(ix)^{2k} = i^{2k}x^{2k} = (-1)^k x^{2k}$ i $(ix)^{2k+1} = i^{2k+1}x^{2k+1} = i(-1)^k x^{2k+1}$, nalazi se

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos x + i \sin x.$$

Gaus je shvatio dubinu Ojlerove formule (v. npr. [Ah]). U sledećoj sekciji skiciraćemo pristup koji objašnjava Gausovu ideju i npr. direktno daje negeometrijsku definiciju argumenta (mernog broja ugla): sa (1.71) definišemo eksponencijalnu funkciju i pokazujemo da je jedinična kružnica parametrizovana sa $z = e^{it}, t \in [0, 2\pi)$, bez razmatranja pojma i osobina dužine luka; trigonometrijske funkcije možemo jednostavno definisati pomoću eksponencijalne funkcije; a logaritamsku funkciju (Ln) kao inverznu funkciju eksponencijalne i Arg kao $\operatorname{Im}\operatorname{Ln}$.

1.5.8 Izvod cis*

Čitalac je u kursevima analiza do sada radio sa izvodima funkcija cos i sin. Skiciraćemo precizan dokaz sledeće propozicije (formule za izvode cos i sin).

Propozicija 1.22 1. $D\mathrm{cis} = i\,\mathrm{cis}$
2. $D\sin = \cos, \quad D\cos = -\sin.$

Dokaz se bazira na sledećoj vežbi:

Vežba 1.5.9 *Dokazati da je* $D\mathrm{cis}(0) = i.$

Uputstvo: Neka je $0 < s < \pi/2$, i $\tau(x) = x - 1 + i\sqrt{1-x^2}$. Kako je

$$\frac{\mathrm{cis}\, s - 1}{s} = \frac{\tau(x)}{s(x)} \tag{1.73}$$

i $\tau'(x)/s'(x) = -\sqrt{1-x^2} + ix$, na osnovu Lopitalovog pravila $D_+\mathrm{cis}(0) = i$, gde D_+ označava desni izvod. Ako je $s < 0$, tada je $\mathrm{cis}(-s) = \overline{\mathrm{cis}\, s}$, i otuda $D_-\mathrm{cis}(0) = i$, gde D_- označava levi izvod. $\square$

Na osnovu Vežbe 1.5.9 i adicione formule sledi Propozicija 1.22; tj. $D\mathrm{cis} = i\,\mathrm{cis}$.

Sada ćemo skicirati uobičajen dokaz Propozicije 1.22 iz kurseva RA i pokušati da objasnimo zašto u dokazu Propozicije 1.22 nismo koristili uobičajen postupak.

Vežba 1.5.10 *Dokazati*
a) površina kruga poluprečnika r *jednaka je* $P = \pi r^2$.
b) Ako je $z = r\,\mathrm{cis}\tau$, *površina kružnog isečka* $r0z$, *poluprečnika* r, *jednaka je* $P_\tau = r\tau/2$.

Uputstvo: $P = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}dx$; koristiti smenu $x = r\sin t$ i formulu $D\sin = \cos$.

U kursevima RA, dokaz Propozicije 1.22 zasniva se na

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \tag{1.74}$$

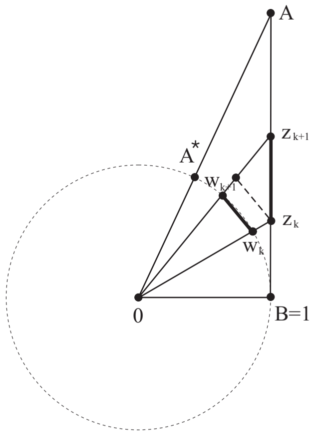
a dokaz formule (1.74) bazira se na nejednakosti $x \le \mathrm{tg}x$, $0 < x < \pi/2$, koja sledi na osnovu formule za površinu kružnog isečka. Popularno rečeno „vrtimo se u krug". □

Vežba 1.5.11 *Da li se dokaz formula*
a) za površinu kružnog isečka i
b) $x \le \mathrm{tg}x$, $0 < x < \pi/2$
može izvesti bez pozivanja na formulu $D\sin = \cos$?

Uputstvo za b): Neka je $A = z = 1 + iy$, $y > 0$, $B = 1$ i $A^* = w = Pz = z/|z|$; duž AB podelimo tačkama z_k na n podudarnih duži. Neka je $w_k = Pz_k = z_k/|z_k|$; tada je, na osnovu Vežbe 1.5.12, $|w_k - w_{k+1}| \le |z_k - z_{k+1}|$. Otuda, kada $n \to +\infty$, sledi da je $\varphi = |l_w| \le |A - B| = y = \mathrm{tg}\,\varphi$, gde je l_w pozitivno orijentisanog kružnog luka koji spaja tačke 1 i w. □

Alternativni dokaz da je $D\sin = \cos$: Funkcija sin je rastuća na $[-\pi/2, \pi/2]$ i otuda ima inverznu funkciju, koju obično označavamo sa arcsin. Iz formule (1.49) za dužinu luka (podsekcija 1.5.1), sledi

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$$



Slika 1.12:

i otuda prvo $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, a zatim na osnovu teoreme o izvodu inverzne funkcije $D\sin = \cos$.

Vežba 1.5.12 *Neka kompleksni brojevi $a = |a|e^{i\alpha}$ i $b = |b|e^{i\beta}$ ne pripadaju otvorenom jediničnom krugu.*
Dokazati da je $|a - b| \ge |e^{i\alpha} - e^{i\beta}|$.

UPUTSTVO: Neka je $\gamma = \beta - \alpha$. Na osnovu kosinusne teoreme, $|a-b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|a|\,|b|\,\cos\gamma \ge 2|a||b|\,(1-\cos\gamma) \ge 2\,(1-\cos\gamma) = |e^{i\alpha} - e^{i\beta}|^2$.

1.6 Eksponencijalna funkcija, Ln, Arg, z^a i primene

Definicija 1.17 *Eksponencijalna funkcija definiše se za kompleksni broj z na sledeći način:*

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}. \tag{1.75}$$

Množenjem stepenih redova dobijamo osnovnu adicionu formulu

$$e^a\, e^b = e^{a+b}, \tag{1.76}$$

koja važi za svaka dva kompleksna broja a i b. Formulu (1.76) nazivamo Adicionom formulom za eksponencijalnu funkciju i kratko označavamo sa *adexp*. O raznim dokazima ove formule i osnovnim svojstvima eksponencijalne funkcije videti u Dodatku A (Glava 4).
Na primer, čitalac bez većih teškoća može dokazati sledeći rezultat.

Teorema 1.11 *Za eksponencijalnu funkciju važe sledeća osnovna svojstva:*

(a)
$$e^z \neq 0,$$

(b)
$$(e^z)' = e^z,$$

(c) *restrikcija* exp *na realnu osu je rastuća funkcija,* $e^x \to +\infty$, $x \to +\infty$; $e^x \to 0$, $x \to -\infty$,

(d)
$$e^{-z} = \frac{1}{e^z},$$

(e)
$$\exp(\bar{z}) = \overline{\exp z},$$

(f) *za realno* t
$$|e^{it}| = 1,$$

(g)
$$|e^z| = e^x.$$

Dokaz: Kako je $e^z e^{-z} = e^0 = 1$ slede (a) i (d). Diferenciranjem stepenog reda zaključujemo da važi (b). Koristeći (1.75), zaključujemo da je exp monotono rastuća na pozitivnom delu realne ose i da je $e^x \to +\infty$, $x \to +\infty$. Drugi deo tvrđenja (c) je posledica jednakosti $e^x e^{-x} = 1$.
Konjugovanjem stepenog reda eksponencijalne funkcije (preciznije, konjugovanjem njegove parcijalne sume) dobijamo (e). Detaljnije: Neka je $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$. Iz definicije eksponencijalne funkcije sledi $S_n(z) \to e^z$ i $S_n(\overline{z}) \to e^{\overline{z}}$, kada $n \to +\infty$. Otuda $\overline{S_n(z)} \to \overline{e^z}$ i kako je $\overline{S_n(z)} = S_n(\overline{z})$ (konačne sume), dobija se (e). Na osnovu (e) dobija se

$$|e^{it}|^2 = e^{it}\, \overline{e^{it}} = e^{it}\, e^{-it} = e^0 = 1. \tag{1.77}$$

Kako je modul nenegativan iz (1.77) sledi (f). Na osnovu (e), sledi

$$|e^z|^2 = e^z\, \overline{e^z} = e^z\, e^{\bar{z}} = e^{2\mathrm{Re} z}, \tag{1.78}$$

a otuda i (g). Primetimo da umesto (1.78) možemo primeniti adicione formule, tj. $e^z = e^x\, e^{iy}$, da bismo dokazali (g). $\square$

1.6.1 Eksponencijalna - polarna forma kompleksnog broja

Kurs KA može da počne sa uvođenjem exp funkcije i izvođenjem osnovnih svojstava ove funkcije (v. komentar u paragrafu o Ojlerovoj formi). Mogu se detaljno izvesti svojstva razmatrana u paragrafima o cis-u i argumentu. Oznaka $'$ u tvrđenjima koja slede označava da su ta tvrđenja već bila formulisana u paragrafima o cis-u i argumentu (pomoću cis-a).
Pokažimo da je geometrijska definicija funkcije cis saglasna sa Ojlerovom formulom: $\operatorname{cis}\tau = e^{i\,\tau}$, bez pozivanja na Tejlorove razvoje za funkcije sin i cos.

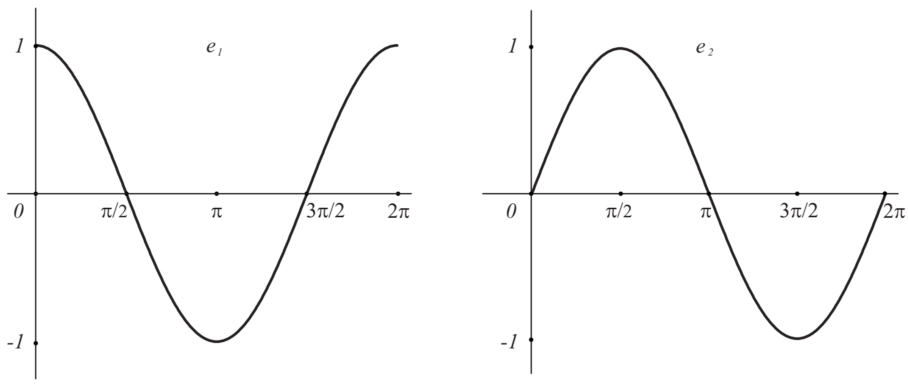
Propozicija 1.23 (Ojlerova formula) *Za $\tau \in \mathbb{R}$, važi $\operatorname{cis}\tau = e^{i\,\tau}$.*

Dokaz: Neka je $0 \le \tau < 2\pi$ i c_τ luk definisan sa $c_\tau(t) = e^{i\,t}$, $0 \le t \le \tau$. Koristeći definiciju eksponencijalne funkije pomoću stepenog reda može se pokazati da je c_τ prosta kriva sa početkom u tački 1 i tragom na jediničnoj kružnici. Kako je $De^{i\,t} = ie^{i\,t}$, nalazimo $|c'_\tau(t)| = 1$ i stoga dužina luka c_τ je

$$|c_\tau| = \int_0^\tau |c'_\tau(t)|\,dt = \int_0^\tau 1\,dt = \tau.$$

Dakle, ako je $z = \operatorname{cis}\tau$, lukovi ℓ_z i c_τ imaju iste dužine, zajedničku početnu tačku 1 i trag na jediničnoj kružnici. Kako ovi putevi imaju „saglasnu” orijentaciju (objasniti pomoću Vežbe 1.6.1), nalazimo da imaju zajedničku krajnju tačku. Otuda, s obzirom na to da je $c_\tau(\tau) = e^{i\,\tau}$, sledi $z = \operatorname{cis}\tau = e^{i\,\tau}$. $\square$

Vežba 1.6.1 *Neka je $e_1(t) = \operatorname{Re} e^{i\,t}$ i $e_2(t) = \operatorname{Im} e^{i\,t}$, $t \in \mathbb{R}$. Koristeći definiciju eksponencijalne funkcije pomoću stepenog reda (1.75), izvesti osnovne osobine eksponencijalne funkcije i skicirati grafik funkcija e_1 i e_2.*



Slika 1.13:

Uputstvo: Grafici funkcija e_1 i e_2 prikazani su na slici 1.13; uobičajene oznake za ove funkcije su respektivno cos i sin. O osobinama eksponencijalne funkije videti npr. u [Ru] i [Ma 3]; videti takođe Propozicija 4.1, Dodatku A, Glavi 4 .

Analitički dokaz prethodne Propozicije, ako se pozivamo na Tejlorove razvoje funkcija cos i sin može se izvesti kao u Podsekciji 1.5.7.

Za $t \in \mathbb{R}$ definišimo $\cos t$ i $\sin t$ da budu realni i imaginarni deo e^{it} i $\operatorname{cis} t = e^{it}$. Koristeći osobine funkcija $\cos t$ i $\sin t$ dokazujemo da funkcija $\operatorname{cis} t$ preslikava $\mathbb{R}$ na jediničnu kružnicu $T = \{w : |w| = 1\}$ i otuda:

Lema 1.4 (LPF') *Svako $z \in \mathbb{C}^*$ može se predstaviti u obliku*

$$z = |z|e^{i\varphi}, \qquad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Podvucimo da Lema važi i za $z = 0$. Ponovimo da je $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Za $\alpha \in \mathbb{R}$ neka je $I_\alpha = [\alpha, \alpha + 2\pi)$. Kako $\operatorname{cis} t$ injektivno preslikava I_α na T dobijamo:

Teorema 1.12 (Jedinstvenost eksponencijalno-polarne forme, JPF') *Svako $z \in \mathbb{C}^*$ može se jedinstveno predstaviti u obliku*

$$z = |z|e^{i\varphi}, \qquad \varphi \in I_\alpha.$$

Postoji grana argumenta na O_α i eksponencijalna forma

Za $z \in \mathbb{C}^*$ definišimo
$$\operatorname{Arg} z = \{\, \varphi \in \mathbb{R} \mid z = |z|e^{i\varphi}\}.$$
Podvucimo da je Arg višeznačna funkcija.

Ako je realna funkcija φ neprekidna na oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{C}^*$ i ako je $z = |z|e^{i\varphi(z)}$ (tj. $\varphi(z) \in \operatorname{Arg} z$) za svako $z \in \Omega$, φ se naziva *grana višeznačne funkcije* Arg na Ω i obično označava sa arg.

Ponovimo (videti paragraf o Argumentu):

Za $\gamma \in \mathbb{R}$ označimo sa $\Lambda_\gamma = \{\rho e^{i\gamma} \mid 0 < \rho < +\infty\}$ poluprave sa početkom u koordinatnom početku, koje „zaklapaju" ugao γ sa x osom. Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$ i $O_\alpha = \mathbb{C}^*\backslash\Lambda_\alpha$. Na osnovu Teoreme o jedinstvenosti polarne-eksponecijalne forme (Teorema 1.12) svako $z \in O_\alpha$ može se jedinstveno predstaviti u obliku

$$z = |z|e^{i\varphi}, \qquad \varphi \in J_\alpha = (\alpha, \alpha + 2\pi).$$

Na ovaj način svakom $z \in O_\alpha$ jednoznačno je „dodeljeno" $\varphi = \varphi(z)$ u intervalu J_α, tj. definisana je funkcija $\varphi : O_\alpha \to J_\alpha$, koja je grana višeznačne funkcije Arg (grana argumenta) na O_α. Ako želimo da podvučemo da je φ grana Arg, onda umesto φ koristimo oznake arg ili $\arg_\alpha$.

Ako je
$$J_k = J_k(\alpha) = (\alpha + 2k\pi, \alpha + 2(k+1)\pi), \qquad k \in \mathbb{Z},$$
postoji grana argumenta $\varphi_k : O_\alpha \to J_k$. Koristi se i oznaka $\arg_k$ umesto φ_k.

Korisno je za vežbu razmotriti:

Primer 8 *Neka je* $\ell = [0, -\infty i) = \Lambda_{-i}$ *i* $O = \mathbb{C}^* \setminus \ell$; *i neka je grana argumenta* arg *na* O *određena sa:*
(a) $\arg(-1) = \pi$;
(b) $\arg(-1) = 3\pi$.
Da li je u slučaju (a) $\arg(i) = \pi/2$, $\arg(1) = 0$; *a u slučaju* (b) $\arg(i) = 5\pi/2$, $\arg(1) = 2\pi$?

Lema 1.5 (Jednakost polarnih formi, EPF') *Neka su* $w, z \in \mathbb{C}^*$. *Tada*
(a) $w = z$ *akko* $|w| = |z|$ *i* $\operatorname{Arg} w = \operatorname{Arg} z$.
Ako je $w = \rho e^{i\theta}$ *zadato u* PF *tada je*
(b) $w = z$ *akko* $\rho = |z|$ *i* $\theta \in \operatorname{Arg} z$.

Koristićemo sledeću neposrednu posledicu Teoreme 1.12:

Posledica 1.8 (PPF') *Neka je* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Svako* $z \in O_\alpha$ *može se jedinstveno predstaviti u obliku* $z = |z|e^{i\varphi}$, $\varphi \in (\alpha, \alpha + 2\pi)$, *tj.*

$$O_\alpha = \{\rho e^{i\varphi} \mid 0 < \rho < +\infty,\ \alpha < \varphi < \alpha + 2\pi\}.$$

Lema 1.6 (Eksponencijalna-logaritamska forma, ExpLogF) *Svako* $z \in \mathbb{C}^*$ *može se predstaviti u obliku*

$$z = e^{\ln|z| + i\phi},\ \phi \in \operatorname{Arg} z.$$

Uputstvo: Dokaz se bazira na polarnoj formi $z = |z|e^{i\phi}$, $\phi \in \operatorname{Arg} z$, formuli iz RA $|z| = e^{\ln|z|}$, i adicionoj teoremi za eksponencijalnu funkciju. □

1.6.2 Logaritam

Lema 1.7 (Log) *Neka je* $z \in \mathbb{C}^*$. *Tada je*

$$e^w = z \tag{1.79}$$

akko

$$w = \ln|z| + i\varphi, \qquad \varphi \in \operatorname{Arg} z. \tag{1.80}$$

Dokaz: Koristeći oznaku $w = u + iv$ i adicionu formulu za exp, (1.79) možemo napisati u obliku

$$e^u e^{iv} = z.$$

Otuda, s obzirom na Lemu 1.5, (1.79) je ekvivalentno sa

$$e^u = |z| \quad \text{i} \quad v \in \operatorname{Arg} z. \tag{1.81}$$

Na osnovu realne analize, $e^u = |z|$ akko $u = \ln|z|$ i, otuda, ako je $z = 0$, jednačina (1.79) nema rešenje, a ako $z \in \mathbb{C}^*$, jednačina (1.79) ima beskonačno mnogo rešenja datih sa (1.80). Skup ovih rešenja označimo sa $\operatorname{Ln} z$.

Dakle,

$$\operatorname{Ln} z = \{w \mid e^w = z\} = \{\ln|z| + i\varphi \mid \varphi \in \operatorname{Arg} z\}.$$

□

Otuda, Lema 1.6 je neposredna posledica Leme 1.7: Svako $z \in \mathbb{C}^*$ može da se predstavi u formi $z = e^{\ln|z|+i\varphi}$, $\varphi \in \operatorname{Arg} z$.

1.6.3 Primene polarne forme

Neka je $f : M \to \mathbb{C}$. U praksi, pogodno je predstaviti funkciju f u polarnoj formi. Ako je $f \neq 0$, tada se f može predstaviti pomoću dve realne funkcije ρ i ψ na sledeći način: $\rho(z) = |f(z)|$ i $\psi(z) \in \operatorname{Arg} f(z)$, $z \in M$. Funkciju ρ nazivamo modul funkcije f; ako je ψ neprekidna onda je nazivamo granom všz funkcije $\operatorname{Arg} f$.

Vežba 1.6.2 *Ako je $z \neq 1$, dokazati*

$$S = S(z) = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, \tag{1.82}$$

$$\begin{aligned} S_1(\theta) &= 1 + \cos\theta + \cos(2\,\theta) + \cdots + \cos(n\,\theta) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sin\Big((n+1/2)\theta\Big)}{2\sin(\theta/2)}, \quad \theta \in (0, 2\pi). \end{aligned} \tag{1.83}$$

Uputstvo: $S_1(\theta) = \operatorname{Re} S(e^{i\theta})$, $S(e^{i\theta}) = \dfrac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}$. Kako je $1 - e^{i2\alpha} = -2i(\sin\alpha)e^{i\alpha}$, nalazi se $S(e^{i\theta}) = \dfrac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{-2i\sin\frac{\theta}{2}}\, e^{-i\theta/2}$. □

Vežba 1.6.3 *Neka je Π^- leva poluravan, $S = \{z : y > x\}$ i $f(z) = z^2$. Pokazati da je*
(a) $f(\Pi^-) = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ *i*
(b) $f(S) = \mathbb{C}_{-i}$.

Uputstvo za (a): $z = re^{i\,\varphi}$; $\rho = r^2$, $\psi = 2\,\varphi$; polukružnica C_r definisana sa $z = re^{i\,\varphi}$, $\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$ preslikava se na luk Υ_r definisan sa $w = \rho e^{i\,\psi} = r^2 e^{i2\,\varphi}$; ako $\varphi \uparrow_{\pi/2}^{3\pi/2}$, tada $\psi \uparrow_{\pi}^{3\pi}$. Otuda trag luka Υ_r je kružnica bez jedne tačke: $K_{r^2} \setminus \{-r^2\}$.
□

Vežba 1.6.4 *Neka je $f(z) = z^3$. Pokazati da f nije jednolisno na H i da je $f(H) = \mathbb{C}^*$.*

Uputstvo: $z = re^{i\,\varphi}$; $\rho = r^3$, $\psi = 3\,\varphi$; ako $\varphi \uparrow_0^{\pi}$, tada $\psi \uparrow_0^{3\pi}$. □

Vežba 1.6.5 *Neka je*

$$\lim_{z \to a} f(z) = A. \tag{1.84}$$

Ako je $A \neq 0, \infty$, tada je formula (1.84) ekivalentna sa

$$\lim_{z \to a} |f(z)| = |A| \quad i \quad \lim_{z \to a} \arg \circ f(z) = \arg A, \tag{1.85}$$

gde je arg *odgovarajuća grana argumenta.*

Uputstvo: Ako je Λ poluprava sa početkom u koordinatnom početku, koja sadrži $-A$, tada na $\mathbb{C} \setminus \Lambda$ postoji grana argumenta. $\square$

Neka je $z = re^{i\theta}$ zadato u polarnoj formi u nekoj okolini tačke $z_0 \neq 0$. Pretpostavimo da f ima izvod u tački $z_0 \neq 0$. Tada je, na osnovu teoreme o izvodu kompozicije, $f_r = f' e^{i\theta}$ i $f_\theta = f' ir\, e^{i\theta}$, gde se izvodi računaju u tački $z_0 \neq 0$. Otuda je

$$irf_r = f_\theta. \tag{1.86}$$

Jednačina (1.86) je alternativna forma $C - R$ uslova ($C - R$ jednačina u polarnoj formi).

Pretpostavimo da je f $\mathbb{R}$-diferencijabilna u tački $z_0 \neq 0$ i da važi jednačina (1.86). Tada je $df = f_\theta d\theta + f_r dr = f_r\,(ird\theta + dr)$. Kako je $dz = e^{i\theta}dr + rie^{i\theta}d\theta = e^{i\theta}(ird\theta + dr)$, otuda prvo sledi $df = e^{-i\theta} f_r\, dz$ i stoga

$$f' = e^{-i\theta} f_r = \frac{-i}{z_0}\, f_\theta, \tag{1.87}$$

gde se izvodi računaju u tački $z_0 \neq 0$.

U vezi sa izvođenjem ove formule videti takođe Zadatak 4.05 [Je-Ma].

Vežba 1.6.6 *Neka je $f(z) = 1/z$. Naći izvod funkcije f.*

Uputstvo: Uobičajeno se piše $u = (\cos\theta)/r$, $v = -(\sin\theta)/r$. Na osnovu jednačine (1.87), za $z \neq 0$

$$f'(z) = e^{-i\theta}\left(-\frac{\cos\theta}{r^2} + i\frac{\sin\theta}{r^2}\right) = -\frac{1}{z^2}.$$

Kompaktnije je koristiti neposredno kompleksnu formu bez izdvajanja funkcija u i v: $f_r = -\dfrac{1}{r^2 e^{i\theta}}$ i otuda

$$f'(z) = e^{-i\theta}\, f_r = -e^{-i\theta}\,\frac{1}{r^2 e^{i\theta}} = -\frac{1}{(re^{i\theta})^2} = -\frac{1}{z^2}.$$

Za vežbu videti sekciju 4 (specijalno 4.05-4.07, 4.15-4.20) [Je-Ma].

1.6.4 Grane Log i Exp

Sledeća propozicija je korisna za razumevanje koncepta i osobina grana všz funkcija.

Propozicija 1.24 *Neka je $f : \Omega \to \Omega_1$, $g : \Omega_1 \to \mathbb{C}$, $\Omega_0 = f(\Omega)$ i $g \circ f = \mathrm{Id}$ na Ω. Tada je f $1-1$ na Ω i g $1-1$ na Ω_0.*

Definicija 1.18 *Ako je Ω oblast u $\mathbb{C}$ i $f : \Omega \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija tako da je*

$$e^{f(z)} = z, \quad \textit{za svako } z \in \Omega,$$

kažemo da je f grana logaritma (grana višeznačne funkcije Ln*) na Ω; grana logaritma obično se označava sa* $\ln$.

Vežba 1.6.7 *Neka je kompleksna funkcija g definisana na nekoj oblasti Ω i $\Omega_1 = g(\Omega)$. Ako postoji grana f_0 všz funkcije $f = g^{-1}$ na $\Omega_2 \subset \Omega_1$, tada je f_0 $1-1$ na Ω_2 i g je $1-1$ na $\Omega_3 = f_0(\Omega_2)$. Specijalno, razmotriti kada je g eksponencijalna funkcija.*

Uputstvo: Koristiti da je $g(f_0(z)) = z$, $z \in \Omega_2$. Otuda iz $f_0(z_1) = f_0(z_2)$ sledi $z_1 = z_2$; iz $f_0 \circ g = \mathrm{Id}$ na Ω_3, sledi g je $1-1$ na Ω_3. □

Vežba 1.6.8 *Ako je kompleksna funkcija g definisana na nekoj oblasti Ω, $1-1$ i neprekidna, tada je $\Omega_1 = g(\Omega)$ oblast; funkcija $f = g^{-1}$ je $1-1$ i neprekidna na $\Omega_1 = g(\Omega)$.*

Sledeća vežba pokazuje da ako Ω nije oblast tada tvrđenje iskazano u prethodnoj vežbi nije tačno u opštem slučaju.

Vežba 1.6.9 *Neka je $\Pi = \{x + iy : x \in \mathbb{R}, 0 \le y < 2\pi\}$ i $g = \exp$. Proveriti da je $g(\Pi) = \mathbb{C}^*$. Dokazati da je funkcija $f = g^{-1}$ $1-1$ i da nije neprekidna na $\mathbb{C}^*$.*

Uputstvo: Restrikcija funkcije $f = g^{-1}$ je $1-1$ i neprekidna na $O_1 = \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^+$, ali se ne može neprekidno produžiti na $\mathbb{R}^+$. □

Jednostavno se proverava da je $\exp$ $1-1$ na $D = f(\Omega)$ ako je f grana logaritma na Ω (primeniti Vežbu 1.6.7 na funkciju $g = \exp$). Otuda u nameri da konstruišemo oblasti na kojima postoji grana logaritma razmotrimo oblasti na kojima je $\exp$ $1-1$.

Neka je

$$\Pi_\alpha = \{w = u + iv \mid u \in \mathbb{R},\ \alpha < v < \alpha + 2\pi\}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

i označimo sa

$$L_\gamma = \ell_{i\gamma} = \{w \mid \operatorname{Im} w = \gamma\}, \qquad \gamma \in \mathbb{R}$$

prave linije paralelne sa u osom.

Iz Leme 1.5 sledi

Posledica 1.9 (jednolisnost) *Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$. $\exp$ je 1-1 na Π_α.*

Propozicija 1.25 *Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$. $\exp$ preslikava jednolisno (1-1) Π_α na oblast O_α.*

Dokaz: Na osnovu Leme 1.5, $e^w = e^u e^{iv} \in \Lambda_\alpha$ akko $v = \alpha + 2k\pi$; otuda $\exp(\Pi_\alpha) \subset O_\alpha$. Na osnovu Leme 1.6, svako $z \in O_\alpha$ može se predstaviti u obliku $z = e^w$, gde je $w = \ln|z| + i\varphi$, $\varphi \in J_\alpha$, tj. $w \in \Pi_\alpha$. □

Navedimo još jedan dokaz Propozicije 1.25, koji se može pratititi pomoću odgovarajućih geometrijskih slika. Dokaz se bazira na sledećoj propoziciji.

Propozicija 1.26 *Neka je $\gamma \in \mathbb{R}$. $\exp$ preslikava L_γ na poluprave Λ_γ.*

Dokaz: Jasno je da $w \in L_\gamma$ ako i samo ako $w = x + i\gamma$, $x \in \mathbb{R}$. Otuda, na osnovu $e^{x+i\gamma} = e^x e^{i\gamma}$, sledi prvo da exp preslikava L_γ na $\{e^x e^{i\gamma} : x \in \mathbb{R}\}$ i stoga, s obzirom na to da exp preslikava $\mathbb{R}$ na $\Lambda_0 = (0, \infty)$, sledi da exp preslikava L_γ na polupravе Λ_γ.

Dokaz: Propozicije 1.25: Funkcija exp preslikava L_γ na poluprave

$$\Lambda_\gamma = \{\rho e^{i\gamma} \mid 0 < \rho < +\infty\}$$

i otuda je

$$\exp(\Pi_\alpha) = \bigcup_{\gamma \in J_\alpha} \exp(L_\gamma) = \bigcup_{\gamma \in J_\alpha} \Lambda_\gamma = \Omega_\alpha,$$

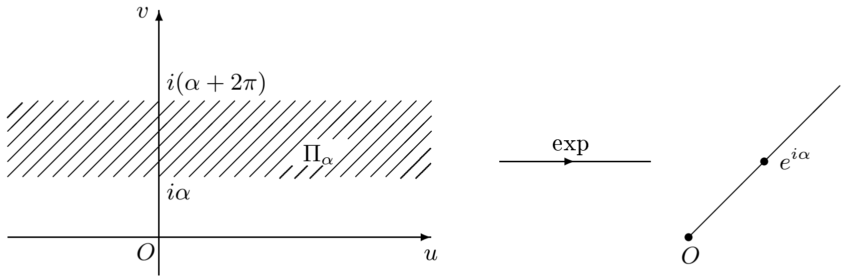
gde je

$$\Omega_\alpha = \{\rho e^{i\gamma} \mid 0 < \rho < +\infty, \quad \alpha < \gamma < \alpha + 2\pi\}.$$

Kako je na osnovu Teoreme 1.12 (JPF)

$$\Omega_\alpha = O_\alpha = \mathbb{C}^* \setminus \Lambda_\alpha,$$

otuda sledi Propozicija 1.25. □



Slika 1.14: exp preslikava Π_α na oblast O_α

Ostavljamo čitaocu da proveri da neposredno iz Leme 1.7 (Log) sledi da exp preslikava Π_α na

$$\Omega_\alpha = \{\rho e^{i\gamma} \mid 0 < \rho < +\infty, \ \gamma \in J_\alpha\},$$

i da je $\Omega_\alpha = \mathbb{C}^* \backslash \Lambda_\alpha$ na osnovu Teoreme 1.12 (JPF).

Dakle, na O_α postoji inverzna funkcija f eksponencijalne funkcije, takva da je $f(O_\alpha) = \Pi_\alpha$, i stoga je f grana logaritma na O_α (označimo f sa ln). Korisno je skicirati razne „varijacije" ovog dokaza i podvući veze sa Teoremom 1.12 i Lemom 1.6 (ExpF).

Na primer, neposredno iz Leme 1.7 (Log) sledi da je $\Omega_\alpha = \exp(\Pi_\alpha)$. Takođe, ovo se može direktno dokazati. Ako je $z \in \Omega_\alpha$, tj. $z = \rho e^{i\gamma}$, $0 < \rho < +\infty$, $\gamma \in J_\alpha$, i ako je $w = \ln \rho + i\gamma$, tada $w \in \Pi_\alpha$, i, na osnovu *adicione formule za exp*, kratko *adexp*,

$$e^w = e^{\ln \rho + i\gamma} = \rho e^{i\gamma} = z.$$

Neposredno se proverava da je funkcija ln na O_α definisana i na sledeći način:

Svako $z \in O_\alpha$ jedinstveno se predstavlja u obliku $z = re^{i\varphi}$, gde je $r = |z|$ i $\varphi \in J_\alpha$. Na ovaj način definisana je funkcija $\varphi : O_\alpha \to J_\alpha$ (koju označavamo sa arg) i funkcija ln sa

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z, \qquad z \in O_\alpha.$$

Podvucimo da je Im ln = arg na O_α.

Definicija 1.19 *Sa* ln *označavamo neku granu logaritma; obično granu određenu sa* $\ln z = \ln |z| + i \arg z$, *sa vrednostima argumenta u* $(0, 2\pi)$ *ili* $(-\pi, \pi)$, *nazivamo glavna grana logaritma; ako želimo da razlikujemo ove dve grane onda vrednost određenu sa vrednostima argumenta u* $[0, 2\pi)$ *nazivamo prva glavna vrednost logaritma, a sa vrednostima u* $(-\pi, \pi]$ *nazivamo druga glavna vrednost logaritma. Npr. funkcija* ln *definisana na* O_0 *sa*

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z, \qquad z \in O_0,$$

gde je $0 < \arg z < 2\pi$ *naziva se prva glavna grana logaritma.*

Podvucimo da je prva glavna grana definisana na O_0, a prva glavna vrednost definisana na $\mathbb{C}^*$; npr. glavna vrednost je $\ln 1 = 0$.

Propozicija 1.27 (Broj grana logaritma) *Ako je* F *proizvoljna grana* log *na* O_α, *tada postoji* $k \in \mathbb{Z}$, *tako da je* $F = \ln_k$, *gde je* $\ln_k$ *funkcija definisana sa* $\ln_k z = \ln z + 2k\pi i$, $z \in O_\alpha$.

Uputstvo: Funkcija k definisana sa $k(z) = \dfrac{F(z) - \ln z}{2\pi i}$ je neprekidna i celobrojna na O_α. Uporediti ovu propoziciju sa Propozicijom 1.21. □

Neka je $\mathcal{P}_k = \Pi_\alpha(k) = \{w \mid \alpha + 2k\pi < v < \alpha + 2(k+1)\pi\}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$

Propozicija 1.28 *Neka je* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Tada*

(a) exp *preslikava uzajamno jednoznačno* $\mathcal{P}_k$ *na* O_α *i* $\ln_k$ *je inverzno preslikavanje restrikcije* exp *na* $\mathcal{P}_k$.

(b) $\ln_k$ *je holomorfna funkcija na* O_α *i* $(\ln_k z)' = \dfrac{1}{z}$.

Dokaz: Na osnovu prethodnog izlaganja sledi tačka (a). Neka je $z \in O_\alpha$, $w = \ln_k z$ i stoga $e^w = z$. Na osnovu osnovnog svojstva exp funkcije, Teorema 1.11 formula (b), nalazimo $(e^w)' = e^w$. Otuda na osnovu teoreme o izvodu inverzne funkcije, $\ln_k$ je holomorfna funkcija na O_α i stoga na osnovu formule za izvod inverzne funkcije dobija se:

$$(\ln_k z)' = \frac{1}{(e^w)'} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}.$$

□

Za uopštenje tačke (b) videti Propoziciju 1.30.

1.6.5 Grane funkcije z^a

Ako je $z = r\,e^{i\varphi}$, dokazano je

$$z^{1/n} = r^{1/n} \exp\left(i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right). \tag{1.88}$$

Kako je $\operatorname{Ln} z = \ln r + i\varphi$, otuda je

$$z^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n}\operatorname{Ln} z\right). \tag{1.89}$$

Otuda, na osnovu adicione formule za exp, dobija se

$$z^{m/n} = \exp\left(\frac{m}{n}\operatorname{Ln} z\right). \tag{1.90}$$

Ako je $a \in \mathbb{C}$, definišemo višeznačnu funkciju

$$z^a = \exp\left(a \operatorname{Ln} z\right), \qquad z \in \mathbb{C}^*. \tag{1.91}$$

Formula (1.91) daje doslednu definiciju z^a u smislu da je formula (1.91) tačna za $a = m/n$.
Motivacija za definiciju (1.91) takođe dolazi iz realne analize i ideje analitičkog produženja. U RA dokazuje se $x^a = \exp\left(a \ln x\right)$, $x > 0$, $a \in \mathbb{R}$. S obzirom na ideju analitičkog produženja (koja je bliska pojmu grane logaritma) formula (1.91) je prirodno proširenje ove formule.

Definicija 1.20 (gr z^a) *Kažemo da je f grana višeznačne funkcije z^a na oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{C}^*$ ako je funkcija f neprekidna na Ω i ako je $f(z) \in z^a$ za svako $z \in \Omega$.*

Kako je $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\varphi$, $\varphi \in \operatorname{Arg} z$, otuda je

$$z^a = \{\, |z|^a e^{ia\varphi} \mid \varphi \in \operatorname{Arg} z\}.$$

Jasno je da ako je arg grana argumenta na Ω, tada je funkcija f definisana sa

$$f(z) = |z|^a e^{ia \arg z}, \qquad z \in \Omega$$

grana višeznačne funkcije z^a na Ω.

Vežba 1.6.10 *Proveriti da je $i^{-2i} = \exp\big((4k+1)\pi\big)$, $k \in \mathbb{Z}$, i da je prva glavna vrednost od $(-i)^i = \exp(-\frac{3\pi}{2})$.*

Uputstvo: $\operatorname{Ln} i = \{i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\}$; glavna vrednost $\ln(-i) = i\frac{3\pi}{2}$; glavna vrednost od $(-i)^i$ je jednaka $\exp(i \ln(-i)) = \exp(-\frac{3\pi}{2})$. □

Obično sa $H^+ = H$, H^- označavamo gornju, respektivno donju poluravan.

Definicija 1.21 *Neka je V okolina nekog intervala $L \subset \mathbb{R}$, $V' = V \setminus L$ i funkcija f definisana na V'. Ako, za $t \in L$, postoje granične vrednosti*

$$\lim_{H \ni z \to t} f(z), \lim_{H^- \ni z \to t} f(z)$$

respektivno se označavaju sa $f^+(t)$ i $f^-(t)$.

Ovu definiciju ćemo specijalno koristiti pri izračunavanju integrala, Tipovi 5-10.

Vežba 1.6.11 *Neka je $S = S_1 = \{0 < \varphi < 2\pi/n\}$ i $g(w) = w^n$. Proveriti da g preslikava S jednolisno na O_1. Označimo sa f inverzno preslikavanje. Proveriti da je $f^+(x) = \sqrt[n]{x}$, i $f^-(x) = e^{i2\pi/n} f^+(x) = e^{i2\pi/n} \sqrt[n]{x}$ za $x > 0$.*

Specijalni slučaj: *Neka je $Q = Q_1 = \{z : x, y > 0\}$ i $g(w) = w^4$. Proveriti da g preslikava Q jednolisno na O_1. Označimo sa f inverzno preslikavanje. Proveriti da je za $x > 0$, $f^+(x) = \sqrt[4]{x}$, i $f^-(x) = if^+(x) = i\sqrt[4]{x}$.*

Uputstvo: Koristeći polarne koordinate $w = re^{i\varphi}$ i osnovnu osobinu stepene funkcije nalazimo $g(w) = w^n = (re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}$. Otuda, preslikavanje g možemo napisati u obliku $\rho = r^n$, $\psi = n\varphi$. Podvucimo da to znači da se tačka $w = re^{i\varphi}$ preslikava u tačku $\rho e^{i\psi} = z = g(w)$. Neka je $\gamma_\rho = \gamma_\rho(t) = \rho e^{it}$, $0 < t < 2\pi/n$. g preslikava γ_ρ na krug poluprečnika ρ^n, ali bez tačke ρ^n. □

Primer 9 *Neka je $\ell = [0, -\infty i) = \{iy : y \leq 0\}$ i $O = \mathbb{C} \backslash \ell$. Dokazati da postoji grana f višeznačne funkcije $\sqrt[3]{\ }$ na O određena sa*

(a) $f(-1) = z_0$, gde je $z_0 = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

(b) $f(-1) = z_1$, gde je $z_1 = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Dokaz: (a) Kako je $\ell = \Lambda_{-\pi/2} \cup \{0\}$, postoji grana argumenta arg koja preslikava $O = O_{-\pi/2}$ u $J = (-\pi/2, 3\pi/2)$. Kako je $\arg(-1) = \pi$ i $z_0 = e^{i\pi/3}$, funkcija definisana sa $f(z) = |z|^{1/3} \exp(i(\arg z)/3)$, $z \in O$, je traženo preslikavanje. □

Primer 10 *Neka je f grana višeznačne funkcije $\sqrt[n]{\ }$, $n \geq 1$, na oblasti Ω. Dokazati da je $f'(z) = \dfrac{f(z)}{nz}$, $z \in \Omega$.*

Primer 11 *Neka je $g = \ln$ grana višeznačne funkcije Ln, na oblasti $O_0 = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$. Dokazati da je $g^+(x) = \ln x$, $g^-(x) = \ln x + i2\pi$, $x > 0$.*

Uputstvo: $\ln z = \ln|z| + i \arg z$, $z \in O_0$; $\arg^+(x) = 0$, $\arg^-(x) = 2\pi$, $x > 0$. □

Vežba 1.6.12 *Dokazati da ne postoji grana logaritma i argumenta na $\mathbb{C}^*$.*

Uputstvo : Ako je g grana logaritma na $\mathbb{C}^*$, tada je $\mathrm{Im} g$ grana argumenta na $\mathbb{C}^*$. Za dokaz da ne postoji grana argumenta na $\mathbb{C}^*$ videti Propoziciju 1.21 i takođe Dodatak A.
Za tačke (a) i (c) sledeće Propozicije videti paragraf o argumentu.

Propozicija 1.29 *Ako je $z, w \in \mathbb{C}^*$, tada je:*

(a) $\mathrm{Arg}\,(zw) = \mathrm{Arg}\,z + \mathrm{Arg}\,w$;

(b) $\mathrm{Ln}\,(zw) = \mathrm{Ln}\,z + \mathrm{Ln}\,w$.

Primerom pokazati da nije tačno:

(c) $\arg(zw) = \arg z + \arg w$.

Uputstvo za (b): Neka $z_1 \in \mathrm{Ln}\,z$ i $w_1 \in \mathrm{Ln}\,w$; tada $e^{z_1} = z$ i $e^{w_1} = w$ i otuda $e^{z_1}\,e^{w_1} = e^{z_1+w_1} = z\,w$.

Prema formuli (1.91), *eksponencijalna funkcija sa bazom a*, gde je a proizvoljan kompleksan broj različit od nule,

$$a^z = \exp\,(z\mathrm{Ln}\,a). \tag{1.92}$$

Podvucimo da je e^z všz funkcija prema formuli (1.92); uobičajena interpretacija e^z se dobija ako umesto Ln pišemo glavnu determinaciju (koristi se i naziv granu, kao sinonim) logaritma ln. Kako je $\ln e = 1$, $\exp(z \ln e) = e^z$.
Ako je $a > 0$, onda je često pogodno sa a^z označavati $\exp\,(z \ln a)$, gde je $\ln a$ glavna vrednost logaritma (određena sa vrednostima argumenta u $[0, 2\pi)$).
Za $a \neq 0$, vrednost $a^z = \exp\,(z \ln\, a)$ se naziva glavna vrednost (koristi se i izraz determinacija) višeznačne funkcije a^z.

Vežba 1.6.13 *Neka su* arg *i* ln *glavne grane (determinacije) argumenta i logaritma, i $g = \exp\,(\alpha \ln)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.*
Dokazati $g^+(t) - g^-(t) = -2i\sin(\pi\alpha)t^\alpha e^{i\pi\alpha}$, $\quad t > 0$.

Uputstvo: Prema pretpostavci $t > 0$. Tada je, na osnovu Primera 11, $g^+(t) = \exp(\alpha\ \ln^+ t) = \exp(\alpha\ \ln t) = t^\alpha$ i $g^-(t) = \exp(\alpha\ \ln^- t) = \exp(\alpha \ln t + \alpha\, 2\pi i) = t^\alpha e^{i2\pi\alpha}$. Otuda je $g^+(t) - g^-(t) = -2i\sin(\pi\alpha)t^\alpha e^{i\pi\alpha}$. □

Vežba 1.6.14 *Objasniti smisao formula*

$$Dz^{1/n} = \frac{1}{n} z^{1/n\,-1},\ (z^{1/n})^{(k)} = \frac{1}{n}\Big(\frac{1}{n} - 1\Big)\cdots\Big(\frac{1}{n} - k + 1\Big) z^{1/n-k}. \tag{1.93}$$

Uputstvo: Videti formulu (1.94). □
Napomena: Pogodno je koristiti sledeću notaciju: $\mathbb{C}^\alpha = D_\alpha = \{\alpha - \pi < \varphi < \alpha + \pi\}$; $\varphi = \arg_\alpha$ glavna determinacija argumenta određena sa vrednostima u $(\alpha - \pi, \alpha + \pi)$; g_α glavna determinacija logaritma određena sa $\mathrm{Im} g_\alpha = \arg_\alpha$ na $\mathbb{C}^\alpha$ i;
$f_\alpha = \exp \circ (g_\alpha / n)$ glavna grana $n-$tog korena.
Ako su oznake g_α i f_α zauzete, onda umesto njih korististimo oznake g^α i f^α.
Proveriti da su skupovi D_α i $-O_\alpha$ jednaki, $D_\alpha = O_{\alpha-\pi}$, kao i da je $f^n_\alpha = e^{g_\alpha} = \mathrm{Id}$.

Propozicija 1.30 (Izvod grane korena i logaritma) (a) *Funkcije g_α i f_α su holomorfne na D^α.*
(b) $g'_\alpha(z) = 1/e^w = 1/z$, $z \in D_\alpha$.

Uputstvo: Neka je $w = g_\alpha(z)$. Kako je $e^{g_\alpha} = \mathrm{Id}$, tj. $z = e^w$, na D_α, i $De^w = e^w = z$, primenom Teoreme o izvodu inverzne funkcije sledi da je g_α holomorfna na D_α i specijalno $g'_\alpha(z) = 1/e^w = 1/z$. Otuda, kako je $f_\alpha = \exp\circ(g_\alpha/n)$, f_α je holomorfna na D_α i $f'_\alpha(z) = \dfrac{1}{n}\,\dfrac{f_\alpha(z)}{z}$, tj. $Df_\alpha = \dfrac{1}{n} f_\alpha\, J$; i

$$(f_\alpha)^{(k)}(z) = \frac{1}{n}\Big(\frac{1}{n} - 1\Big)\cdots\Big(\frac{1}{n} - k + 1\Big)\frac{f_\alpha(z)}{z^k}. \tag{1.94}$$

Vežba 1.6.15 *Neka je f glavna determinacija trećeg korena na $\Omega = O_\pi$. Da li je $f(i) = \exp(i(\frac{\pi}{2} + 2\pi)/3)$?*

Vežba 1.6.16 *Ako je* ln *glavna determinacija sa vrednostima argumenta u* $(-\pi, \pi)$, *proveriti*

1. $\ln(-e\,i) = 1 - \dfrac{\pi}{2}\,i, \quad \ln(1 - i) = \dfrac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{\pi}{4}\,i$
2. $\mathrm{Ln}e = 1 + 2n\pi i, \quad \mathrm{Ln}i = (2n + \frac{1}{2})\pi i,\ n \in \mathbb{Z}$
3. $\mathrm{Ln}(-1 + \sqrt{3}i) = \ln 2 + 2(n + \frac{1}{3})\pi\, i,\ n \in \mathbb{Z}$
4. *Ako je* $\mathrm{Re}z_1 > 0$ *i* $\mathrm{Re}z_2 > 0$, *tada je*

$$\ln(z_1 z_2) = \ln(z_1) + \ln(z_2).$$

Objasniti zašto je u prvoj formuli koja sledi znak jednakosti, a u drugoj nije:

$$\ln(1 + i)^2 = 2\ln(1 + i), \quad \ln(-1 + i)^2 \neq 2\ln(-1 + i).$$

Uputstvo: Preciznije, na primer, $\mathrm{Ln}\, e = \{1 + 2n\pi i : n \in \mathbb{Z}\}$.

Vežba 1.6.17 *Ako je* ln *determinacija sa vrednostima argumenta u* $\Big(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\Big)$, *proveriti* $\ln x = \ln|x| + i\pi$ *za* $x < 0$; $\ln(-1 + \sqrt{3}i) = \ln 2 + \frac{2}{3}\pi\, i$.

Vežba 1.6.18 *Neka je $R = R(\alpha, \beta; a, b) = \{z : a < x < b,\ \alpha < y < \beta\}$, $R_k = \{z : a < x < b,\ \alpha + 2k\,\pi < y < \beta + 2k\,\pi\}$, $0 \le \beta - \alpha \le 2\pi$, k ceo broj.*
exp *preslikava R_k na $S = S(\alpha, \beta; a, b) = \{re^{i\,\varphi} : \alpha < \varphi < \beta,\ e^a < r < e^b\}$.*

Vežba 1.6.19 *Neka je* arg *glavna determinacija argumenta određena sa vrednostima u* $(0, 2\pi)$ *i* ln *glavnom determinacijom logaritma određena sa* arg; *i* $S_1 = S(0, \alpha; a, b)$ *i* $S_2 = S(-\alpha, 0; a, b)$.
Proveriti da ln *preslikava S_1 i S_2 na pravougaonike;*
na disjunktne pravougaonike ako je $0 \le \alpha \le \pi$.

1.6.6 Primene Koši-Rimanovih uslova

Podvucimo da tvrđenja sledeće dve vežbe slede neposredno iz Principa očuvanja oblasti, ali da iz pedagoških razloga dajemo sledeće dokaze.

Vežba 1.6.20 *Neka je funkcija f holomorfna i $u = \mathrm{Re}\, f$ konstanta na oblasti Ω. Tada je f konstanta na oblasti Ω.*

Uputstvo: Na osnovu Koši-Rimanovih uslova, $v_x = v_y = 0$ na oblasti Ω. □

Vežba 1.6.21 *Neka je f holomorfna i $|f| = R_0$ konstanta na oblasti Ω. Tada je f konstanta na oblasti Ω.*

Uputstvo: Ako je $R_0 = 0$, tada je $u = v = 0$. Ako je $R_0 > 0$, nalazeći odgovarajuće parcijalne izvode u jednačini $u^2 + v^2 = {R_0}^2$, na osnovu Koši-Rimanovih uslova $u_x u - u_y v = 0$, $u_y u + u_x v = 0$ na oblasti Ω. Kako je determinata homogenog sistema po u_x i u_y različita od nule, $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$ na oblasti Ω.
Drugi način: Neka je $z_0 \in \Omega$, $w_0 = f(z_0)$ i ln grana logaritma na $B = B(w_0; |w_0|)$. Funkcija $\ln f = U + iV$ je holomorfna i $U = \mathrm{Re}\ln f = \ln|f|$ je konstanta na odgovarajućoj okolini W tačke z_0. Na osnovu Vežbe 1.6.20, V je konstanta na okolini W. □

Na osnovu Vežbe 1.6.21 i Teoreme o srednjoj vrednosti integrala može se dokazati PMM (videti Glavu 6).

1.6.7 Trigonometrijske funkcije

Iz Ojlerove formule $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, sledi

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{i} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \tag{1.95}$$

Ove formule su motivacija da definišemo *holomorfno produženje*

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{i} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{1.96}$$

Sva svojstva ovih funkcija proizilaze iz ove definicije i odgovarajućih svojstava eksponencijalne funkcije. Obe su periodične sa osnovnim periodom 2π. Za te funkcije važe formule diferenciranja

$$(\cos z)' = i\,\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = -\sin z, \tag{1.97}$$

i analogno važi $(\sin z)' = \cos z$. Takođe važe trigonometrijske relacije

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \quad \cos z = \sin\Big(z + \frac{\pi}{2}\Big), \tag{1.98}$$

i adicione formule.

Iz Adicione teoreme za exp sledi

$$e^{\pm i(z_1+z_2)} = e^{\pm iz_1}\, e^{\pm iz_2}, \tag{1.99}$$

i otuda, s obzirom na Ojlerovu formulu, dobijamo

$$\cos(z_1+z_2) \pm i\sin(z_1+z_2) = (\cos z_1 \pm i\sin z_1)(\cos z_2 \pm i\sin z_2). \tag{1.100}$$

Jasno je da iz formule (1.100) slede adicione formule za trigonometrijske funkcije.

Definišemo

$$\mathrm{tg} = \frac{\sin}{\cos}, \quad \mathrm{ctg} = \frac{\cos}{\sin}. \tag{1.101}$$

Hiperboličke funkcije se definišu sa

$$\mathrm{sh}\, z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \mathrm{ch}\, z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}. \tag{1.102}$$

Proveriti

$$\mathrm{ch}^2 z - \mathrm{sh}^2 z = 1. \tag{1.103}$$

Proveriti

$$\sin z = \sin x\,\mathrm{ch}\, y + i\cos x\,\mathrm{sh}\, y, \quad \cos z = \cos x\,\mathrm{ch}\, y - i\,\sin x\,\mathrm{sh}\, y. \tag{1.104}$$

Specijalno, važi $\sin(i\,y) = i\,\mathrm{sh}\, y,\ \cos(i\,y) = \mathrm{ch}\, y$.

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \mathrm{sh}^2 y, \quad |\cos z|^2 = \cos^2 x + \mathrm{sh}^2 y \tag{1.105}$$

$$\sin z = 0 \ \text{ akko } \ z = n\pi \tag{1.106}$$

$$\cos z = 0 \ \text{ akko } \ z = \Big(n + \frac{1}{2}\Big)\pi \tag{1.107}$$

$$\mathrm{tg}(z+\pi) = \mathrm{tg}\, z \tag{1.108}$$

Vežba 1.6.22 *Dokazati da je* $\cos(z) = 0$ *akko je* $z = z_k = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Uputstvo: $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0$ akko $e^{iz} = -e^{-iz}$, tj. $e^{2iz} = -1 = e^{i\pi}$. Otuda je $2z = \pi + 2k\pi$. □

Vežba 1.6.23 *Pretpostavimo da je* $\mathrm{tg}\, z = \pm i$. *Tada je*

$$\mathrm{tg}(z+\omega) = \frac{\mathrm{tg}\, z + \mathrm{tg}\,\omega}{1 - \mathrm{tg}\, z\mathrm{tg}\,\omega} = \frac{i + \mathrm{tg}\,\omega}{1 - i\,\mathrm{tg}\,\omega} = i.$$

Da li otuda sledi da je tg *konstantna funkcija? Objasniti kontradikciju.*

Vežba je motivisana komunikacijom sa prof. Dobrilom Tošićem.

Vežba 1.6.24 *Da li jednačina* $\mathrm{tg}\, z = \pm i$ *ima rešenje u* $\mathbb{C}$*?*

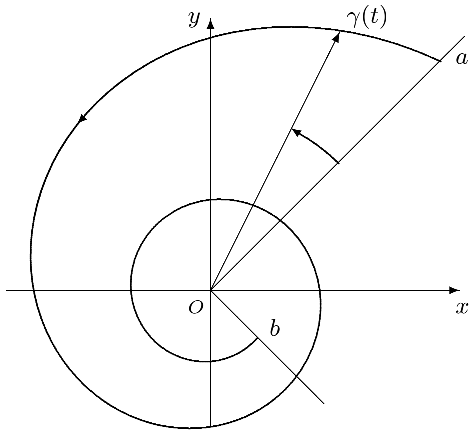
Uputstvo: Razmotriti jednačinu $\mathrm{tg}\, z = \pm i$; npr. $\mathrm{tg}\, z = i$ akko $\sin z = i\cos z$ akko $e^{iz} - e^{-iz} = -(e^{iz} + e^{-iz})$ akko $e^{iz} = 0$; kontradikcija.
Alterativno rešenje se može dobiti primenom formule za Arctg. □

1.6.8 Promena argumenta

Definicija Promene argumenta
Definiciju i svojstva promene argumenta koristićemo npr. pri definiciji orijentacije granice oblasti, u dokazu Principa argumenta i u sekciji Promena argumenta i Žordanove teoreme (za detalje videti sekciju 7.1 Promena argumenta duž puta i Žordanove teoreme).

Neka je γ neprekidno preslikavanje intervala $I = [0, 1]$ u $\mathbb{C}^*$. Ugao rotacije vektora $\gamma(t)$, kada $t \uparrow_0^1$, intuitivno se naziva promena argumenta duž puta γ; npr. ugao rotacije na slici 1.15 je $7\pi/2$.

Pokušajmo da preciziramo ovaj pojam. Ako je $\varphi(0)$ jedna (proizvoljno izabrana) vrednost argumenta tačke $\gamma(0)$ (tj. $\varphi(0) \in \mathrm{Arg}\gamma(0)$), tada postoji takav izbor po jedne vrednosti $\varphi(t)$ argumenta tačke $\gamma(t)$ (tj. $\varphi(t) \in \mathrm{Arg}\gamma(t)$) za svako $t \in [0, 1]$, tako da je funkcija φ neprekidna na $[0, 1]$. Funkcija φ naziva se grana argumenta duž puta.



Slika 1.15: Ugao rotacije vektora

Definicija 1.22 *Promena argumenta duž puta γ (označava se sa $\Delta\mathrm{Arg}\,\gamma$) može se definisati na sledeći način:*

$$\Delta\mathrm{Arg}\,\gamma = \varphi(1) - \varphi(0).$$

Za promenu argumenta duž puta γ koristi se i oznake $\mathrm{VarArg}\,\gamma$, VarArg_γ. Pre nego što dokažemo da postoji grana argumenta duž puta daćemo neke napomene i primere.

Kažemo da je oblast specijalnog O-tipa ako pripada ravni bez zraka iz kordinatnog početka.

Primer 12 *Neka je $n \in \mathbb{Z}$ i $\gamma_n(t) = e^{in2\pi t}$, $0 \le t \le 1$. Odrediti promenu argumenta duž puta γ_n.*

Svi putevi γ_n imaju isti trag T, jediničnu kružnicu. Funkcija φ ovde se može definisati sa $\varphi(t) = \varphi_n(t) = 2\pi nt$. Kako je $\varphi_n(1) - \varphi_n(0) = 2\pi n$, promena argumenta duž puta γ_n je $2\pi n$. Specijalno, za $n = -1$, γ_{-1} je negativno orijentisana jedinična kružnica i promena argumenta duž puta γ_{-1} jednaka je -2π. Podvucimo da u ovim primerima ne postoji grana argumenta u okolini traga T, ali postoji grana argumenta duž puta. Ideja dokaza da postoji grana duž puta je da se put podeli na delove koji pripadaju oblastima specijalnog O-tipa.

Primer 13 (a) *Nacrtati grafik (trag) puta* $\gamma(t) = \dfrac{1}{t+1}e^{i2t}$, $\dfrac{\pi}{8} \le t \le \dfrac{15\pi}{8}$ *i proveriti da je* $\Delta\mathrm{Arg}\,\gamma = 7\pi/2$ *(videti sliku 1.16)*
(b) *Neka je* $n \in \mathbb{Z}$ *i*

$$\ell_n(t) = \frac{1}{t+1}e^{in2\pi t},\ 0 \le t \le 1; \quad \gamma_n(t) = \frac{1}{t+1}e^{int},\ \frac{\pi}{4} \le t \le \frac{7\pi}{4}.$$

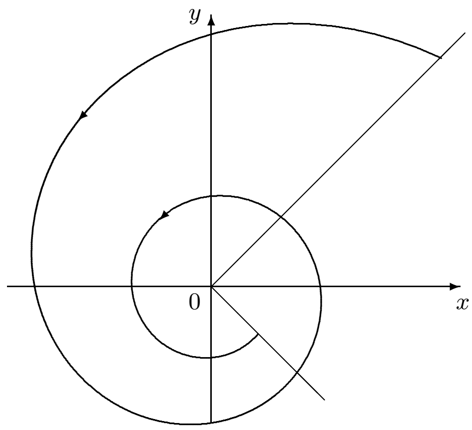
Dokazati da je $\Delta\mathrm{Arg}\,\ell_n(t) = 2\pi n$, $\Delta\mathrm{Arg}\,\gamma_n(t) = \dfrac{3n}{2}\pi$. *Nacrtati tragove puteva* ℓ_2, γ_2, ℓ_3 *i* γ_3.

Neka je γ put u oblasti O - ravan bez zraka iz koordinatnog početka, zadat na parametarskom intervalu $[\alpha, \beta]$. Kako na O postoji grana arg, možemo definisati promenu funkcije arg duž γ, u oznaci:

$$\Delta\mathrm{Arg}\,\gamma = \arg\gamma(\beta) - \arg\gamma(\alpha).$$

Neka je γ put sa parametarskim intervalom $I = [0,1]$ i $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = 1$, $z_k = \gamma(s_k)$ i neka je put γ_k restrikcija puta γ na $I_k = [s_k, s_{k+1}]$, $0 \le k \le n-1$. Kratko kažemo da je put γ „podeljen" tačkama $z_0, z_1, \ldots, z_n$ na puteve γ_k.

Ako je γ put u $\mathbb{C}^*$, postoji „podela" opisanog tipa takva da svaki trag γ_k pripada oblasti O^k- ravan bez zraka iz koordinatnog početka. Dakle, možemo definisati promenu argumenta duž konture γ, tj.



Slika 1.16: Promena argumenta

$$\Delta\mathrm{Arg}\,\gamma = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta\mathrm{Arg}\,\gamma_k.$$

Ostavljamo čitaocu da proveri da je ova definicija saglasna sa Definicijom 1.22. Odaberimo grane $\varphi_k = \arg_k$ višeznačne funkcije Arg na O^k tako da je

$$\varphi_k(z_k) = \varphi_{k+1}(z_k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Definišimo φ na I, tako da je φ jednako $\varphi_k \circ \gamma$ na $[s_k, s_{k+1}), 0 \le k \le n-1$. Jasno je da je funkcija φ neprekidna na I i da važi:

$$\gamma(t) = |\gamma(t)|e^{i\varphi(t)}, \quad t \in I. \tag{1.109}$$

Funkcija φ naziva se (neprekidna) *grana argumenta duž puta* γ, a formula (1.109) polarna reprezentacija puta γ. Dakle, dokazali smo sledeći rezultat:

Propozicija 1.31 *Neka je $\gamma : I \to \mathbb{C}^*$ put. Tada postoji neprekidna funkcija $\varphi : I \to \mathbb{R}$ tako da je*

$$\frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|} = e^{i\varphi(t)}, \ t \in I$$

i da je

$$\Delta \mathrm{Arg}\, \gamma = \varphi(1) - \varphi(0).$$

Funkcija φ naziva se neprekidna grana argumenta duž puta γ.

Vežba 1.6.25 *Proveriti da definicija $\Delta \mathrm{Arg}\, \gamma = \varphi(1) - \varphi(0)$ ne zavisi od grane argumenta φ.*

Uputstvo: Neka su φ i φ_1 grane argumenta duž puta γ. Proveriti da je funkcija $(\varphi - \varphi_1)/2\pi$ neprekidna i celobrojna. □

Geometrijska Definicija Indeksa i Orjentacije

Za kompleksnu funkciju f i kompleksan broj $a \in \mathbb{C}$ definišimo funkciju f_a (translacija za vektor a) pomoću $f_a(z) = f(z) - a$. Slično za put pišemo $\gamma_a(t) = \gamma(t) - a$.

Neka je γ zatvoren put i neka w ne pripada γ^*. Ako je funkcija $\varphi = \varphi^w$ neprekidna grana argumenta duž puta γ_w, definišemo „broj obilazaka puta" γ oko tačke w kao $\mathrm{Ind}_\gamma w = \dfrac{\varphi^w(1) - \varphi^w(0)}{2\pi}$. Ako je γ zatvoren put tada je $e^{i\varphi(0)} = e^{i\varphi(1)}$ i stoga $\varphi(1) - \varphi(0) = 2k\pi$, gde je $k \in \mathbb{Z}$. Otuda je Ind_γ celobrojna funkcija.

Neka je γ put i f neprekidna i različita od nule na γ^* i $\Gamma = f \circ \gamma$. Promena argumenta funkcije f duž puta γ definiše se

$$\Delta_\gamma \mathrm{Arg}\, f = \Delta \mathrm{Arg}\, \Gamma.$$

Ako je γ zatvoren put i w ne pripada γ^*, primetimo da se Ind_γ može izraziti i na sledeći način:

$$\mathrm{Ind}_\gamma w = \frac{1}{2\pi} \Delta \mathrm{Arg}\, \gamma_w = \frac{1}{2\pi} \Delta_{t \in I} \mathrm{Arg}\,(\gamma(t) - w).$$

Teorema 1.13 (Teorema o indeksu Žordanovog puta) *Ako je γ zatvoren Žordanov (prost) put, tada je:*
1. $\mathrm{Ind}_\gamma w = 1$ *za svako* $w \in \mathrm{Int}(\gamma)$ *ili*
2. $\mathrm{Ind}_\gamma w = -1$ *za svako* $w \in \mathrm{Int}(\gamma)$.

Definicija 1.23 (Definicija o orijentaciji Žordanovog puta) *Ako važi* 1. *(respektivno,* 2.*), kažemo da je put γ pozitivno (respektivno, negativno) orijentisana.*

Dokaz ove Teoreme za zatvorene Žordanove (proste) konturue daje se u Glavi 7. Ovaj slučaj je dovoljan za primene.

Umesto oznake $\mathrm{Ind}_\gamma w$, pogodno je koristiti oznaku $n = n(\gamma, w)$.

Primer 14 *Neka je γ put zadat jednačinom $z = \gamma(\varphi) = 1/2 + e^{i\varphi}$, $\pi/4 \le \varphi \le 7\pi/4$, $f(z) = z^3$ i $\Gamma = f \circ \gamma$. Nacrtati grafike puteva γ i Γ. Da li je $\Delta \mathrm{Arg}\, \Gamma = 6\pi - 3\pi/2$?*

GLAVA 2

Integracija i holomorfne funkcije

2.1 Košijeve teoreme i posledice

Integracija

Ako je $f = u + iv$ kompleksna funkcija definisana na $[\alpha, \beta]$, tada definišemo $\int\limits_\alpha^\beta f(t)dt = \int\limits_\alpha^\beta u(t)dt + i\int\limits_\alpha^\beta v(t)dt$.

Pretpostavimo, sada, da je γ luk i funkcija f neprekidna na tragu γ^*.

Definicija 2.1 (Definicija integrala) *Integral funkcije f duž luka γ definiše se kao integral duž parametarskog intervala $[\alpha, \beta]$ puta γ:*

$$\int\limits_\gamma f(z)dz = \int\limits_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)dt. \tag{2.1}$$

Integral ne zavisi od parametrizacije puta.

Pretpostavimo da je $\varphi : [\alpha_1, \beta_1] \to [\alpha, \beta]$ neprekidno diferencijabilno $1-1$ preslikavanje tako da je $\varphi(\alpha_1) = \alpha$, $\varphi(\beta_1) = \beta$. Definišimo $\gamma_1 = \gamma \circ \varphi$. Na osnovu teoreme o izvodu kompozicije sledi

$$\gamma_1'(t) = \gamma'(\varphi(t))\varphi'(t)$$

odakle, s obzirom na definiciju integrala nalazimo

$$I_1 = \int\limits_{\gamma_1} f(z)dz = \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)dt = \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} f(\gamma(\varphi(t)))\gamma'(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt. \tag{2.2}$$

Sa druge strane, koristeći definiciju integrala duž luka γ i teoremu o smeni promenljive za integrale, nalazimo

$$I_2 = \int\limits_\gamma f(z)dz = \int\limits_\alpha^\beta f(\gamma(\tau))\gamma'(\tau)d\tau = \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} f(\gamma(\varphi(t)))\gamma'(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt. \tag{2.3}$$

Iz (2.2) i (2.3) sledi formula

$$\int_{\gamma_1} f dz = \int_{\gamma} f dz, \tag{2.4}$$

gde je $\tau = \varphi(t)$ dopustiva promena parametra.

* Integral se može definisati i kao granična vrednost integralnih suma: neka je $\alpha = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = \beta$ jedna podela intervala $[\alpha, \beta]$ i neka su $z_k = \gamma(s_k)$, $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$, $\varsigma_k = \gamma(\tau_k)$, gde su $\tau_k \in [s_k, s_{k+1}]$ proizvoljne tačke, i neka je $\delta = \max |\Delta z_k|$, $0 \leq k < n$ i $\sigma = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\varsigma_k)\Delta z_k$.

Ako postoji konačna granična vrednost $I = \lim\limits_{\delta \to 0} \sigma$, tada I nazivamo integralom funkcije f duž luka γ i označavamo sa $\int\limits_{\gamma} f dz$.

Koristićemo prvu definiciju i nećemo dokazivati da su definicije ekvivalentne. Ako je γ luk, tada je

$$\int_{\gamma} f dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt.$$

Ako je γ rektificibilan i neprekidan put, f neprekidna na γ^*, tada se, kao u Analizi 3, pokazuje da je I *Riman-Stiltjesov integral*:

$$\int_{\gamma} f dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t)) d\gamma(t).$$

Ako se krajnja tačka luka γ_1 poklapa sa početnom tačkom luka γ_2, možemo izabrati njihove parametarske intervale tako da su γ_1 i γ_2 spojeni da formiraju jedan luk γ, i da važi

$$\int_{\gamma} f dz = \int_{\gamma_1} f dz + \int_{\gamma_2} f dz \tag{2.5}$$

za svaku funkciju f koja je neprekidna na tragu $\gamma^* = \gamma_1^* \cup \gamma_2^*$.

Definicija 2.2 (Suprotno orijentisan put) *Neka je γ put definisan na parametarskom intervalu $[0, 1]$ i $\gamma_1(t) = \gamma(1 - t)$. Tada se put γ_1 zove suprotno orijentisan od puta γ i obično označava sa γ^-.*

Pokažimo da je

$$\int_{\gamma^-} f dz = -\int_{\gamma} f dz. \tag{2.6}$$

Na osnovu definicije integrala duž luka γ_1 i formule $\gamma_1'(t) = -\gamma'(1 - t)$, nalazimo

$$I_1 = \int_{\gamma_1} f dz = \int_0^1 f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t) dt = -\int_0^1 f(\gamma(1 - t))\gamma'(1 - t) dt. \tag{2.7}$$

Sada, koristeći smenu $\tau = 1 - t$ $(d\tau = -dt)$, sledi

$$I_1 = \int_1^0 f(\gamma(\tau))\gamma'(\tau) d\tau = -\int_0^1 f(\gamma(\tau))\gamma'(\tau) d\tau. \tag{2.8}$$

Iz (2.8), s obzirom na definiciju integrala duž luka γ, sledi (2.6).

2.1.1 Nejednakost za apsolutnu vrednost integrala

Lema 2.1 *Neka je γ luk, $\| f \|_\infty = \max\limits_{\alpha \le t \le \beta} |f(\gamma(t))|$ (maksimum $|f|$ na γ^*) i $|\gamma| = \int\limits_\alpha^\beta |\gamma'(t)|dt$ dužina luka γ. Tada je*

$$\left| \int\limits_\gamma f dz \right| \le \| f \|_\infty |\gamma|. \tag{2.9}$$

Dokaz: Neka je $I = \int\limits_\gamma f dz$. Tada je $I = |I| e^{i\theta}$, tj. $|I| = e^{-i\theta} I$. Otuda se dobija

$$|I| = e^{-i\theta} I = \int\limits_\alpha^\beta e^{-i\theta} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

i stoga

$$|I| = \int\limits_\alpha^\beta \mathrm{Re}\, (e^{-i\theta} f(\gamma(t)) \gamma'(t))\, dt. \tag{2.10}$$

Koristeći (2.10), na osnovu elementarne nejednakosti $\mathrm{Re}\, z \le |z|$, sledi

$$|I| \le \int\limits_\alpha^\beta |f(\gamma(t)) \gamma'(t)| dt \le \| f \|_\infty \int\limits_\alpha^\beta |\gamma'(t)| dt.$$

Otuda, s obzirom na definiciju dužine luka γ, sledi (2.9). □

Specijalni slučajevi

(a) Ako je $a \in \mathbb{C}$ kompleksan broj i $r > 0$, put definisan sa

$$\gamma(t) = a + re^{it}, \ 0 \le t \le 2\pi,$$

zove se *pozitivno orijentisana kružnica* sa centrom u a poluprečnika r. Iz $\left(e^{it}\right)' = ie^{it}$ sledi, prvo, $\gamma'(t) = ire^{it}$ i otuda se dobija

$$\int\limits_\gamma f dz = ir \int\limits_0^{2\pi} f\left(a + re^{it}\right) e^{it} dt. \tag{2.11}$$

Kako je $\gamma'(t) = ire^{it}$, to je $|\gamma'(t)| = |ire^{it}| = r$, odakle dobijamo formulu za dužinu kružnice

$$|\gamma| = \int\limits_0^{2\pi} |\gamma'(t)| dt = 2\pi r. \tag{2.12}$$

Ponovimo da je a središte kružnice γ. Iz formule (2.11) sledi

$$\int\limits_\gamma \frac{f(z)}{z-a} dz = i \int\limits_0^{2\pi} f\left(a + re^{it}\right) dt. \tag{2.13}$$

(b) Neka su a, $b \in \mathbb{C}$. Put definisan sa

$$\gamma(t) = a + t(b-a)\,,\ 0 \le t \le 1, \tag{2.14}$$

naziva se *orijentisan interval* $[a,b]$. Iz definicije integrala sledi

$$\int\limits_{[a,b]} f dz = (b-a)\int\limits_0^1 f(a+t(b-a))dt.$$

U praksi se javlja potreba za promenom parametarskog intervala. Preslikavanje τ, definisano sa $\tau(t) = \dfrac{t-\alpha}{\beta-\alpha}$, preslikava $[\alpha,\beta]$ uzajamno jednoznačno na $[0,1]$.
Neka je orijentisan interval $[a,b]$ parametrizovan sa (2.14) i neka je $\gamma_1 = \gamma\circ\tau$. Tada je

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= \gamma(\tau(t)) = a + \tau(t)(b-a) \\ &= a + \frac{t-\alpha}{\beta-\alpha}(b-a) \\ &= \frac{a(\beta-t)+b(t-\alpha)}{\beta-\alpha}.\end{aligned} \tag{2.15}$$

Čitalac lako proverava da je $\gamma_1(\alpha) = a$ i $\gamma_1(\beta) = b$, a odavde se može izvesti još jedan dokaz da (2.15) daje parametrizaciju orijentisanog intervala $[a,b]$.

(c) Neka je $\{a,b,c\}$ uređena trojka kompleksnih brojeva, i $\Delta = \Delta(a,b,c)$ trougao sa temenima u tačkama a, b i c (najmanji konveksan skup koji sadrži tačke a, b i c). Za neprekidnu funkciju f na granici $\partial\Delta$ definišemo

$$\int\limits_{\partial\Delta} f dz = \int\limits_{[a,b]} f dz + \int\limits_{[b,c]} f dz + \int\limits_{[c,a]} f dz. \tag{2.16}$$

Jednakost (2.16) možemo razmatrati kao definiciju leve strane. Takođe, može se smatrati da je kontura $\partial\Delta$ nastala spajanjem orijentisanih intervala $[a,b]$, $[b,c]$ i $[c,a]$. U tom slučaju, koristeći definiciju integrala, jednostavno je pokazati da važi (2.16).
Ako se a, b i c permutuju ciklično, vrednost integrala se ne menja. Ako se (a,b,c) zameni sa (a,c,b), integral menja znak.

2.1.2 Košijeva Integralna Teorema o izvodu (KIT')

Kao u Realnoj analizi dokazuje se sledeća lema.

Lema 2.2 *Ako je $f : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ neprekidno diferencijabilno, tada je*

$$\int\limits_\alpha^\beta f'(t)dt = f(\beta) - f(\alpha).$$

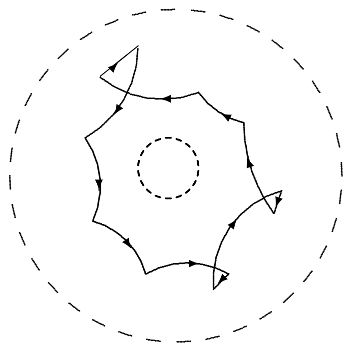
Teorema 2.1 (Košijeva Integralna Teorema o izvodu, KIT') *Pretpostavimo da je $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ i da je F' neprekidna u Ω. Ako je γ zatvorena kontura (opštije luk) u Ω, tada je*

$$\int_\gamma F'(z)dz = 0.$$

Dokaz: Neka je $[\alpha, \beta]$ parametarski interval krive γ i $h = F \circ \gamma$.
Neka je prvo γ neprekidno-diferencijabilan luk. Tada je, na osnovu Leme 1.1, $h'(t) = F'(\gamma(t))\gamma'(t)$, tako da je

$$I = \int_\gamma F'(z)dz = \int_\alpha^\beta F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_\alpha^\beta h'(t)dt.$$

Otuda, koristeći Lemu 2.2 (Njutn-Lajbnicovu formulu) i činjenicu $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$, dobijamo $I = h(\beta) - h(\alpha) = F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(\alpha)) = 0$.
U opštem slučaju, γ može se podeliti na konačan broj neprekidno-diferencijabilnih puteva $\gamma_k : [s_k, s_{k+1}] \to \mathbb{C}$ ($s_0 = \alpha < s_1 < s_2 < \cdots < s_n = \beta$)). □



Slika 2.1: KIT'

Posledica 2.1 *Kako je z^n izvod funkcije $\dfrac{z^{n+1}}{n+1}$ za sve cele brojeve $n \neq -1$, sledi $\int_\gamma z^n dz = 0$, za svaki zatvoren luk γ ako je $n = 0, 1, 2, \ldots$, i za svaki zatvoren luk γ za koji $0 \notin \gamma^*$ ako je $n = -2, -3, -4, \ldots$. Slučaj $n = -1$ se razmatra pomoću pojma indeksa puta u odnosu na tačku (videti Glavu 7).*

Teorema 2.2 (Žordanova teorema) *Svaki Žordanov zatvoreni put γ u kompleksnoj ravni $\mathbb{C}$ deli kompleksnu ravan na dve oblasti tako da je γ^* granica svake od njih.*
Sa $\mathbf{Int}(\gamma)$ *označava se ograničena oblast, a sa* $\mathbf{Ext}(\gamma)$ *neograničena oblast.*

Definicija 2.3 (Žordanova oblast, konturna oblast) *Ako je γ zatvorena Žordanova put, tada se $\boldsymbol{G} = \mathbf{Int}(\gamma)$ naziva Žordanova oblast; specijalno ako je γ kontura, $\boldsymbol{G} = \mathbf{Int}(\gamma)$ naziva se Žordanova konturna oblast.*

Definicija 2.4 (Konturna oblast i kanonski orijentisana granica) *Neka su $G_0, G_1, \ldots, G_n$ Žordanove konturne oblasti, i neka su ispunjeni uslovi:*

(a) $\quad \overline{G}_\nu \subset G_0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n,$

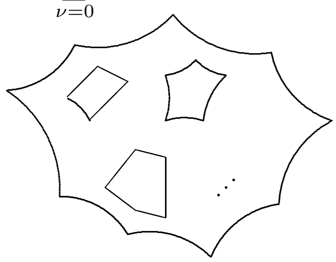
(b) $\overline{G}_i \cap \overline{G}_j = \emptyset \quad i \neq j,\ i,j \geq 1$

i neka je $G = G_0 \setminus \bigcup_{\nu=1}^{n} \overline{G}_\nu$.

Oblast G definisana na ovaj način zove se deo po deo regularna oblast, ili kraće ***konturna oblast****.*
Ako su tragovi ∂G_ν orijentisani pomoću deo po deo glatkih puteva γ_ν, tako da je γ_0 pozitivno orijentisana kontura, a $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ negativno orijentisane konture, tada se konačna familija zatvorenih puteva ***(cikl)*** *$\Gamma = \{\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ naziva* ***pozitivno orijentisana granica*** *ili* ***kanonski orijentisana granica oblasti*** *G. Takođe se piše i $\Gamma = \sum_{\nu=0}^{n} \gamma_\nu$.*

Često se u literaturi kaže da je granica oblasti pozitivno orijentisana ako je orijentacija takva da oblast ostaje sa leve strane. Definicija 2.4 precizira ovaj intuitivni pristup.

Napomena: Za deo po deo regularnu oblast kažemo kratko regularna, tako da u kursu pojmovi regularna i konturna oblast imaju ista značenja.



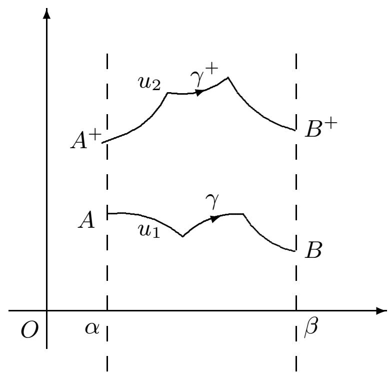
Slika 2.2: Konturna oblast

2.1.3 Grin-Stoksova (Gr-St) i Košijeva Integralna Teorema (KIT)

U kursu Realne analize dokazuje se Grin-Stoksova teorema za jednostavne oblasti. Skicirajmo dokaz kompleksne verzije ($\overline{\partial}$-verzije) ove teoreme.

Definicija 2.5 (Elementarna i jednostavna oblast) *Kažemo da je oblast D elementarna u odnosu na osu Oy (el-Oy) ako je ograničena sa dve prave paralelne sa y-osom i dve funkcije (promenljive x) koje su deo po deo glatke (videti sliku 2.3).*

Oblast D je elementarna u odnosu na osu Ox (el-Ox) ako je oblast $D_1 = iD$ el-Oy.
Oblast D je elementarna ako je el-Ox i el-Oy.
Oblast G je jednostavna u odnosu na osu Oy (jed-Oy) ako se može „podeliti" pravama paralelnim y-osi na konačan broj el-Oy oblasti.
Oblast G je jednostavna ako su oblasti G i $iG = \{iz : z \in G\}$ jed-Oy oblasti, tj. ako je jednastavna u odnosu na obe ose.



Slika 2.3: Elementarna oblast Oy

Neka su u_1, u_2 realne funkcije definisane na intervalu $[\alpha, \beta]$, $\alpha < \beta$, koje imaju deo-po-deo neprekidne izvode, i neka je $u_1(x) < u_2(x)$ za svako $x \in (\alpha, \beta)$. Oblast D

$$D = \{(x, y) : u_1(x) < y < u_2(x),\ \alpha < x < \beta\}$$

naziva se elementarna u odnosu na osu Oy (el-Oy); neka su γ_1 i γ_2 putevi definisani sa

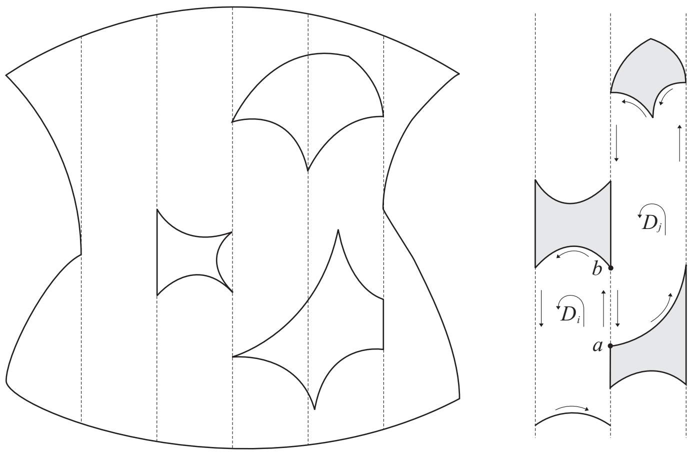
$$\gamma_1(x) = (x, u_1(x)),\ \gamma_2(x) = (x, u_2(x)),\ x \in [\alpha, \beta].$$

Pozitivno orijentisana granica γ oblasti D sastoji se od kontura:

$$\gamma_1,\ [B, B^+],\ \gamma_2^-,\ [A^+, A],$$

gde je $A = \gamma_1(\alpha),\ B = \gamma_1(\beta),\ A^+ = \gamma_2(\alpha),\ B^+ = \gamma_2(\beta)$.

Kako se jednostavna oblast G u odnosu na osu Oy (jed-Oy) može „podeliti" pravama paralelnim y-osi na konačan broj el-Oy oblasti, orijentisana granica oblasti G se može definisati pomoću „sabiranja" orijentisanih granica elementarnih oblasti. $\square$



Slika 2.4.a Slika 2.4.b

Slika 2.4: Jednostavne oblasti

Na slici 2.4.a data je podela oblasti na $el - Oy$ oblasti; a na slici 2.4.b nacrtan je deo podele neke oblasti na $el - Oy$ oblasti.
Podvucimo da su elementarne oblasti na primer pravougaonik, pravilan osmougao, krug, konveksne figure.
Na osnovu razmatranja u Glavi 7 može se pokazati da je definicija orijentacije u ovoj podsekciji saglasna sa Definicijom 1.23.

U ovoj sekciji pretpostavljamo, osim ako se tvrdi drugačije, da je:

(a) G jednostavna oblast.

(b) kompleksna funkcija f zajedno sa svojim parcijalnim izvodima f_x i f_y neprekidna na $\overline{G}$.

Pozitivno orijentisanu granicu oblasti G označavamo sa Γ. Specijalno, elementarne oblasti (el-ob) označavamo sa D, a njihove pozitivne orijentisane granice sa $\gamma = \gamma^+$. Primenom Fubinijeve Teoreme, izvodi se (videti [Pi]):

Teorema 2.3 (Grinova Teorema za elementarne Oy oblasti, Gr el-Oy.) *Ako je D elementarna oblast u odnosu na Oy osu, f i f_y neprekidne na $\overline{D}$, tada važi*

$$\int_{\gamma^+} f dx = -\iint_D f_y \, dxdy. \tag{2.17}$$

Dokaz: Dvojni integral za kompleksne funkcije definiše se pomoću realnih integrala:

$$\iint f = \iint u + i \iint v.$$

Koristićemo oznake sa slike 2.3. Na osnovu Fubinijeve teoreme nalazi se

$$J = \iint_D f_y dxdy = \int_\alpha^\beta J(x) \, dx, \tag{2.18}$$

gde je

$$J(x) = \int_{u_1(x)}^{u_2(x)} f_y \, dy.$$

Kako je, na osnovu Njutn-Lajbnicove formule, $J(x) = f(x, u_2(x)) - f(x, u_1(x))$, otuda

$$J = -\int_{\gamma^+} f(x, y) \, dx. \tag{2.19}$$

□

Teorema 2.4 (Kompleksna verzija opšte Grinove Teoreme, O Gr T-$\overline{\partial}$.) *Ako je G jednostavna oblast, i kompleksna funkcija f zajedno sa parcijalnim izvodima f_x i f_y neprekidna na $\overline{G}$, tada važi*

$$\int_\Gamma f dz = 2i \iint_G \overline{\partial} f \, dxdy. \tag{2.20}$$

Dokaz: Kako je G specijalno jed-Oy oblast, G se može „podeliti” na konačan broj el-Oy oblasti D_k, $1 \le k \le m$.
Primenom Gr el-Oy na D_k, dobija se

$$I_k := \int_{\gamma_k^+} f dx = -\iint_{D_k} f_y \, dxdy, \tag{2.21}$$

gde je γ_k^+ pozitivno orijentisana granica oblasti D_k.
Ako oblasti D_i i D_j imaju npr. interval, definisan tačkama a i b, kao zajednički deo

granice, i ako je npr. $\operatorname{Im} a < \operatorname{Im} b$ i oblast D_i „levo" u odnosu na oblast D_j (videti sliku 2.4.b), tada je orijentisan interval $[a,b]$ deo granice γ_i^+, a orijentisan interval $[b,a]$ deo granice γ_j^+.

Kako je

$$\int_{[a,b]} f\,dx + \int_{[b,a]} f\,dx = 0,$$

sumiranjem integrala I_k dobija se

$$I = \sum_{k=1}^{m} I_k = \int_{\Gamma} f\,dx,$$

zbog čega, s obzirom na (2.21) sledi

$$\int_{\Gamma} f\,dx = -\iint_{G} f_y\,dxdy. \tag{2.22}$$

Kako se oblast G može podeliti na konačan broj el-Ox oblasti, postupajući na sličan način kao u dokazu formule (2.22), može se dokazati formula

$$\int_{\Gamma} f\,dy = \iint_{G} f_x\;dxdy. \tag{2.23}$$

Ova formula se može dobiti i primenom (2.21) na oblast $D_1 = iD$ i funkciju $f_1(z) = f(-iz)$. Na osnovu (2.22) i (2.23) važi

$$\int_{\Gamma} f\,dz = \int_{\Gamma} f\,dx + i\int_{\Gamma} f\,dy = \iint_{G} (-f_y + i f_x)\,dxdy$$

i kako je

$$\overline{\partial} f = \frac{1}{2}(f_x + i\;f_y),$$

otuda sledi (2.20). □

Definicija 2.6 (Regularno analitička funkcija, reg-ana.) *Ako je kompleksna funkcija neprekidno diferencijabilna na otvorenom skupu Ω, kažemo da je regularno analitička (C^1- holomorfna, ili kratko reg-ana). Klasu regularno analitičkih funkcija na Ω označavamo sa $\mathcal{A}(\Omega)$.*

Dakle $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ ako postoji $f'(z)$ za svako $z \in \Omega$ i ako je f' neprekidna funkcija na Ω.
Ponovimo $f \in \mathcal{A}(\overline{G})$ znači da postoji oblast $\Omega \supset \overline{G}$ tako da je $f \in \mathcal{A}(\Omega)$.
Ako je $f \in \mathcal{A}(\overline{G})$, tada je $f_x(z) = f'(z)$ i $f_y(z) = if'(z)$, $z \in G$, odakle su f_x i f_y neprekidne na $\overline{G}$ i $\overline{\partial} f$ identički jednako nuli na $\overline{G}$.
Primenom Teoreme 2.4 (O Gr T-$\overline{\partial}$) dobija se

Teorema 2.5 (Opšta Košijeva Teorema, $OKIT_a$) *Ako je G jednostavna oblast i $f \in \mathcal{A}(\overline{G})$, tada je*

$$\int_{\Gamma} f\,dz = 0,$$

gde je Γ pozitivno orijentisana granica oblasti G.

Definicija 2.7 *Funkcija K definisana sa $K(z,\varsigma) = \dfrac{1}{\varsigma - z}$ naziva se* ***Košijevo jezgro****.*

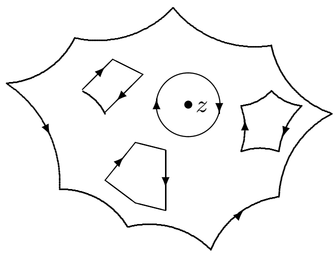
Teorema 2.6 (Opšta Košijeva Integralna Formula, $OKIF_a$) *Neka je G jednostavna oblast, Γ pozitivno orijentisana granica oblasti G i $f \in \mathcal{A}(\overline{G})$. Tada je*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} K(z,\varsigma)f(\varsigma)d\varsigma, \quad z \in G.$$

Dokaz: Neka $z \in G$ i izaberimo ρ dovoljno malo tako da zatvoren disk $\overline{B}_\rho = \overline{B}(z;\rho) \subset G$. Definišimo $G_\rho = G \setminus \overline{B}_\rho$ i $h(\varsigma) = \dfrac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}$. Kako je G_ρ jednostavna oblast (dokazati!), primenom $OKIT_a$ na G_ρ dobija se

$$\int\limits_{\Gamma} h d\varsigma = \int\limits_{\mathcal{K}_\rho} h d\varsigma = I_\rho,$$

gde je $\mathcal{K}_\rho$ pozitivno orijentisana kružnica sa središtem u tački z. Primenom formule za integral duž kružnice, dobija se



Slika 2.5: Opšta Košijeva integralna formula

$$I_\rho = i\int_0^{2\pi} f(z+\rho e^{it})dt.$$

Neka je $\varepsilon_\rho = \max\limits_t |f(z+\rho e^{it}) - f(z)|$. Tada je, prvo,

$$I_\rho - 2\pi\, i f(z) = i\int_0^{2\pi} (f(z+\rho e^{it}) - f(z))dt,$$

i na osnovu nejednakosti za apsolutnu vrednost integrala

$$|I_\rho - 2\pi\, i f(z)| \leq 2\pi\varepsilon_\rho.$$

Kako je f neprekidna funkcija u tački z, prvo sledi da $\varepsilon_\rho \to 0$ i stoga $I_\rho \to 2\pi i f(z)$ kada $\rho \to 0_+$. Takođe, može se koristiti i Žordanova lema. □

2.1.4 KIT za prsten*

Specijalno iz O KIF$_a$ dobijamo KIF za krug (O KIF$_a$ za krug). S obzirom na to da KIF$_a$ za krug ima važnu ulogu u Kompleksnoj analizi, i da smo čitaocu ostavili neke tehničke detalje u dokazima O KIF$_a$ i O KIT$_a$, razmotrimo detaljnije KIF$_a$ za krug.
Pregledajući dokaz O KIF$_a$ za jednostavne oblasti, zaključujemo:

1. Ako je specijalno $G = D$ disk, onda je $G_\rho = D \backslash \overline{B}_\rho$ prsten.
2. Glavni rezultat, u slučaju da je $G = D$ disk, na kojem se dokaz KIF bazira, je KIT za prsten.

Ostale detalje čitalac može dopuniti bez teškoća.
Prvo pokažimo da je prsten jednostavna oblast.

Neka je $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$, $R > 0$, $|b-a| < R$ i $0 < r < R - |b-a|$. *Kružni prsten* je skup

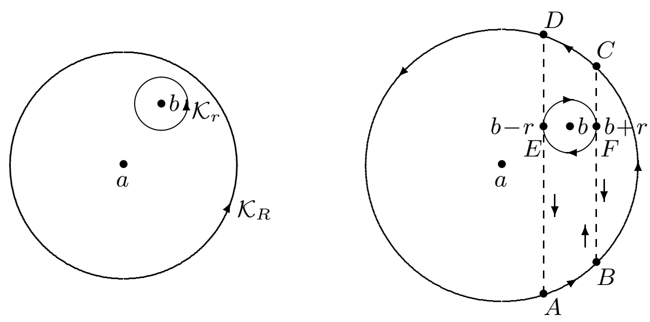
(1) $V = V(a, R; b, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < R,\ |z-b| > r\}$.

Specijalno, ako je $a = b$, kružni prsten nazivamo *pravilan* kružni prsten, i označavamo sa

(2) $A = A(a; r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\}$.

Propozicija 2.1 *Kružni prsten V je jednostavna oblast.*

Dokaz: Pretpostavimo da je V dato sa (1). Čitalac može da proveri da prave $l_1 : \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} b - r$ i $l_2 : \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} b + r$ dele V na četiri el-Oy oblasti V_k (videti sliku 2.6), i da prave $L_1 : \operatorname{Im} z = \operatorname{Im}(b - ir)$ i $L_2 : \operatorname{Im} z = \operatorname{Im}(b + ir)$ dele V na četiri el-Ox oblasti. Sledi da su V i iV jed-Oy, tj. V je jednostavna oblast. □



Slika 2.6: Kružni prsten

Na osnovu Propozicije 2.1, i Teoreme 2.5 ($OKIT_a$) zaključujemo specijalno da KIT važi za prsten. Podsetimo se da $OKIT_a$ izvodimo na osnovu Teoreme 2.4 (O Gr T-$\overline{\partial}$), a da se dokaz Teoreme 2.4 bazira na (2.22).
Korisno je da čitalac izvede formulu (2.22) za prsten V (ispisujući sve detalje, koji su samo skicirani u opštem konceptu).

Propozicija 2.2 *Neka su $\mathcal{K}_R = \mathcal{K}_R(a)$ i $\mathcal{K}_r = \mathcal{K}_r(b)$ pozitivno orijentisane kružnice, i kompleksna funkcija f zajedno sa parcijalnim izvodom f_y neprekidna na $\overline{V}$, gde je $V = V(a, R; b, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < R,\ |z-b| > r\}$. Tada je*

$$\int_{\mathcal{K}_R} f\,dx - \int_{\mathcal{K}_r} f\,dx = -\iint_V f_y\,dxdy. \tag{2.24}$$

Dokaz: Pogodno je da koristimo sliku. Neka je prsten V podeljen na četiri el-Oy oblasti V_k, $1 \le k \le 4$, (kao na slici 2.6) i neka je γ_k pozitivno orijentisana granica

oblasti V_k.
Neka je K_R podeljena na lukove $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$ i $\widehat{DA}$, a K_r na lukove $\widehat{EF}$ i $\widehat{FE}$ (videti sliku 2.6).
Na primer, oblast $V_2 = \{z \in V : \operatorname{Re} b - r < \operatorname{Re} z < \operatorname{Re} b + r,\ \operatorname{Im} z < \operatorname{Im} b\}$; γ_2 se sastoji od lukova $\widehat{AB}$, $[B,F]$, $\widehat{EF^-}$ i $[E,A]$.
Primenom Teoreme 2.3 (Gr el-Oy) na oblasti V_k, $k = 1,2,3,4$, i sabiranjem odgovarajućih jednačina dobija se formula (2.24) i time je završen dokaz Propozicije. $\square$

Teorema 2.7 (KIT za prsten) *Neka su $\mathcal{K}_R = \mathcal{K}_R(a)$ i $\mathcal{K}_r = \mathcal{K}_r(b)$ pozitivno orijentisane kružnice, i $f \in \mathcal{A}(\overline{V})$, gde je $V = V(a,R;b,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < R,\ |z-b| > r\}$. Tada je*

$$\int_{\mathcal{K}_R} f dz = \int_{\mathcal{K}_r} f dz \tag{2.25}$$

Dokaz: Kako se oblast V može podeliti na četiri el-Ox oblasti, postupajući na sličan način kao u dokazu Propozicije 2.2, može se dokazati formula

$$\int_{\mathcal{K}_R} f dy - \int_{\mathcal{K}_r} f dy = \iint_V f_x dxdy. \tag{2.26}$$

Ova formula se može dobiti i primenom Propozicije 2.2 na oblast $V_1 = iV$ i funkciju $f_1(z) = f(-iz)$. Odavde, koristeći (2.24), nalazimo

$$\int_\gamma f dz = 2i \iint_V \overline{\partial} f dxdy \tag{2.27}$$

gde je γ pozitivno orijentisana granica prstena V.
Kako je $f \in \mathcal{A}(\overline{V})$, sledi $\overline{\partial} f = 0$ na $\overline{V}$, odakle se s obzirom na (2.27), dobija (2.25).$\square$

Ako je luk γ podeljen na lukove γ_k, tada je

$$\int_\gamma f dz = \int_{\gamma_1} f dz + \int_{\gamma_2} f dz + \cdots + \int_{\gamma_n} f dz.$$

Kako desna strana ima smisla za npr. konačnu kolekciju lukova, razmotrimo formalnu sumu lukova $\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n$, koja ne mora biti luk. Takve formalne sume zovu se *lanci*.
Kao što se luk može podeliti na lukove na razne načine, jasno je da različite formalne sume mogu reprezentovati isti lanac. Princip je da dva lanca smatramo identičnim ako daju iste integrale za sve funkcije f. Ako se ovaj princip analizira, zaključujemo da sledeće operacije ne menjaju identitet lanca:

1. permutacija dva luka,
2. podela luka na lukove,
3. nadovezivanje dva luka,
4. reparametrizacija jednog luka,

5. poništavanje suprotnih lukova.

Na ovoj bazi nije teško formulisati relaciju ekvivalencije (logičnu) koja definiše formalno identitet dva lanca.
Lanac je *cikl* ako se može predstaviti kao suma zatvorenih puteva.

2.1.5 Košijevo jezgro reprodukuje analitičke funkcije

Definicija 2.8 *Funkcija K definisana sa $K(z,\varsigma)=\dfrac{1}{\varsigma - z}$ naziva se Košijevo jezgro. Neka je γ kontura, $\Omega = \mathbb{C}\backslash\gamma^*$ i h neprekidna funkcija na γ^*. Na Ω definišemo Košijevu transformaciju funkcije h u odnosu na γ sa*

$$K_\gamma[h](z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma K(z,\varsigma)h(\varsigma)d\varsigma, \quad z\in\Omega.$$

Ako je jasno na koju konturu se odnosi integral, pišemo kratko $K[h]$; i ako je $h=1$ na γ^* pišemo K_γ.

Na primer, iz *Principa argumenta* (videti sekciju 6.1.1), sledi da je $K_\gamma(z)$ jednako $\mathrm{Ind}_\gamma z$ (za detalje videti formulu (6.12) i takođe objašnjenje u Glavi 7, sekcija 7.2, Teorema 7.10).
U daljem izlaganju pogodno je koristiti sledeće oznake:

$$f_k(\varsigma) = f_k(\varsigma, a) = \frac{1}{2\pi i} f(\varsigma)(\varsigma - a)^{-k-1},$$

$$c_k = c_k(\gamma) = c_k(f;\gamma) = \int\limits_\gamma f_k d\varsigma.$$

Vežba 2.1.1 *Neka je $\gamma=\gamma_r$ pozitivno orijentisana granica kruga $B=B(a;r)$, f neprekidna na kružnici $K=K(a,r)$ i $c_k=c_k(f;\gamma)$. Tada je*

$$|c_k| \le \frac{M_r}{r^k}, \quad k\in\mathbb{Z},$$

gde je $M_r = \max\{|f(\zeta)| : \zeta\in K\}$.

Lema 2.3 (Lema o reprodukciji, LKJ Rep $\mathcal{A}$) *Neka je $\gamma=\gamma_r$ pozitivno orijentisana granica kruga $B=B(a;r)$, f neprekidna na $K=K(a,r)$, $c_k=c_k(f;\gamma)$ i $\Phi = K_\gamma[f]$. Tada je*

(*a*) $\Phi(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k(z-a)^k,\ |z-a|<r,$

(*a_1*) $\Phi(z) = -\sum\limits_{k=-\infty}^{-1} c_k(z-a)^k,\ |z-a|>r,$

(b) Φ *je analitička na oblasti* $D = \mathbb{C} \setminus K$.

Dokaz: Ako $z \in B$, i $\varsigma \in K$, na osnovu formule za sumu beskonačnog geometrijskog reda, nalazimo

$$K(z, \varsigma) = \frac{1}{\varsigma - a - (z - a)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (z - a)^n (\varsigma - a)^{-n-1}. \tag{2.28}$$

Ako pomnožimo ovaj red sa $f(\varsigma)$, dobija se red koji na osnovu Vajerštrasovog testa ravnomerno konvergira po ς na K. Sada integracijom član po član sledi (a).
Slično se dokazuje (a_1). Ako je $|z - a| > r$ i $\varsigma \in K$, na osnovu (2.28),

$$K(z, \varsigma) = -K(\varsigma, z) = -\sum_{k=0}^{+\infty} (\varsigma - a)^k (z - a)^{-k-1} .$$

Iz (a) i (a_1) sledi da je Φ analitička funkcija na oblasti $D = \mathbb{C} \setminus K$. □
Napomena: Podvucimo da red u slučaju (a) (respektivno (a_1)) ravnomerno konvergira na kompaktnim podskupovima skupa $\{|z-a| < r\}$ (respektivno $\{|z-a| > r\}$).

2.1.6 Tejlorova Teorema

Teorema 2.8 (Tejlorova Teorema) *Ako je* $f \in \mathcal{A}(B)$, $B = B(a; R)$, *tada je*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z - a)^k, \quad z \in B, \tag{2.29}$$

gde je

$$c_k = c_k(\gamma_\rho) = c_k(f; \gamma_\rho) \tag{2.30}$$

i γ_ρ *pozitivno orijentisana kružnica sa središtem u tački* a, $0 < \rho < R$.

Dokaz: Pogodno je koristiti oznaku $\Phi_\rho = K_{\gamma_\rho}[f]$. Neka $z \in B$. Tada postoji r tako da $|z - a| < r < R$.
Na osnovu KIF-a za disk,

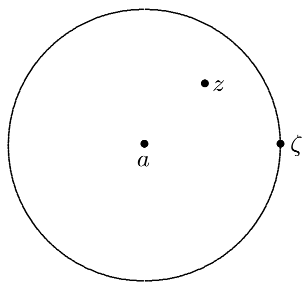
$$f(z) = \Phi_r(z)$$

a odavde se primenom LKJ Reprodukuje AF dobija

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z - a)^k, \tag{2.31}$$

gde je

$$c_k = c_k(\gamma_r). \tag{2.32}$$



Slika 2.7: Tejlorova teorema

Mada je r izabrano u zavisnosti od z ($|z-a| < r$), koeficijenti c_k zadati sa (2.32) ne zavise od z. Neka je npr. $0 < \rho < r$. Funkcija f_k je regularno analitička na prstenu $\overline{A} = \overline{A}(a;\rho,r)$ (reg-ana na zatvorenom prstenu ograničenom kružnicama γ_ρ i γ_r) i na osnovu KIT za prsten, sledi

$$c_k = \int_{\gamma_r} f_k d\varsigma = \int_{\gamma_\rho} f_k d\varsigma.$$

Dakle, dokazali smo da za proizvoljnu tačku $z \in B$ važi (2.29), gde je c_k dato sa (2.30). □

Na osnovu Propozicije o diferenciranju stepenih redova, iz (2.29) sledi

$$c_k = f^{(k)}(a)/k!$$

i odavde

Teorema 2.9 (Tejlorova Teorema 2.) *Ako je f regularno analitička na B, tada je*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z-a)^k, \quad z \in B, \tag{2.33}$$

gde je

$$c_k = f^{(k)}(a)/k!\ . \tag{2.34}$$

Košijeva nejednakost

Neka je f analitička na $B = B(a;R)$ i $M_\rho = \max\{|f(\varsigma)| : \varsigma \in K_\rho\}$, $0 < \rho < R$, gde je K_ρ kružnica sa središtem u tački a. Kako je, za $\varsigma \in K_\rho$, $|f_k(\varsigma)| = \dfrac{|f(\varsigma)|}{2\pi\rho^{k+1}} \leq \dfrac{M_\rho}{2\pi\rho^{k+1}}$ i $|K_\rho| = 2\pi\rho$, iz formule za Tejlorove koeficijente c_k i nejednakosti za apsolutnu vrednost integrala, dobijamo Košijevu nejednakost

$$|c_k| \leq \frac{1}{2\pi}\frac{M_\rho}{\rho^{k+1}}\,|K_\rho| = \frac{1}{2\pi}\frac{M_\rho}{\rho^{k+1}}\,2\pi\rho = \frac{M_\rho}{\rho^k}\,, \quad k \geq 0\,. \tag{2.35}$$

Specijalno za $k = 0$, $|f(a)| \leq M_\rho$.
Iz nejednakosti (2.35) i formule (2.34) sledi

$$\left|f^{(k)}(a)\right| \leq \frac{k!M_\rho}{\rho^k}\,. \tag{2.36}$$

Specijalno, kada je $k = 1$ dobijamo

$$|f'(a)| \leq \frac{M_\rho}{\rho}\,. \tag{2.37}$$

Definicija 2.9 *Funkcija koja je holomorfna na celoj kompleksnoj ravni $\mathbb{C}$ naziva se cela funkcija.*

U Podsekciji 2.1.7 dokazuje se Teorema Koši-Gursa koja tvrdi da su holomorfne funkcije regularno analitčke.

Pomoću (2.35) (ili (2.37)) i Teorema Koši-Gursa, izvodi se

Teorema 2.10 (Liuvilova Teorema) *Svaka cela, ograničena po modulu funkcija f je konstanta.*

Dokaz: Kako je funkcija $|f|$ ograničena, postoji $M \geq 0$ tako da $|f(z)| \leq M$ za svako $z \in \mathbb{C}$. Neka je $a \in \mathbb{C}$ i $\rho > 0$ proizvoljan broj. Na osnovu (2.37)

$$|f'(a)| \leq \frac{M_\rho}{\rho} \leq \frac{M}{\rho}. \tag{2.38}$$

Iz ove nejednakosti, kad $\rho \to +\infty$ dobijamo $f'(a) = 0$. Kako je a proizvoljna tačka, sledi da je $f' \equiv 0$ na $\mathbb{C}$. Otuda prvo sledi da je $f'' \equiv 0$ na $\mathbb{C}$ i na osnovu indukcije sledi da je $f^{(k)} \equiv 0$, na $\mathbb{C}$, $k \geq 1$, a zatim na osnovu Tejlorove teoreme (razvoj oko tačke 0) da je f konstantna. $\square$

NAPOMENA: U dokazu umesto ocene $|f'(a)|$, modula izvoda funkcije f, može se koristiti Košijeva nejednakost za koeficijente c_k. Fiksirajmo $a \in \mathbb{C}$; može se uzeti npr. $a = 0$. Neka je $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k(z-a)^k$. Na osnovu (2.35), $|c_k| \leq \dfrac{M_\rho}{\rho^k} \leq \dfrac{M}{\rho^k}$, $k \geq 0$. Iz ove nejednakosti, kad $\rho \to +\infty$ dobijamo $|c_k| = 0$, $k \geq 1$ i otuda $f \equiv c_0$ na $\mathbb{C}$.

Vežba 2.1.2 *Neka je f holomorfna funkcija na oblasti Ω i neka je f' jednako 0 na Ω. Dokazati da je f konstantna na Ω.*

2.1.7 Opšta Košijeva Teorema (OKIT) i Formula (OKIF) za Holomorfne funkcije

Teorema 2.11 (Košijeva Integralna Teorema za trougao, KITΔ) *Pretpostavimo da je Δ zatvoren trougao u otvorenom skupu Ω i $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Tada je*

$$J = \int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0. \tag{2.39}$$

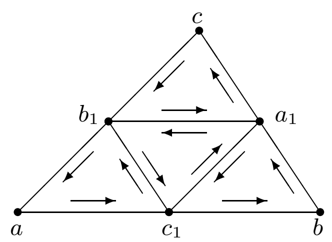
Dokaz*: Neka su a, b i c temena Δ i neka su a_1, b_1 i c_1 središta $[b,c]$, $[c,a]$ i $[a,b]$, respektivno, i razmotrimo četiri trougla Δ^j formirana pomoću uređenih trojki

$$\{a, c_1, b_1\},\ \{b, a_1, c_1\},\ \{c, b_1, a_1\},\ \{a_1, b_1, c_1\}. \tag{2.40}$$

Ako je J vrednost integrala (2.39),

$$J = \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial\Delta^j} f(z)dz. \tag{2.41}$$

Apsolutna vrednost bar jednog integrala na desnoj strani jednakosti (2.41) je stoga najmanje $\dfrac{|J|}{4}$. Označimo odgovarajući



Slika 2.8: KIT za trougao

trougao sa Δ_1 i ponovimo postupak sa Δ_1 umesto Δ, itd. Na ovaj način dobijamo niz trouglova Δ_n tako da $\Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots$ i da je obim (dužina) $\partial\Delta_n$ jednaka $2^{-n}l$, gde je l dužina granice Δ, i tako da je

$$|J| \leq 4^n \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)dz \right|, \quad n = 1, 2, \ldots \,. \tag{2.42}$$

Kako je Δ kompaktan, a Δ_n, $n \geq 1$, zatvoreni skupovi, postoji (jedinstvena) tačka z_0 koja pripada svim Δ_n. Dakle, $z_0 \in \Delta$, i otuda $z_0 \in \Omega$ tako da je f diferencijabilna u z_0.

Neka je $\varepsilon > 0$ dato. Tada postoji $r > 0$ tako da važi

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leq \varepsilon|z - z_0|$$

za $|z - z_0| < r$ i postoji n tako da $\Delta_n \subset B(z_0; r)$. Za ove n takođe imamo $|z - z_0| \leq 2^{-n}\, l$ za $z \in \Delta_n$. Otuda je

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leq \varepsilon|z - z_0| \leq \varepsilon 2^{-n}\, l, \quad z \in \Delta_n, \tag{2.43}$$

i stoga

$$M_n := \max\{|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| : z \in \Delta_n\} \leq \varepsilon 2^{-n}\, l. \tag{2.44}$$

Na osnovu Posledice 2.1 (posledice KIT'), obzirom da su $f(z_0)$ i $f'(z_0)$ konstante, sledi prvo

$$\int_{\partial\Delta_n} \big(f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)\big)\, dz = 0,$$

i otuda

$$I_n = \int_{\partial\Delta_n} f(z)dz = \int_{\partial\Delta_n} \big(f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)\big)dz. \tag{2.45}$$

Kako je $|\partial\Delta_n| = 2^{-n}l$, na osnovu nejednakosti za apsolutnu vrednost integrala i formule (2.44), dobija se

$$|I_n| = \left| \int_{\partial\Delta_n} \big(f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)\big)dz \right| \leq M_n\, |\partial\Delta_n| \leq \varepsilon\, 2^{-n} l\, |\partial\Delta_n|,$$

tako da je

$$|I_n| \leq \varepsilon(2^{-n}\, l)^2 = \varepsilon\, l^2\, 4^{-n}.$$

Sada iz (2.42) zaključujemo

$$|J| \leq 4^n\, |I_n| \leq 4^n \varepsilon\, l^2\, 4^{-n} = \varepsilon l^2. \tag{2.46}$$

Otuda

$$J = 0.$$

□

Ponovimo, kompleksna funkcija f je holomorfna na otvorenom skupu Ω ako postoji konačan izvod $f'(z)$ za svako $z \in \Omega$. Klasu holomorfnih funkcija na Ω označavamo sa $\mathcal{H}(\Omega)$.
Na osnovu KIT Δ dokazuje se da su holomorfne funkcije regularno analitičke.

Teorema Koši-Gursa

Teorema 2.12 (Koši-Gursa, H jednako A, T K-Go 1.) *Ako je Ω otvoren skup, tada je*

$$\mathcal{H}(\Omega) = \mathcal{A}(\Omega)\,.$$

Dokaz T K-Go bazira se na Teoremi o postojanju primitivne funkcije.

Teorema 2.13 (Postoji primitivna na krugu-Verzija 1.) *Ako je f holomorfna na $B = B(a;r)$ tada f ima primitivnu funkciju F na B.*

Dokaz koji navodimo može se primeniti i na zvezdaste oblasti. U glavi 7 dokazuje se da ova teorema važi i za prosto-povezane oblasti.
Dokaz: Neka je F na B definisana sa

$$F(z) = \int_{[a,z]} f\, d\zeta,\ z \in B. \tag{2.47}$$

Na osnovu KIT Δ pokazuje se da je $F' = f$ na B.
Fiksirajmo proizvoljnu tačku $z \in B$ i izaberimo $|h|$ dovoljno malo tako da $z+h \in B$. Tada trougao Δ sa temenima a, z i $z+h$ kompaktno pripada B, i na osnovu KIT Δ,

$$\int_{[a,z]} f d\zeta + \int_{[z,z+h]} f d\zeta + \int_{[z+h,a]} f d\zeta = 0\ .$$

Prvi sabirak je $F(z)$, treći sabirak - integral po intervalu $[a, z+h]$ sa znakom minus, tj. $-F(z+h)$, i otuda

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z,z+h]} f d\zeta. \tag{2.48}$$

S druge strane, kako je z dato, integracijom konstantne funkcije $f(z)$ duž segmenta $[z, z+h]$ dobija se

$$f(z) = \frac{1}{h} \int_{[z,z+h]} f(z)\, d\zeta$$

i otuda, s obzirom na (2.48),

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h} \int_{[z,z+h]} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta. \tag{2.49}$$

Sada koristimo neprekidnost funkcije f : za svako ε postoji δ tako da pri $|h| < \delta$ imamo $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$ za svako $\zeta \in [z, z+h]$. Otuda, iz (2.49) sledi

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| < \frac{1}{|h|}\varepsilon|h| = \varepsilon,$$

a to znači da postoji $F'(z) = f(z)$. □

Dokaz T K-Go 1:
Jasno je da je dovoljno dokazati teoremu u slučaju da je Ω disk. Zato pretpostavimo da je f holomorfna na disku B. Na osnovu Teoreme o postojanju primitivne na krugu, f ima primitivnu funkciju F.
Kako je $F' = f$, F ima neprekidan izvod, i otuda $F \in \mathcal{A}(B)$. Iz Tejlorove Teoreme sledi da je F predstavljiva stepenim redom na B, i otuda je $F' = f$ takođe predstavljiva stepenim redom na B; i stoga specijalno da $f \in \mathcal{A}(B)$. □

Za funkciju f kažemo da zadovoljava **svojstvo (C)**: *u nekoj okolini V tačke a, ako je f neprekidna na V i integral te funkcije po granici svakog trougla koji kompaktno pripada V je jednak nuli.* Obično, funkciju koja zadovoljava svojstvo (C) nazivamo holomorfnom u smislu Košija.

Dokaz sledeće propozicije je sličan dokazu Teoreme 2.13 o postojanju primitivne na krugu.

Propozicija 2.3 (Postoji primitivna na krugu-Verzija (C)) *Ako f zadovoljava svojstvo (C) na nekom krugu B tada f ima primitivnu funkciju F na B.*

Teorema 2.14 (KIT lokalna verzija na krugu) *Ako je f holomorfna na $B = B(a;r)$ i γ zatvoren luk u B, tada*

$$I := \int_\gamma f dz = 0.$$

Dokaz: Na osnovu Teoreme 2.13 (o postojanju primitivne na krugu) f ima primitivnu funkciju F na B. Kako je $F' = f$ na B, $I = \int_\gamma f dz = \int_\gamma F' dz$. Otuda je, na osnovu KIT', $I = 0$. □

Iz TKGo sledi da OKIT i OKIF važe i za holomorfne funkcije.

Teorema 2.15 (Opšta Košijeva Integralna Teorema, O KIT) *Ako je G jednostavna oblast i $f \in \mathcal{H}(\overline{G})$, tada je*

$$\int_\Gamma f dz = 0.$$

Teorema 2.16 (Opšta Košijeva Integralna Formula, OKIF) *Ako je G jednostavna oblast i $f \in \mathcal{H}(\overline{G})$, tada je*

$$f(z) = K_\Gamma[f](z), \quad z \in G.$$

Teorema 2.17 (Morerina teorema) *Neka je funkcija f neprekidna u oblasti Ω i*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$$

za proizvoljni trougao $\Delta \Subset \Omega$. Tada je f holomorfna u Ω.

S obzirom da se u literaturi trougao definiše i kao otvoren skup, u pretpostavkama teoreme zahtevali smo da $\Delta \Subset \Omega$. Prema definiciji koju smo uveli (trougao je zatvoren skup), uslov se može zapisati, jednostavno, $\Delta \subset \Omega$.

Dokaz: Neka je $a \in \Omega$ i $B(a;r) \subset \Omega$. Kao u dokazu Teoreme 2.13 funkcija

$$F(z) = \int_{[a,z]} f\, d\zeta,\ z \in B$$

je analitička u B i $F'(z) = f(z)$ u svakoj tački $z \in B$ i stoga je f analitička u Ω. □

Teorema 2.18 *Sledeća tri svojstva su ekvivalentna:*

(R) Funkcija f je $\mathbb{C}$ - diferencijabilna u nekoj okolini V tačke a.

(C) Funkcija f je neprekidna u nekoj okolini V tačke a i integral te funkcije po granici svakog trougla koji kompaktno pripada V je jednak nuli.

(W) Funkcija f se raz lože u stepeni red koji konvergira u nekoj okolini V tačke a.

Ova tri svojstva predstavljaju tri koncepta u razvoju teorije holomorfnih funkcija. Obično, funkciju koja zadovoljava svojstvo (R) nazivamo holomorfnom u smislu Rimana, svojstvo (C) holomorfnom u smislu Košija i svojstvo (W) holomorfnom u smislu Vajerštrasa. Implikacija $(R) \Rightarrow (C)$ je dokazana u Teoremi Košija (KITΔ), $(C) \Rightarrow (W)$ u Teoremi Tejlora (na osnovu Propozicije 2.3 o postojanju primitivne na krugu, verzija (C)) i $(W) \Rightarrow (R)$ u Teoremi 1.8 o holomorfnosti sume stepenog reda.

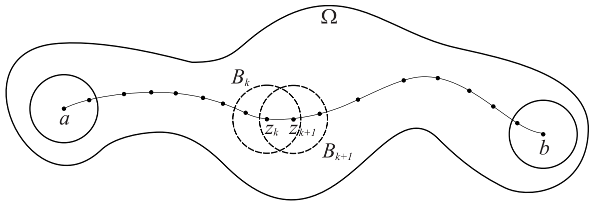
2.1.8 Teorema jedinosti

Definicija 2.10 *Konačna familija krugova $\mathcal{C} = \{B_0, \ldots, B_n\}$, $B_k = B(z_k; r_k)$, naziva se specijalni lanac krugova ako*

$$B_k \ni z_{k+1}, \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

Ako je $z_0 = a$ i $z_n = b$ kažemo da je $\mathcal{C}$ lanac iz a u b.
Ako $\bigcup_{k=0}^{n} B_k$ pripada skupu Ω kažemo da je $\mathcal{C}$ Ω-lanac.

Lema 2.4 (Topološka Lema, L Top 1) *Ako je Ω oblast, a i b proizvoljne tačke iz Ω, tada postoji specijalan Ω - lanac krugova u Ω, koji spaja a i b.*



Slika 2.9: Specijalni lanac krugova

Dokaz: Neka je Ω_0 skup tačaka $\omega \in \Omega$ za koje postoji specijalni lanac u Ω koji spaja tačke a i ω. Jasno, za sve $\omega \in \Omega_0$ postoji krug $B = B(\omega, r) \subset \Omega$, gde je $r > 0$, i otuda $B \subset \Omega_0$ (objasniti!). Slično se pokazuje da je $\Omega \setminus \Omega_0$ otvoren; a kako je Ω_0 neprazan, i Ω oblast, na osnovu topološkog svojstva povezanosti, sledi $\Omega_0 = \Omega$. $\square$

Lema 2.5 (Ponašanje analitičke funkcije u okolini nule) *Neka je $f \in \mathcal{H}(B)$, $B = B(a; r)$, $f(a) = 0$ i f nije identički nula na B. Tada je*

$$f(z) = (z - a)^n \varphi(z), \tag{2.50}$$

gde je $n \geq 1$ prirodan broj, φ holomorfna funkcija na B, i različita od nule na nekom krugu B^1, sa središtem u tački a. Specijalno, f nema nula u $B^1 \setminus \{a\}$.

Dokaz: Na osnovu Tejlorove teoreme, funkciju f razložimo u stepeni red na B. Označimo sa c_k koeficijente u tački a. Kako je $f(a) = 0$, sledi $c_0 = 0$; ali svi koeficijenti ne mogu biti jednaki nuli, jer bi tada bilo $f \equiv 0$ na B. Otuda postoji najmanje n tako da $c_n \neq 0$, za koje razlaganje ima oblik

$$f(z) = \sum_{k=n}^{+\infty} c_k (z - a)^k, \quad z \in B.$$

Označimo sa $\varphi(z) = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} c_k (z - a)^{k-n}$, $z \in B$. Kako je φ holomorfna funkcija na B, sledi (2.50) i kako je $\varphi(a) = c_n \neq 0$, φ je različito od nule u nekom krugu B^1, sa centrom u tački a i otuda f nema nula u $B^1 \setminus \{a\}$. $\square$

Dakle, iz Leme 2.5 sledi da je, pri pretpostavkama Leme 2.5, a *izolovana nula* funkcije f i otuda se dobija:

Lema 2.6 (Lema Jedinosti, L Jed.) *Ako je f holomorfna na krugu $B = B(a; r)$, i a tačka nagomilavanja skupa $\mathcal{E} = \{z \in B : f(z) = 0\}$, tada je f identički jednako nuli na B.*

DOKAZ: Suprotno, pretpostavimo da f nije identički jednako nuli na B. Na osnovu prethodne leme, postoji krug B^1 tako da je f različito od nule u $B^1 \setminus \{a\}$, što je u kontradikciji sa pretpostavkom da je a tačka nagomilavanja skupa $\mathcal{E}$.

Iz pretpostavki Leme jednostavno se izvodi da je $f(a) = 0$.

Teorema 2.19 (Teorema jedinosti, T Jed.) *Ako su f i g holomorfne funkcije u nekoj oblasti Ω, i ako je $f = g$ na skupu $\mathcal{E}$, koji ima tačku nagomilavanja a u Ω, tada $f(z) = g(z)$ za sve $z \in \Omega$.*

Dokaz: Na osnovu pretpostavki funkcija $h = f - g$ je holomorfna u Ω, i a je tačka nagomilavanja skupa $\mathcal{E} = \{z \in \Omega : h(z) = 0\}$. Neka je, dalje, b proizvoljna tačka u Ω. Na osnovu Leme 2.4 (o specijalnom lancu), postoji specijalan lanac krugova $\mathcal{C} = \{B_0, \ldots, B_n\}$ u Ω, koji spaja a i b. Kako je a tačka nagomilavanja skupa $\mathcal{E}$, $h(z) = 0$ za $z \in B_0$.
Ponovnom primenom Leme 2.6 (L Jed), sledi $h = 0$ na B_1. Otuda, sukcesivnom primenom Leme 2.6 dobijamo $h = 0$ na B_n, i specijalno $h(b) = 0$. □

2.1.9 Loranova Teorema

Teorema 2.20 (Loranova Teorema, T Lor.) *Neka je $A = A(a; r, R)$ prsten, i f holomorfna na A. Tada je*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z-a)^k \tag{2.51}$$

gde je $c_k = c_k(\gamma_\rho) = c_k(f; \gamma_\rho)$ i γ_ρ pozitivno orijentisana kružnica sa središtem u tački a, gde je $r < \rho < R$. Specijalno, $c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} f(\zeta)\, d\zeta$.
Red ravnomerno konvergira na kompaktnim podskupovima prstena A.

Dokaz: Ponovimo da je pogodno koristiti oznaku $\Phi_\rho = K_{\gamma_\rho}[f]$.
Neka $z \in A$. Tada postoje r_1 i R_1 tako da je $r < r_1 < |z - a| < R_1 < R$.
Neka je $A_1 = A(a; r_1, R_1)$. Kako se pozitivno orijentisana granica prstena A_1 sastoji od γ_{R_1} i $\gamma_{r_1}^-$, primenom KIF na prsten $A_1 = A(a; r_1, R_1)$ dobijamo

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{R_1}} K(z,\zeta) f(\zeta)\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r_1}} K(z,\zeta) f(\zeta)\, d\zeta. \tag{2.52}$$

Otuda je

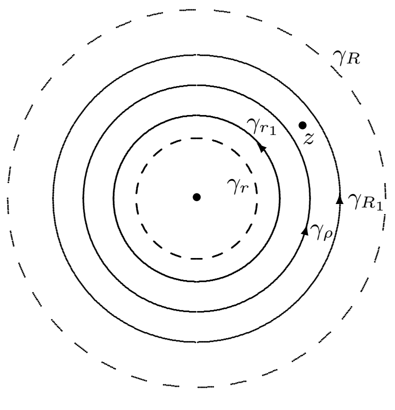
$$f(z) = f_1(z) + F_1(z), \tag{2.53}$$

gde je

$$f_1 = \Phi_{R_1} \quad \text{i} \quad F_1 = -\Phi_{r_1}. \tag{2.54}$$

Otuda, na osnovu Leme o reprodukciji, sledi

$$f_1(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z-a)^k, \tag{2.55}$$



Slika 2.10: Loranova teorema

gde je

$$c_k = c_k(\gamma_{R_1}) = \int\limits_{\gamma_{R_1}} f_k d\varsigma \qquad (2.56)$$

i

$$F_1(z) = \sum_{k=-1}^{-\infty} c_k(z-a)^k, \tag{2.57}$$

gde je

$$c_k = c_k(\gamma_{r_1}) = \int\limits_{\gamma_{r_1}} f_k d\varsigma. \tag{2.58}$$

Ponovimo da je $f_k(\varsigma) = f_k(a, \varsigma) = \dfrac{1}{2\pi i} f(\varsigma)(\varsigma - a)^{-k-1}$.
Kao u dokazu Tejlorove Teoreme sledi i da formule (2.56) i (2.58) važe ako kružnice γ_{R_1} i γ_{r_1} zamenimo proizvoljnim kružnicama γ_ρ, $r < \rho < R$.
Dakle, koeficijenti c_k u formulama (2.55) i (2.57) ne zavise od z i otuda sledi (2.51).
Ravnomerna konvergencija reda sledi na osnovu Napomene u vezi Leme o reprodukciji. □

Propozicija 2.4 *Neka je* $\mathrm{B} = \{|z-1| < 1\}$ *i* g *grana logaritma na oblasti* $\mathbb{C}_1$ *tada je*

$$g(z) = g(1) + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n}, \quad z \in \mathrm{B},$$

gde je $g(1) = 2k\pi\, i$.

Dokaz: Na osnovu Propozicije 1.30 (o izvodu korena i logaritma), sledi prvo $g'(z) = 1/z$. Otuda je $g''(z) = -z^{-2}$, $g'''(z) = (-1) \cdot (-2) \cdot z^{-3}$. Indukcijom se dokazuje

$$g^{(n)}(z) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{z^n}, \quad z \in \mathrm{B}.$$

Otuda specijalno $a_n = \dfrac{g^{(n)}(1)}{n!} = (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$, i na osnovu Tejlorove teoreme, dobija se

$$g(z) = g(1) + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n}, \quad z \in \mathrm{B},$$

gde je $g(1) = 2k\pi\, i$. □

Vežba 2.1.3 *Dokazati prethodnu propoziciju pomoću Tejlorovog razvoja funkcije* $1/z$ *na krugu* U.

DOKAZ: Neka je ln grana logaritma na oblasti $\mathbb{C}_1$ i $f(z) = \ln(1+z)$. Ova funkcija je holomorfna na jediničnom disku. Direktno iz prethodne propozicije sledi

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}, \quad |z| < 1, \tag{2.59}$$

gde je $f(0) = 2k\pi\, i$. Za vežbu, kao u prethodnoj propoziciji, može se pokazati $f'(z) = (1+z)^{-1}$, $f''(z) = -(1+z)^{-2}$, ..., $f^{(n)}(z) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+z)^{-n}$. Otuda je $f'(0) = 1$, $f''(0) = -1$, ..., $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$, i na osnovu Tejlorove teoreme, dobija se (2.59). □

Teorema 2.21 (Parsevalova formula za holomorfne funkcije*) *Ako je*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z-a)^k, \ \ z \in B(a;R), \tag{2.60}$$

i ako je $0 < r < R$, *tada je*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(a + re^{it}) \right|^2 dt \ = \ \sum_{k=0}^{+\infty} |c_k|^2 \, r^{2k}. \tag{2.61}$$

Dokaz: Kako stepeni red (2.60) konvergira na $B(a;R)$, to ravnomerno konvergira na $B(a;r)$ i stoga specijalno red

$$f(a + re^{it}) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k r^k e^{ikt} \tag{2.62}$$

ravnomerno konvergira na $[-\pi, \pi]$.

Otuda, s obzirom da je $I_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} dt = 0$, $k \neq 0$, i $I_0 = 2\pi$ (videti Primer 17, o ortogonalnosti polinoma u daljem tekstu), sledi

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(a + re^{it}) e^{-int} dt = c_n r^n \ \ n = 0, 1, 2, \dots \ . \tag{2.63}$$

Kako i red

$$|f|^2 = f(a + re^{it})\, \overline{f} \ = \ \sum_{k=0}^{+\infty} c_k r^k \ \overline{f} \ e^{ikt} \tag{2.64}$$

ravnomerno konvergira na $[-\pi, \pi]$, integracijom reda član po član, dobija se

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| f(a + re^{it}) \right|^2 dt \ = \ \sum_{k=0}^{+\infty} c_k r^k \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f} \ e^{ikt} \ dt. \tag{2.65}$$

Kako je na osnovu (2.63),

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(a + re^{it})} \ e^{ikt} \ dt = \overline{c_k} \ r^k, \ k = 0, 1, 2, \dots \ , \tag{2.66}$$

iz (2.65) sledi (2.61). □

Teorema 2.22 (Princip Maksimuma Modula, P M M.) *Neka je* Ω *oblast i* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, *i* $\overline{B(a;r)} \subset \Omega$. *Tada je*

$$|f(a)| \leq M = \max_t |f(a + re^{it})|. \tag{2.67}$$

Jednakost važi u (2.67) *ako i samo ako je* f *konstantna funkcija u* Ω.

Dokaz: Ako je $M \leq |f(a)|$, tada je $|f(a + re^{it})| \leq |f(a)|$ za svako t i, na osnovu formule (2.61),

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |c_k|^2 \, r^{2k} \leq |f(a)|^2 \;=\; |c_0|^2.$$

Otuda $c_1 = c_2 = c_3 = \cdots = 0$, i stoga $f(z) = f(a)$ u $B(a;r)$. Kako je Ω povezan, na osnovu Teoreme jedinosti, sledi da je f konstantna funkcija na Ω.
Dakle, ako je $M \leq |f(a)|$, tada je f konstantna funkcija na Ω; ako f nije konstantna funkcija, tada u nejednakosti (2.67) važi stroga nejednakost. □
Napomena: Nejednakost (2.67) može se dokazati i na osnovu (2.61). Videti, takođe, nejednakosti (2.35) i (2.70). Podvucimo da PMM sledi i iz Principa očuvanja oblasti.

2.1.10 Posledice Košijeve nejednakosti*

Košijeva nejednakost

Pretpostavimo da je
a. f holomorfna na $\overline{B}$, gde je $B = B(a;r)$; i označimo $M_\rho = \max\{\,|f(\zeta)| : \zeta \in K_\rho\}$, $0 < \rho \leq r$, gde je K_ρ kružnica sa središtem u tački a. Iz formule za Tejlorove koeficijente c_k i nejednakosti za apsolutnu vrednost integrala dobijamo Košijevu nejednakost

$$|c_k| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M_\rho}{\rho^{k+1}} \, 2\pi\rho = \frac{M_\rho}{\rho^k}, \qquad k \geq 0, \qquad 0 < \rho \leq r. \tag{2.68}$$

Iz nejednakosti (2.68) i poznate formule $k! c_k = f^{(k)}(a)$, sledi

$$|f^{(k)}(a)| \leq \frac{k! \cdot M_\rho}{\rho^k}. \tag{2.69}$$

Označimo M_ρ, kratko, sa M. Specijalno, kada je $k = 0$, dobijamo

$$|f(a)| \leq M. \tag{2.70}$$

Lema 2.7 (L Min) *Ako dodatno pretpostavimo da*
b. f *nema nula na* $\overline{B}$ *i ako uvedemo oznaku* $m = m_r = \min\{\,|f(\zeta)| : \zeta \in K_r\}$, *tada je*

$$|f(a)| \geq m. \tag{2.71}$$

Dokaz: Primeniti nejednakost (2.70) na funkciju $g = 1/f$. □

Teorema 2.23 (Osnovni Stav Algebre) *Ako je n pozitivan ceo broj i $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, gde su $a_0, \ldots, a_{n-1}$ kompleksni brojevi, tada P ima tačno n nula u kompleksnoj ravni.*

Dokaz: Neka je $m = m_r = \min\{\,|P(\zeta)| : \zeta \in T_r\}$, gde je T_r kružnica sa središtem u koordinatnom početku 0. Kao u realnoj analizi, pokazuje se da $m_r \to +\infty$, kada $r \to +\infty$:
Jednostavno se proverava da je $P(z) = z^n \varphi(z)$, gde je $\varphi(z) = 1 + o(1), \quad z \to \infty$, i stoga postoji $r_0 > 0$ tako da je $|\varphi(z)| \geq 1/2$ za $|z| \geq r_0$. Otuda, s obzirom da je $|P(z)| = |z^n||\varphi(z)| = r^n|\varphi(z)|$, sledi da je $|P(z)| \geq r^n/2$ za $|z| \geq r_0$, i stoga $P(z) \to \infty$ kada $z \to \infty$.
Dokažimo prvo da P ima bar jednu nulu:
Suprotno, pretpostavimo da P nema nula. Primenom L Min na krug $\overline{B}_r$, nalazimo $|a_0| \geq m_r$ za svako $r > 0$. Otuda, s obzirom na to da $m_r \to +\infty$, kada $r \to +\infty$; dolazimo do kontradikcije. Dakle, $P(z_1) = 0$ za neko z_1 i stoga postoji polinom Q stepena $n-1$ tako da $P(z) = (z - z_1)Q(z)$. Indukcijom po n dokazuje se teorema.
□

Vežba 2.1.4 *Dokazati Osnovni Stav Algebre pomoću Liuvilove teoreme.*

Uputstvo: Suprotno, pretpostavimo da P nema nula. Tada je funkcija $1/P$ cela i ograničena. □

NAPOMENA: Osnovni stav algebre može se dokazati i na osnovu Teoreme Rušea (videti Podsekciju 6.1.1, Princip argumenta).

Košijeva nejednakost za Loranove koeficijente

Pretpostavimo da je
c. f holomorfna na $\overline{B} \setminus \{a\}$, gde je $B = B(a;r)$; i označimo $M_\rho = \max\{\,|f(\zeta)| : \zeta \in K_\rho\}$, $0 < \rho \leq r$, gde je K_ρ kružnica sa središtem u tački a. Iz formule za Loranove koeficijente c_k i nejednakosti za apsolutnu vrednost integrala dobijamo Košijevu nejednakost

$$|c_k| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M_\rho}{\rho^{k+1}}\, 2\pi\rho = \frac{M_\rho}{\rho^k}, \qquad k \in \mathbb{Z}, \qquad 0 < \rho \leq r. \tag{2.72}$$

Vežba 2.1.5 *Ako je $r > 1 + 2|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|$. Dokazati da je*

$$|P(re^{i\varphi})| \geq |P(0)|, \;\; 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Teorema 2.24 (Princip očuvanja oblasti, P O Ob)** *Neka je f nekonstantna holomorfna funkcija u oblasti Ω. Tada je $\Omega^* = f(\Omega)$ oblast.*

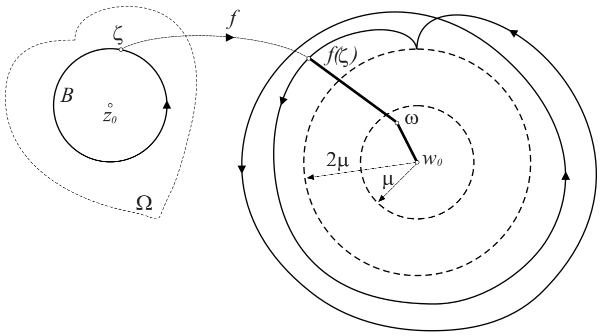
Dokaz: Kako je oblast otvoren i povezan skup treba da dokažemo

1. Ω^* je povezan
2. Ω^* je otvoren

1. Neka $w_1, w_2 \in \Omega^*$. Tada postoje tačke $z_1, z_2 \in \Omega$ tako da je $w_1 = f(z_1)$ i $w_2 = f(z_2)$. Kako je Ω povezan, postoji poligonalna linija P u Ω iz z_1 u z_2. Tada je $f \circ P$ put u Ω^* iz w_1 u w_2; otuda Ω^* je povezan.
2. Neka $w_0 \in \Omega^*$. Tada postoji $z_0 \in \Omega$ tako da je $w_0 = f(z_0)$. Na osnovu Teoreme jedinosti, postoji $r > 0$ tako da $\overline{B} \subset \Omega$, gde je $B = B(z_0; r)$, i $f(z) \neq w_0$ za $z \in \partial B$; neka je

$$\mu = \frac{1}{2} \min\{\, |f(\zeta) - w_o| : \zeta \in K_r\}$$

i neka je $B_1 = B(w_0; \mu)$. Rutinski se pokazuje da je $\mu > 0$. Dokažimo $B_1 \subset \Omega^*$. Pretpostavimo suprotno, da postoji $\omega \in B_1 \setminus \Omega^*$ i neka je $h = f_{-\omega}$, tj. $h(z) = f(z) - \omega$. Tada je $h(z) \neq 0$ za $z \in \overline{B}$, $h(z_0) = f(z_0) - \omega = w_0 - \omega$, tj. $|h(z_0)| < \mu$.



Slika 2.11: Princip očuvanja oblasti

S druge strane, na osnovu nejednakosti trougla $|h(z)| = |f(z)-\omega| = |f(z)-w_0-(\omega-w_0)| \geq |f(z)-w_0| - |\omega - w_0| \geq 2\mu - \mu = \mu$ za $z \in \partial B$. Otuda, na osnovu L Min, sledi $|h(z_0)| = |f(z_0) - \omega| \geq \mu$; što je u kontradikciji sa $|h(z_0)| < \mu$ (tj. sa pretpostavkom $\omega \in B_1 \setminus \Omega^*$). Ostavljamo čitaocu da, na osnovu P O O, dokaže P M M $1-2$ i otuda P Min (videti paragraf 6.1.3). $\square$

NAPOMENA: Na osnovu Teoreme Rušea pokazuje se u Glavi 6 da $B(w_0; 2\mu) \subset \Omega^*$.

Vežba 2.1.6 *Izvesti* PMM *pomoću* POOb.

Vežba 2.1.7 *Ako je f cela funkcija i*

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{M_r}{r^n} < +\infty,\ n \geq 0,$$

tada je f polinom stepena ne većeg od n.

Uputstvo: Za $k > n$ imamo $|c_k| \leq \dfrac{M_r}{r^n} \to 0$, kada $r \to \infty$. Otuda $c_k = 0$, za $k > n$. $\square$

Vežba 2.1.8 *Ako je f cela funkcija i $|f(z)| \leq A|z| + B$, tada je $f(z) = az + b$.*

Uputstvo: Na osnovu nejednakosti $M_r \leq Ar + B$ i Vežbe 2.1.7 dobijamo tvrđenje. $\square$

2.1.11 Opšta Košijeva Integralna Teorema za konturne oblasti

Dokaz O KIT za konturne oblasti može se bazirati na sledećoj Topološkoj Lemi

Lema 2.8 (Topološka Lema, L Top 2.) *Svaka regularna (konturna) oblast može se „podeliti" na*

(a) konačan broj regularnih (konturnih) prosto povezanih oblasti G_k, proizvoljno malog dijametra,

(b) dve prosto povezane regularne (konturne) oblasti.

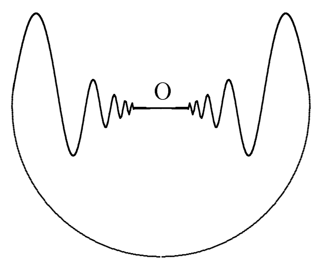
Kompletan dokaz L Top 2 zahteva dosta tehničkih detalja, i nije glavna tema ovog kursa. U glavi 7 dokazuje se Teorema o podeli na elementarne oblasti (Teorema 7.22) iz koje specijalno sledi L Top 2.

U kursevima realne analize samo se pomene da se konturna oblast može „podeliti" pravama paralelnim sa koordinatnim osama na elementarne oblasti. Mada, intuitivno, ovo tvrđenje izgleda jasno (prihvatljivo), Primer 15 (videti sliku 2.12 i takođe Glavu 7, Dodatak B) pokazuje da postoje oblasti koje su konturne, a nisu jednostavne. Ponovimo da za konturne oblasti koristimo i naziv deo-po-deo regularne (nekada kratko: regularne). Ako se granica konturne oblasti sastoji od glatkih kontura, onda kažemo da je oblast sa glatkom granicom.

Primer 15 (Varšavski krug 1) *Neka je* $f(x) = x^3 \sin\frac{1}{x}$ *i* $\gamma(x) = x + if(x)$, $-\frac{1}{\pi} \leq x \leq \frac{1}{\pi}$. *Kontura γ može se dopuniti kružnim lukom tako da dobijemo zatvorenu Žordanovu glatku konturu Γ. Neka je $G = \mathrm{Int}(\Gamma)$. Proveriti da je G oblast sa glatkom granicom, ali da nije jednostavna. Podvucimo, kako je $f'(0) = 0$, to je $\gamma'(0) = 1$.*

S obzirom na ovaj primer, iz Teoreme O KIT za jednostavne oblasti ne sledi Teorema O KIT
za konturne oblasti, jer konturne oblasti nisu podfamilija jednostavnih oblasti.

Sada skicirajmo dokaz O KIT za konturne oblasti pomoću L Top 2. Još jedan dokaz O KIT pomoću zaseka navodi se u rukopisu [Ma 3].



Slika 2.12: Varšavski krug 1

Teorema 2.25 (Opšta Košijeva Integralna Teorema za konturne oblasti) *Ako je G konturna oblast, Γ pozitivno orijentisana granica oblasti G i $f \in \mathcal{H}(\overline{G})$, tada je*

$$\int_\Gamma f dz = 0.$$

Dokaz: Kako je $f \in \mathcal{H}(\overline{G})$, postoji otvoren skup $\Omega \supset \overline{G}$ tako da je $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Otuda postoji $\varepsilon > 0$ tako da za svaki $z \in \overline{G}$ krug $B = B(z; 2\varepsilon) \subset \Omega$.
Na osnovu L Top 2, G se može podeliti na konačan broj disjunktnih konturnih prosto povezanih oblasti G_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, m$, tako da je dijametar svake oblasti G_k manji od ε. Označimo sa Γ_k pozitivno orijentisanu granicu oblasti G_k. Kako svaka G_k pripada nekom disku $B_k \subset \Omega$, na osnovu lokalne verzije KIT, sledi

$$\int_{\Gamma_k} f dz = 0, \tag{2.73}$$

i stoga

$$\sum_{k=1}^{m} \int_{\Gamma_k} f dz = 0. \tag{2.74}$$

Kako je

$$\int_{\Gamma} f dz \; = \; \sum_{k=1}^{m} \int_{\Gamma_k} f dz = 0 \text{ (objasniti!)}, \tag{2.75}$$

iz (2.74), sledi (2.75). □
Kao i u slučaju jednostavne oblasti iz Teoreme 2.25 sledi Opšta Košijeva Integralna Formula za konturne oblasti.

Teorema 2.26 (Opšta Košijeva Integralna Formula za konturne oblasti) *Ako je G konturna oblast, Γ pozitivno orijentisana granica oblasti G i $f \in \mathcal{H}(\overline{G})$, tada je*

$$f(z) = K_\Gamma[f](z), \; z \in G.$$

2.1.12 Direktan dokaz KIT za krug**

Navodimo direktan dokaz KIT za krug koji se ne zasniva na Košijevoj Integralnoj teoremi za prsten. U tom cilju nam je potrebna sledeća Lema koja je specijalan slučaj KIF za krug.

Lema 2.9 (Indeks kružnice, L Ind.) *Neka je γ pozitivno orijentisana kružnica sa centrom u a poluprečnika r. Tada je*

$$K_\gamma(z) = \begin{cases} 1\,, & |z-a| < r \\ 0\,, & |z-a| > r \end{cases} \tag{2.76}$$

Dokaz: Na osnovu Košijeve Integralne Teoreme za izvod KIT'

$$c_k(\gamma) = \frac{1}{2\pi\ i} \int_{\gamma} (\zeta - a)^{-k-1} d\zeta \;=\; 0, \quad k \neq 0,$$

a na osnovu formule za integral duž kružnice

$$c_0(\gamma) = \frac{1}{2\pi\ i} \int_\gamma (\zeta - a)^{-1} d\zeta \ = \ 1.$$

Otuda iz Leme o reprodukciji sledi Lema 2.9 (o Indeksu Kružnice). □
Nije teško izvesti dokaz KIF za krug pomoću Leme 2.9, i sledeće Teoreme (videti Integraciju duž konture).

Teorema 2.27 (Košijeva Integralna Teorema za trougao, KIT Δ 1.) *Pretpostavimo da je Δ zatvoren trougao u otvorenom skupu $\Omega \subset \mathbb{C}$ i $p \in \Omega$. Ako je f neprekidna u Ω i $f \in \mathcal{H}(\Omega \backslash \{p\})$, tada je*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz \ = 0. \tag{2.77}$$

Iz pretpostavki ove teoreme sledi da je $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, tj. da izuzeta tačka nije stvarno izuzeta (videti Teoremu 2.33). Ipak, gornja formulacija može se koristiti za dokaz Košijeve formule, ako želimo da izbegnemo geometrijska razmatranja (verziju Grinove teoreme za prsten, koja se bazira na podeli prstena na elementarne domene). Na osnovu KIT Δ, jednostavno se dokazuje KIT Δ 1 (videti Integraciju duž konture u Glavi 7). Ako $p \notin \Delta$, relacija (2.77) sledi iz KIT Δ.

Pretpostavimo da je p jedno teme Δ, npr. $p = a$. Ako su a, b i c kolinearni, tada je jasno da (2.77) važi za bilo koju neprekidnu funkciju f.
Izaberimo $z \in [a, b]$ i $\omega \in [a, c]$ i primetimo da je integral od f po $\partial\Delta$ suma integrala po granicama trouglova $\{a, z, \omega\}$, $\{z, b, \omega\}$ i $\{b, c, \omega\}$. Poslednja dva integrala su nula, jer ovi trouglovi ne sadrže p. Otuda integral po $\partial\Delta$ je suma integrala po $[a, z]$, $[z, \omega]$ i $[\omega, a]$, i kako ovi intervali mogu biti proizvoljno male dužine, i kako je funkcija $|f|$ ograničena, ponovo dobijamo (2.77).
Ako je p proizvoljna tačka u Δ, primeniti prethodni rezultat na $\{a, b, p\}$, $\{b, c, p\}$ i $\{c, a, p\}$.
Interesantno je podvući sledeće. Ako čitalac koristi elementarnu geometriju (podelu prstena na elementarne oblasti), može se izvesti jednostavan dokaz Leme 2.9 (dokaz na osnovu KIT za prsten).
Dokaz: Neka je $B = B(a, r)$ i $z \in B$. Tada postoji $\rho > 0$ tako da $\overline{B_0} \subset B$, gde je $B_0 = B(z; \rho)$. Neka je $V = B \backslash \overline{B_0}$ i $\gamma_0 = \gamma_\rho$ pozitivno orijentisana kružnica sa središtem u z poluprečnika ρ.
Na osnovu KIT za prsten,

$$\int_\gamma \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta \ = \int_{\gamma_0} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta \ = \ 2\,\pi i. \tag{2.78}$$

Podvucimo da se integral duž γ_0 u formuli (2.78) računa jednostavno pomoću parametrizacije kružnice γ_0. □

Koristeći KIT Δ1 umesto KIT Δ sledeća teorema se dokazuje kao Teorema o postojanju primitivne-Verzija 1, Teorema 2.13.

Teorema 2.28 (Postoji primitivna-Verzija 2.) *Pretpostavimo da je $\Omega \subset \mathbb{C}$ konveksan, otvoren skup, $p \in \Omega$, f neprekidna u Ω, i $f \in \mathcal{H}(\Omega \backslash \{p\})$. Tada je $f = F'$ za neko $F \in \mathcal{H}(\Omega)$.*

Kao i u slučaju Teorema o postojanju primitivne-Verzija 1, dokaz se može primeniti i na zvezdaste oblast.
Koristeći ovu verziju Teoreme o postojanju primitivne i kompleksnu verziju Njutn-Lajbnicove formule dokazuje se:

Teorema 2.29 (Košijeva teorema za konveksne skupove) *Pretpostavimo da je $\Omega \subset \mathbb{C}$ konveksan, otvoren skup, $p \in \Omega$, f neprekidna u Ω, i $f \in \mathcal{H}(\Omega \backslash \{p\})$. Tada je*

$$\int_\gamma f(z)dz \;=\; 0, \tag{2.79}$$

za svaki zatvoren put u Ω.

Kada hoćemo da naglasimo da se ova teorema odnosi na ispuštenu tačku, onda je nazivamo Košijeva teorema za konveksne skupove sa ispuštenom tačkom.

Teorema 2.30 (Košijeva Formula za konveksne skupove) *Pretpostavimo da je γ zatvoren luk u konveksnom otvorenom skupu Ω, i $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Ako $z \in \Omega$ i $z \notin \gamma^*$, tada*

$$f(z) \cdot K_\gamma(z) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{2.80}$$

Najinteresantniji slučaj je, naravno, kada je $K_\gamma(z) = 1$, i specijalno kada je γ prost luk.
Dokaz: Dokaz se zasniva na primeni Košijeve teoreme za konveksne skupove na funkciju h, definisanu sa:

$$h(\zeta) = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \quad \text{za} \;\; \zeta \in \Omega \backslash \{z\} \quad \text{i} \quad h(\zeta) = f'(z) \;\; \text{za} \;\; \zeta = z.$$

Podvucimo da je h neprekidna na Ω i holomorfna na $\Omega \setminus \{z\}$. Otuda, na osnovu Košijeve teoreme za konveksne skupove (verzija sa ispuštenom tačkom), sledi $\int_\gamma h(\zeta)d\zeta = 0$ i stoga sledi formula (2.80). □
Napomena: Ovaj dokaz izbegava geometrijska razmatranja tj. podelu oblasti na elementarne oblasti i između ostalog bazira se na pojmu indeksa K_γ luka γ u odnosu na tačku. Indeks igra važnu ulogu u daljem razvoju teorije: na primer u strogim dokazima Košijeve integralne formule za regularne oblasti (videti glavu 7). Podvucimo da se dokaz Opšte Košijeve integralne teoreme za regularne oblasti (u ovoj glavi) bazira na primeni Leme 2.8 (LTop2), koja će biti dokazana u glavi 7.

2.1.13 Napomene o KIT za oblasti sa neprekidnom granicom**

U ovoj podsekciji skiciramo dokaze verzija KIT za oblasti čija se granica sastoji od konačnog broja neprekidnih krivih; S obzirom da se na Matematičkom Fakultetu u Beogradu koristi udžbenik od Šabata [Ša] pokušaćemo da skiciramo kako autor vidi pristup iz [Ša]; za precizniji pristup videti glavu 7.

Pojam integrala može se definisati i duž puta (videti glavu 7, Definicija 7.5); sledeća teorema daje motivaciju.

Teorema 2.31 (Košijeva Integralna Teorema za primitivnu, KIT'2) *Pretpostavimo da je $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ i da f ima primitivnu F u Ω. Ako je γ kontura (opštije luk) u Ω, tada je*

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = F(b) - F(a), \tag{2.81}$$

gde su a i b respektivno početna i krajnja tačka kontura (opštije luk) γ .

Na osnovu teoreme o postojanju primitivne na krugu - Verzija 1, ova teorema specijalno važi ako je Ω krug.
Dokaz: Neka je $[\alpha, \beta]$ parametarski interval krive γ i $h = F \circ \gamma$.
Neka je prvo γ neprekidno-diferencijabilan luk. Tada je, na osnovu Leme 1.1, $h'(t) = F'(\gamma(t))\gamma'(t)$, tako da je

$$I = \int\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{\gamma} F'(z)dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} h'(t)dt.$$

Otuda, koristeći Lemu 2.2 (Njutn-Lajbnicovu formulu), dobijamo $I = h(\beta) - h(\alpha) = F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(\alpha)) = F(b) - F(a)$. U opštem slučaju može se podeliti γ na konačan broj neprekidno-diferencijabilnih puteva $\gamma_k : [s_k, s_{k+1}] \to \mathbb{C}$ ($s_0 = \alpha < s_1 < s_2 < \cdots < s_n = \beta$)). Prema dokazanom,

$$I_k = \int\limits_{\gamma_k} f(z)dz = h(s_{k+1}) - h(s_k),$$

i sabiranjem dobija se (2.81). □

Neka su u oblasti Ω zadati funkcija f i put $\gamma : I \to \Omega$; neka je $a = \gamma(0)$ i $b = \gamma(1)$.

Ako funkcija f ima primitivnu funkciju u Ω definišimo $I = \int\limits_{\gamma} f\, dz = F(b) - F(a)$.
Teorema 2.31 pokazuje da je ova definicija saglasna sa definicijom integrala u Glavi 2.

Pretpostavimo da je f holomorfna na Ω. Podelimo put γ na puteve γ_k tako da trag svakog puta γ_k pripada nekom krugu $B_k \subset \Omega$. Kako funkcija f ima primitivnu funkciju na B_k može se definisati $I_k = \int\limits_{\gamma_k} f\, dz$. Definišimo $I = \int\limits_{\gamma} f\, dz = \sum I_k$.

Vežba 2.1.9 *Pokazati da prethodna definicija ne zavisi od podele puta γ, i da se može preneti i na krive.*

Integral se može definisati, na sličan način, i pomoću pojma primitivne funkcije za funkciju f duž puta (za definiciju i dokaz sledeće teoreme videti glavu 7).

Definicija A. [Definicija7.3] Neka su u oblasti Ω zadati funkcija f i put $\gamma : I \to \Omega$. Funkcija ϕ naziva se primitivna funkcija za funkciju f duž puta γ ako:

1. ϕ je neprekidna na I,

2. za svaku tačku $t_0 \in I$ postoji otvoren krug B, sa središtem u tački $z_0 = \gamma(t_0)$, na kome f ima primitivnu funkciju F_B, tako da $\phi(t) = F_B(\gamma(t))$ za svako t u nekoj okolini I_{t_0} tačke t_0.

Teorema A. [Postoji primitivna funkcija duž puta, Teorema 7.8] Neka je f holomorfna u oblasti Ω i neka je $\gamma : I \to \Omega$ put. Tada postoji primitivna funkcija Φ za f duž γ i određena je do na konstantu.

Definicija B. [Integral duž puta, Definicija 7.5] Neka je zadat put γ, funkcija f neprekidna na tragu γ^* i neka f ima primitivnu funkciju Φ duž γ. Definišimo integral funkcije f duž puta γ kao priraštaj primitivne funkcije duž γ, tj.

(1) $I = \int\limits_{\gamma} f\,dz = \Phi(1) - \Phi(0).$

Podvucimo da je put opštiji pojam od luka. Npr. postoji put koji nema izvod ni u jednoj tački; ili npr. (*Peanov put*) put čiji je trag kvadrat $I^2 = [0,1] \times [0,1]$. Dakle, u oštem slučaju ako je γ put Defincija 2.1, Glava 2, nema smisla jer zahteva integrablilnost funkcije $f \circ \gamma\,\gamma'$.

Definicija B se bazira na priraštaju primitivne funkcije. Na primer, u Definicija B, koja se bazira na Teoremi 2.31, integral zavisi od početne i krajnje tačke puta i ne zavisi od toga da li je put diferencijabilan (opštije rektificibilan) ili vrlo komplikovan skup. U opštem slučaju ako put nije prostopovezan integral zavisi od homotopske klase.

KIT- Homotopija

Put γ_0 je homotopan putu γ_1 u oblasti Ω, ako postoji neprekidna „deformacija" u Ω, koja put γ_0 prevodi u put γ_1. Za strogu definiciju homotopije videti glavu 7 ili npr. [Ka-Ad] i [Zo].

Definicija C. [Definicija 7.2] *Dva puta γ_0 i γ_1 sa zajedničkom početnom tačkom a i krajnjom tačkom b nazivaju se homotopni u X ako postoji neprekidno preslikavanje H iz I^2 u X tako da*
$H(0,t) = a$, $H(1,t) = b$, $t \in I$;
$\gamma_0(s) = H(s,0)$ i $\gamma_1(s) = H(s,1)$, $s \in I$.
Dva zatvorena puta γ_0 i γ_1 nazivamo homotopnim u X ako postoji neprekidno preslikavanje H iz I^2 u X tako da je $\gamma_0(s) = H(s,0)$ i $\gamma_1(s) = H(s,1)$, $s \in I$.

U klasi zatvorenih puteva izdvaja se klasa homotopnih nuli. Ako je u prethodnoj definiciji $\gamma = \gamma_0$ i $\gamma_1 = \mathrm{const}$ kaže se da je zatvoren put γ homotopan nuli u X

(to znači da se γ neprekidno deformiše u X u tačku).
Ako promenljivu t shvatimo kao vreme, saglasno definiciji, u svakom momentu t imamo put $H(s,t) = \gamma_t$. Promena puta u vremenu je takva da se u momentu $t = 0$ poklapa sa putem γ_0, a momentu $t = 1$ poklapa sa putem γ_1.
Ako su putevi γ_0 i γ_1 sa zajedničkom početnom tačkom a i krajnjom tačkom b, familiju puteva γ_t, $0 \leq t \leq 1$, nazivamo jednoparametarska familija puteva koja spaja tačka a i b u X.
Ako su γ_0 i γ_1 zatvoreni putevi, familiju puteva γ_t, $0 \leq t \leq 1$, nazivamo jednoparametarska familija puteva koja "deformiše" zatvoren put γ_0 u zatvoren put γ_1.

U izlaganjima KIT, koja slede klasičnu liniju ne spominje se indeks, tj. broj obilazaka puta oko tačke, i vezi sa tim homologija, niti se pojam indeksa eksplicitno koristi. U literaturi se pojavljuju različite definicije prosto povezane oblasti (za detalje videti Glavu 7). Navodimo neke:

1. oblast Ω je prosto-povezana ako je $\partial\Omega$ povezan u $\overline{\mathbb{C}}$ (pomoću granice)
2. Ω je prosto-povezana ako je $\overline{\mathbb{C}}\backslash\Omega$ povezan (pomoću komplementa)
3. oblast Ω je prosto-povezana u $\overline{\mathbb{C}}$ ako je svaka zatvorena putanja u Ω homotopna tački u Ω (homotopska).

Teorema B. *Prethodne definicije prostopovezane oblasti 1, 2 i 3 su ekvivalentne.*

Prve dve definicije navode se npr. u udžbenicima Šabat [Ša] i Ahlfors [Ah] respektivno; dokaz da su ove definicije ekvivalentne dat je u Glavi 7 (obično se navodi u poslediplomskim kursevima [Ah], [Be-G], [Ru], [Co]).
Za dokaz KIT za prosto povezane oblasti pogodna je treća definicija, ali je prva definicija operativnija, zapravo pogodnije je nju koristiti prilikom proveravanja da li je neka oblast prosto povezana.

Oblasti U, $\mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{C}}$, H, Π^+, pojasevi Π_α, C_α, Varšavski krug i oblast na slici 2.15 su prosto povezane oblasti. Ako je γ prost (koji nije zatvoren) Žordanov put, oblast $\overline{\mathbb{C}} \setminus \gamma^*$ je prosto povezana oblast; a ako je dodatno γ prost zatvoren put, $\mathrm{Int}(\gamma)$ je prosto-povezana oblast.

Oblasti U', $\mathbb{C}^*$ i prsten su dvostruko povezane oblasti.

Dokaz sledeće teoreme se može izvesti kao u Analizi 2 dokaz odgovarajućeg stava da krivolinijski integral ne zavisi od puta.

Teorema C [Teorema 7.9]. *Neka su ispunjeni sledeći uslovi*

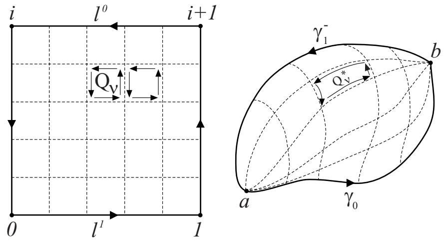
(a) f je holomorfna na oblasti Ω

(b) putevi γ_0 i γ_1 su homotopni u Ω kao putevi sa zajedničkim krajevima ili kao zatvoreni putevi.

Tada je

(1) $\int\limits_{\gamma_0} f\,dz = \int\limits_{\gamma_1} f\,dz.$

Uputstvo: Videti Vežbu 7.2.1. Ponovimo $I^2 = [0,1] \times [0,1]$. Neka je homotopija definisana pomoću preslikavanja $H : I^2 \to \Omega$. Neka je Q_ν mreža kvadrata na I^2 tako da svako $Q_\nu^* = H(Q_\nu)$ pripada nekom krugu u Ω. Označimo sa l_ν pozitivno orijentisanu granicu kvadrata Q_ν, a sa ℓ^0 i ℓ^1 respektivno orijentisane segmente



Slika 2.13: Integral - Homotopija

$[0,1]$ i $[1+i,i]$ i neka je $\Gamma_\nu = H \circ l_\nu$.
Tada je $\int\limits_{\Gamma_\nu} fdz = 0$; i kako je $\gamma_0 = H \circ \ell^0$ i $\gamma_1^- = H \circ \ell^1$, sledi $\sum \Gamma_\nu = \gamma_0 + \gamma_1^-$ i stoga
$0 = \sum \int\limits_{\Gamma_\nu} fdz = \int\limits_{\gamma_0} fdz + \int\limits_{\gamma_1^-} fdz.$ $\square$

Teorema D (KIT za prosto povezane oblasti, Teorema 7.15). *Neka je Ω prosto povezana oblast u $\mathbb{C}$, $f \in H(\Omega)$ i γ zatvoren put u Ω. Tada je*

$$I = \int_\gamma fdz = 0.$$

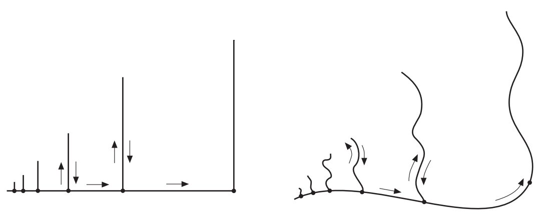
Dokaz KIT za prosto povezane oblasti može se izvesti pomoću (na primer, videti [Ša]):

1. treće navedene definicije (kako je oblast Ω prosto povezana, γ je homotopna tački u Ω)

2. Teoreme C: ako je funkcija holomorfna u oblasti Ω, pri homotopnoj deformaciji konture integrala se ne menja.

Preciznije, neka je $I_t = \int\limits_{\gamma_t} f\,dz$. Kako je oblast Ω prosto povezana, γ je homotopna tačka, npr. z_0, u Ω. Dakle, postoji jednoparametarska familija zatvorenih puteva, γ_t, $0 \le t \le 1$, u Ω, tako da je $\gamma = \gamma_0$ i $\gamma_1(t) = z_0$, $t \in I$.

Kako je Ω, postoji krug B sa središtem u z_0 koji pripada Ω i otuda f ima primitivnu funkciju na B. Kako za t dovoljno blizu 1 putevi γ_t pripadaju B, sledi da je $I_t = 0$. Otuda, na osnovu Teoreme C, $I = I_0 = I_t = 0$. $\square$

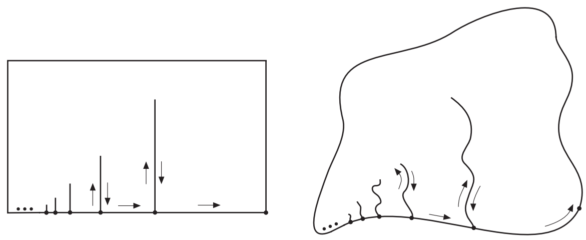


Slika 2.14: Topološki češalj

Napomena: Čitalac može proveriti da je $I_1 = 0$ (objasniti !) i otuda, na osnovu Teoreme C, direktno zaključiti da je $I = I_0 = I_1 = 0$.

Neka je $l_n = [\frac{1}{n}, \frac{1+i}{n}]$, $n \geq 1$, i $A = (\cup_{n=1}^{+\infty} l_n) \cup [0,1]$. Ako je trag puta γ neprekidna slika skupa A, put γ nazivamo ***topološki češalj*** (videti sliku 2.14).

Na slici 2.15 prikazane su dve prosto povezane oblasti čija je granica topološki češalj; i stoga to su oblasti sa neprekidnom granicom.



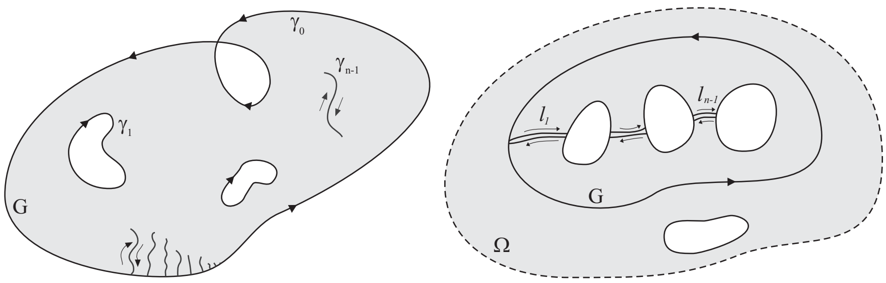
Slika 2.15: Oblast čija je granica topološki češalj

Teorema 2.32 (KIT za oblasti sa neprekidnom granicom) *Neka je Ω oblast u $\mathbb{C}$ i neka su ispunjeni sledeći uslovi:*

1. $f \in H(\Omega)$
2. *oblast G kompaktno pripada oblasti Ω i granica oblasti G sastoji se od konačnog broja neprekidnih krivih. Tada je*

$$\int_{\partial G} f dz = 0,$$

gde je ∂G pozitivno orjentisana granica oblasti G.



Slika 2.16: Oblasti sa neprekidnom granicom

Postoje jasne teškoće da su u kursu (koji nije poslediplomskog karaktera) precizno definiše pozitivno orijentisana granica oblasti G u prethodnoj teoremi i zatim

da se dokaže da je $\int_{\partial G} f dz = 0$. Na primer, ∂G je skup (videti sliku 2.16) i potrebno je jasno opisati parametrizaciju skupa ∂G, kao traga nekog puta (opštije, cikla).
Može se uvesti sledeća definicija.
Kažemo da je cikl Γ *granica oblasti* G *akko* $n(\Gamma, a) = \mathrm{Ind}_\Gamma(a)$ *jednako je* 1 *za sve tačke* $a \in G$ *i* 0 *za sve tačke koje ne pripadaju* $\overline{G}$.
Čitalac može pokušati da razjasni ovu definiciju i dokaže odgovarajuće rezultate.
Ideja dokaza: Pretpostavimo da se „pozitivno orijentisana" granica oblasti G sastoji od dve konture γ_0 i γ_1. Može se pokazati da postoje tačke a i b tako da je $|a - b| = dist(\gamma_0^*, \gamma_1^*)$ i da interval $l = [a, b]$ pripada oblasti G, sem krajeva. Konture γ_0, l, γ_1 i l^- mogu se tako nadovezati da formiraju zatvorenu konturu γ. Granica oblasti $G_1 = G\backslash[a, b]$ je povezana, pa je G_1 prosto povezana (u smislu prve definicije) i dokaz sledi na osnovu Teoreme D (KIT za prosto povezane oblasti) ako se pozovemo na Teoremu A (koja tvrdi da su prva i treća definicije ekvivalentne).

Napomena: U [Ša] u vezi dokaza prethodne teoreme piše: „Očigledno je da je γ homotopno nuli u Ω, tj. da su γ_0 i γ_1 homotopne u Ω i da se dokaz može proširiti za višestruko povezane oblast pomoću indukcije po broju komponenti, mada bi formalan dokaz ovog tvrđenja bio glomazan".
Interesantno je da dokaz pomoću homotopije privlači studente i predavače, mada postoje jasne teškoće da se postavi na stroge osnove.
Na primer, neprekidna granica se može sastojati od „češljeva", varšavskih krugova, itd. i onda je teško kontstrusati neprekidnu „deformaciju" u Ω. Predlažemo neke ideje da se ovaj postupak stavi na jasne osnove.
Na primer, ako put γ pripada oblasti u kojoj je funkcija holomorfna, može se zameniti sa specijalnom poligonalnom linijom, koja je homotopnim sa γ, ali onda je, po mišljenu autora, jednostavnije koristiti mrežu pravougaonika i u vezi sa tim indeks (videti homološku verziju u glavi 7).

Napomenimo da se strog dokaz opštijeg rezultata, da su γ_0 i γ_1 homotopne u $\bar{G}$, može bazirati na primeni Rimanove (za dokaz Rimanove teoreme videti glavu 6, kao i [Ah], [Be-G], [Ru] i [Ma]) i Karateodorijeve teoreme (za dokaze ove teoreme videti sekciju 7.4.1), koje se mogu izložiti na poslediplomskom kursu. Preciznije:

Propozicija 2.5 *Neka se granica ograničene 2-struko povezane oblasti* G *sastoji od dve neprekidne zatvorene krive* γ_0 *i* γ_1. *Tada se krive* γ_0 *i* γ_1 *mogu orjentisati tako da su homotopne u* $\bar{G}$*; preciznije kriva* γ_0 *je homotopna sa* γ_1 *ili* γ_1^- *u* $\bar{G}$.

Uputstvo: Na osnovu Rimanove teoreme postoji $0 < r < 1$ i konformno preslikavanje ϕ prstena $A = A(r, 1) = \{z : r < |z| < 1\}$ na oblast G; na osnovu Karateodorijeve teoreme ϕ se neprekidno proširuje na $\overline{A}$.

2.2 Izolovani singulariteti

U ovoj sekciji počinjemo izučavanje tačaka u kojima funkcija nije holomorfna. Razmotrimo prvo jednostavan tip takvih tačaka.

Definicija 2.11 *Tačka $a \in \overline{\mathbb{C}}$ naziva se izolovana singularna tačka funkcije f ako postoji probušena okolina tačke a (tj. skup $B'(a;r)$, ako je a konačna; ili skup E_R, ako $a = \infty$) u kojoj je funkcija f holomorfna.*

Ponovimo, $a \in \mathbb{C}$ (konačan broj) je izolovana singularna tačka funkcije f ako postoji probušena okolina (degenerisani prsten) $V = B'(a;r) = \{0 < |z-a| < r\}$ tako da $f \in \mathcal{H}(V)$; $a = \infty$ je izolovana singularna tačka funkcije f ako postoji probušena okolina ∞, $V_1 = E_R = \{z : R < |z| < +\infty\}$ tako da $f \in \mathcal{H}(V_1)$ (tj. ako je funkcija f holomorfna u probušenoj okolini beskonačno daleke tačke).

U zavisnosti od ponašanja $f(z)$ kada z teži singularnoj tački a razlikujemo tri tipa singularnih tačaka.

Definicija 2.12 *Izolovana singularna tačka a funkcije f naziva se*

(a) *otklonjiv singularitet, ako postoji konačan* $\lim_{z\to a} f(z) = A \in \mathbb{C}$

(b) *pol, ako je* $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$

(c) *esencijalni singularitet, ako nije ni (a) ni (b).*

Primeri:

a. Funkcija $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$, $z \neq 0$ ima otklonjiv singularitet u 0.

Rešenje: Na osnovu definicije otklonjivog singulariteta dovoljno je proveriti da $\lim_{z\to 0} \dfrac{\sin z}{z} = 1$. Ovo je jednostavno pokazati koristeći Loranov razvoj f oko 0, koji je stepeni red. Iz Tejlorovog razvoja funkcije sin oko 0 sledi prvo:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{2.82}$$

tj.

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots, \quad z \neq 0$$

i otuda, pošto je suma stepenog reda neprekidna funkcija (tj. popularno rečeno limes može da „uđe” pod sumu), sledi $\lim_{z\to 0} \dfrac{\sin z}{z} = 1$. □

b. Funkcija $f(z) = 1/z^n$, gde je n ceo pozitivan broj, ima pol u tački 0.

c. Neka je $J(z) = \frac{1}{z}$. Funkcija $e \circ J$ ima esencijalni singularitet u 0.

Rešenje: Kada $z = x$ teži nuli po realnoj osi desna granična vrednost je $+\infty$, a leva nula; ako $z = iy$ teži nuli po imaginarnoj osi granična vrednost ne postoji. □

Mada, sledeća propozicija sledi iz Teoreme o otklonjivom singularitetu, navodimo direktan dokaz, koji je neposredna posledica Teoreme o postojanju primitivne funkcije-Verzija 2.

Propozicija 2.6 (Otklonjiv singularitet)** *Ako je tačka a otklonjiv singularitet funkcije f, tada je f holomorfna u a(preciznije, funkcija f se može dodefinisati u a tako da je holomorfna u a) .*

Dokaz: Pretpostavimo da funkcija f ima otklonjiv singularitet u tački a. Tada postoji $r > 0$ tako da je funkcija f holomorfna u probušenom disku $B' = \{0 < |z-a| < r\}$, sa središtem u tački a, i postoji $\lim_{z\to a} f(z) = A$. Definišimo funkciju $\tilde{f}$ (dodefinisati f u tački a) sa

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & z \in B', \\ A, & z = a. \end{cases}$$

Funkcija $\tilde{f}$ je neprekidna u a i otuda $\tilde{f}$ je neprekidna na krugu $B(a,r)$. Kako je f holomorfna na $B(a,r)\setminus\{a\}$, na osnovu Teoreme 2.28 o primitivnoj funkciji-Verzija 2, postoji funkcija F koja je primitivna za $\tilde{f}$ na $B(a,r)$, tj. postoji F takvo da je $F' = \tilde{f}$ na $B(a,r)$. Ovo znači da je $F \in \mathcal{H}(B(a,r))$, a otuda, iz lokalne teorije, sledi da je $F' = \tilde{f}$ takođe holomorfna na $B(a,r)$; teoreme koje se odnose na teoriju holomorfnih funkcija na krugu pripadaju lokalnoj teoriji. $\Box$

Teorema 2.33 (Otklonjiv singularitet, Otk Sing.) *Neka je $f \in \mathcal{H}(\Omega\setminus\{a\})$ i neka je $|f|$ ograničena na $B' = B'(a;r)$, za neko $r > 0$. Tada f ima otklonjiv singularitet u a.*

Dokaz: Definišimo $h(a) = 0$ i $h(z) = (z-a)^2 f(z)$. Iz pretpostavke da je $|f|$ ograničena jednostavno sledi $h'(a) = 0$. Kako je h jasno diferencijabilna u drugim tačkama Ω, nalazimo $h \in \mathcal{H}(\Omega)$, tako da

$$h(z) = \sum_{k=2}^{+\infty} c_k (z-a)^k, \quad z \in B = B(a;r).$$

Ako definišemo $f(a) = c_2$, dobijamo željeno proširenje, $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_{k+2}(z-a)^k$, $z \in B = B(a,r)$. $\Box$

Navedimo još jedan dokaz prethodne teoreme koji obično nalazimo u literaturi. Dokaz prethodne Teoreme pomoću Košijeve nejednakosti:

Dokaz: Neka je $|f|$ ograničena na $B' = B'(a;r)$ sa M i neka su c_k koeficijenti Loranovog razvoja funkcije f oko a. Za proizvoljno ρ, $0 < \rho < r$, na osnovu Košijeve nejednakosti,

$|c_k| \le M/\rho^k$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$. Ako je $k < 0$, desna strana teži nuli kada $\rho \to 0$, a leva strana ne zavisi od ρ. Otuda, $c_k = 0$ za $k < 0$, i glavni deo Loranovog reda identički je jednak nuli. $\Box$

Ako je funkcija F definisana i $\mathbb{R}-$diferencijabilna u nekoj šupljoj okolini tačke a i ako postoji konačna granična vrednost $\lim_{z\to a} F = A$ i ako se definiše $F(a) = A$, funkcija F je neprekidna, ali u opštem slučaju nije diferencijabilna u a. Za funkcije f holomorfne u $B'(a;r)$ iz pretpostvke da su samo ograničene u nekoj šupljoj okolini a sledi da postoji konačna granična vrednost $\lim_{z\to a} f = A$ i ako se definiše $f(a) = A$ dobija se diferencijabilna (analitička) funkcija u a. Ovo opravdava naziv „otklonjiv singularitet". U daljem smatramo takve tačke *regularnim*, a ne singularnim tačkama.

Iz dokazane teoreme sledi da je a singularna tačka f (holomorfne u nekoj šupljoj okolini a) ako i samo ako je f neograničena u svakoj okolini a.

Postoji karakterizacija singularnih tačaka pomoću Loranovog reda. Pretpostavimo da je $a \in \mathbb{C}$ (konačna tačka) i funkcija f ima izolovan singularitet u a. Dakle, $f \in \mathcal{H}(B')$, gde je $B' = \{0 < |z-a| < r\}$, degenerisan prsten. Tada se na osnovu Loranove teoreme funkcija f može razviti po stepenima od $(z-a)$.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n, \quad z \in B'. \tag{2.83}$$

Deo reda sa negativnim stepenima naziva se glavni deo

$$F_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n, \tag{2.84}$$

a deo sa nenegativnim stepenima

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n, \tag{2.85}$$

naziva se regularni deo Loranovog reda; pogodno je da se definiše $f_2(w) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_{-k} w^k$; tada je $F_1(z) = f_2(\frac{1}{z-a})$, tj. $F_1 = f_2 \circ K_a$.

Teorema 2.34 *[O karakterizaciji izolovanih singulariteta] Neka funkcija f ima u a izolovan singularitet. Tada važe sledeća tvrđenja*

1. *Singularna tačka a je otklonjiv singularitet akko Loranov razvoj f u okolini tačke a ne sadrži glavni deo.*
2. *Izolovana singularna tačka a je pol akko glavni deo Loranovog razvoja f oko tačke a ima konačan (pozitivan) broj različitih od nule članova (konačna suma)*
3. *a je esencijalni singularitet akko glavni deo Loranovog razvoja u okolini tačke a ima beskonačno članova.*

Dokaz:

1. $\Rightarrow$: Pretpostavimo da $f \in \mathcal{H}(B'(a;r))$ i ima otklonjiv singularitet u tački a. Na osnovu Propozicije 2.6 (otk sing), f se može dodefinisati u a tako da $f \in \mathcal{H}(B(a;r))$ (koristimo istu oznaku za dodefinisanu funkciju) i otuda f se može razviti u Tejlorov red, pa Loranov razvoj nema glavni deo.
   $\Leftarrow$: Neka je u šupljoj okolini tačke a funkcija f predstavljena Loranovim razvojem (2.83), bez glavnog dela. Dakle, (2.83) je stepeni red i otuda na osnovu Posledice Abelove teoreme postoji konačan
   $$\lim_{z \to a} f(z) = c_0.$$

2. $\Rightarrow$: Ako je a pol, tada $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$. Otuda postoji B', šuplja okolina tačke a, u kojoj je f holomorfna i različita od nule. Definišimo funkciju g:

$$g(z) = \begin{cases} 1/f(z)\,, & z \in B' \\ 0\,, & z = a \end{cases}$$

Kako je $\lim\limits_{z\to a} g(z) = 0$ tačka a je otklonjiv singularitet, g je holomorfna na B pa razvijajući funkciju g u Tejlorov red dobijamo tvrđenje;

Na osnovu Leme o lokalnom ponašanju u okolini nule postoji prirodan broj m tako da $g(z) = (z-a)^m \psi(z)$, gde je ψ holomorfna i različita od nule na B; otuda je

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^m}, \tag{2.86}$$

gde je $\varphi = 1/\psi$ holomorfna i različita od nule na B; Kako je φ holomorfna na B, sledi

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-a)^k, \quad z \in B \tag{2.87}$$

gde je $a_0 \neq 0$.

Zamenom (2.87) u (2.86), dobija se $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k (z-a)^{k-m}$; otuda smenom $n = k - m$ i $c_n = a_{n+m}$, $n = -m, -m+1, \ldots, 0, \ldots$, nalazi se
$f(z) = \sum\limits_{n=-m}^{+\infty} c_n (z-a)^n$, tj.

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n,\ z \in B \tag{2.88}$$

Kako je $c_{-m} = a_0 \neq 0$ glavni deo sadrži konačan (pozitivan) broj članova.
$\Leftarrow$: Neka je funkcija f u šupljoj okolini B' tačke predstavljena Loranovim razlaganjem (2.88), $c_{-m} \neq 0$, $m \geq 1$; i neka je $\varphi(z) = (z-a)^m f(z)$. Tada je φ holomorfna na B'

$$\varphi(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z-a) + \ldots,\ z \in B',\ m \geq 1. \tag{2.89}$$

Iz (2.89) sledi da postoji konačan $\lim\limits_{z\to a} \varphi(z) = c_{-m} \neq 0$. Ali tada funkcija $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^m}$ teži beskonačnosti kada $z \to a$, tj. a je pol funkcije f.

3. Dokaz tačke 3. je u suštini sadržan u 1. i 2. □

Propozicija 2.7 *Funkcija f ima pol u a ako i samo ako funkcija $g = 1/f$, $g \not\equiv 0$, holomorfna u a i $g(a) = 0$.*

Dokaz: Iz dokaza Teoreme 2.34 sledi da je uslov neophodan. Dokažimo da je uslov dovoljan. Ako je g holomorfna u a i $g(a) = 0$, na osnovu Teoreme jedinosti, postoji šuplja okolina tačke a u kojoj je $g \neq 0$. U toj okolini $f = 1/g$ je holomorfna i otuda a je izolovana singularna tačka funkcije f. Ali kako je $\lim\limits_{z \to a} f(z) = \infty$, a je pol f. □

Red pola funkcije f u a naziva se red nule analitičke funkcije g, koja je jednaka $1/f$ u nekoj šupljoj okolini a. Ako je a prosta nula funkcije $1/f$ (nula reda 1), a se naziva prost pol.

Iz dokaza Teoreme 2.34 (deo 2.) jasno je da je red pola broj m u razvoju (2.88).

Propozicija 2.8 *Neka je $f = \varphi/\psi$, gde su φ i ψ analitičke funkcije u a i imaju u a nule respektivno reda m i n. Tada*

a. ako je $m \geq n$ funkcija f je regularna u a i ima nulu reda $m - n$,

b. ako je $m < n$ funkcija f ima pol reda $n - m$ u a.

Teorema 2.35 (Sohockog-Vajerštrasa) *Neka funkcija f ima esencijalni singularitet u tački a. Tada za proizvoljan kompleksan broj $A \in \overline{\mathbb{C}}$ postoji niz (z_n), koji konvegira ka a, tako da $f(z_n)$ konvergira ka A.*

Primer 16 *Za $A \in \mathbb{C}^*$ odrediti rešenja jednačine $e^{1/z} = A$ po z.*

Rešenje: Jednačina je ekvivalentna sa $1/z = \operatorname{Ln} A$, tj. $z = 1/\operatorname{Ln} A$ i kako je $\operatorname{Ln} A = \ln A + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$, gde je $\ln A = \ln |A| + i \arg A$, rešenja jednačine su $z = z_k = 1/(\ln A + 2k\pi i)$, $k \in \mathbb{Z}$. Dakle, ako je $A \in \mathbb{C}^*$ i $f(z) = e^{1/z}$ tada postoji niz (z_n) tako da $f(z_n) = A$, $n \geq 1$. Analogno tvrđenje važi i u opštem slučaju: ako je a esencijalni singularitet funkcije f, tada za proizvoljan kompleksan broj A, izuzev možda jedne vrednosti $A = A_0$, postoji beskonačan niz (z_n) različitih rešenja jednačine $f(z_n) = A$, koji konvergira ka a; ovo svojstvo se dokazuje pomoću tvrđenja: ako f ima izolovani singularitet u a i izostavlja dve vrednosti u nekoj okolini a tada je a otklonjiv singularitet ili pol funkcije f; tj. f preslikava proizvoljnu šuplju okolinu B tačke a na $\mathbb{C}$ sa izostavljanjem najviše jedne tačke $A = A_0$; Ovo se zove „velika Pikarova teorema" i značajno je pojačanje teoreme Sohockog-Vajerštrasa. Za funkciju $e \circ J$ izuzeta vrednost je 0, a funkcija $\sin \circ J$ nema izuzete vrednosti u odnosu na singularnu tačku 0. □

Primeri

1. Funkcija $(z - a)^3$, u a ima nulu trećeg reda; otuda funkcija f, definisana sa $f(z) = 1/(z - a)^3$, ima pol trećeg reda u a.
2. Za funkciju $f(z) = z/(\sin^3 z)$ tačka 0 je pol drugog reda.
3. Funkcija $f(z) = \operatorname{tg} z$ ima u $z_k = (2k + 1)\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$, proste polove.
4. Funkcija $f(z) = (\cos z - 1)/z^4$ ima u 0 pol drugog reda.
5. Razviti funkciju cos oko $\pi/2$.
   Uputstvo: $\cos z = -\sin(z - \pi/2)$. □
6. *a.* Ponovimo, funkcije holomorfne u $\mathbb{C}$ nazivaju se cele funkcije; cele funkcije koje nisu polinomi nazivaju se cele trascendentne funkcije (takve su npr. exp, sin, cos).

b. Napisati Tejlorove razvoje funkcija e^z, sin, cos.

Rešenje: Npr. ponovimo da funkciju e^z ima razvoj

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{2.90}$$

c. Napisati Loranov razvoj funkcija $\exp \circ J$, $\sin \circ J$ i $\cos \circ J$ oko 0; i pokazati da ove funkcije imaju esencijalni singularitet u 0.

Rešenje: Pomoću inverzije $J : z = J(w) = 1/w$ dobija se Loranov razvoj funkcije $e \circ J$ u okolini nule; Zamenom $z = J(w) = 1/w$ u (2.90), nalazi se

$$e^z = e^{1/w} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w^{-n}}{n!}, \quad w \neq 0.$$

Ovo je Loranov razvoj oko 0. Pošto glavni deo ima beskonačno članova sledi da je 0 esencijalni singularitet za funkciju $\exp \circ J$, tj. $e^{1/w}$. Slično se dobijaju Loranovi razvoji funkcija $\sin(1/z)$, $\cos(1/z)$ oko 0. Na primer, iz Teoreme o karakterizaciji izolovanih singulariteta, tačka 3, sledi da funkcije $\exp \circ J$, $\sin \circ J$ i $\cos \circ J$ imaju esencijalni singularitet u 0. □

7. Loranov red

$$\cdots + \frac{1}{z^n} + \frac{1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{z} + \frac{1}{2} + \frac{z}{2^2} + \cdots + \frac{z^n}{2^{n+1}} + \cdots$$

ima beskonačno članova sa negativnom stepenima z. Red je suma dve progresije $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} z^{-k}$ i $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} (z^k/2^{k+1})$; prvi konvergira na E i predstavlja funkciju K_1, drugi konvergira na U_2 i predstavlja funkcju $-K_2$. Otuda oblast konvergencije datog reda je prsten $A = A(1,2)$; suma reda u prstenu je $K_1(z) - K_2(z) = \dfrac{1}{z-1} + \dfrac{1}{2-z} = \dfrac{-1}{z^2-3z+2}$, tj. funkcija za koju je 0 regularna tačka i koja od singularnih tačaka ima jedino dva prosta pola u tačkama 1 i 2.

8. Neka je f definisana sa $f(z) = \exp(-1/z^4)$, $z \neq 0$, i $f(0) = 0$. Dokazati

   a. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

   b. f ima esencijalni singularitet u 0.

   c. Parcijalni izvodi funkcije f u nuli jednaki su nula.

   d. Koši-Rimanovi uslovi važe u svim tačkama kompleksne ravni.

   Rešenje: f je holomorfna na $\mathbb{C}^*$ i otuda Koši-Rimanovi uslovi važe na $\mathbb{C}^*$ i s obzirom na *c.* važe u 0. □

9. Razviti funkciju $f(z)$ u Loranov red oko ∞, gde je

   (a) $f(z) = \dfrac{1}{4+z^2}$, (b) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - iz + 2}$.

   Uputstvo za (*b*): $z^2 + iz + 2 = (z-i)(z+2i)$; $f = i(K_{-2i} - K_i)/3$. □

10. Razviti funkciju $f(z) = \dfrac{1}{(1+z^2)^2}$ u Loranov red oko i.

    Uputstvo: $f(z) = \dfrac{1}{(z+i)^2(z-i)^2}$. □

11. Neka je ln grana logaritma određena sa vrednostima argumenta u $(-\pi, \pi)$. Dokazati da je $\ln(z/\omega) = \ln z - \ln \omega$ za $z, \omega \in \Pi^+$.

12. Razviti funkciju $f(z) = \ln \dfrac{z-a}{z-b}$ u Loranov red oko ∞.

    Uputstvo: Neka je $A(z) = \dfrac{z-a}{z-b}$. A preslikava $[a, b]$ na $(-\infty, 0]$. Neka je ln grana logaritma određena sa vrednostima argumenta u $(-\pi, \pi)$ i pretpostavimo da je $|b| \geq |a|$.
    Postoji više rešenja:
    I. Pretpostavimo prvo da su a i b realni brojevi i da je $a < b$. Tada je za $x > b$, $\ln \dfrac{x-a}{x-b} = \ln(x-a) - \ln(x-b) = \ln(1-a/x) - \ln(1-b/x)$. Otuda prvo sledi da sledeća formula važi za $x > b$, a zatim, na osnovu teoreme jedinosti, i za $|z| > |b|$:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b^k - a^k}{kz^k}$$

za $|z| > |b|$.
Slično, ako su su a i b kompleksni brojevi za z dovoljno veliko $(1-a/z)$ i $(1-b/z)$ su okolini 1, i otuda je $\ln \dfrac{z-a}{z-b} = \ln \dfrac{1-a/z}{1-b/z} = \ln(1-a/z) - \ln(1-b/z)$.

II. Na osnovu Teoreme o izvodu kompozicije funkcija,

$$f'(z) = \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a^k - b^k}{z^{k+1}}, \quad |z| > |b|. \tag{2.91}$$

Otuda je,

$$f(z) - f(\infty) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b^k - a^k}{kz^k}$$

za $|z| > |b|$.
Ako je ln grana logaritma određena $\ln 1 = 2\pi n_0$, tada je $f(\infty) = \ln 1 = 2\pi n_0$.
□

2.2.1 Singulariteti u ∞

Ako je funkcija f holomorfna u oblasti $E_R = \{z : |z| > R\}$, $R > 0$ (kažemo da funkcija f ima singularitet u ∞, beskonačno dalekoj tački), tada je

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k, \quad z \in E_R. \tag{2.92}$$

Ispitivanje singulariteta u ∞ svodi se na ispitivanje singulariteta u konačnoj tački na sledeći način.

Ponovimo, funkcija J (inverzija) definiše se sa

$$z = J(\zeta) = 1/\zeta. \tag{2.93}$$

Kako je $J(0) = \infty$, J preslikava okolinu tačke 0 u okolinu beskonačno daleke tačke; preciznije, J preslikava B_r na $E_R \cup \{\infty\}$, gde je $R = 1/r$ i B'_r na E_R. Ako se reši jednačina (2.93) po ζ dobija se $\zeta = 1/z = J^{-1}(z)$, tako da je $J = J^{-1}$. Ako f ima singularitet u ∞ (beskonačno dalekoj tački) uvodimo pomoćnu funkciju $F = f \circ J$, koja ima singularitet u 0. Sada je nova funkcija F holomorfna u šupljoj okolini nule, $B' = \{0 < |\zeta| < r\}$, $r = 1/R$, i može se razviti u Loranov red u okolini nule. Ponovimo, ponašanje funkcije f u okolini ∞ možemo proučavati preko ponašanja funkcije F u okolini 0. U zavisnosti da li je tačka 0 regularna, pol reda m ili esencijalna singularna tačka za F, kažemo da je tačka ∞ regularna, pol reda m ili esencijalna singularna tačka za f. U navedenim slučajevima F ima u šupljoj okolini $B' = \{0 < |\zeta| < r\}$ tačke $\zeta = 0$ Loranovo razlaganje, respektivno sledećeg oblika (tri mogućnosti):

$$\begin{gathered}
F(\zeta) = a_0 + a_{-1}\zeta + a_{-2}\zeta^2 + \cdots + a_{-k}\zeta^k + \cdots, \\
F(\zeta) = \frac{a_m}{\zeta^m} + \cdots + \frac{a_1}{\zeta} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_{-k}\,\zeta^k,\ a_m \neq 0, \text{ i} \\
F(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \zeta^{-k}.
\end{gathered} \tag{2.94}$$

Zamenimo ζ sa $\zeta = 1/z$ u prethodnim razvojima, dobija se Loranovo razlaganje f na E_R:

$$\begin{gathered}
f(z) = F(1/z) = a_0 + a_{-1}z^{-1} + a_{-2}z^{-2} + \cdots + a_{-k}z^{-k} + \cdots, \\
f(z) = F(1/z) = a_m z^m + \cdots + a_1 z + \sum_{k=0}^{+\infty} a_{-k} z^{-k},\ a_m \neq 0, \text{ i} \\
f(z) = F(1/z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k.
\end{gathered} \tag{2.95}$$

Ponovimo, f ima u ∞ (beskonačno dalekoj tački), respektivno otklonjiv singularitet, pol, esencijalni singularitet ako i samo ako $F = f \circ J$ ima u tački 0 otklonjiv singularitet, pol, esencijalni singularitet. Na taj način veza između karaktera singulariteta u ∞ i odgovarajućeg razvoja u Loranov red analogna je slučaju konačne tačke samo članovi sa pozitivnom i negativnim stepenima menjaju uloge. Dakle, ako je funkcija f holomorfna u šupljoj okolini ∞ (beskonačno daleke tačke) f se može razviti u Loranov red

$$f = F_1 + f_1,$$

gde je

$$F_1(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k z^k = c_1 z + c_2 z^2 + \cdots, \quad f_1(z) = \sum_{k=-\infty}^{0} c_k z^k = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \cdots.$$

Funkcija F_1 naziva se glavni deo oko ∞; funkcija f_1 regularni deo oko ∞. Neka funkcija f ima singularitet u ∞ tada su tačni sledeći iskazi:

(a) f ima u tački ∞ otklonjiv singularitet ako i samo ako se Loranov razvoj svodi na regularni deo.

(b) f ima u tački ∞ pol ako i samo ako je glavni deo prisutan i sastoji se od konačno članova, tj. glavni deo je polinom koji nije konstanta.

(c) f u tački ∞ ima esencijalni singularitet ako i samo ako glavni deo ima beskonačno članova različitih od nule.

Dokaz sledi iz teoreme za konačan slučaj koristeći prethodnu transformaciju iz (2.94) u (2.95).

Funkcija holomorfna u $\mathbb{C}$ naziva se **cela**.

Primeri

1. Ako je $f(z) = 1/z^2$, funkcija f ima otklonjiv singularitet u ∞; kako je $\lim_{z\to\infty}(1/z^2) = 0$, funkcija f može se dodefinisati sa $f(\infty) = 0$ tako da je holomorfna u ∞.

2. a. Polinom $P_n(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, $a_n \neq 0$, $n \geq 1$, ima pol u tački ∞.

   b. Racionalna funkcija $R = P_m/P_n$ ima pol u ∞ ako je $m > n$; i otklonjiv singularitet ako je $n \geq m$.

   Dakle, polinomi su holomorfne funkcije u $\mathbb{C}$, ali ako su različiti od konstante imaju pol u tački ∞.

3. Sve trascendentne cele funkcije (cele funkcije, koje nisu polinomi), imaju esencijalni singularitet u ∞; na primer,

$$e^z, \sin z, \cos z.$$

   Kako ne postoji $\lim_{|z|\to+\infty} e^z$ sledi da exp ima esencijalni singularitet u ∞; ovo se može zaključiti i na osnovu Loranovog reda exp u okolini ∞. Ponovimo da je

$$e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Dakle, ovaj red je istovremeno Tejlorov razvoj oko 0 i Loranov razvoj oko ∞; glavni deo oko ∞ ima beskonačno mnogo članova; funkcija exp ima esencijalni singularitet u ∞.

4. Neka je $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$. Kako je $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{1}{1-z} = 0$, tada funkcija f ima otklonjiv singularitet u ∞.

2.2.2 Cele i meromorfne funkcije

Ponovimo, funkcija holomorfna na $\mathbb{C}$ naziva se cela. Dakle, $a = \infty$ je izolovana singularna tačka cele funkcije f. Postoje tri mogućnosti:

a. $a = \infty$ je otklonjiv singularitet. U ovom slučaju, saglasno teoremi Liuvila, $f \equiv \text{const}$.

b. $a = \infty$ je pol. Tada je glavni deo Loranovog razvoja f oko ∞ polinom P; funkcija $f - P$ ima otklonjiv singularitet u ∞ i otuda $f - P \equiv \text{const}$; tj. f je polinom.

c. $a = \infty$ je esencijalni singularitet. Cela funkcija koja ima esencijalni singularitet u ∞ naziva se cela transcendentna funkcija.

Na primer, funkcije exp, sin, cos, ... su transcendentne cele funkcije.
Funkcija f, koja u $\mathbb{C}$ nema drugih singulariteta izuzev polova, naziva se *meromorfna.*

Teorema 2.36 (O obliku meromorfne f-je sa konačnim br. polova u $\overline{\mathbb{C}}$)
Ako meromorfna funkcija f ima otklonjiv singularitet ili pol u ∞, tada je f racionalna funkcija.

Dokaz: Neka su a_k, $k = 1, \ldots, n$, konačni polovi funkcije f i označimo sa g_k glavni deo Loranovog razvoja oko a_k; i sa P glavni deo Loranovog razvoja oko ∞; ako f ima otklonjiv singularitet u ∞ definišimo $P \equiv 0$. Razmotrimo funkciju $\varphi = f - P - \sum\limits_{k=1}^{n} g_k$; jasno je da su sve tačke $z \in \overline{\mathbb{C}}$ regularne tačke funkcije φ i otuda, po teoremi Liuvila, $\varphi \equiv c_0$. Dakle,

$$f = c_0 + P + \sum_{k=1}^{n} g_k,$$

tj. f je racionalna funkcija. $\square$

Formula predstavlja razlaganje racionalne funkcije na polinom i proste razlomke. Podvucimo da prethodno razmatranje daje jednostavan dokaz postojanja takvog razlaganja. Upotrebljavaćemo termin meromorfna u opštijem smislu. Funkcija f je meromorfna u oblasti W ako nema u W drugih singulariteta osim polova.

Vežba 2.2.1 *Dokazati da ako je f meromorfna u oblasti W, tada f ima najviše prebrojivo polova u W.*

Dokazanu Teoremu 2.36 možemo sada iskazati na sledeći način: proizvoljna funkcija, meromorfna u zatvorenoj ravni $\overline{\mathbb{C}}$, je racionalna funkcija.

2.3 Rezidumi i primene u integraciji

Mada zvuči paradoksalno za proučavanje holomorfnih funkcija najinteresantnije su tačke u kojima funkcija nije holomorfna(singularne tačke).

Neka je Ω oblast u $\mathbb{C}$ ravni (može biti i višestruko povezana), $A \subset \Omega$ skup izolovanih tačaka, funkcija $f \in \mathcal{H}(\Omega \backslash A)$ (eventualni singulariteti su u A) i neka je G regularna oblast takva da je $\overline{G} \subset \Omega$ i Γ pozitivno orijentisana granica oblasti G. Pretpostavimo još da Γ^* ne sadrži singularne tačke, tj. $A \cap \Gamma^* = \emptyset$, i da je $A \cap G = \{a_1, \dots, a_n\}$. Izaberimo $r > 0$, dovoljno malo tako da su zatvoreni krugovi $\overline{B_\nu}$, $B_\nu = B(a_\nu; r)$, $\nu = 1, \dots, n$, međusobno disjunktni i da pripadaju oblasti G.

Označimo sa G_r oblast $G \backslash \bigcup\limits_{\nu=1}^{n} \overline{B_\nu}$. G_r je regularna oblast i pozitivno orijentisana granica Γ_r oblasti G_r se sastoji od Γ i kružnica $\gamma_1^-, \gamma_2^-, \dots, \gamma_n^-$, gde je γ_ν pozitivno orijentisana kružnica sa središtem u a_ν poluprečnika r (preciznije $\gamma_\nu = a_\nu + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$). Otuda, na osnovu Opšte Košijeve Integralne Teoreme 2.25 (za regularne oblasti), s obzirom na to da je $f \in \mathcal{H}(\overline{G_r})$, dobija se

$$\int\limits_{\Gamma} f\,dz + \sum_{\nu=1}^{n} \int\limits_{\gamma_\nu^-} f\,dz = 0, \tag{2.96}$$

i otuda, na osnovu elementarnih svojstava integrala, sledi

$$\int\limits_{\Gamma} f\,dz = \sum_{\nu=1}^{n} \int\limits_{\gamma_\nu} f\,dz. \tag{2.97}$$

Iz ove formule sledi da se izračunavanje integrala holomorfne funkcije po granici oblasti svodi na izračunavnje integrala po kružnicama sa centrima u singularnim tačkama.
Integral funkcije f po dovoljno maloj kružnici sa centrom u izolovanoj singularnoj tački a te funkcije, podeljen sa $2\pi i$, naziva se rezidum te funkcije u tački a i označava sa $\mathrm{Res}(f, a)$ ili $\mathrm{Res}_a f$.

Definicija 2.13 *Neka f ima singularitet (izolovani) u tački a; rezidum funkcije f u tački a je*

$$\mathrm{Res}_a f = \mathrm{Res}(f, a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} f\,dz, \tag{2.98}$$

gde je γ_r pozitivno orijentisana kružnica sa središtem u tački a dovoljno malog poluprečnika $r > 0$.

Dokažimo da ova definicija ne zavisi od r.
Dokaz: Pretpostavimo da je $f \in \mathcal{H}(B')$, $B' = \{z : 0 < |z-a| < r_0\}$ i neka je $0 < r_1 < r_2 < r_0$. Na osnovu OKIT (za regularne oblasti) zaključuje se da je

$$\int\limits_{\gamma_{r_1}} f\,dz = \int\limits_{\gamma_{r_2}} f\,dz.$$

Interesantno je podvući da ova formula nije direktna posledica lokalne verzije Košijeve teoreme. □

Teorema 2.37 (Košijeva teorema o rezidumima) *Neka je $A \subset \Omega$ skup izolovanih tačaka i funkcija $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus A)$ (eventualni singulariteti su u A) i neka je G regularna oblast takva da je $\overline{G} \subset \Omega$ i Γ pozitivno orijentisana granica oblasti G i neka Γ^* ne sadrži singularne tačke, tj. $A \cap \Gamma^* = \emptyset$. Pretpostavimo, još, da je $A \cap G = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Tada*

$$\int\limits_{\Gamma} f\,dz = 2\pi i \sum_{\nu=1}^{n} \mathrm{Res}(f, a_\nu). \tag{2.99}$$

Dokaz: Na osnovu definicije reziduma (formula (2.98)), $\int\limits_{\gamma_\nu} f\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}_{a_\nu} f$ i otuda, s obzirom na (2.97), sledi (2.99).

Ova teorema je posledica KIT za regularne oblasti, ali ima veliki principijelni značaj jer svodi globalnu vrednost, kakav je integral holomorfne funkcije po granici oblasti, na izračunavanje lokalnih vrednosti-reziduma funkcije u singularnim tačkama i ima velike primene. □

Primeri:

1. Neka je $f(z) = \dfrac{z}{\frac{1}{2} - \sin^2 z}$, $z_1 = \pi/4$ i $z_2 = -\pi/4$. Dokazati:

   a. f je holomorfna na $\overline{U} \setminus \{z_1, z_2\}$ i ima proste polove u tačkama $z_1 = \pi/4$ i $z_2 = -\pi/4$.

   b. $\int\limits_{\gamma} f\,dz = -i\pi^2$, gde je γ pozitivno orijentisana jedinična kružnica.

2. Neka je $f(z) = \dfrac{e^{-z}}{(z-1)^2}$.

   a. Razviti f u Loranov red oko tačke $z = 1$.

   b. Dokazati $\int\limits_{\gamma_2} f\,dz = -2\pi i/e$, gde je γ_2 pozitivno orijentisana kružnica poluprečnika 2.

Uputstvo: $(a.)$ $e^{-z} = e^{-1}e^{-(z-1)}$. □

2.3.1 Rezidum u ∞

Definicija 2.14 *Neka je* $f \in \mathcal{H}(E_{R_0})$, $E_{R_0} = \{|z| > R_0\}$; *Rezidum u* ∞ *je*

$$\mathrm{Res}_{\infty} f = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_R^-} f\, dz, \tag{2.100}$$

gde je γ_R^- *negativno orijentisana kružnica sa centrom u nuli i* $R > R_0$; *na osnovu elementarnih svojstava integrala,*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_R} f\, dz = -\mathrm{Res}_{\infty} f; \tag{2.101}$$

tako da se $\mathrm{Res}_{\infty} f$ *može definisati i pomoću formule (2.101).*

Napomenimo da definicija ne zavisi od R; dokaz je analogan kao za konačnu tačku.

Teorema 2.38 (O sumi reziduma) *Neka je* f *holomorfna u kompleksnoj ravni* $\mathbb{C}$, *osim u konačno mnogo tačaka* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ *(konačne tačke), tj.* $f \in \mathcal{H}(G)$, $G = \mathbb{C} \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. *Tada je suma reziduma u svim konačnim tačkama i reziduma u beskonačnosti jednaka nuli:*

$$\sum_{v=1}^{n} \mathrm{Res}_{a_v} f + \mathrm{Res}_{\infty} f = 0. \tag{2.102}$$

Napomena: *Ne pretpostavlja se da* $f \in \mathcal{H}(\infty)$ *tj. da je* f *holomorfna u* ∞.

Dokaz: Izaberimo $R > \max\limits_{1 \le \nu \le n} |a_\nu|$ i neka je γ_R pozitivno orijentisana kružnica sa središtem u koordinatnom početku poluprečnika R. Na osnovu Košijeve teoreme o rezidumu,

$$\int\limits_{\gamma_R} f\, dz = 2\pi i \sum_{\nu=1}^{n} \mathrm{Res}_{a_\nu} f,$$

tj.

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_R} f\, dz = \sum_{\nu=1}^{n} \mathrm{Res}_{a_\nu} f. \tag{2.103}$$

Na osnovu Definicije 2.14 reziduma u ∞, leva strana formule (2.103) jednaka je $-\mathrm{Res}_{\infty} f$, tj.

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_R} f\, dz = -\mathrm{Res}_{\infty} f,$$

i otuda sledi tvrđenje. $\square$

Podvucimo da teorema važi i ako funkcija ima singularitet u ∞.

2.3.2 Postupak računanja reziduma

1. $\mathrm{Res} f = c_{-1}$

Teorema 2.39 *Neka funkcija f ima izolovani singularitet u konačnoj tački a i neka je Loranov razvoj funkcije oko tačke a jednak*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z-a)^k. \tag{2.104}$$

Tada je

$$\mathrm{Res}_a f = c_{-1}. \tag{2.105}$$

Dokaz:

$$f \in \mathcal{H}(B'),\ B' = \{0 < |z-a| < r_0\},\ r_0 > 0.$$

Neka je $0 < r < r_0$ i neka je γ_r pozitivno orijentisana kružnica sa središtem u a, poluprečnika r. Sada, na osnovu Loranove teoreme, red (2.104) ravnomerno konvergira na skupu γ_r^* pa se može integraliti član po član, tj. važi

$$\int_{\gamma_r} f\,dz = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \int_{\gamma_r} (z-a)^k\,dz. \tag{2.106}$$

Otuda, s obzirom na ortogonalnost stepena (videti Primer ortogonalnost stepena, koji sledi)

$$\int_{\gamma_r} f\,dz = 2\pi i\, c_{-1}, \tag{2.107}$$

i na osnovu definicije reziduma, nalazimo (2.105). □

Podvucimo da je formula (2.107) specijalan slučaj formule za koeficijente Loranovog razvoja i da dokaz ponavljamo iz pedagoških razloga.

Primer 17 (Ortogonalnost stepena) *Neka je $\gamma(t) = a + re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, $p = p_n$ funkcija definisana sa $p(z) = (z-a)^n$ i $I_n = \int_\gamma p\,dz$. Tada je $I_n = 0$, za $n \neq -1$ i $I_{-1} = 2\pi i$.*

Rešenje: Pretpostavimo da je $a = 0$. Kako je

$$\left(\frac{z^{k+1}}{k+1}\right)' = z^k,\ k \neq -1,$$

funkcija z^k, $k \neq -1$, ima primitivnu i otuda na osnovu KIT', sledi da je $I_k = \int_\gamma z^k\,dz = 0$ za $k \neq -1$. Ako je $k = -1$, $p_{-1} = \mathcal{J}$, gde je funkcija $\mathcal{J}$ definisana sa $\mathcal{J}(z) = z^{-1} = 1/z$; Na osnovu formule za integraciju duž kružnice (videti specijalne slučajeve) sledi $I_{-1} = \int_\gamma z^{-1}\,dz = 2\pi i$. Otuda je $\mathrm{Res}_0 \mathcal{J} = 1$. Analogno se razmatra slučaj $a \neq 0$. Podvucimo, funkcija $\mathcal{J}$ nema primitivnu u okolini 0. □

2. Rezidum za pol prvog reda

Pretpostavimo da funkcija f u tački a ima pol prvog reda; to znači da Loranov razvoj u nekoj šupljoj okolini $B'(a)$ tačke a, ima oblik

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots,\ c_{-1} \neq 0, \text{ tj.}$$

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(z-a)^k.$$

Otuda sledi prvo

$$(z-a)f(z) = c_{-1} + \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(z-a)^{k+1},$$

i zatim

$$c_{-1} = \lim_{z\to a}(z-a)f(z). \tag{2.108}$$

2.a. Slučaj $f = \varphi/\psi$.

Neka su φ, $\psi \in \mathcal{H}(B(a))$ i neka $\varphi(a) \neq 0$, $\psi(a) = 0$, $\psi'(a) \neq 0$; tada

$$\mathrm{Res}_a f = c_{-1} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

Rešenje: Kako je $\varphi(a) \neq 0$ i imenilac (funkcija ψ) ima prostu nulu u tački a, funkcija f ima pol prvog reda u tački a. Otuda, po formuli (2.108),

$$c_{-1} = \lim_{z\to a}(z-a)f(z) = \lim_{z\to a}(z-a)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)-\psi(a)} = \lim_{z\to a}\frac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}},$$

i stoga

$$\mathrm{Res}_a f = c_{-1} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \tag{2.109}$$

Podvucimo da ova formula važi i ako je $\varphi(a) = 0$ (tada f ima otklonjiv singularitet u a); i tada je $\mathrm{Res}_a f = 0$. □

3. Rezidum za pol n-tog reda

Propozicija 2.9 *Neka f ima u tački a pol n-tog reda. Tada je*

$$c_{-1} = \mathrm{Res}_a f = \frac{1}{(n-1)\,!}\lim_{z\to a}((z-a)^n f(z))^{(n-1)}. \tag{2.110}$$

Dokaz: Kako f ima u a pol n-tog reda, tada je, u nekoj okolini tačke a,

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots + \frac{c_{-1}}{(z-a)} + c_0 + c_1(z-a) + \cdots, \quad c_{-n} \neq 0.$$

Definišimo funkciju Φ sa

$$\Phi(z) = (z-a)^n f(z) = c_{-n}+(z-a)c_{-n+1}+\cdots+c_{-1}(z-a)^{n-1}+c_0(z-a)^n+\cdots,\ z \neq a$$

i $\Phi(a) = c_{-n}$. Funkcija Φ je analitička funkcija i koeficijent c_{-1} se izračunava diferenciranjem te funkcije $n-1$ puta. Prelaskom na graničnu vrednost dobija se $c_{-1} = \dfrac{\Phi^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$ (za obrazloženje videti sekciju 1.4 o stepenim redovima) i otuda

$$\mathrm{Res}_a f = \frac{1}{(n-1)\,!} \lim_{z\to a} \big((z-a)^n f(z)\big)^{(n-1)}. \tag{2.111}$$

$\square$

Ako f ima u tački a pol reda n, pogodno je koristiti sledeću notaciju:

$$\Phi(z) = (z-a)^n f(z) \ \text{ i } \ \Psi(z) = \frac{\Phi^{(n-1)}(z)}{(n-1)!}.$$

U tom slučaju formula (2.111) se može zapisati u skraćenom obliku $c_{-1} = \Psi(a)$.

Za izračunavanje reziduma u slučaju esencijalnog singulariteta ne postoje analogne formule i rezidum se računa pomoću Loranovog razvoja.

Primeri:

a. Funkcija $\mathrm{sh}z/z^4$ ima pol trećeg reda u 0, sa rezidumom $1/6$.

b. Funkcija $e \circ J$ ima esencijalni singularitet u 0, sa rezidumom 1.

4. Rezidum u tački ∞

$\mathrm{Res}_\infty f = -c_{-1}$

Propozicija 2.10 *Neka je funkcija $f \in \mathcal{H}(E_{R_0})$, $E_{R_0} = \{z : |z| > R_0\}$, $R_0 > 0$ i neka je*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k z^k, \tag{2.112}$$

Loranov razvoj funkcije f u oblasti E_{R_0}.
Tada je

$$\mathrm{Res}_\infty f = -c_{-1}.$$

Dokaz: Neka je $R > R_0$, γ_R pozitivno orijentisana kružnica sa središtem u 0 poluprečnika R. Po definiciji,

$$\mathrm{Res}_\infty f = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} f\,dz.$$

Loranov red (2.112) ravnomerno konvergira na γ_R^* i može se integraliti član po član i, kao u slučaju konačnog singulariteta, dobija se $\mathrm{Res}_\infty f = -c_{-1}$. $\square$

Ponovimo, ako je funkcija f holomorfna u šupljoj okolini tačke ∞, tada se f može razviti u Loranov red

$$f = F_1 + f_1,$$

gde je

$$F_1(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k z^k = c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$$

i

$$f_1(z) = \sum_{k=-\infty}^{0} c_k z^k = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \cdots .$$

Funkcija F_1 naziva se glavni deo Loranovog reda oko tačke ∞, dok se funkcija f_1 naziva regularni deo Loranovog reda oko tačke ∞. Važi sledeća formula

$$c_{-1} = \lim_{z\to\infty} z(f_1(z) - c_0);$$

i specijalno ako je f holomorfna u tački ∞, $c_{-1} = \lim\limits_{z\to\infty} z(f(z) - c_0)$.

Primeri:

1. Neka je data funkcija $f(z) = 1/(1+z^8)^2$ i neka je γ pozitivno orijentisana kružnica sa središtem u koordinatnom početku poluprečnika 2, tj. $\gamma(t) = 2e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

   a. Odrediti singularitete funkcije f.

   b. Izračunati $I = \int\limits_\gamma f\,dz$.

   Uputstvo: *a.* Neka je $p(z) = (1+z^8)^2$; jednačina $p(z) = 0$ ekvivalentna je sa $(1+z^8)^2 = 0$, tj. sa $z^8 = -1$ i ima 8 rešenja $z_k = \exp\Big(i(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4})\Big)$, $k = 0, 1, \ldots, 7$; u ovim tačkama f ima polove drugog reda.

   b. Kako su ova rešenja na jediničnoj kružnici i jedini su singulariteti funkcije f, funkcija f je holomorfna u oblasti $E = \{z : |z| > 1\}$ i kako $\gamma^* \subset E$, na osnovu Definicije 2.14 (formula (2.101)), sledi

   $$I = \int\limits_\gamma f\,dz = -2\pi i \operatorname{Res}_\infty f.$$

   Iz $f(\infty) = 0$ sledi, prvo, $c_{-1} = \lim\limits_{z\to\infty} zf(z) = 0$, a zatim $\operatorname{Res}_\infty f = -c_{-1} = 0$. Otuda je $I = 0$. □

2. Neka je $l = \{iy : y \ge 0\}$ i $D = \mathbb{C} \setminus l$.

   a. Dokazati da postoji grana ln višeznačne funkcije Ln na D, određena sa $\ln 1 = 2\pi i$.

b. Ako je funkcija f definisana sa $f(z) = \dfrac{\ln z}{1+z^2}$, izračunati rezidum te funkcije u tački $-i$.

Rešenje: Kako $i = e^{i\pi/2} \in l$, to je $D = O_{\pi/2}$. Otuda, na D postoji grana arg višeznačne funkcije Arg sa vrednostima u J_k. Iz uslova ($\ln 1 = 2\pi\, i$), sledi $k = 0$, tako da je grana $\arg = \arg_0$ sa vrednostima u $J_0 = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi\right)$. Iz $\arg(-i) = \dfrac{3\pi}{2}$ sledi $\ln(-i) = i\dfrac{3\pi}{2}$ i otuda $\mathrm{Res}_{-i} f = \dfrac{\ln z}{2z}|_{-i} = -\dfrac{3\pi}{4}$. □

3. Neka je $t \in \mathbb{R}$, $f = f_t$ definisana sa $f(z) = \dfrac{e^{itz}}{1+z^2}$ i $\varphi(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_t(x)\, dx$. Dokazati:

   a. $\mathrm{Res}(f, i) = e^{-t}/(2i)$.

   b. Ako je $t \geq 0$, tada $zf(z)$ teži 0, kada $H \ni z \to \infty$.

   c. Ako je $t \geq 0$ i $\mathcal{C}_r$ polukružnica u gornjoj poluravni poluprečnika r, tada $\int\limits_{\mathcal{C}_r} f\, dz \to 0$, kada $r \to +\infty$.

   d. $\varphi(t) = \pi e^{-|t|}$.

2.4 Tipovi integrala

2.4.1 Žordanove leme

Neka je $a \in \mathbb{C}$, $\alpha < \beta$, $\beta - \alpha \leq 2\pi$, $r > 0$, $R > 0$, $S_1 = S_r(\alpha, \beta) = \{a + \rho e^{it} : 0 < \rho < r, \alpha \leq t \leq \beta\}$, $S_2 = S_R(\alpha, \beta) = \{a + \rho e^{it} : \rho > R, \alpha \leq t \leq \beta\}$. Neka je γ_ρ kružni luk definisan sa $\gamma_\rho(t) = a + \rho e^{it}$, $\alpha \leq t \leq \beta$, tj. γ_ρ je deo pozitivno orijentisane kružnice sa centrom u a poluprečnika ρ i

$$I_\rho = \int_{\gamma_\rho} f dz.$$

Lema 2.10 (Žordanova lema 1, LJo1) *Neka je funkcija f neprekidna na S_1 i*

$$\lim_{\substack{z \to a \\ z \in S_1}} (z-a) f(z) = A, \tag{2.113}$$

γ_ρ deo kružnice definisan sa $\gamma_\rho(t) = a + \rho e^{it}$, $\alpha \leq t \leq \beta$, tj. γ_ρ je deo pozitivno orijentisane kružnice sa centrom u a poluprečnika ρ, sadržan u S_1. Tada je

$$\lim_{\rho \to 0_+} \int_{\gamma_\rho} f dz = i\, A\, (\beta - \alpha),$$

tj. $I_\rho \to iA(\beta - \alpha)$ kada $\rho \to 0_+$.

Lema 2.11 (Žordanova lema 2, LJo2) *Neka je funkcija f neprekidna na S_2 i*

$$\lim_{\substack{z \to \infty \\ z \in S_2}} (z-a)f(z) = A. \tag{2.114}$$

Tada je:

$$\lim_{\rho \to +\infty} \int_{\gamma_\rho} f dz = iA(\beta - \alpha),$$

tj. $I_\rho \to iA(\beta - \alpha)$ kada $\rho \to +\infty$.

Dokaz: Neka je funkcija $\epsilon = \epsilon(z)$ definisana sa $(z-a)f(z) = A + \epsilon(z)$ i neka je $M_\rho = \max\{|\epsilon(z)| : z \in \gamma_\rho^*\}$. Ponovimo da koristeći parametrizaciju puta nalazimo:

$$I_\rho = i \int_\alpha^\beta \left(A + \epsilon(a + \rho e^{it})\right) dt = i(\beta - \alpha)A + \varepsilon_\rho \ ,$$

gde je $\varepsilon_\rho = i \int\limits_\alpha^\beta \epsilon(a + \rho e^{it})\ dt$.

Na osnovu nejednakosti za apsolutnu vrednost integrala, $|\varepsilon_\rho| \leq (\beta - \alpha) M_\rho$. Kako iz uslova (2.113) (respektivno, (2.114)) kada $\rho \to 0_+$ (respektivno, $\rho \to +\infty$) sledi $M_\rho \to 0$, zaključujemo da $\varepsilon_\rho \to 0$. □

Lema 2.12 *Neka je funkcija f holomorfna u $B' = B'(a, r)$ i ima prost pol u a. Neka je γ_ρ deo kružnog luka (kao u* LJo1*), tj. $\gamma_\rho(t) = a + \rho e^{it}$, $\alpha \leq t \leq \beta$. Tada je:*

$$\lim_{\rho \to 0_+} \int_{\gamma_\rho} f\ dz = i(\beta - \alpha) \operatorname{Res}(f, a), \tag{2.115}$$

tj. $I_\rho \to i(\beta - \alpha) \operatorname{Res}(f, a)$, kada $\rho \to 0_+$.

Dokaz: Ako je a prost pol, tada je $\operatorname{Res}(f, a) = \lim\limits_{z \to a} (z-a) f(z)$ i na osnovu *LJo*1 dobija se (2.115). □

Žordanova nejednakost

Neka je $J_R^0 = \int\limits_0^{\pi/2} e^{-R \sin t}\ dt$ $(R > 0)$ i $J_R = \int\limits_0^{\pi} e^{-R \sin t}\ dt$. Tada je:

$$J_R^0 < \frac{\pi}{2R} \qquad (R > 0); \tag{2.116}$$

$$J_R < \frac{\pi}{R}. \tag{2.117}$$

Dokaz: Neka je $y_1 = \sin t$ i $y_2 = 2t/\pi$, $0 \leq t \leq \pi/2$. Kako je funkcija y_1 konkavna na $[0, \pi/2]$, sledi $y_1 \geq y_2$, odnosno $\sin t \geq 2t/\pi$, $0 \leq t \leq \pi/2$. Otuda, ako je $R > 0$, najpre sledi

$$e^{-R \sin t} \leq e^{-2Rt/\pi},$$

a zatim

$$J_R^0 = \int_0^{\pi/2} e^{-R\sin t}\ dt \leq \int_0^{\pi/2} e^{-2Rt/\pi}\ dt = \frac{\pi}{2R}(1-e^{-R}) < \frac{\pi}{2R},$$

tj. (2.116).

Kako je $J_R = J_R^0 + J_R^1$, gde je J_R^1 integral duž intervala $[\pi/2, \pi]$, koristeći smenu $\tau = \pi - t$, dokazuje se da je $J_R^1 = J_R^0$ i stoga $J_R = 2J_R^0$. Otuda, na osnovu (2.116), dobija se (2.117). □

Lema 2.13 (Žordanova lema 3, **LJo**3**)** *Neka je f funkcija neprekidna na $\overline{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$, koja teži nuli kada $|z| \to +\infty$ kroz $\overline{H}$. Neka je C_ρ polukružnica sa centrom u* 0 *poluprečnika ρ u H i neka je*

$$I_\rho = \int_{C_\rho} e^{i\lambda z} f(z)\ dz.$$

Tada, za fiksirano $\lambda > 0$, $I_\rho \to 0$ kada $\rho \to +\infty$.

Dokaz: Neka je polukružnica C_ρ parametrizovana sa $C_\rho : \rho e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$. Tada je:

$$I_\rho = \int_0^\pi f(\rho e^{it}) e^{i\lambda\rho(\cos t + i\sin t)} i\rho e^{it}\ dt.$$

Neka je ε_ρ maksimum funkcije $|f|$ na C_ρ^*. Kako je $|e^{i\lambda\rho(\cos t+i\sin t)}| = e^{-\lambda\rho\sin t}$, na osnovu nejednakosti za apsolutnu vrednost integrala,

$$|I_\rho| \leq \rho \int_0^\pi |f(\rho e^{it})| e^{-\lambda\rho\sin t}\ dt \leq \rho\varepsilon_\rho J_R,$$

gde je J_R Žordanov integral i $R = \lambda\rho$. Otuda, na osnovu Žordanove nejednakosti (2.117), sledi

$$|I_\rho| \leq \rho\,\varepsilon_\rho \pi \frac{1}{\rho\lambda} = \frac{\pi}{\lambda}\,\varepsilon_\rho$$

i kako na osnovu pretpostavki $\varepsilon_\rho \to 0$, kada $\rho \to \infty$, sledi $LJo3$. □

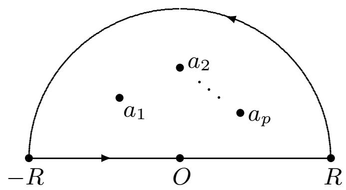
Vežba 2.4.1 (a) *Neka je $\varphi(R,t) = Re^{-R\sin t}$. Proveriti da za $0 < t < \pi$, $\varphi(R,t) \to 0$ kada $R \to +\infty$.*
(b) *Dokazati da $RJ_R = \int_0^\pi \varphi(R,t)dt$ ne teži* 0*, kada $R \to +\infty$.*

Uputstvo za (b): $\sin t \leq t,\ t \geq 0$. Napomenimo da se za dokaz (b) ne može primeniti Lebegova teorema o dominantnoj konvergenciji. □

2.4.2 Tipovi integrala

1. **Integral racionalne funkcije**

Neka je $f = \dfrac{P_n}{Q_m}$ racionalna funkcija koja nema polova na $\mathbb{R}$, $n \leq m-2$. Važi $\lim\limits_{|z|\to+\infty} zf(z) = 0$ i odatle $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} f\,dz = 0$, gde je C_R polukružnica u gornjoj poluravni.
Prelaskom na limes u sledećem identitetu, koji važi za dovoljno veliko R,



Slika 2.17: 1. tip

$$\int_{C_R} f\,dz + \int_{[-R,+R]} f\,dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a>0} \operatorname{Res}_a f$$

dobija se

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a>0} \operatorname{Res}_a f, \tag{2.118}$$

gde se suma uzima po svim polovima funkcije f u gornjoj poluravni.

Pogodno je koristiti oznaku $S^+ = \sum\limits_{\operatorname{Im} a>0} \operatorname{Res}_a f$, tako da kratko pišemo: $I = 2\pi i S^+ = 2\pi i \sum\limits_{\operatorname{Im} a>0} \operatorname{Res}_a f$.

Na primer, na osnovu (2.118) dobija se:

(a) $$\int_0^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+9)(x^2+4)^2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+9)(x^2+4)^2} = \frac{\pi}{200}.$$

(b) Neka je $I(p,n) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^{2n}}\,dx$, $\quad 0 \leq p \leq 2n-2$. Tada je

$$I(p,n) = 0, \text{ ako je } p \text{ neparno},$$

$$I(p,n) = \frac{\pi}{n\sin((p+1)\pi/2n)}, \text{ ako je } p \text{ parno}.$$

Rešenje: Ako je p neparno, integrand je neparna funcija, pa $I(p,n) = 0$. Pretpostavimo da je $p = 2m$ i uvedimo oznake $P = z^p$, $Q = 1 + z^{2n}$ i $f = P/Q$. Rešenja jednačine $z^{2n} = -1 = e^{i\pi}$ su $z_k = e^{i\varphi_k}$, gde je $\varphi_k = \dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n}$. Odatle je $\omega_k = \operatorname{Res}(f, z_k) = -\dfrac{1}{2n}(z_k)^{p+1}$. Neka je $\theta_0 = (p+1)\varphi_0$, $q_0 = -\dfrac{1}{2n}e^{i\theta_0}$ i $q = e^{i\,(p+1)\,\pi/n}$. Tada je $\omega_k = q_0 q^k$ i $S^+ = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \omega_k$, tj. $S^+ = q_0\dfrac{1-q^n}{1-q}$. Kako je $q^n = e^{i(p+1)\pi}$ i $p = 2m$, dobija se najpre $q^n = -1$, a zatim $S^+ = \dfrac{2q_0}{1-q}$.

Sada iz $q-1=e^{i2\theta_0}-1=e^{i\theta_0}2i\sin\theta_0$ sledi $I=2\pi iS^+=\dfrac{\pi}{n\sin\theta_0}$.

Alternativni postupak: Ako je p parno, tada je $I(p,n)=2J(p,n)$, gde je $J=J(p,n)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^{2n}}\,dx$. Smenom $t=x^{2n}$ dobija se $J=\dfrac{1}{2n}\mathcal{O}(a)$, gde je $a=\dfrac{p+1}{2n}$ (videti Primer 19 kod 6. tipa integrala i vežbu 3 u podsekciji 2.4.3). □

(c) Neka je $R(z)=\dfrac{z}{z^2+1}$, $\phi(z)=\cos\left(\dfrac{1}{z+i}\right)$, $f=R\phi$ i $I=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$. Proveriti

$S^+=\mathrm{Res}(f;i)=\dfrac{1}{2}\cosh\dfrac{1}{2}$.

Da li su tačne formule $I=2\pi iS^+$; $I+\pi i=2\pi iS^+$?

2. **Trigonometrijski integrali**

Neka je $R(u,v)$ racionalna funkcija dve promenljive, koja je neprekidna na $u^2+v^2=1$ i neka je

$$I=\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)\,d\theta.$$

Uvodeći promenljivu $z=e^{i\theta}$, dobija se

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\Big(z+\frac{1}{z}\Big),\qquad \sin\theta=\frac{1}{2i}\Big(z-\frac{1}{z}\Big).$$

Tada je $I=\int_{\mathcal{K}}f\,dz$, gde je $f(z)=\dfrac{1}{iz}R\left(\dfrac{1}{2}\Big(z+\dfrac{1}{z}\Big),\dfrac{1}{2i}\Big(z-\dfrac{1}{z}\Big)\right)$ i $\mathcal{K}$ pozitivno orijentisana jedinična kružnica. Odatle je

$$I=2\pi i\sum_{|a|<1}\mathrm{Res}_a f. \tag{2.119}$$

Na primer,

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos m\theta}{5+3\cos\theta}\,d\theta=\frac{(-1)^m\pi}{2\cdot 3^m},\ m\in\mathbb{N}.$

(b)
$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}=\frac{2\pi}{1-r^2},\ 0\le r<1. \tag{2.120}$$

3. **Furijeovi integrali**

Integral oblika

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{i\alpha x}\,dx,\ \alpha>0$$

naziva se Furijeov, gde je f funkcija holomorfna na $\overline{H}\setminus A$, $\overline{H}=\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} z\geq 0\}$ i A konačan skup tačaka u H (to znači da je $A\cap\mathbb{R}=\emptyset$). Takođe, pretpostavlja se da je

$$\lim_{\substack{|z|\to+\infty\\ z\in\overline{H}}} |f(z)|=0.$$

Podvucimo da ove pretpostavke znače da je $A\subset H$, i da je A konačan skup ili najviše prebrojiv skup. Ako je prebrojiv, onda je njegova jedina tačka nagomilavanja ∞. Ne pretpostavlja se da je f holomorfna u ∞.

Kako je po definiciji $I=\lim\limits_{r\to\infty}\int\limits_{-r}^{+r} f(x)e^{i\alpha x}\,dx$, integraleći duž konture na slici 2.17, na osnovu Leme 2.13 ($LJo3$) sledi

$$I=\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{+r} f(x)e^{i\alpha x}\,dx=2\pi i\sum_{a\in A}\operatorname{Res}_a(f(z)e^{i\alpha z}). \tag{2.121}$$

Na primer,

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{1+x^2}dx\right)=\frac{\pi}{2e}.$

(b) $\displaystyle I(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{itx}}{1+x^2}\,dx=\pi e^{-|t|},\ t\in\mathbb{R}.$

(c) Neka je $f(z)=(z^2+b^2)^{-2}$. Izračunati integral

$$I=I(\alpha)=\int_0^{+\infty} f(x)\,\cos(\alpha x)dx,\ b>0.$$

Definišimo $g(z)=f(z)e^{i\alpha z}$ i $J=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{i\alpha x}\,dx$, $b>0$. Tada je $I=J/2$.

Definišimo $\Phi(z)=(z-ib)^2g(z)=e^{i\alpha z}(z+ib)^{-2}$. Nalazimo $\Psi(z)=\Phi'(z)=e^{i\alpha z}(i\alpha z-\alpha b-2)(z+ib)^{-3}$, $S^+=\Psi(ib)=\dfrac{\alpha b+1}{4ib^3}e^{-\alpha b}$. Otuda, za $\alpha>0$, $J=2\pi iS^+=\pi\dfrac{\alpha b+1}{2b^3}e^{-\alpha b}$ i stoga $I=\pi\dfrac{\alpha b+1}{4b^3}e^{-\alpha b}$. Kako je $I(\alpha)$ parna funkcija, dobija se $I=\pi\dfrac{\alpha b+1}{4b^3}e^{-|\alpha|b}$.

4. **Glavna vrednost Furijeovog integrala**

Vrednost integrala je ista kao u 3., izuzev što f može imati konačan broj prostih polova, $\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_p$ na $\mathbb{R}$.
Neka je

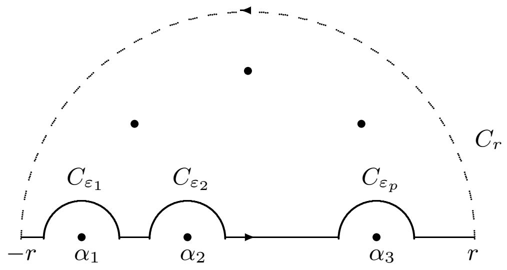
$$I(r,\epsilon_1,\ldots,\epsilon_p)=\int_{-r}^{\alpha_1-\epsilon_1}+\int_{\alpha_1+\epsilon_1}^{\alpha_2-\epsilon_2}+\cdots+\int_{\alpha_{p-1}+\epsilon_{p-1}}^{\alpha_p-\epsilon_p}+\int_{\alpha_p+\epsilon_p}^{r}(f(x)e^{i\alpha x})\,dx,$$

gde je $r > 0$ dovoljno veliko, a $\epsilon_k > 0$ dovoljno malo.

Glavna vrednost Furijeovog integrala definiše se kao

$$I = \lim_{\substack{r \to +\infty \\ \epsilon_j \to 0}} I(r, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_p).$$

Primenom teoreme o sumi reziduma na funkciju $f(z)e^{i\alpha z}$ i konturu na slici 2.18, a zatim primenom Leme 2.13 ($LJo3$) i Leme 2.12, dobija se



Slika 2.18: 4. tip

$$I = i\pi \left(\sum \mathrm{Res}_{\alpha_j}(f(z)e^{i\alpha z}) + 2 \sum_{a \in A} \mathrm{Res}_a(f(z)e^{i\alpha z}) \right). \qquad (2.122)$$

Na primer,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}\ .$$

Ponovimo:
Definicija A (Definicija 1.21) Neka je V okolina nekog intervala $L \subset \mathbb{R}$, $V' = V \setminus L$ i funkcija f definisana na V'. Ako, za $t \in L$, postoje granične vrednosti

$$\lim_{H \ni z \to t} f(z), \lim_{H^- \ni z \to t} f(z)$$

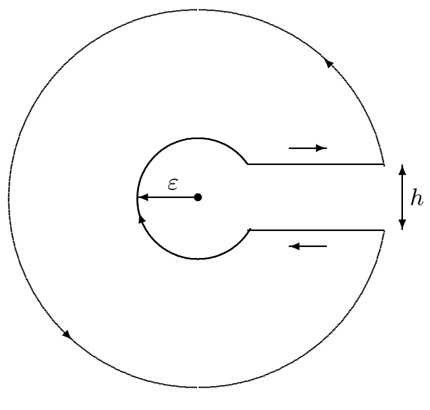
respektivno se označavaju sa $f^+(t)$ i $f^-(t)$.

Notacija f^+ i f^- se primenjuje specijalno ako se funkcija f ne može neprekidno produžiti na L.

5. **Integral tipa** $\int_0^{+\infty} R(x)dx$

Pretpostavimo da je racionalna funkcija $R = P_n/Q_m$, $n \leq m - 2$ i da R nema polove na $\mathbb{R}^+$.
Ako je R parna funkcija, ovaj tip se svodi na tip 1.

U opštem slučaju (R racionalna, ali nije parna), ideja je da se primeni Teorema o sumi reziduma ($TRes$) na pomoćnu funkciju $f(z) = R(z)\ln z$, meromorfnu u $\Omega = O_0 = \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$, gde je $\mathrm{Im}\,(\ln z) = \arg z \in (0, 2\pi)$. Jedini singulariteti funkcije f su polovi i pripadaju skupu nula polinoma Q.



Slika 2.19: 5, 6, 7, 9. i 10. tip

Za $\epsilon, h > 0$ male i $r > 0$ veliko (videti sliku 2.19), nalazi se

$$\int_{\gamma_{\epsilon,r,h}} f\ dz = 2\pi i \sum_{Q(a)=0} \mathrm{Res}_a R(z) \ln z.$$

Za $\epsilon, r > 0$ fiksirane važi

$$f^+(x) = \lim_{\substack{h \to 0_+ \\ \mathrm{Im}\, z > 0}} R(z) \ln z = R(x) \ln x$$

i

$$f^-(x) = \lim_{\substack{h \to 0_+ \\ \mathrm{Im}\, z < 0}} R(z) \ln z = R(x)(\ln x + 2\pi i)$$

ravnomerno po $x \in [\epsilon, r]$, gde je $z = x + ih$.

Označimo sa γ_ρ pozitivno orijentisane kružnice sa centrom u 0 poluprečnika ρ. Kako je $f^+(x) - f^-(x) = -2\pi i R(x)$, dobija se

$$\int_{\gamma_r} f\ dz - \int_{\gamma_\epsilon} f\ dz - 2\pi i \int_\epsilon^r R(x)\ dx = 2\pi i \sum_a \mathrm{Res}_a R(z) \ln z.$$

Kako je

$$\lim_{z\to 0} zR(z) \ln z = 0 \ \text{ i } \lim_{z\to\infty} zR(z) \ln z = 0,$$

prva dva integrala zadovoljavaju, respektivno, hipoteze Leme 2.10 ($LJo1$) i Leme 2.11 ($LJo2$) u sektoru $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C}^* : 0 < \arg z < 2\pi\}$. Otuda,

$$I = \int_0^{+\infty} R(x)\ dx = -S = -\sum_a \mathrm{Res}_a (R(z) \ln z). \tag{2.123}$$

Primer 18 *Ako je $p, q \in \mathbb{Z}$, $0 \le p \le q-2$, tada je*

$$I(p,q) = \int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^q} dx = \frac{\pi}{q \sin(\frac{p+1}{q}\pi)}\,.$$

Rešenje: Neka je $P = z^p$, $Q = 1 + z^q$, $R = P/Q$ i $f = R \ln$. Rešenja jednačine $z^q = -1 = e^{i\pi}$ su $z_k = e^{i\varphi_k}$, gde je $\varphi_k = \dfrac{2k+1}{q}\pi$. Kako je $Q'(z_k) = q(z_k)^{q-1} = -q(z_k)^{-1}$, sledi

$$T_k = \mathrm{Res}(f, z_k) = -\frac{1}{q}(z_k)^{p+1} i\, \varphi_k = -i\,\frac{\pi}{q^2}(z_k)^{p+1}(2k+1)$$

i otuda

$$I = -\sum_{k=0}^{q-1} T_k.$$

Neka je $a=(z_0)^{p+1}$. *Kako je* $(z_k)^{p+1}=e^{i(p+1)\varphi_k}$, *sledi* $(z_k)^{p+1}=a^{2k+1}$ *i otuda*

$$I=i\,\frac{\pi}{q^2}\sum_{k=0}^{q-1}(2k+1)a^{2k+1}\ .$$

Iz $S(z)=\displaystyle\sum_{k=0}^{q-1}z^{2k+1}=z\,\frac{1-z^{2q}}{1-z^2}$ *diferenciranjem se dobija*

$$S_1(z)=\sum_{k=0}^{q-1}(2k+1)z^{2k}=\left(\frac{z-z^{2q+1}}{1-z^2}\right)',$$

tj.

$$S_1(z)=\frac{(1-z^2)(1-(2q+1)z^{2q})+2z^2(1-z^{2q})}{(1-z^2)^2}.$$

Kako je $a^{2q}=1$, *dobija se* $S_1(a)=\dfrac{1-(2q+1)}{1-a^2}=\dfrac{-2q}{1-a^2}$ *i odatle* $I=\dfrac{i\pi}{q^2}\,a\,S_1(a)$, *tj.* $I=\dfrac{\pi}{q}\cdot\dfrac{2ai}{a^2-1}$.

Neka je $\theta_0=(p+1)\varphi_0$. *Tada je* $a=e^{i\theta_0}$, *pa je* $I=\dfrac{\pi}{q\sin\theta_0}$.

Alternativna rešenja:

(1) *Neka je* $\varphi_0=\pi/q$, $z_0=e^{i\varphi_0}$, $l_R:z=\rho e^{i2\varphi_0}$, $0\le\rho\le R$, *i* γ_R *kružni luk definisan sa* $\gamma_R(t)=Re^{it}$, $0\le t\le 2\varphi_0$. *Tada je*

$$\int_{[0,R]}R\ dz-\int_{l_R}R\ dz+\int_{\gamma_R}R\ dz=2\pi i\,\mathrm{Res}(R,z_0);\ \ \mathrm{Res}(R,z_0)=-\frac{1}{q}\,e^{i\theta_0},$$

gde je $\theta_0=(p+1)\varphi_0$. *Kako je* $e^{i2\varphi_0 q}=1$, *za* $z\in l_R$ *dobija se*

$$R(z)dz=e^{i2\theta_0}\frac{\rho^p}{1+\rho^q}d\rho,\quad \int_{l_R}R\ dz=e^{2i\theta_0}\int_{[0,R]}R\ dx.$$

Otuda je $I=\dfrac{\pi}{q\sin\theta_0}$.

(2) *Smenom* $t=x^q$, *odnosno* $x=t^{\frac{1}{q}}$, $dx=\dfrac{1}{q}t^{\frac{1}{q}-1}$ *dobija se* $I(p,q)=\dfrac{1}{q}O(a)$, *gde je* $a=\dfrac{p+1}{q}$ *i* $O(a)$ *je Ojlerov integral.*

6. **Integral tipa** $I_\alpha=\int_0^{+\infty}R(x)x^{-\alpha}\ dx,\ \ 0<\alpha<1$

U integralu $R = P_n/Q_m$ je racionalna funkcija bez polova na $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty]$. Proveriti da integral I_α konvergira akko $n \leq m - 1$.
Podvucimo da je

$$\lim_{|z| \to +\infty} zR(z) = 0$$

akko $n \leq m - 2$.
Označimo sa g_0 granu funkcije $z^{-\alpha}$ na O_0. Proveriti da

$$\lim_{O_0 \ni z \to \infty} zR(z)g_0(z) = 0$$

ako je $n \leq m - 1$.
Ako je $n \leq m - 1$, kako je $|z^{-\alpha}| = |z|^{-\alpha}$, dobija se

$$\lim_{z \to \infty} |zR(z)z^{-\alpha}| = 0.$$

Integrali se funkcija $f(z) = R(z)/g(z)$ duž konture date na slici 2.19, gde je $g(z) = z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$ sa izborom ln kao u tipu 5. Integraleći duž $\gamma_{\epsilon,r,h}$ kada $h \to 0$, kao u 5., dobija se

$$\int_{\gamma_r} R(z)z^{-\alpha}\, dz - \int_{\gamma_\epsilon} R(z)z^{-\alpha}\, dz + (1 - e^{-2\pi i\alpha}) \int_\epsilon^r R(x)x^{-\alpha}\, dx = \\ = 2\pi i \sum_{Q(a)=0} \mathrm{Res}_a R(z)z^{-\alpha}.$$

Kako je $\lim\limits_{z \to \infty} zf(z) = 0$, dobija se

$$I_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{R(x)}{x^\alpha} dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi i\alpha}} \sum_a \mathrm{Res}_a R(z)z^{-\alpha}. \tag{2.124}$$

Neka je $S = \sum\limits_{Q(a)=0} \mathrm{Res}\,(f, a) = \sum\limits_{Q(a)=0} \mathrm{Res}_a R(z)z^{-\alpha}$. Kako je

$$\frac{1}{1 - e^{-2\pi i\alpha}} = \frac{e^{\pi i\alpha}}{2i\sin(\pi\alpha)},$$

iz formule (2.124) sledi

$$I = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}\, e^{i\pi\alpha}\, S. \tag{2.125}$$

Specijalno, ako je R realna i parna funkcija na $\mathbb{R}$, može se izračunati integral I_α pomoću sume reziduma funkcije f po singularitetima u gornjoj poluravni H.

Ponovimo, $g = e^{-\alpha \ln}$. Kako je $g(x) = e^{-\alpha \ln x} = |x|^{-\alpha}\, e^{-\alpha\pi i}$ za $x < 0$, integraleći po konturi sa slike, dobija se

$$I \cos^2 \alpha \frac{\pi}{2} = -\pi\, \mathrm{Im}\, S^+, \tag{2.126}$$

gde je S^+ suma reziduma funkcije f po singularitetima u gornjoj poluravni H.

Primer 19 (Ojlerov integral) *Pokazati*

$$O_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)x^\alpha} = \frac{\pi}{\sin(\pi\,\alpha)}, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{2.127}$$

Uputstvo: $1 - e^{-2\pi\, i\alpha} = 2ie^{-\pi\, i\alpha}\ \sin(\pi\alpha)$; neka je g_0 grana z^α definisana sa $g_0(z) = r^\alpha\, e^{i\alpha\varphi}$, $0 < \varphi < 2\pi$ (proveriti da je $g_0 = e^{\alpha \ln}$, gde je ln grana definisana u tipu 5!). Tada je $\varphi(-1) = \pi$, $g_0(-1) = 1^\alpha e^{i\alpha\pi} = e^{i\alpha\pi}$ i otuda $\mathrm{Res}(f,-1) = \dfrac{1}{g_0(-1)} = e^{-i\alpha\pi}$. Stoga, na osnovu formule (2.125), sledi formula (2.127). □

7. **Integral tipa** $I = \int\limits_0^{+\infty} R(x)\ln x\; dx$

Neka je R racionalna funkcija bez polova na $\mathbb{R}^+ = [0,+\infty)$, i neka je $\lim\limits_{z\to\infty} zR(z) = 0$ (tj. $n \le m-2$).

Postupajući kao u 5. i 6. (slika 2.19), sa $f(z) = R(z)(\ln z)^2$, dobija se

$$\int\limits_0^{+\infty} R(x)\ln^2 x\, dx \;-\; \int\limits_0^{+\infty} R(x)(\ln x + 2\pi i)^2\, dx \;=\; 2\pi i\, \sum_a \mathrm{Res}_a f.$$

Otuda

$$-2\int\limits_0^{+\infty} R(x)\ln x\, dx \;-\; 2\pi i \int\limits_0^{+\infty} R(x)\, dx \;=\; \sum_a \mathrm{Res}_a \left(R(z)\,(\ln z)^2\right).$$

Može se koristiti 5. da se izračuna $\int\limits_0^{+\infty} R(x)\, dx$ i otuda I.
Specijalno, ako je $R(x)$ realno za $x \in \mathbb{R}$, dobija se

$$I \;=\; \int\limits_0^{+\infty} R(x)\ln x\, dx \;=\; -\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\sum_a \mathrm{Res}_a \left(R(z)(\ln z)^2\right)\right) \tag{2.128}$$

i

$$\int\limits_0^{+\infty} R(x)\; dx \;=\; -\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Im}\left(\sum_a \mathrm{Res}_a \left(R(z)(\ln z)^2\right)\right). \tag{2.129}$$

Na isti način možemo dobiti, na primer:

a. $I_1 \;=\; \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\ln x}{(1+x)^3}\, dx = -\,\dfrac{1}{2}.$

Uputstvo: Neka je $f(z) = R(z)\,(\ln z)^2$, $R(z) = (1+z)^{-3}$ i $\Phi(z) = (1+$

$z)^3 f(z) = (\ln z)^2$. Tada je $\Phi' = 2J \ln z$ i otuda $\Phi'' = 2(J \cdot J - z^{-2} \ln z)$; kako je $\ln(-1) = i\pi$ i $\operatorname{Res}(f,-1) = 1 - i\pi$, na osnovu (2.128) i (2.129), nalazi se $I_1 = -\dfrac{1}{2}$ i $I_2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} (1+x)^{-3} dx = \frac{1}{2}$ (proveriti direktno). □

Specijalno, ako je u tipu 7. R parna, realna funkcija na realnoj osi, dobija se

$$\int_0^{+\infty} R(x) \ln x \, dx = -\pi \operatorname{Im} \left(\sum_{a \in H} \operatorname{Res}_a \left(R(z)(\ln z) \right) \right), \tag{2.130}$$

gde je H gornja poluravan. Na primer, izračunati

b. $I(a) = \int_0^{+\infty} R(x) \ln x \, dx$, gde je $R(z) = \dfrac{1}{z^2 + a^2}$ i $a > 0$.

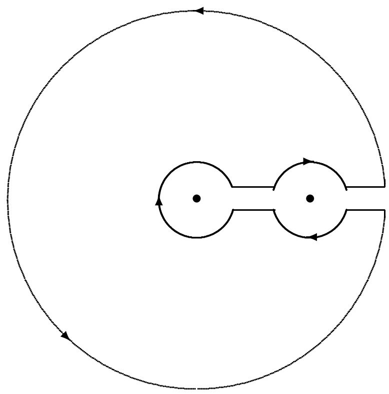
Uputstvo: $f = R \ln$, $\operatorname{Res}(f, ia) = \dfrac{\ln z}{2z}\Big|_{ia}$, $\operatorname{Im} \operatorname{Res}(f, i\,a) = -\dfrac{\ln a}{2a}$ i otuda, na osnovu (2.130), $I(a) = -\pi \operatorname{Im} \operatorname{Res}(f, i) = \pi \dfrac{\ln a}{2a}$. □

8. **Primena prethodnog metoda na** $I = \int_0^{+\infty} R(x) \ln x \, dx$

Pretpostavimo da R ima prost pol u $x = 1$. Neka je $f(z) = R(z) \ln^2 z$, gde je $\ln z$ definisan sa $\operatorname{Im} \ln z = \arg z \in (0, 2\pi)$ na $G = O_0 = \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}^+$; i neka je γ_r deo kružnog luka definisan sa $\gamma_r(t) = 1 + re^{it}$, $\pi \le t \le 2\pi$. Kako je

$$\lim_{\substack{z \to 1 \\ \operatorname{Im} z < 0}} (z-1) R(z) (\ln z)^2 = (\operatorname{Res}_1 R)\,(2\pi i)^2,$$

na osnovu Leme LJo1, $\lim\limits_{r \to 0} \int_{\gamma_r} f(z) dz = (\operatorname{Res}_1 R)\,(2\pi i)^2 \; \pi i$. Otuda, ako je R realno na $\mathbb{R}$, koristeći Žordanove leme kao u 7. i modifikujući prethodnu konturu kao na slici 2.20, dobija se



Slika 2.20: 8. tip

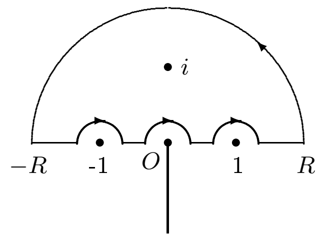
$$I = \pi^2 \operatorname{Res}_1 R - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \sum_{a \ne 1} \operatorname{Res}_a \left(R(z)(\ln z)^2 \right). \tag{2.131}$$

Primer 20

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 - 1} dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

Uputstvo: $\mathrm{Res}(R,1)=\dfrac{1}{2}$; f ima prost pol u -1 i kako je $\ln(-1)=i\pi$ i $\lim\limits_{z\to-1}(z+1)f(z)=\dfrac{(\ln(-1))^2}{-2}=\dfrac{\pi^2}{2}$, tj. $\mathrm{Res}(f,-1)=\dfrac{\pi^2}{2}$, na osnovu (2.131) sledi navedeni rezultat.

Alternativni postupak: Neka je ln grana Ln na $O_{-\pi/2}$ i $g(z)=\dfrac{\ln z}{z^2-1}$. Može se pokazati da funkcija g ima otklonjiv singularitet u tački 1, tako da se na slici može izostaviti polu-kružić sa centrom u tački 1. Kako je $\ln(-1)=i\pi$ i stoga $\mathrm{Res}(g,-1)=-\dfrac{i\pi}{2}$, integraleći po konturi kao na slici 2.21, dobija se $2I+i\pi\cdot I_1=\pi i\,\mathrm{Res}(g,-1)=\pi i\Big(-\dfrac{i\pi}{2}\Big)=\dfrac{\pi^2}{4}$, gde je



Slika 2.21: Alternativni postupak

$$I_1=\text{v.p.}\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2-1}.$$

Otuda je $I=\dfrac{\pi^2}{4}$ i $I_1=0$. Objasniti da g ima otklonjiv singularitet u 1, i da je

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2-1}=0,$$

gde v.p. (od franc. „valeur principale”) predstavlja glavnu vrednost integrala.

9. **Integral oblika** $I_m=\int\limits_0^{+\infty}R(x)(\ln x)^m dx,\ m\in\mathbb{N}$

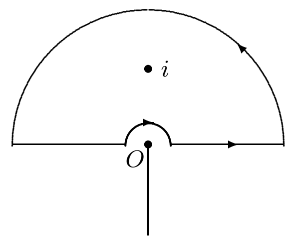
Jedan metod za izračunavanje ovog integrala zasniva se na integraciji funkcije $R(z)(\ln z)^{m+1}$ integraleći po konturi na slici 2.19, ako R nema polove na $\mathbb{R}^+$.

Specijalno ako je R parna, realna funkcija na realnoj osi, koja nema polove na $\mathbb{R}$, može se koristiti kontura na slici 2.22.

Primeri:

a. Izračunati I_m ako je $R(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$.

b. Dokazati indukcijom da je $I_m=0$ ako je m neparno.



Slika 2.22: 9. tip

Uputstvo: Neka je $g = \ln$ grana Ln na $O_{-\pi/2}$ i $f_m = R\, g^m$. Tada je

$$\begin{aligned} g(i) = i\frac{\pi}{2}\,, \quad \omega_m = \operatorname{Res}(f_m, i) = (\ln i)^m \operatorname{Res}(R, i) = \\ = \frac{1}{2i}\Big(i\,\frac{\pi}{2}\Big)^m, \quad J^+ = 2\pi\, i\,\omega_m = \pi\Big(i\,\frac{\pi}{2}\Big)^m. \end{aligned} \tag{2.132}$$

Otuda je

$$\operatorname{Re} J^+ = \operatorname{Re}(2\pi i\omega_m) = \begin{cases} \pi(-1)^p\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^{2p}, & \text{m=2p, paran,} \\ \operatorname{Re}\Big(\pi(-1)^p i\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^{2p+1}\Big) = 0, & \text{m=2p+1, neparan.} \end{cases}$$

Otuda sledi prvo da je $I_1 = 0$, i kako je za $x < 0$, $g(x) = \ln|x| + i\pi$,

$$g(x)^2 \;=\; (\ln|x|)^2 \;+\; 2i\pi\,\ln|x| \;-\; \pi^2$$

i

$$g(x)^3 \;=\; (\ln|x|)^3 \;+\; 3i\pi\ln^2|x| \;-\; 3\pi^2\ln|x| \;-\; i\pi^3,$$

dobija se respektivno

$$2I_1 \;+\; i\pi I_0 \;=\; \pi i\,\frac{\pi}{2} \quad , \quad 2I_2 \;+\; 2i\pi I_1 \;-\; \pi^2 I_0 \;=\; -\pi\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^2,$$

$$2I_3 \;+\; 3i\pi I_2 \;-\; 3\pi^2 I_1 \;-\; i\pi^3 I_0 \;=\; -\pi i\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^3$$

i otuda $I_0 = \pi/2$, $I_1 = 0$, $I_2 = (\pi/2)^3$ i $I_3 = 0$. □

Za izračunavanje integrala u tački (b) može se koristiti smena $x = \mathcal{J}(t)$.

c. Izračunati I_m ako je $R(z) \;=\; \dfrac{1}{(z^2+1)^2}$.

Uputstvo: Funkcija R ima u i pol drugog reda; neka je $\Phi \;=\; (z-i)^2 f$, $\Phi \;=\; (z+i)^{-2}\; g^m$. Tada je $g' \;=\; J$, $\Phi' \;=\; g^{m-1}(z+i)^{-2}\Big(\dfrac{m}{z} - 2(z+i)^{-1}\; g\Big)$ i $\operatorname{Res}(f, i) \;=\; \Phi'(i)$. □

d. Izračunati $I \;=\; I_m(a) \;=\; \int\limits_0^{+\infty} R(x)\ln^m x\; dx$, gde je $R(z) \;=\; \dfrac{1}{z^2+a^2}$ i $a > 0$.

10. **Integral oblika** $J \;=\; J(\alpha, p) \;=\; \int\limits_0^{+\infty} x^\alpha\, R(x)\,(\ln x)^p\; dx,\; p \in \mathbb{N}.$

Neka je $-1 < \alpha < 0$ i neka je R racionalna funkcija pri čemu $R(z) \to 0$ kada $z \to \infty$. Pretpostavimo dodatno da racionalna funkcija R nema polova na $\mathbb{R}^+$. Jedan metod za izračunavanje ovog integrala zasniva se na diferenciranju integrala

$$I = I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} x^\alpha\, R(x)\, dx.$$

Neka je $g(x,\alpha) = x^\alpha R(x) = e^{\alpha \ln x} R(x)$. Kako je $g_\alpha(x,\alpha) = \ln x\ e^{\alpha \ln x} R(x) = x^\alpha R(x) \ln x$, diferenciranjem prethodnog integrala po parametru α dobija se

$$I'(\alpha) = J = J(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^\alpha R(x) \ln x \, dx.$$

Posle p diferenciranja dobija se integral $J(\alpha, p)$.

Drugi metod se bazira na integraciji funkcije $f = \Upsilon\, R(\ln)^p$, gde je $\Upsilon = e^{\alpha \ln}$, duž konture na slici 2.19.

Kako je, za $x > 0$, $\Upsilon^+(x) = x^\alpha$, $\Upsilon^-(x) = e^{i\alpha 2\pi}\Upsilon^+(x) = e^{i\alpha 2\pi} x^\alpha$, $\ln^+ x = \ln x$ i $\ln^- x = \ln x + i2\pi$, dobija se
$\Upsilon^+(x) \ln^+ x - \Upsilon^-(x) \ln^- x = \Upsilon^+(x) \ln x - e^{i\alpha 2\pi}\Upsilon^+(x)(\ln x + i2\pi)$. Otuda je $\Upsilon^+(x) \ln^+ x - \Upsilon^-(x) \ln^- x = (1 - e^{i\alpha 2\pi})\, \Upsilon^+(x) \ln x - i2\pi\, e^{i\alpha 2\pi}\, \Upsilon^+(x)$, i stoga $f^+(x) - f^-(x) = (1 - e^{i\alpha 2\pi})\, R(x)\, \Upsilon^+(x) \ln x - i2\pi\, e^{i\alpha 2\pi}\, R(x)\, \Upsilon^+(x)$, tj.

$$f^+(x) - f^-(x) = (1 - e^{i\alpha 2\pi})\, R(x)\, x^\alpha \ln x - i2\pi\, e^{i\alpha 2\pi}\, R(x)\, x^\alpha.$$

Otuda, na primer, za izračunavanje integrala $J = J(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^\alpha R(x) \ln x \, dx$, dobija se

$$(1 - e^{2\pi i\alpha})\, J - 2\pi i\, e^{2\pi i\alpha} I = 2\pi i\, S, \tag{2.133}$$

gde je $I = I(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^\alpha R(x)\, dx$. Specijalno, ako je R parna, realna funkcija na realnoj osi onda se integraleći f duž kontura na slici 2.22 može izvesti

$$(1 - e^{\pi i\alpha})\, J - \pi i\, e^{\pi i\alpha} I = 2\pi i\, S^+, \tag{2.134}$$

gde je S^+ suma reziduma f u gornjoj poluravni.
Na primer,

a. za $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ i $R(z) = (z+1)^{-2}$ izračunati I i J.

b. za $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ i $R(z) = (z^2+1)^{-2}$ izračunati I i J.

Uputstvo za a:
Neka je $\Upsilon = e^{-\ln/2}$ i $\Phi = \Upsilon \ln$; kako je $\Phi' = -\dfrac{1}{2}\Upsilon J \ln + \Upsilon J$, $\ln(-1) = i\pi$ i $\Upsilon(-1) = -i$, dobija se $\operatorname{Res}(f, -1) = \Phi'(-1) = \dfrac{\pi}{2} + i$, i na osnovu (2.133), $J = -\pi$, $I = \dfrac{\pi}{2}$. □

2.4.3 Neki poznati integrali

1. Ojler-Fresnelovi integrali

$$F_1 = \int_0^{+\infty} \cos x^2 \, dx, \quad F_2 = \int_0^{+\infty} \sin x^2 \, dx.$$

Rešenje: Neka je $f(z) = e^{iz^2}$, $l_R = [0, R\, e^{i\pi/4}]$ i $\gamma_R : z = R\,e^{i\varphi}$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}$.
Tada je

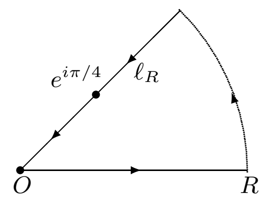
$$\int_{[0,R]} f\ dz\ +\ \int_{\gamma_R} f\ dz\ =\ \int_{l_R} f\ dz. \tag{2.135}$$

Kako je $l_R : z = \rho\, e^{i\pi/4}$, $0 \le \rho \le R$, i otuda $z^2 = \rho^2\, e^{i\pi/2} = i\rho^2$, dobija se

$$\int_{l_R} f(z)\, dz = e^{i\pi/4} \int_0^R e^{-\rho^2} d\rho. \tag{2.136}$$

Dokažimo

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f\, dz = 0. \tag{2.137}$$



Slika 2.23: Ojler-Fresn. int.

Koristeći smenu

$$\omega = z^2\ (d\omega = 2z\, dz,\ z = \sqrt{\omega} = \sqrt{|\omega|}\ e^{\frac{i\ \arg\omega}{2}},\ 0 \le \arg\omega \le \frac{\pi}{2})$$

$$I_R\ =\ \int_{\gamma_R} f\ dz\ =\ \frac{1}{2} \int_{\gamma_{R^2}} \frac{e^{i\omega}}{\sqrt{\omega}}\ d\omega.$$

Kako $\dfrac{1}{\sqrt{\omega}} \to 0$, kada $|\omega| \to +\infty$, na osnovu Žordanove Leme (LJo3) dobija se (2.137).
Kada $R \to +\infty$, na osnovu (2.135), (2.136) i (2.137), sledi

$$\int_0^{+\infty} f\, dx = e^{i\pi/4} \int_0^{+\infty} e^{-\rho^2}\, d\rho,$$

i otuda, kako je $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\rho^2}\, d\rho = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, dobija se $F_1 = F_2 = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

□

2. Dokazati da je $\displaystyle P\ =\ \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\ dx\ =\ \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Dokaz: Na osnovu Fubinijeve teoreme sledi

$$P^2 = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy = \int_0^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho^2} \rho\, d\rho\, d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} e^{-\rho^2} \rho\, d\rho = \frac{\pi}{4}$$

i otuda $P = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. □

3. (Ojlerov integral) Neka je $I = O(a) = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{t^{a-1}}{1+t} dt$ i $J = O_1(a) =$ v.p. $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x^{a-1}}{1-x}\, dx$.

Dokazati da integrali konvergiraju za $0 < a < 1$ i da je $I = \dfrac{\pi}{\sin(a\pi)}$, a $J = I\cos(a\pi) = \pi \operatorname{ctg}(a\pi)$ u tom slučaju.

Dokaz: Neka je grana funkcije z^{a-1} na $\overline{H} = \{z \,:\, y \geq 0\}$ definisana sa

$$g(z) = e^{(a-1)\ln z}, \ \ln z = \ln|z| + i \arg z, \quad 0 \leq \arg z \leq \pi.$$

Dakle,

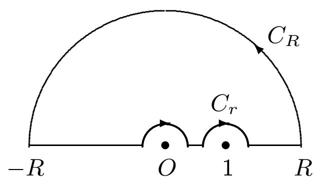
$$g(z) = e^{(a-1)\ln|z|} e^{i(a-1)\arg z} = |z|^{a-1} e^{i(a-1)\arg z}.$$

Kako je za $x < 0$, $\arg x = \pi$, dobijamo

$$g(x) = |x|^{a-1} e^{i(a-1)\pi} = -e^{ia\pi}\, |x|^{a-1}. \tag{2.138}$$

Neka je $f(z) = \dfrac{g(z)}{1-z}$. S obzirom na to da za $z \in H$, $z\, f(z) \to 0$, kada $z \to 0$, ili $|z| \to +\infty$, i da $(z-1)\, f(z) = -g(z) \to -1$, kada $z \to 1$, na osnovu Žordanove leme, dobija se

$$\text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\, dx = -\pi\, i.$$



Slika 2.24: Ojlerov integral

Na osnovu (2.138)

$$J_1 = \int\limits_{-\infty}^{0} f\, dx = -e^{ia\pi} \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{|x|^{a-1}}{1-x}\, dx.$$

Otuda, ako je $I = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{t^{a-1}}{1+t}\, dt$, sledi

$$J_1 = -e^{ia\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t}\, dt = -e^{ia\pi} I, \quad \text{i} \quad -e^{ia\pi} I + J = -\pi i\,;$$

izdvajanjem realnog i imaginarnog dela, dobija se

$$\left.\begin{aligned} -I\,\cos(a\pi) + J &= 0 \\ -I\,\sin(a\pi) &= -\pi \end{aligned}\right\}$$

i otuda

$$I = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}, \quad J = I\,\cos(a\pi) = \pi\,\mathrm{ctg}(a\pi).$$

□

4. Beta funkcija je $\quad B(p,q) = \int\limits_0^1 t^{p-1}\,(1-t)^{q-1}\,dt, \quad p,q > 0.$

Dokazati

$$B(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \quad 0 < p < 1.$$

Dokaz: Na osnovu smene $t = \dfrac{1}{x+1}$, $B(p,q) = \int\limits_0^{+\infty} (1+x)^{-p-q}\,(x)^{q-1}\,dx$ i otuda na osnovu Primera 1 (tip 6, formula (2.127)), sledi

$$B(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \quad 0 < p < 1.$$

□

5. Neka je $\quad I(a) = \text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{e^{at}}{1-e^t}\,dt,\ \ 0 < a < 1$. Dokazati da je

$$I(a) = \pi\,\mathrm{ctg}\,(a\pi)$$

Dokaz: Smenom $x = e^t$ $(dx = e^t dt,\ dt = x^{-1}dx)$, i na osnovu Primera 3, dobija se

$$I(a) = \text{v.p.} \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1-x}\,dx = \pi\mathrm{ctg}(a\pi).$$

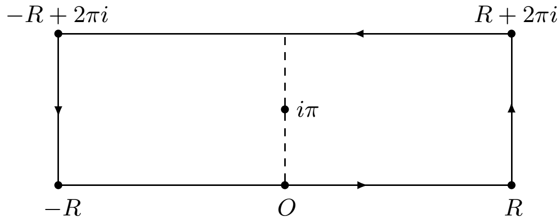
□

6. Ojlerov integral

$$O_2(a) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx, \quad 0 < a < 1.$$

Na osnovu smene $t = e^x$ i Primera 1 (tip 6, formula (2.127)), dobija se

$$O_2(a) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t}\,dt = \frac{\pi}{\sin(a\pi)} \quad 0 < a < 1.$$



Slika 2.25: Ojlerov integral

Alternativni postupak: Integraliti funkciju $f(z) = \dfrac{e^{az}}{1+e^z}$ duž granice pravougaonika sa temenima $-R$, R, $R+2\pi i$, $-R+2\pi i$. □

7. Funkcija $P_r(\theta) = \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$ naziva se Puasonovo jezgro.
Dokazati

a. $P_r(\theta) = \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2} = \operatorname{Re}\dfrac{1+z}{1-z}$.

b. $P_r(\theta) = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} r^{|k|}\, e^{ik\theta}, \quad 0 \le r < 1.$

c. Puasonov integral:

$$I_r = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2r\cos\theta+r^2} = \frac{2\pi}{1-r^2}, \qquad 0 \le r < 1.$$

Uputstvo: Tačka b. sledi iz $\dfrac{1+z}{1-z} = 1 + 2\sum\limits_{k=1}^{+\infty} z^k$;
Integraleći član po član red u tački b., dobija se c. (videti tip 2, formula (2.120)). □

8. Dokazati

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\, dt = \frac{\pi}{2}. \tag{2.139}$$

Dokaz: Kako je $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\, dt$, $\sin^2 t = \dfrac{1-\cos 2t}{2}$ i $\cos 2t = \operatorname{Re} e^{i2t}$, sledi $I = \operatorname{Re}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$, gde je $f(x) = \dfrac{1}{4}\dfrac{1-e^{2ix}}{x^2}$. Definišimo $f(z) = \dfrac{1}{4}\dfrac{1-e^{2iz}}{z^2}$. Kako je $1-e^{2iz} = -\left(2iz + \dfrac{(2iz)^2}{2!} + \cdots\right)$, funkcija f ima u 0 prost pol (prvog reda) i $\operatorname{Res}(f,0) = -\dfrac{1}{2}\, i$. Otuda je

$$I = \operatorname{Re}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \operatorname{Re}(\pi i \operatorname{Res}_0 f) = \frac{\pi}{2}\,.$$

□

9. Izvesti alternativni dokaz Žordanove nejednakosti (videti Lemu 2.13 (LJo3)). Ako je $\lambda > 0$, dokazati da postoji apsolutna konstanta M, tako da je

$$J_R = \int_0^{\pi/2} e^{-\lambda R \sin\theta}\, d\theta < \frac{M}{\lambda R}, \quad R > 0.$$

Uputstvo: Podeliti integraciju na $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ i $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$; u prvom intervalu $\cos t \geq \frac{1}{2}$, a na drugom $\sin t \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$. □

2.4.4 Vežbe

1. a. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

   b. $\displaystyle J(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(a+bx^2)^n}\, dx, \quad a > 0,\ b > 0,\ n \in \mathbb{N}$.

   Uputstvo: $J(a,b) = a^{-n}\sqrt{a/b}\, I_n$, gde je $I = I_n = J(1,1)$. Neka je $f(z) = (1+z^2)^{-n}$. Funkcija f ima jedini singularitet u tački i, pol reda n, u gornjoj poluravni $\overline{H}$. Neka je $\Phi = (z+i)^{-n}$ i $\Psi = \dfrac{\Phi^{(n-1)}}{(n-1)!}$. Iz $\Phi^{(n-1)}(z) = (-1)^{n-1}\dfrac{(2n-2)!}{(n-1)!}(z+i)^{-2n+1}$, sledi $S^+ = \Psi(i) = (-1)^{n-1} a_n (2i)^{-2n+1}$, gde je $a_n = \dfrac{n(n+1)\cdots(2n-2)}{(n-1)!}$. Otuda na osnovu formule (2.118), tip 1, dobija se $I = 2\pi i S^+ = \pi A_n$, gde je $A_n = \dfrac{a_n}{2^{2n-2}}$. Kako je $2^{n-1}(n-1)! = (2n-2)!!$, nalazi se $A_n = \dfrac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} = \dfrac{(2n-3)!!}{2^{n-1}(n-1)!}$, $n \geq 2$, $A_1 = 1$.
   Alternativno rešenje: Pomoću parcijalne integracije ($u(t) = (1+t^2)^{-n}$, $v(t) = t$), pokazati da je $2nI_{n+1} = (2n-1)I_n$. Otuda je, na primer, $I_1 = \pi$ i $I_2 = \pi/2$. □

2. a. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}},\ a > 1$.

   b. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{a+\sin^2\theta} = \frac{\pi}{2\,(a(a+1))^{\frac{1}{2}}},\ a > 0$.

3. a. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{\pi(|a|+1)e^{-|a|}}{4}.$

b. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{(x^2+b^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{4b^3}(1+ab)e^{-ab},\ a>0,\ b>0.$

c. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3\sin(ax)}{x^4+4}\,dx = \pi e^{-a}\cos a,\ a>0.$

4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x - 1}{x^2}\,dx.$

Uputstvo: Svesti na Primer 8 (videti formulu (2.139)), ili izračunati direktno integraleći funkciju $f(z) = \dfrac{e^{iz}-1}{z^2}$ duž konture kao u Primeru 8. sekcije 2.4.3. □
Da li se može koristiti formula (2.122) iz tipa 4?

5. a. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{-1/2}}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$

b. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x^4)^3}\,dx.$

Uputstvo: b. Koristiti granicu sektora $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{2}$; $z_0 = e^{i\pi/4}$, $g = e^{\frac{1}{2}\ln}$, $\Phi = \big((z^2+i)(z+z_0)\big)^{-3} g$, $\mathrm{Res}(f,z_0) = \Phi^{(2)}(z_0)/2!$. □

c. Neka je $I(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^a}{(x^2+1)^2}\,dx$. Dokazati da je $I(a) = \dfrac{(1-a)\pi}{4\cos(a\pi/2)}$, za $a \neq 1, -1 < a < 3$, i $I(1) = \dfrac{1}{2}$.

Uputstvo: Neka je $g = e^{a\ln}$, gde je ln grana Ln na O_0, $\Phi = (z-i)^2\, f$ i $\varphi_0 = a\pi/2$;
kako je $\Phi = (z+i)^{-2}\, g$, $g' = a\,gJ$ i $\Phi' = g(z+i)^{-2}\Big(\frac{a}{z} - 2\,(z+i)^{-1}\Big)$,
sledi $\mathrm{Res}(f,i) = \Phi'(i) = i\dfrac{a-1}{4}\, e^{i\varphi_0}$;
slično se dobija $\mathrm{Res}(f,-i) = \Phi'(-i) = -i\dfrac{a-1}{4}\, e^{3i\varphi_0}$, i otuda $S = \dfrac{a-1}{2}e^{2i\varphi_0}\sin\varphi_0$.
Alternativni postupak:

Na osnovu formule (2.125) (preciznije (2.126)), tip 6, nalazi se $I\cos^2 a\dfrac{\pi}{2}$ $= -\pi \mathrm{Im}\, S^+$, i otuda, kako je $\mathrm{Im}\, S^+ = \mathrm{Im}\,\Phi'(i) = \dfrac{a-1}{4}\cos\left(a\dfrac{\pi}{2}\right)$, dobija se c. □

6. a. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\, dx \;=\; 0.$

b. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)^2}\, dx \;=\; -\frac{\pi}{4}.$

c. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\ln x)^3}{1+x^2}\, dx \;=\; 0.$

d. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{1+x+x^2}\, dx \;=\; \frac{16}{81}\,\frac{\pi^3}{\sqrt{3}}.$

Uputstvo: Proveriti a. i c. pomoću smene $x = \mathcal{J}(t)$, a zatim b. pomoću formule (2.128), tip 7. Videti, takođe, Primer c. (tip 9). □

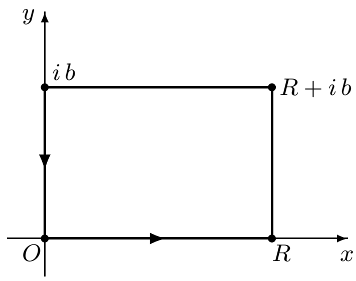
7. Direktno izračunati Ojlerov integral

$$O_2(a) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^{ax}}\, dx \;=\; \frac{\pi}{\sin(a\pi)}\,, \;\; 0 < a < 1.$$

Uputstvo: Integraliti funkciju $f(z) \;=\; \dfrac{e^{az}}{1+e^{az}}$ duž granice pravougaonika sa temenima $-R$, R, $R+2\pi i$, $-R+2\pi i$. □

8. Dokazati $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(2bx)\, dx \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{-b^2},\;\; b > 0.$

Uputstvo: Integraliti funkciju $f(z) = e^{-z^2}$ po konturi na slici 2.26 i koristiti $P \;=\; \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$ □



Slika 2.26:

2.5 Mitag-Leflerova teorema

Definicija 2.15 *Red meromorfnih funkcija naziva se konvergentan (resp. ravnomerno konvergentan) na skupu M ako samo konačno članova reda ima polove na M i ako posle udaljavanja tih članova red konvergira (resp. ravnomerno konvergira) na skupu M.*

Neka je $\{a_n\}$ niz različitih kompleksnih brojeva takvih da $a_n \to \infty$ kada $n \to +\infty$. Za svako $n \geq 1$ neka su dati kompleksni brojevi A_1^n, A_2^n, ..., $A_{m_n}^n$ i neka je

$$S_n(z) = \sum_{k=1}^{m_n} \frac{A_k^n}{(z-a_n)^k}.$$

Teorema 2.40 (Mitag-Leflerova teorema) *Postoji meromorfna funkcija f koja ima polove u svim tačkama a_n i samo tim tačkama, pri čemu glavni (singularni) deo f u a_n je S_n.*

Uputstvo: Bez gubitka opštosti može se pretpostaviti da je $a_n \neq 0$ i da su a_n numerisani u poretku neopadajućih modula: $|a_n| \leq |a_{n+1}|$ (n=1, 2, ...). Fiksirajmo q, $0 < q < 1$, i označimo $K_n = U_{q\,|a_n|}$ i $B_n = U_{|a_n|}$.
S_n se može ravnomerno na K_n približiti polinomom P_n stepena p_n tako da je za sve $z \in K_n$

$$|S_n - P_n| < \frac{1}{2^n} \ \ (n = 1, 2, \ldots).$$

Proveriti da red

$$f = h + \sum_{k=1}^{+\infty} (S_k - P_k)$$

ravnomerno konvergira na svakom kompaktu K iz $\mathbb{C}$ u smislu Definicije 2.15. □
Meromorfna funkcija f može se predstaviti u obliku reda

$$f = h + \sum_{k=1}^{+\infty} (S_k - P_k),$$

koji ravnomerno konvergira na svakom kompaktu, gde je h cela funkcija, S_k glavni deo i P_k neki polinomi.

Vežba 2.5.1 *Dokazati*

$$\frac{1}{\sin^2 z} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-k\pi)^2}$$

Vežba 2.5.2 *Dokazati*

$$\mathrm{ctg} z - \frac{1}{z} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' \left(\frac{1}{z-k\pi} + \frac{1}{k\pi} \right)$$

U ovoj sumi $'$ označava da suma ne uključuje $k = 0$.

Vežba 2.5.3 *a) Odrediti singularitete funkcije* $f(z) = z^{-2}\dfrac{1}{e^z - 1}$ *i izračunati rezidume u njima.*
b)Neka je $r = r_n = (2n+1)\pi$, *i* K_n *pozitivno orijentisana kružnica poluprečnika* r_n *sa središtem u kordinatnom početku;*
Dokazati $\int_{K_n} f(z)\,dz$ *teži nuli kada* $n \to \infty$.
c) Izračunati

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

a) Kako je $e^z = 1$ ako i samo ako $z = z_n = 2n\pi i$, $n \in \mathbb{Z}$; za $n \neq 0$ f ima proste polove u tačkama z_n; neka je $\Psi(z) = \dfrac{z^{-2}}{(e^z-1)'} = \dfrac{z^{-2}}{e^z}$; tada $s_n = \mathrm{Res}(f; z_n) = \Psi(z_n) = \dfrac{(2n\pi\, i)^{-2}}{e^{2n\pi\, i}}$ i stoga

$$s_n = \mathrm{Res}(f; z_n) = \frac{1}{(2\pi n)^2} = -\frac{1}{4\pi^2 n^2}, \quad n \neq 0.$$

Za $n = 0$, f ima pol trećeg reda u tački $z_0 = 0$; koristićemo razvoj f u Loran-ov red da proverimo da je $s_0 = \mathrm{Res}(f; 0) = \frac{1}{12}$; Neka je
$\Phi(z) = z^3 f(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$.
Tada je

$$\Phi(z) = (1{+}z/2{+}z^2/6{+}o(z^2))^{-1} = 1{-}z/2{-}z^2/6{+}z^2/4{+}o(z^2) = 1{-}z/2{+}z^2/12{+}o(z^2);$$

i stoga, kako je

$$f(z) = z^{-2}\frac{1}{e^z-1} = z^{-3}\Phi(z),$$

sledi $f(z) = z^{-3}(1 - z/2 + z^2/12 + o(z^2)) = z^{-3} - \dfrac{1}{2z^2} + \dfrac{1}{12z} + \cdots$.
Dakle $c_{-1} = \dfrac{1}{12} = s_0$.
b) ponovimo $r = r_n = (2n+1)\pi$; neka je $T_n = \{|z| = r_n\}$; proveriti da je $|e^z - 1| \geq 1 - e^{-1}$ za $z \in T_n$.
Neka je $M_n = max\{|zf(z)| : z \in T_n\}$. Proveriti, da $M_n \to 0$ i otuda iz Žordan leme sledi b).

c)Na osnovu Košijeve teoreme o rezidumima,

$$\int_{K_n} f(z)\,dz = 2\pi i \left(\sum_{k=-n}^{n} s_k - \frac{1}{12} \right).$$

Otuda, na osnovu b), dobija se prvo $(2\sum_{k=1}^{n} s_k - \frac{1}{12}) \to 0$; i zatim, primenom a),

$$\left(-2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4\pi^2 k^2} - \frac{1}{12} \right) \to 0;$$

i stoga $s = \pi^2/6$.

GLAVA 3

Konformna i bilinearna preslikavanja

3.1 Konformno preslikavanje

Konformno preslikavanje čuva uglove

Definicija 3.1 *Funkcija (preslikavanje) f je konformna u tački $z \in \mathbb{C}$ ako ima izvod u toj tački i ako je $f'(z) \neq 0$; f je konformna u oblasti Ω ako je $1-1$ na Ω i konformna u svakoj tački oblasti Ω.*

Teorema 3.1 *Pretpostavimo da važi:*

(a) *f je definisana u nekoj okolini W tačke z, postoji $p = f'(z)$ i neka je $w = f(z)$;*

(b) *put $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to W$ i neka je $z = \gamma(s)$, $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$;*

(c) *postoji $\dot{\gamma} = \gamma'(s)$;*

(d) *$\Gamma = f \circ \gamma$.*

Tada je:

(1) $\Gamma'(s) = f'(z)\gamma'(s)$, *odnosno*

(2) $\dot{\Gamma} = p\dot{\gamma}$.

Ako dodatno pretpostavimo:

(e) *$p \neq 0$ i γ ima tangentu u tački $z = \gamma(s)$, tj. $\dot{\gamma} \neq 0$,*

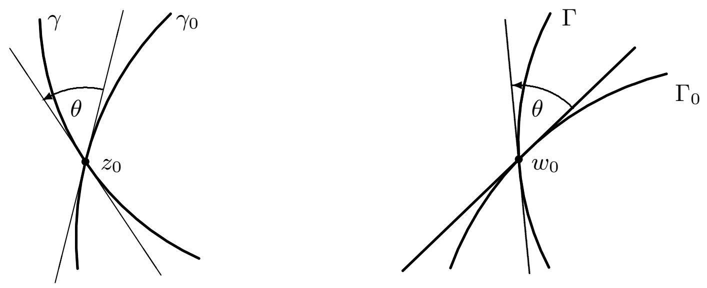
tada Γ ima tangentu u $w = \Gamma(s) = f(\gamma(s))$ i važi (1).

Neka je $l = df$ u tački z. Ponovimo, kako je $f(z+h) = f(z) + f'(z)h + o(h)$, kada $h \to 0$, to je $l(h) = ph$, gde je $p = f'(z)$, $h \in T_z$ i T_z tangentni prostor u tački z; otuda (2) možemo napisati u obliku

(3) $\quad \dot{\Gamma} = l(\dot{\gamma})$.

Neka put γ_0 ispunjava uslove $(b), (c)\, i\, (e)$ prethodne teoreme. Specijalno, neka je $z = \gamma_0(s)$, odnosno, neka putevi γ i γ_0 prolaze kroz fiksiranu tačku z. Uvedimo sledeću definiciju.

Definicija 3.2 *Merni broj θ orijentisanog ugla između puteva γ i γ_0 je merni broj orijentisanog ugla između vektora $\dot{\gamma}$ i $\dot{\gamma_0}$.*

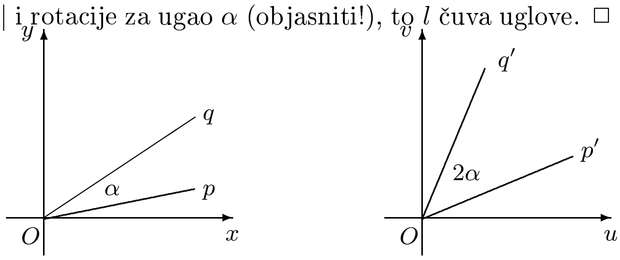


Slika 3.1: Konformno preslikavanje čuva uglove

Teorema 3.2 (Konformno preslikavanje čuva uglove, Konf ču) *Pretpostavimo da funkcija f, putevi γ i γ_0 ispunjavaju gornje uslove i neka je $\Gamma_0 = f \circ \gamma_0$. Tada je merni broj θ orijentisanog ugla između γ i γ_0 jednak mernom broju $\tilde{\theta}$ orijentisanog ugla između Γ i Γ_0, videti sliku 3.1.*

Dokaz: Skicirajmo dokaz: Neka je $l = df$ u tački z. Ponovimo da je $l(h) = ph$, gde je $p = f'(z)$, $h \in T_z$ i T_z tangentni prostor u tački z. Neka je $p = |p|e^{\alpha}$ zadato u eksponencijalno-polarnoj formi. Na osnovu formule (3), kako je l kompozicija homotetije sa koeficijentom $|p|$ i rotacije za ugao α (objasniti!), to l čuva uglove. □

Preslikavanje $f(z) = z^2$ nije konformno u tački 0. Svojstvo očuvanja uglova ne važi: ugao između polupravih sa početkom u 0 pri ovom preslikavanju je dva puta veći, videti sliku 3.2.



Slika 3.2: Preslikavanje koje ne čuva uglove

3.2 Bilinearna preslikavanja

3.2.1 Invarijantnost

Ako su a, b, c i d kompleksni brojevi takvi da je $ad - bc \neq 0$, preslikavanje

$$w = L(z) = \frac{az + b}{cz + d} \tag{3.1}$$

nazivamo *bilinearno* (linearna frakciona transformacija). Pogodno je da razmatramo (3.1) kao preslikavanje $\overline{\mathbb{C}}$ u $\overline{\mathbb{C}}$ sa očiglednom konvencijom u ∞. Na primer, $-d/c$ se preslikava u ∞ i ∞ se preslikava u a/c ako je $c \neq 0$.

Jednostavno se proverava da bilinearno preslikavanje jednolisno preslikava $\overline{\mathbb{C}}$ na $\overline{\mathbb{C}}$. Štaviše, svako bilinearno preslikavanje je kompozicija sledećih preslikavanja:
(a) Translacija $T(z) = T_\omega(z) = z + \omega$.
(b) Rotacija $R(z) = R_\alpha(z) = e^{i\alpha}z$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (tj. $R_a(z) = az$, $|a| = 1$).
(c) Homotetija $H(z) = sz$, $s > 0$.
(d) Inverzija $J(z) = 1/z$.

Ako je $c = 0$ u (3.1), tvrđenje je očigledno. Ako je $c \neq 0$, tvrđenje sledi iz identiteta:

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{\lambda}{cz + d}, \qquad \lambda = \frac{bc - ad}{c}. \tag{3.2}$$

Jednostavno se proverava da prva tri tipa preslikavaju prave linije na prave linije i kružnice na kružnice. Ovo nije tačno za inverziju. Ali, ako uslovno kružnicom na $\overline{\mathbb{C}}$ nazovemo proizvoljnu kružnicu ili pravu na $\mathbb{C}$, tada J „čuva" kružnice na $\overline{\mathbb{C}}$ i otuda svako bilinearno preslikavanje „čuva" kružnice u $\overline{\mathbb{C}}$. Dokaz je jednostavan.

Iz elementarne analitičke geometrije poznato je da je opšta jednačina kružnice u $\overline{\mathbb{C}}$

$$Ez\overline{z} + Fz + \overline{F}\overline{z} + G = 0, \tag{3.3}$$

gde su E i G realne konstante, F kompleksan broj i $|F|^2 > EG$. Ako je $E \neq 0$ u (3.3), ona definiše kružnicu, a ako je $E = 0$, definiše pravu liniju. Iz pedagoških razloga dokažimo ovu činjenicu.

Kako je $|z - a|^2 = (z - a)\overline{(z - a)} = |z|^2 - \overline{a}z - a\overline{z} + |a|^2$ jednačina kružnice $|z - a| = r$ može se napisati u obliku $|z|^2 - \overline{a}z - a\overline{z} + |a|^2 - r^2 = 0$. U nameri da ova jednačina obuhvata i prave linije množi se sa realnom konstantom E. Otuda se dobija opšta jednačina kružnice u $\overline{\mathbb{C}}$: $Ez\overline{z} + Fz + \overline{F}\overline{z} + G = 0$, gde je za $E \neq 0$, $F = -E\overline{a}$ i $G = E(|a|^2 - r^2)$ realan broj.
U vezi jednačine (3.3), razlikujemo dva slučaja:
1. Ako je $E \neq 0$, tada je $r^2 = (|F|^2 - EG)/E^2$ i otuda $|F|^2 > EG$. U ovom slučaju (3.3) je jednačina euklidske kružnice u $\mathbb{C}$.

2. Ako je $E = 0$, jednačina (3.3) se svodi na $(z, \overline{F}) = -G/2$; jednačinu prave linije ortogonalne na vektor $\overline{F}$.

$w(z) = J(z) = 1/z$ je slika z pri inverziji J akko

$$z = Jw = \frac{1}{w}. \tag{3.4}$$

Ako z zadovoljava (3.3), zamenom z i $\overline{z}$ respektivno sa $1/w$ i $1/\overline{w}$, (3.3) se transformiše u

$$E + F\overline{w} + \overline{F}w + Gw\overline{w} = 0,$$

a ovo je jednačina kružnice.

Teorema 3.3 (Kružno svojstvo) *Bilinearno preslikavanje preslikava kružnice iz $\overline{\mathbb{C}}$ na kružnice u $\overline{\mathbb{C}}$.*

Definicija 3.3 (Simetrične tačke) *Tačke z i z^* nazivaju se simetričnim u odnosu na kružnicu $K = K(z_0; R)$ ako pripadaju zraku (polupravoj) sa početkom u centru z_0 kružnice K i ako je proizvod njihovih rastojanja do centra kružnice jednak kvadratu poluprečnika; tj. ako je*
(a) $\operatorname{Arg}(z^* - z_0) = \operatorname{Arg}(z - z_0)$ *i*
(b) $|z^* - z_0||z - z_0| = R^2$.

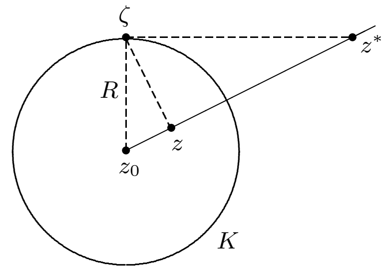
Ako je $z^* - z_0 = |z^* - z_0|e^{i\theta}$, tada je, na osnovu (a), $z - z_0 = |z - z_0|e^{i\theta}$.
Dalje je, na osnovu (b),

$$z^* - z_0 = \frac{R^2}{|z - z_0|}\, e^{i\theta} = \frac{R^2}{|z - z_0|e^{-i\theta}}$$

i otuda

$$z^* - z_0 = \frac{R^2}{\overline{(z - z_0)}}. \tag{3.5}$$

Na slici 3.3 je data konstrukcija. Ako $z \in \operatorname{Int}(K)$, konstruiše se normala na zrak z_0z do preseka sa K u tački ζ, a iz ζ tangenta na K do preseka sa zrakom u tački z^*. Ako $z \in \operatorname{Ext}(K)$, konstrukcija se izvodi u obrnutom poretku (dokaz sledi iz sličnosti pravouglih trouglova $z_0z\zeta$ i $z_0\zeta z^*$).

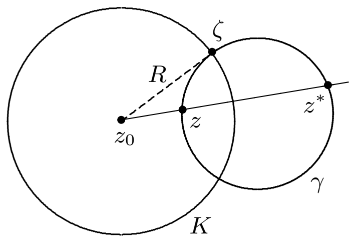


Slika 3.3: Simetrične tačke

Koristeći elementarnu geometriju dobija se sledeće svojstvo koje karakteriše simetrične tačke:

Propozicija 3.1 (Geometrijske karakteristike simetrične tačke) *Tačke z i z^* su simetrične u odnosu na kružnicu K akko je svaka kružnica γ u $\overline{\mathbb{C}}$ koja sadrži z i z^* ortogonalna na K.*

Dokaz: Neka su z i z^* simetrične u odnosu na K i neka je γ proizvoljna kružnica koja sadrži ove tačke. Neka je $\zeta \in \gamma$ tačka takva da je prava određena tačkama z_0 i ζ tangenta kružnice γ. Na osnovu teoreme o potenciji tačke u odnosu na kružnicu je $|z_0 - \zeta|^2 = |z_0 - z||z_0 - z^*|$ i otuda $|z_0 - \zeta| = R$, tj. $\zeta \in K$. Dakle, tangenta $z_0\zeta$ na γ iz z_0 je radijus kružnice K, pa su kružnice ortogonalne (ako je γ prava, tada γ „prolazi" kroz z_0 i stoga je ortogonalna na K).



Slika 3.4: Geom. karakteristike

Suprotno, ako je proizvoljna kružnica γ koja sadrži z i z^* (i, specijalno, prava zz^*) ortogonalna na K, to tačke z i z^* pripadaju zraku sa početkom u z_0 i proizvod njihovih odstojanja do z_0 jednak je R^2. Otuda su z i z^* simetrične tačke u odnosu na K. □

Teorema 3.4 (Invarijantnost simetričnih tačaka, Inv sim t) *Proizvoljno bilinerano preslikavanje L preslikava tačke z i z^*, simetrične u odnosu na kružnicu K u $\overline{\mathbb{C}}$, u tačke $w = L(z)$ i $w^* = L(z^*)$, simetrične u odnosu na sliku $K_1 = L(K)$ te kružnice.*

Dokaz: Neka je Γ proizvoljna kružnica koja sadrži w i w^*. Tada je na osnovu kružnog svojstva $\gamma = L^{-1}(\Gamma)$ kružnica koja sadrži z i z^* i stoga je ortogonalna na K. Otuda, kako je L konformno, kružnica $\Gamma = L(\gamma)$ je ortogonalna na $K_1 = L(K)$, pa su tačke w i w^* simetrične u odnosu na K_1.

Skicirajmo još jedan dokaz Teoreme 3.4 bez pozivanja na Propoziciju 3.1. Označimo sa S i S_1, respektivno, simetrije u odnosu na K i $K_1 = L(K)$. Ako je $z \in K$, tada je $Sz = z$ i stoga $S_1 \circ L \circ S(z) = S_1 \circ L(z)$. Kako je sada $L(z) \in K_1$, dobija se $S_1 \circ L(z) = L(z)$. Dakle, bilinearna preslikavanja $S_1 \circ L \circ S$ (videti Vežbu 3.2.1) i L jednaka su na K i, otuda, na $\bar{\mathbb{C}}$. □

Vežba 3.2.1 *Dokazati da je $S_1 \circ L \circ S$ bilinearno preslikavanje.*

Vežba 3.2.2 *Proveriti direktno da funkcija ψ definisana sa*

$$\psi(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

preslikava H na U i da je $\psi(\bar{z})^* = \psi(z)$.

Vežba 3.2.3 *Neka je bilinearno preslikavanje L definisano sa*
$w = L(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}, \qquad ad - bc \neq 0.$

(a) Dokazati da je $w = L(z)$ akko $z = \dfrac{dw - b}{a - cw}$.

(b) Koristeći (a) pokazati da je L jednolisno preslikavanje $\overline{\mathbb{C}}$ na $\overline{\mathbb{C}}$ i
$L^{-1}(z) = \dfrac{dz - b}{a - cz}$.

Vežba 3.2.4 *Neka su z_1 i z_2 dva različita kompleksna broja. Dokazati da je opšti oblik bilinearnog preslikavanja L, koje preslikava z_1 i z_2 respektivno u 0 i ∞, dat sa*

$$L(z) = k\,\frac{z - z_1}{z - z_2},$$

gde je $k \in \mathbb{C}$.

Lema 3.1 (Jed bilin) *Ako je L bilinearno preslikavanje za koje su tačke 0, ∞ i 1 nepokretne, tada je L identiteta.*

Dokaz: Iz uslova $L(\infty) = \infty$ zaključujemo da je L cela linearna funkcija,

$$L(z) = Az + B.$$

Ali, iz uslova $L(0) = 0$ dobija se $B = 0$, a iz $L(1) = 1$ da je $A = 1$. Dakle, $L(z) = z$.
□

Teorema 3.5 *Za bilo koje tri različite tačke z_1, z_2, $z_3 \in \mathbb{C}$ i tri različite tačke w_1, w_2, w_3 postoji jedinstveno bilinearno preslikavanje L takvo da je $L(z_k) = w_k$, $k = 1, 2, 3$.*

Dokaz: Konstruišimo bilinearna preslikavanja L_1 i L_2 koja preslikavaju z_1, z_2, z_3 i w_1, w_2, w_3, respektivno, u tačke 0, ∞ i 1.

$$\zeta = L_1(z) = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1},$$

$$\zeta = L_2(w) = \frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1}.$$

Traženo preslikavanje je $L = L_2^{-1} \circ L_1$, tj. $w = L_2^{-1} \circ L_1(z)$.
Dakle, $L_2(w) = L_1(z)$, tj.

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = \frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1}.$$

Dokažimo jedinost ovog preslikavanja. Neka je A bilinearno preslikavanje takvo da je $A(z_k) = w_k$ $(k = 1, 2, 3)$. Kako su tačke 0, ∞ i 1 nepokretne tačke bilinearnog preslikavanja $B = L_2 \circ A \circ L_1^{-1}$, na osnovu Leme 3.1 važi $B = E$, gde E označava identičko preslikavanje. Otuda, koristeći zakone grupe, dobijamo $A = L_2^{-1} \circ L_1$, tj. $A = L$. □

3.2.2 Bilinearni izomorfizmi i automorfizmi

Definicija A. [Definicija 6.5] Konformno $1-1$ preslikavanje f oblasti Ω_1 na oblast Ω_2 nazivamo konformni izomorfizam, a oblasti koje takvo preslikavanje dopuštaju su izomorfne ili konformno ekvivalentne. Izomorfizam oblasti na sebe naziva se konformni automorfizam.

Ponovimo da sa U označavamo jedinični krug, a sa H gornju poluravan.

Teorema 3.6 (Bilin izo H na U) *Svi bilinearni izomorfizmi gornje poluravni H na jedinični krug U zadaju se formulom:*

$$w = L(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{z-\bar{a}}\ , \tag{3.6}$$

gde je a proizvoljna tačka u H, a θ proizvoljan realan broj.

Dokaz: Ako je L izomorfizam H na U, tada postoji tačka $a \in H$ tako da je $L(a) = 0$. Na osnovu Teoreme 3.4, kako je $L(\mathbb{R}) = T$ (proveriti!), tačka $\bar{a}$, simetrična tački a u odnosu na realnu osu, preslikava se u tačku ∞, simetričnu tački 0 u odnosu na kružnicu T, tj. $L(\bar{a}) = \infty$. Tačke koje se preslikavaju u 0 i ∞ određuju L do na konstantni množitelj (v. Vežbu 3.2.4):

$$L(z) = k\,\frac{z-a}{z-\bar{a}}. \tag{3.7}$$

Za realne tačke, $z = x$, važi $|z-a| = |z-\bar{a}|$ i otuda, s obzirom na to da je $L(\mathbb{R}) = T$, dobija se $|k| = 1$, tj. $k = e^{i\theta}$. Dakle, L je zadato formulom (3.6). □

Propozicija 3.2 *Preslikavanja zadata sa (3.6) preslikavaju H na U.*

Dokaz: Dovoljno je dokazati da preslikavanje A zadato sa

$$w = A(z) = \frac{z-a}{z-\bar{a}}, \qquad a \in H$$

preslikava H na U.
Neka je $a = \alpha+i\beta$, $\beta > 0$. Kako je $A(z) = 1-(2i\beta)/(z-\bar{a})$, to je $A = T_1\circ H\circ R\circ J\circ T$, gde je $T(z) = z-\bar{a}$ translacija, J inverzija, $R(z) = ze^{-i\pi/2}$ rotacija, $H(z) = 2\beta z$ homotetija i $T_1(z) = z+1$ translacija. Jednostavno se proverava da je $T(H) = \{\operatorname{Im} z > \beta\} = H_\beta$ i da je $J(H_\beta) = B\Big(\frac{-i}{2\beta};\frac{1}{2\beta}\Big) = B_1$, $R(B_1) = B\Big(\frac{-1}{2\beta};\frac{1}{2\beta}\Big) = B_2$, $H(B_2) = B_3 = B(-1;1)$ i $T_1(B_3) = U$.

Skicirajmo još dva dokaza Propozicije 3.2:
1. Ako je $z \in H$, tada je $|z-a|^2 = (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2$ i $|z-\bar{a}|^2 = (x-\alpha)^2+(y+\beta)^2$. Kako je $(y-\beta)^2 < (y+\beta)^2$, to je $|z-a| < |z-\bar{a}|$. Otuda je $A(H) \subset U$. Kako je $A(R) \subset \partial U$, na osnovu Teoreme 3.3 (kružno svojstvo), dobija se $A(R) = \partial U$ i

otuda $A^{-1}(\partial U) = R$.
Iz $A^{-1}(0) = a \in H$ sada sledi $A^{-1}(U) \subset H$. Otuda je $A(H) = U$. $\square$

2. *Drugi način:*

$$z = A^{-1}w = \frac{a - \bar{a}w}{1 - w}.$$

Kako je A jednolisno, dobija se

$$A(R) \subset \partial U \Rightarrow A(H) \cap \partial U = \emptyset,$$

a kako je još $A(a) = 0$, važi:

$$A(H) \subset U;$$

$$A^{-1}(\partial U) = R \Rightarrow A^{-1}(U) \subset H \Rightarrow A(H) = U.$$

$\square$

Definicija 3.4 *Za tačku $a \in U$ definišemo $\varphi_a(z) = \dfrac{z - a}{1 - \bar{a}z}$.*

Vežba 3.2.5 *Neka je $a \in U$ fiksirana tačka. Tada φ_a jednolisno preslikava T na T, U na U i a u 0. Inverzno preslikavanje preslikavanja φ_a je φ_{-a}.*

Rešenje: Na osnovu Vežbe 3.2.3 (b), je $\varphi_a^{-1} = \varphi_{-a}$. Kako je za realno t

$$\left|\frac{e^{it} - a}{1 - \bar{a}e^{it}}\right| = \left|\frac{e^{it} - a}{e^{-it} - \bar{a}}\right| = 1 \tag{3.8}$$

(z i $\bar{z}$ imaju iste apsolutne vrednosti), φ_a preslikava T u T. Isto važi za φ_{-a}. Otuda je $\varphi_a(T) = T$. Kako je φ_a $1-1$, to je $\varphi_a(U) \cap T = \emptyset$ i kako je $\varphi_a(0) = -a \in U$, zaključujemo da je $\varphi_a(U) \subset U$. $\square$

Vežba 3.2.6 *Ako je L bilinearno preslikavanje takvo da su tačke 0 i ∞ nepokretne, tada postoji konstanta $\lambda \in \mathbb{C}$ takva da ja $L(z) = \lambda z$.*

Propozicija 3.3 *Pretpostavimo da je L bilinearni automorfizam jediničnog diska U (na sebe), $a \in U$ i $L(a) = 0$. Tada postoji konstanta λ, $|\lambda| = 1$, tako da je*

$$L(z) = \lambda\varphi_a(z), \qquad z \in U. \tag{3.9}$$

Dokaz: Preslikavanje $A = L \circ \varphi_{-a}$ je bilinearni automorfizam jediničnog diska U i $A(0) = 0$. Tačka ∞ simetrična tački 0 u odnosu na jediničnu kružnicu T, na osnovu Teoreme 3.4, preslikava se u tačku ∞. Otuda (v. Vežbu 3.2.6) postoji λ, $|\lambda| = 1$, takvo da je

$$L(\varphi_{-a}(w)) = \lambda w \quad (w \in U).$$

Zamenom $w = \varphi_a(z)$ u prethodnu jednačinu dobijamo tvrđenje.

Navedimo dokaz Propozicije 3.3 bez pozivanja na Vežbu 3.2.6 (φ_a preslikava U na U).
Tačka $a^* = 1/\bar{a}$, simetrična tački a u odnosu na jediničnu kružnicu T, na osnovu Teoreme 3.4 (Inv sim t), preslikava se u tačku ∞. Otuda je (v. Vežbu 3.2.4)

$$L(z) = k\,\frac{z-a}{z-\frac{1}{\bar{a}}} = \lambda\,\frac{z-a}{1-\bar{a}z},$$

gde su k i λ neke konstante. Kako se tačka 1 preslikava u tačku na jediničnoj kružnici, $|\lambda|\left|\dfrac{1-a}{1-\bar{a}}\right| = |\lambda| = 1$. $\square$

Teorema 3.7 (Bilin aut U) *Svi bilinearni automorfizmi jediničnog diska U zadaju se formulom*

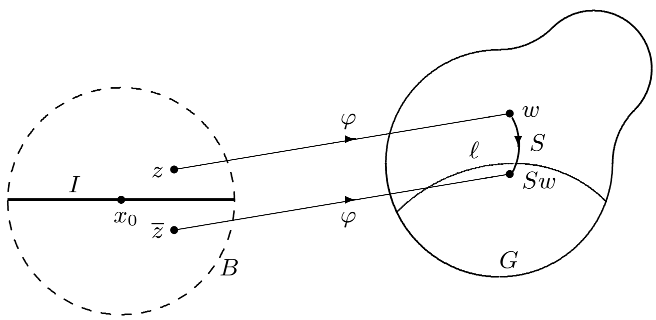
$$w = L(z) = e^{i\theta}\varphi_a(z),$$

gde je a proizvoljna tačka jediničnog diska U, a θ proizvoljan realan broj.

Definicija 3.5 *Neka je φ homeomorfizam domena D na domen G i $\psi = \varphi^{-1}$. Kažemo da su preslikavanja $f : D \to D$ i $g : G \to G$ konjugovana (pomoću φ) ako je*

$$g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ f \circ \psi,$$

tj. $f = \psi \circ g \circ \varphi$.



Slika 3.5:

Pogodno je da sa $\mathcal{R}$ označimo refleksiju u odnosu na realnu osu $\mathbb{R}$; ponovimo da je $\mathcal{R}(z) = \bar{z}$.

Neka je $B = B(x_0;\rho)$ disk, $x_0 \in \mathbb{R}$, φ konformno (jednolisno) preslikava B na domen G, $I = (x_0-\rho, x_0+\rho)$ i $\ell = \varphi(I)$.

Preslikavanje $S : G \to G$ konjugovano sa refleksijom $\mathcal{R}$ (pomoću φ) naziva se *simetrija* u odnosu na ℓ. Analogna definicija se primenjuje ako se umesto diska B razmatra domen D simetričan u odnosu na $\mathbb{R}$.

Dakle, $S(z) = \varphi(\overline{\psi(z)})$.

Ponovimo da pozitivno orijentisanu kružnicu sa središtem u tački a poluprečnika r označavamo sa $\gamma_r(a)$. Ako je $a = 0$ ili ako je jasno iz konteksta šta je a, pišemo jednostavno γ_r, odnosno γ ako je $r = 1$.

$K_r = K_r(a)$ označava granicu diska $B_r = B(r; a)$.

Specijalno, koristimo oznake $U = B_1$, $T = K_1$.

Preslikavanje $z = \varphi(w) = \dfrac{w-i}{w+i}$ preslikava gornju poluravan H na jedinični disk U. Inverzno preslikavanje je

$$\psi(z) = \varphi^{-1}(z) = i\,\frac{1+z}{1-z}\,.$$

Kako je

$$\overline{\psi(z)} = i\,\frac{1+\bar{z}}{\bar{z}-1} = \psi(1/\bar{z}),$$

dobijamo da je simetrija S u odnosu na jediničnu kružnicu T zadata sa

$$z^* = Sz = \varphi(\overline{\psi(z)}) = \varphi(\psi(1/\bar{z}) = 1/\bar{z}.$$

Linearno preslikavanje $\zeta = Az = z_0 + Rz$ preslikava jedinični disk U na disk $D = B(z_0; R)$. Kako je $z = A^{-1}\zeta = (\zeta - z_0)/R$, simetrija S u odnosu na $K = K_r(z_0)$ je:

$$S\zeta = A((A^{-1}\zeta)^*) = A(R/\overline{\zeta - z_0}) = z_0 + \frac{R^2}{\overline{\zeta} - \overline{z}_0}.$$

Dakle, simetrija S je antikonformno preslikavanje i kružnica K je „nepokretna" pri ovom preslikavanju. Koristeći formule „konjugovanja", simetriju izražavamo pomoću refleksije. $\square$

U drugom delu kursa dokazujemo:

Teorema 3.8 (Refleksije, Lema Princip Simetrije) *Neka je funkcija f analitička na domenu D, koji je simetričan u odnosu na x osu (i stoga sadrži interval $I \subset \mathbb{R}$). Ako je $f(x)$ realno za $x \in I$, tada je*

$$f(\bar{z}) = \overline{f(z)}.$$

Dokaz: Funkcija $h(z) = f(z) - \overline{f(\bar{z})}$ je analitička na D i nula na I. Otuda, na osnovu Teoreme Jedinosti (Teorema 2.19), vidimo da je $h = 0$ na D. $\square$

Vežba 3.2.7 *Formulisati i dokazati princip refleksije za domene simetrične u odnosu na kružni luk.*

Teorema o invarijantnosti simetričnih tačaka za bilinearna preslikavanja sledi iz principa refleksije. Primenom Švarcove leme, možemo dokazati:

Ako je A konformni automorfizam diska U i $A(0) = 0$, tada je A rotacija, tj. $(\exists\theta \in \mathbb{R})(A(z) = e^{i\theta}z)$.

Vežba 3.2.8 *Neka je* $V = \{z : |z| < 1, |z - 1/4| > 1/4\}$ *i* $V_R = \{w : R < |w| < 1\}$. *Odrediti bilinearno preslikavanje* A *domena* V *na prsten* V_R.

Rešenje: Ako su z i z^* tačke simetrične u odnosu na T i $K = \{z : |z - 1/4| = 1/4\}$, tada je $z^* = 1/\bar{z}$ i $z^* = \frac{1}{4} + \frac{1}{16(\bar{z} - 1/4)}$. Otuda je $z^2 - 4z + 1 = 0$, tj. $z_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$. Neka je $z_1 = 2 - \sqrt{3}$ i $z_2 = 2 + \sqrt{3}$ i

$$A = \lambda \frac{z - z_1}{z - z_2}.$$

3.3 Funkcija Žukovskog

Definicija 3.6 *Racionalna funkcija*

$$w = Z(z) = \frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big) \tag{3.10}$$

naziva se funkcija Žukovskog.

Rešavajuci po z jednačinu (3.10) dobija se $z^2 - 2wz + 1 = 0$, tj. $z = w + \sqrt{w^2 - 1}$. Dakle, inverzna funkcija funkcije Žukovskog je višeznačna funkcija ψ definisana sa

$$\psi(w) = w + \sqrt{w^2 - 1}.$$

Zamenom $z = \rho e^{i\theta}$ i $w = u + iv$, predstavimo (3.10) u obliku

$$u = \frac{1}{2}\Big(\rho + \frac{1}{\rho}\Big)\cos\theta, \qquad v = \frac{1}{2}\Big(\rho - \frac{1}{\rho}\Big)\sin\theta. \tag{3.11}$$

Otuda, pozitivno orijentisane kružnice $\mathcal{K}_r$ ($r > 0$ fiksirano, $r \neq 1$): $z = re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, preslikavaju se na elipse E_r

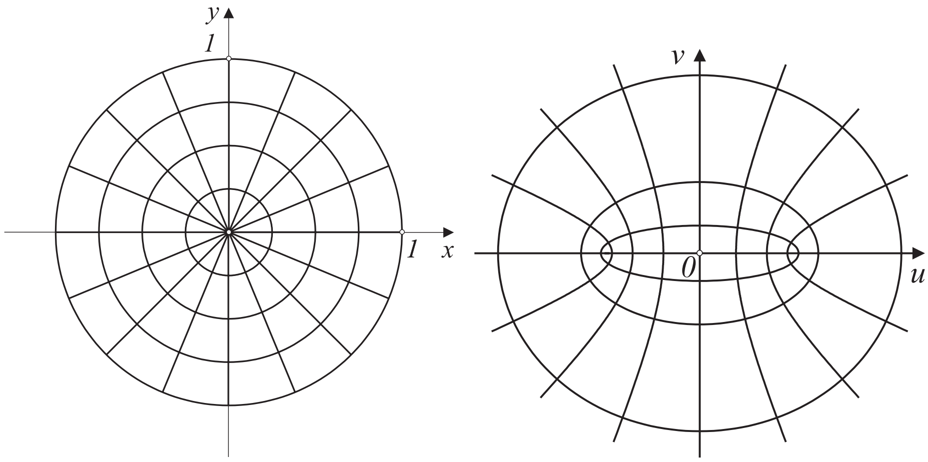
$$w = \frac{1}{2}\Big(r + \frac{1}{r}\Big)\cos t + i\,\frac{1}{2}\Big(r - \frac{1}{r}\Big)\sin t,\ \ 0 \leq t \leq 2\pi,$$

sa poluosama $a = \frac{1}{2}\Big(r + \frac{1}{r}\Big)$ i $b = \frac{1}{2}\Big|r - \frac{1}{r}\Big|$. Elipse E_r su pozitivno orijentisane ako je $r > 1$, a negativno orijentisane ako je $0 < r < 1$.

Jedinična kružnica $K = K_1$ se preslikava na $[-1, 1]$ i to tako što se orijentisana polukružnica $\mathcal{C}^+ : z = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$ preslikava na orijentisani segment $[1, -1]$, a orijentisana polukružnica $\mathcal{C}^- : z = e^{i\theta}$, $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ preslikava na orijentisani segment $[-1, 1]$.

Poluprave $l_\alpha : z = \rho e^{i\alpha}$, $0 < \rho < +\infty$, (α fiksirano) preslikavaju se na delove hiperbole, H_α :

$$u = \frac{1}{2}\Big(\rho + \frac{1}{\rho}\Big)\cos\alpha, \qquad v = \frac{1}{2}\Big(\rho - \frac{1}{\rho}\Big)\sin\alpha, \qquad 0 < \rho < +\infty. \tag{3.12}$$



Slika 3.6: Funkcija Žukovskog

Krive H_α i $H_{-\alpha}$ imaju iste tragove (slike), ali su suprotno orijentisane:

$$H_{-\alpha} = H_\alpha^-.$$

Ako je $\alpha \neq k\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$, eliminacijom parametra ρ iz (3.12) dobijamo

$$\frac{u^2}{\cos^2\alpha} - \frac{v^2}{\sin^2\alpha} = 1, \tag{3.13}$$

tj. jednačinu hiperbole sa žižama u tačkama 1 i -1 i asimptotama $v = \pm\mathrm{tg}\alpha u$. Ako je $0 < \alpha < \pi/2$, H_α je desna, a $H_{\pi-\alpha}$ leva grana hiperbole (3.13).
Ponovimo da sa γ^* označavamo trag puta γ.

Napomena: Krive H_α i $H_{-\alpha}$ imaju iste slike (tragove), ali su suprotno orijentisane, tj. $H_{-\alpha} = H_\alpha^-$. Ako zamenimo $\alpha = 0$ u (3.12), dobija se

$$u = \frac{1}{2}\Big(\rho + \frac{1}{\rho}\Big), \qquad v = 0, \qquad 0 < \rho < +\infty,$$

odakle zaključujemo da se pozitivni deo realne ose preslikava na

$$H_0^* = \{u : 1 \leq u < +\infty\},$$

i to tako što se orijentisani poluinterval $(0, 1]$ preslikava na orijentisani poluinterval $(+\infty, 1]$, a orijentisani poluinterval $[1, +\infty)$ na sebe.

Zamenom $\alpha = \pi/2$ i $\alpha = -\pi/2$ u (3.12) dobija se da se $l_{\pi/2}$ (pozitivan deo imaginarne ose) preslikava na imaginarnu osu „u smeru od $-\infty i$ ka $+\infty i$", dok se negativni deo imaginarne ose, $l_{-\pi/2}$ (tj. orijentisan interval $(0, -\infty i)$) preslikava na imaginarnu osu u suprotnom smeru.

Kada $\alpha \longmapsto 0_+$ (respektivno, $\alpha \longmapsto \frac{\pi}{2}-$), hiperbole H_α „teže" (tj. degenerišu se) u polupravu $[1, +\infty)$ (respektivno, u imaginarnu osu).

Vežba 3.3.1 *Funkcijom Žukovskog preslikati oblasti:*
(a) $Q = \{z = x + iy : x, y > 0\}$;
(b) $H = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$.

Rešenje: Kako je

$$Q = \bigcup_{0<\alpha<\pi/2} l_\alpha^*,$$

dobija se

$$f(Q) = \bigcup_{0<\alpha<\pi/2} H_\alpha^*$$

$$f(Q) = \{w : \operatorname{Re} w > 0\} \backslash [1, +\infty).$$

Otuda je $f(H) = \mathbb{C} \backslash ((-\infty, -1] \cup [1, +\infty))$. □

Za više detalja u vezi sa vežbama koje slede videti sekcije 5.2, 5.3 i 5.4.

Vežba 3.3.2 *Proveriti da je inverzna funkcija funkcije Žukovskog dvoznačna funkcija* ψ *data sa*

$$\psi(w) = w + \sqrt{w^2 - 1}.$$

Vežba 3.3.3 *Dokazati da* tg *preslikava oblast* $D = \{z : -\pi/4 < \operatorname{Re} z < \pi/4\}$ *na jedinični krug* U*, slika 3.7.*

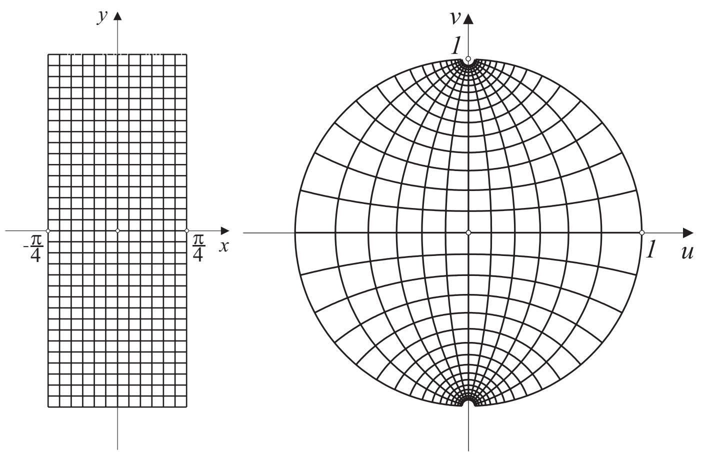
Uputstvo: Neka je $A(\zeta) = i\dfrac{1-\zeta}{1+\zeta}$ i sa e označimo eksponencijalnu funkciju; tg $= A \circ e \circ R_2$, $R_2 z = 2iz$. □

Vežba 3.3.4 *Dokazati da* sin *preslikava oblast* $D = \{z : -\pi/2 < x < \pi/2, y > 0\}$ *na gornju poluravan* H*, slika 3.8.*

Uputstvo: $Rz = iz$, $R_1\zeta = -i\zeta$ i sin $= Z \circ R_1 \circ e \circ R$, gde Z označava funkciju Žukovskog. □

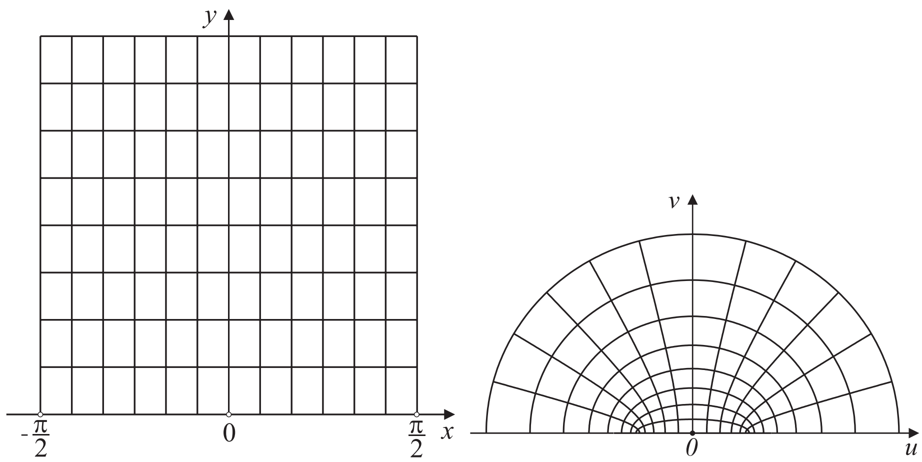
Vežba 3.3.5 *Preslikati elipsu (ili pogodne delove elipse)* $\left(\dfrac{x-a}{2a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{a}\right)^2 = 1$ *sa* $f(z) = z^4$.

Vežba 3.3.6 *Neka je* $R = \dfrac{z}{(z-1)(z-2)}$ *i* $F(z) = \sqrt{\dfrac{z}{(z-1)(z-2)}}$. *Dokazati da u oblasti* $A = \{1 < |z| < 2\}$ *postoji regularna grana funkcije* F*, a da ne postoji u oblasti* $E = \{|z| > 2\}$.



Slika 3.7: Tangens

Uputstvo: Pretpostavimo da je f regularna grana funkcije F u E i neka je $\gamma = \gamma_r$ pozitivno orijentisana kružnica poluprečnika $r > 2$. Tada je $f^2 = R$ u E i na osnovu Principa Argumenta, $\dfrac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \operatorname{Arg} R = n - p = 1 - 2 = -1$. Kako je $\dfrac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \operatorname{Arg} f^2 = 2\dfrac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \operatorname{Arg} f = 2\operatorname{Ind}_\Gamma 0 = 2k$, gde je $\Gamma = f \circ \gamma$, sledi $-1 = 2k$; kontradikcija. Za strog dokaz videti sekcije 5.2 i 5.3. $\square$



Slika 3.8: Sinus

GLAVA 4

Dodatak A

4.1 Eksponencijalna funkcija

U sekcijama glave 1 formalno je izvedena Ojlerova formula i uvedena kompleksna eksponencijalna funkcija. U ovoj sekciji eksponencijalna funkcija ima glavnu ulogu; npr. daje se jednostavan dokaz adicione formule za eksponencijalnu funkciju. Može se pokazati da se trigonometrijske funkcije, logaritam i argument mogu definisati pomoću eksponencijalne i izvesti njihova svojstva, itd. (videti [Ma 3]).

Interesantno je objasniti zašto ovaj pristup daje jednostavne dokaze u poređenju sa dokazima iz geometrije i npr. uporediti pristup u sekcijama glave 1 sa razmatranjima u ovoj sekciji, koja se baziraju na uvođenju kompleksne eksponencijalne funkcije i u vezi sa tim razmotriti značaj Ojlerove formule.

Ponovimo da se za kompleksni broj z definiše

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}. \tag{4.1}$$

Množenjem stepenih redova dobijamo osnovnu adicionu formulu

$$e^a\, e^b \;=\; e^{a+b}, \tag{4.2}$$

koja važi za svaka dva kompleksna broja a i b.

Daćemo još jedan interesantan dokaz adicione formule (4.2) na sledeći način. Nađimo analitičku funkciju koja je jednaka svom izvodu. Neka je

$$\Psi(z) = \Psi(z;a) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \frac{(z-a)^k}{k!} \tag{4.3}$$

neki element te funkcije, gde niz $c_k = c_k(a)$ zavisi od tačke a. Po uslovu red

$$\Psi'(z;a) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \,\frac{(z-a)^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} c_{k+1} \frac{(z-a)^k}{k!} \tag{4.4}$$

jednak je redu (4.3). Za to je neophodno i dovoljno da je $c_{k+1} = c_k$, za $k = 0, 1, 2, \ldots$, tj. da su svi koeficijenti jednaki nekom broju $c = c(a)$. Otuda je

$$\Psi(z; a) = c \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z-a)^k}{k!}. \tag{4.5}$$

Kako je ovaj red konvergentan, on definiše celu transcendentnu funkciju.

Izaberimo množitelj $c(0) = 1$, tako da je element, koji odgovara tački $a = 0$, oblika

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots \quad . \tag{4.6}$$

Dakle, posle normalizacije $c(0) = 1$, funkcija $\Psi(z)$ je zadata redom 4.6. Tako definisanu funkciju označimo sa $\exp(z)$ ili e^z. Svakoj tački a, po formuli (4.5), odgovara neko c koje zavisi od a. To znači da se c može odrediti iz

$$\exp(z) \;=\; c(a) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z-a)^k}{k!}, \tag{4.7}$$

koji možemo napisati u obliku $\exp(z) = c(a)\exp(z - a)$ i otuda $\exp(z + a) = c(a)\exp(z)$. Kako je $\exp(0) = 1$, zamenom $z = 0$ u prethodnoj relaciji, nalazimo $c(a) = \exp(a)$.

Dakle, funkcija $\exp(z)$ zadovoljava

$$\exp(z + a) = \exp a \;\exp z. \tag{4.8}$$

Adiciona formula se može dokazati i pomoću sledećih vežbanja.

Vežba 4.1.1 *Neka je $h(z) = e^z\, e^{a-z}$. Dokazati da je $h'(z) = 0$, i otuda izvesti adicionu formulu.*

Vežba 4.1.2 *Objasniti formulu (4.7) pomoću Tejlorove formule i na osnovu toga dokazati adicionu formulu.*

Rešenje: Kako je n-ti izvod exp-funkcije u tački a jednak $\exp(a)$, na osnovu Tejlorovog razvoja exp-funkcije oko tačke a, sledi

$$\exp(z) \;=\; \exp(a) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z-a)^k}{k!},$$

i otuda $\exp(z) = \exp(a)\exp(z - a)$.

Čitalac bez većih teškoća može dokazati sledeći rezultat.

Teorema 4.1 *Za eksponencijalnu funkciju važe sledeća osnovna svojstva:*

(a) $$e^z \neq 0,$$

(b)
$$(e^z)' = e^z,$$

(c) *restrikcija* exp *na realnu osu je rastuća funkcija,* $e^x \to +\infty,\ x \to +\infty;$ $e^x \to 0,\ x \to -\infty.$

(d)
$$e^{-z} = \frac{1}{e^z},$$

(e)
$$\exp(\bar{z}) = \overline{\exp z}$$

(f) *za realno* t
$$|e^{it}| = 1$$

(g)
$$|e^z| = e^x.$$

Dokaz: Kako je $e^z e^{-z} = e^0 = 1$ slede (a) i (d). Diferenciranjem stepenog reda zaključujemo da važi (b). Koristeći (4.1), zaključujemo da je exp monotono rastuća na pozitivnom delu realne ose i da je $e^x \to +\infty,\ x \to +\infty$. Drugi deo tvrđenja (c) je posledica jednakosti $e^x e^{-x} = 1$.
Konjugovanjem stepenog reda eksponencijalne funkcije (preciznije, konjugovanjem njegove parcijalne sume) dobijamo (e). Detaljnije: Neka je $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$. Iz definicije eksponencijalne funkcije sledi $S_n(z) \to e^z$ i $S_n(\overline{z}) \to e^{\overline{z}}$, kada $n \to +\infty$. Otuda $\overline{S_n(z)} \to \overline{e^z}$ i kako je $\overline{S_n(z)} = S_n(\overline{z})$ (konačne sume), dobija se (e). Na osnovu (e) dobija se

$$|e^{it}|^2 = e^{it}\,\overline{e^{it}} = e^{it}\,e^{-it} = e^0 = 1. \tag{4.9}$$

Kako je modul nenegativan iz (4.9) sledi (f). Na osnovu (e), sledi

$$|e^z|^2 = e^z\,\overline{e^z} = e^z\,e^{\bar{z}} = e^{2\mathrm{Re} z}, \tag{4.10}$$

a otuda i (g). Primetimo da umesto (4.10) možemo primeniti adicione formule, tj. $e^z = e^x\,e^{iy}$, da bismo dokazali (g). □

Vežba 4.1.3 *Dokazati na osnovu (4.1), da je*
(a) $e^h - 1 = h + o(h)$, *kada* $h \to 0$
(b) Primenjujući adicionu formulu i (a) dokazati da je $(e^z)' = e^z$.

4.1.1 Osnovna uloga exp

U ovoj sekciji ćemo definisati trigonometrijske funkcije pomoću eksponencijalne i u narednih nekoliko tačaka daćemo skicu nekih osnovnih osobina ovih funkcija.

(1) Za $t \in \mathbb{R}$, funkcije $\cos t$ i $\sin t$ definišemo, respektivno, kao realni i imaginarni deo kompleksnog broja e^{it}, tj. pomoću formule

$$e^{it} = \cos t + i \sin t,\ \ t \in \mathbb{R}. \tag{4.11}$$

(2) Ako diferenciramo obe strane formule (4.11) (koja je ekvivalentna Ojlerovom indentitetu) dobijamo

$$D\cos t + iD\sin t \,=\, ie^{it} \,=\, -\sin t + i\cos t, \tag{4.12}$$

otuda, izdvajajući realni i imaginarni deo, sledi

$$D\cos t \,=\, -\sin t, \quad D\sin t \,=\, \cos t. \tag{4.13}$$

(3) (Definicija broja π) Iz formule (4.11) sledi

$$\cos t \,=\, \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} \tag{4.14}$$

i otuda $\cos 2 < -1/3$ (Dokazati!). Kako je $\cos 0 = 1$ i kako je funkcija $f(t) = \cos t$ neprekidna na $\mathbb{R}$, to postoji najmanji pozitivan broj t_0 takav da je $\cos t_0 = 0$.

Definišimo

$$\pi \,=\, 2\,t_0. \tag{4.15}$$

Koristeći osobine broja π čitalac može bez teškoća dokazati tačke (4) i (5).

(4) (a) $e^{i\pi/2} = i$, $e^{i\pi} = i^2 = -1$, $e^{2\pi i} = (-1)^2 = 1$,

(b) $e^{2\pi in} = 1$, za svaki ceo broj n.

Iz (a) i Adicione teoreme za exp sledi

(5) $e^{z+2\pi i} = e^z\, e^{2\pi i} = e^z$.

(6) Funkciju cis definišemo sa $\operatorname{cis} t = e^{it}$, $t \in \mathbb{R}$. Koristeći osobine funkcija $\cos t$ i $\sin t$ može se dokazati da funkcija cis preslikava $\mathbb{R}$ na jediničnu kružnicu $T = \{w : |w| = 1\}$ i otuda izvesti Lema o polarnoj formi (LPF, polarni oblik kompleksnog broja) i Teorema o jedinstvenosti polarne forme (TunPF). Ovi rezultati imaju važnu ulogu u kompleksnoj analizi i njihovi dokazi baziraju se na sledećoj propoziciji:

Propozicija 4.1 *(a) Preslikavanje* $\operatorname{cis} : \mathbb{R} \to T$ *je „na".*
(b) Preslikavanje $f = \operatorname{cis}|_{(-\pi,\,\pi]}$ *je uzajamno jednoznačno preslikavanje intervala* $(-\pi,\,\pi]$ *na kružnicu* T.

Dokaz: (a) Neka je $w = u + iv \in T$, tj. neka je $u^2 + v^2 = 1$. Razlikovaćemo tri slučaja:
(1) $u \geq 0$, $v \geq 0$: Kako je $0 \leq u \leq 1$, to na osnovu osobina funkcije cos postoji jedinstveno $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tako da je $u = \cos t$. Kako je, sada, $\sin t \geq 0$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, i kako je $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t = 1 - u^2 = v^2$, zaključujemo da je $v = \sin t$. Dakle, $w = \operatorname{cis} t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
(2) $u < 0$, $v \geq 0$: Tada, je $-iw = -i(u + iv) = v + i(-u)$ i $v \geq 0$, $-u > 0$. Na osnovu slučaja (1) postoji $t_1 \in [0, \frac{\pi}{2}]$, tako da $-iw = \operatorname{cis} t_1$. Dakle, $w = i\operatorname{cis} t_1 = \operatorname{cis}(t_1 + \frac{\pi}{2}) = \operatorname{cis} t$, $t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$.
(3) $v < 0$: Tada, je $-w = -(u + iv) = -u + i(-v)$ i $-v > 0$. Na osnovu slučajeva (1) i (2) postoji $t_2 \in (0, \pi)$, tako da $-w = \operatorname{cis} t_2$. Dakle, $w = -\operatorname{cis} t_2 = \operatorname{cis}(t_2 - \pi) = \operatorname{cis} t$, $t \in (-\pi, 0)$.

(b) Tvrđenje sledi na osnovu pažljive analize dokaza slučaja (a). $\square$

4.1.2 Exp i Log

Lema 4.1 (Eksponencijalna-logaritamska forma, ExpLogF) *Svako $z \in \mathbb{C}^*$ može se predstaviti u obliku*

$$z = e^{\ln|z| + i\varphi}, \;\; \varphi \in \operatorname{Arg} z. \tag{4.16}$$

Dokaz: Na osnovu tačke (6) (videti podsekciju 4.1.1) svako $z \in \mathbb{C}^*$ može se predstaviti u obliku $z = r\,e^{i\varphi}$, $r > 0$, $\varphi \in \operatorname{Arg} z$. Podvucimo da prethodna relacija predstavlja Lemu o polarnoj formi (LPF). Otuda, kako je $r = e^{\ln r}$ sledi, prvo, $z = e^{\ln r}\,e^{i\varphi}$ i stoga, na osnovu Adicione teoreme za eksponencijalnu funkciju, dobija se (4.16). □

Lema 4.2 (Jednakost eksponencijalnih formi) *Dokazati da važi:*

(a) $e^z = 1$ *akko* $z = 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}$

(b) $e^{z_1} = e^{z_2}$ *akko* $z_1 - z_2 = 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}$.

Dokaz: Neka je

$$e^z \;=\; 1. \tag{4.17}$$

Kako je $e^z = e^x\,e^{iy}$, otuda, prvo, dobijamo $e^x = 1$ i stoga $x = 0$. Sada, zamenom $x = 0$ u jednačini (4.17) nalazimo

$$e^{iy} \;=\; 1 \tag{4.18}$$

i otuda sledi, prvo,

$$\cos y \;=\; 1, \tag{4.19}$$

a zatim

$$y \;=\; 2k\pi,\;\; k \in \mathbb{Z}. \tag{4.20}$$

Dakle, $z = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. S obrzirom na (4b) ovo su sva rešenja jednačine (4.17) i otuda sledi (a).

Množenjem jednačine $e^{z_1} \;=\; e^{z_2}$ sa e^{-z_2}, ona postaje ekvivalentna jednačini $e^{z_1 - z_2} = 1$. Sada (b) sledi iz (a). □

Sledeće dve leme i dalja svojstva eksponencijalne funkcije navedeni su i u Glavi 1.

Lema 4.3 (Log) *Neka je $z \in \mathbb{C}^*$. Tada je*

$$e^w = z \tag{4.21}$$

akko

$$w = \ln|z| + i\varphi, \qquad \varphi \in \operatorname{Arg} z. \tag{4.22}$$

Dokaz: Koristeći oznaku $w = u + iv$ i (exp), (4.21) možemo napisati u obliku

$$e^u e^{iv} = z.$$

Otuda, s obzirom na Lemu 1.5 (EPF), (4.21) je ekvivalentno sa

$$e^u = |z| \text{ i } v \in \operatorname{Arg} z. \tag{4.23}$$

Na osnovu realne analize, $e^u = |z|$ akko $u = \ln |z|$ i, otuda, ako je $z = 0$, jednačina (4.21) nema rešenje, a ako $z \in \mathbb{C}^*$, jednačina (4.21) ima beskonačno mnogo rešenja datih sa (4.22). Skup ovih rešenja označimo sa $\operatorname{Ln} z$.

Dakle,

$$\operatorname{Ln} z = \{w \mid e^w = z\} = \{\ln |z| + i\varphi \mid \varphi \in \operatorname{Arg} z\}.$$

□

Lema 4.1 je takođe neposredna posledica Leme Log.

Iz Leme 4.2 sledi

Posledica 4.1 (jednolisnost) *Neka je* $\alpha \in \mathbb{R}$. Exp *je 1-1 na* Π_α.

Propozicija 4.2 *Neka je* $\alpha \in \mathbb{R}$. exp *preslikava* Π_α *na oblasti* O_α.

Dokaz: Na osnovu Leme 1.5 (EPF), $e^w = e^u e^{iv} \in \Lambda_\alpha$ akko $v = \alpha + 2k\pi$; otuda $\exp(\Pi_\alpha) \subset O_\alpha$. Na osnovu Leme 4.1, svako $z \in O_\alpha$ može se predstaviti u obliku $z = e^w$, gde je $w = \ln r + i\varphi$, $\varphi \in J_\alpha$, tj. $w \in \Pi_\alpha$. U glavi 1, dat je još jedan dokaz Propozicije 4.2, koji se može pratititi pomoću odgovarajućih geometrijskih slika. Dokaz se bazira na sledećoj propoziciji. □

Propozicija 4.3 *Neka je* $\gamma \in \mathbb{R}$. exp *preslikava* L_γ *na poluprave* Λ_γ.

Dokaz: Jasno je da $w \in L_\gamma$ ako i samo ako $w = x + i\gamma$, $x \in \mathbb{R}$. Otuda, na osnovu $e^{x+i\gamma} = e^x e^{i\gamma}$, sledi prvo da exp preslikava L_γ na $\{e^x e^{i\gamma} : x \in \mathbb{R}\}$ i stoga, s obzirom na to da exp preslikava $\mathbb{R}$ na $\Lambda_0 = (0, +\infty)$, sledi da exp preslikava L_γ na poluprave Λ_γ. □

Propozicija 4.4 *Ne postoje grane argumenta, logaritma i* $n-$*tog korena na* $\mathbb{C}^*$.

Uputstvo: Videti Propoziciju 1.21; Pretpostavimo suprotno, postoji grana argumenta φ na $\mathbb{C}^*$ i neka je arg grana argumenta na $O_0 = \mathbb{C}^* \setminus \Lambda_0$, gde je $\Lambda_0 = (0, +\infty)$. Funkcija k definisana sa $k(z) = \dfrac{\varphi(z) - \arg z}{2\pi}$ je neprekidna i celobrojna na O_0. Otuda postoji k_0 tako da $k(z) = k_0$ za $z \in O_0$, i stoga $\varphi(z) = \arg z + 2k_0\pi$ za $z \in O_0$. Dakle, φ je prekidna na Λ_0.

Pretpostavimo suprotno, postoji grana $n-$tog korena f na $\mathbb{C}^*$ i neka je f_0 glavna grana $n-$tog korena na O_0. Tada postoji $k \in \mathbb{Z}$ takvo da je $\frac{f}{f_0} = c_k$ na O_0, gde je $c_k = e^{\frac{2\pi i k}{n}}$. Dakle, f je prekidna na Λ_0 (videti takođe sekciju 5.2). □

4.2 Diferencijabilnost

4.2.1 Diferencijal i geometrijska interpretacija*

Ponovimo: Neka je $f : \Omega \to f(\Omega)$ C^1-difeomorfizam i $z_0 \in \Omega$ (dovoljno je pretpostaviti da je f $\mathbb{R}$-diferencijabilno u tački $z_0 \in \Omega$); i $z = x + iy$ koordinata na Ω i $w = u + iv$ koordinata na $f(\Omega)$; tj. $w = u + iv = f(z)$. Tada

$$du = u_x dx + u_y dy, dv = v_x dx + v_y dy,\ f_x = u_x + iv_x, f_y = u_y + iv_y \tag{4.24}$$

i otuda

$$dw = df = f_z dz + f_{\overline{z}} d\overline{z}, \tag{4.25}$$

gde je $f_z = \dfrac{1}{2}(f_x - if_y)$, $f_{\overline{z}} = \dfrac{1}{2}(f_x + if_y)$.

Neka je $w_0 = f(z_0)$. Pogodno je da koristimo notaciju $p = f_z$, $q = f_{\overline{z}}$, $A = df(z_0)$ i $h = \rho e^{i\varphi} \in T_{z_0}$. Tada $A(h) = ph + q\overline{h}$, t.j. $A(\rho e^{i\varphi}) = (p\, e^{i\varphi} + q\, e^{-i\varphi})\, \rho$.

Kažemo da $\mathbb{R}$-linearna funkcija čuva orijenaciju ako „čuva" pravac obilaska vrhova trouglova.

Neka je f $\mathbb{R}$-diferencijabilno (u literaturi se ponekad pretpostavlja da je f jednolisno) preslikavanje na oblasti Ω. Kažemo da f čuva orijentaciju ako df čuva orijentaciju u svakoj tački oblasti Ω.

Vežba 4.2.1 *Neka je preslikavanje A definisano sa $A(z) = az + b\overline{z}$.*
1. ako je $|a| \neq |b|$, preslikavanje A je jednolisno; preslikava prave na prave, paralelne prave na paralelne prave, a kvadrate na pravougaonike.
Dokazati da preslikavanje A preslikava
2. krugove na elipse ako je $|a| \neq |b|$.
3. ako je $|a| > |b|$, pozitivno orijentisane krugove K_r poluprečnka r sa središtem u koordinatnom početku na pozitivno orijentisane elipse E_r sa velikom poluosom dužine $\mathbf{L}_r = \alpha r$ i malom poluosom dužine $\mathbf{l}_r = \beta r$, gde je $\alpha = (|a| + |b|)$ i $\beta = (|a| - |b|)$.

Uputstvo za 2 i 3: Neka je $a = |a|e^{i\alpha}$, $b = |b|e^{i\beta}$ i $z = \rho e^{i\varphi}$. Tada je $A(z) = |a|e^{i\alpha}\rho e^{i\varphi} + |b|e^{i\beta}\rho e^{-i\varphi} = (|a|e^{i(\alpha+\varphi)} + |b|e^{i(\beta-\varphi)})\rho$. Neka je $\gamma = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ i $\gamma_0 = \dfrac{\alpha-\beta}{2}$. Otuda je $A(z) = (|a|e^{i(\gamma_0+\varphi)} + |b|e^{-i(\gamma_0+\varphi)})\rho e^{i\gamma}$. Neka je $u + iv = A_0(z) = (|a|e^{i\varphi} + |b|e^{-i\varphi})\rho$. Otuda je $u = (|a| + |b|)\rho\cos\varphi$ i $v = (|a| - |b|)\rho\sin\varphi$ (za fiksirano ρ ovo su parametarske jednačine elipse). Preslikavanje A je kompozicija dve rotacije i A_0. Preslikavanje A_0 preslikava pozitivno orijentisane krugove na pozitivno orijentisane elipse ako je $|a| > |b|$ i otuda sledi 3. $\square$

*Pretpostavimo da je f $\mathbb{R}$-diferencijabilno u tački z_0 i da čuva orijentaciju, tj. $|p| > |q|$.

Otuda je $A = df(z_0)$ je linearno preslikavanje, i na osnovu Vežbe 4.2.1 preslikava krug $\mathbb{D}_r$ na oblast ograničenu elipsom E_r sa velikom osom dužine $\mathbf{L}_r = (|p| + |q|)r$

i malom osom dužine $\mathbf{l}_r = (|p| - |q|)r$. Definišimo $\alpha = (|p| + |q|)$ i $\beta = (|p| - |q|)$. Površina kruga $\mathbb{D}_r$ je πr^2, a površina $A(\mathbb{D}_r)$ je $\pi\alpha\beta r^2$, tako da je jakobijan

$$J_f(z_0) = \lim_{r\to 0} \frac{m(A(D_r))}{m(D_r)}$$

i otuda $J_f(z_0) = \alpha\beta = |p|^2 - |q|^2$.

*Ponovimo da je pogodno da koristimo notaciju $A = df(z_0)$, $h = \rho e^{i\varphi} \in T_{z_0}$. Tada $A(h) = ph + q\overline{h}$, tj. $A(\rho e^{i\varphi}) = (p\, e^{i\varphi} + q\, e^{-i\varphi})\,\rho$. Maksimum izraza $|pe^{i\varphi} + qe^{-i\varphi}|$ (u odnosu na φ) dostiže se kada je

$$\frac{qe^{-i\varphi}}{pe^{i\varphi}} = \frac{q}{p}\, e^{-2i\varphi} \tag{4.26}$$

pozitivno, minimum kad je negativno. Uvedimo kompleksnu dilataciju

$$\mu_f = \frac{q}{p} \tag{4.27}$$

i $d_f = |\mu_f|$.

Maksimum odgovara pravcu $\varphi = \alpha = \dfrac{\arg \mu}{2}$ i minimum odgovara pravcu $\alpha \pm \dfrac{\pi}{2}$. Pravac velike ose je $\beta = \dfrac{\arg\,\nu}{2}$, gde je

$$\nu_f = \frac{q}{\overline{p}} = \left(\frac{p}{|p|}\right)^2 \mu_f. \tag{4.28}$$

Veličina ν_f naziva se druga kompleksna dilatacija. Primetimo da je $\beta - \alpha = \arg\, p$.*

Vežba 4.2.2 *Da li je formula $J_f = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2$ saglasna sa definicijom jakobijana u Analizi 2:*

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}.$$

Uputstvo: Proveriti da je $J_f = -\mathrm{Re}(if_y\overline{f_x}) = \mathrm{Im}\,\overline{f_x}f_y = u_xv_y - v_xu_y$. Geometrijska interpretacija pomoću površine parelograma definisanog vektorima $a = f_x(z_0)$ i $b = f_y(z_0)$ data je u Vežbi 4.2.3. □

Vežba 4.2.3 *Proveriti ako su z i w kompleksni brojevi (vektori) tada je $(z, w) = \mathrm{Re}(z\overline{w})$; površina parelograma definisanog vektorima z i w je $\pm$ vrednost izraza $(iz, w) = \mathrm{Re}(iz\overline{w}) = -\mathrm{Im}\, z\overline{w} = xv - yu$.*
Označimo $a = f_x(z_0)$ i $b = f_y(z_0)$; površina paralelograma definisanog vektorima a i b je $\pm$ vrednost izraza $J_f = u_xv_y - v_xu_y$.

Vežba 4.2.4 ** Neka je f difeomorfizam u okolini U tačke z_0. Tada f čuva orijentaciju u U akko $J_f(z_0) > 0$.*

4.2.2 Geometrijska interpretacija*

Diferencijal $\mathbb{R}$-diferencijabilnog preslikavanja i, respektivno $\mathbb{C}$-diferencijabilnog u tački z je oblika

$$df = \partial f dz + \overline{\partial} f d\overline{z}, \;\; df = f'(z)dz. \tag{4.29}$$

Kako je Jakobijan preslikavanja definisan pomoću njegovog diferencijala, dobija se

$$J_f(z) = |\partial f|^2 - |\overline{\partial} f|^2, \;\; J_f = |f'(z)|^2. \tag{4.30}$$

Pretpostavimo da je f $\mathbb{R}$-diferencijabilno u okolini U tačke z i da je z nesingularna tačka f (tj. $J_f(z) \neq 0$). Ako dodatno pretpostavimo da je f nesingularno u U, na osnovu teoreme o implicitnoj funkciji iz realne analize, otuda sledi da je f lokalni homeomorfizam, tj. postoji okolina V tačke z, koju f uzajamno jednoznačno i uzajamno neprekidno preslikava na okolinu $f(z)$.
Jasno je, na osnovu formule (4.30), da u opštem slučaju jakobijan J_f ima proizvoljan znak, tj. f može kako čuvati, tako i menjati orijentaciju. Za $\mathbb{C}$-diferencijabilna preslikavanja singularne tačke se poklapaju sa tačkama u kojima je izvod 0, a u nesingularnim tačkama preslikavanje čuva orijentaciju: $J_f = |f'(z)|^2 > 0$.

Definicija 4.1 *$\mathbb{R}$-diferencijabilno u tački z preslikavanje f naziva se konformnim ako je z nesingularna tačka f (tj. $J_f(z) \neq 0$) i ako je diferencijal $l = df(z)$ kompozicija rotacije i homotetije.*

Propozicija 4.5 *Dokazati da je f konformno u tački z ako i samo ako postoji $f'(z) \neq 0$.*

Dokaz: Jasno je da je uslov dovoljan.
Dokaz da je uslov neophodan.
Označimo sa $l = df$ diferencijal preslikavanja f u tački z. Ponovimo da je tada $l(h) = \partial f h + \overline{\partial} f \overline{h}$. Diferencijal l preslikava vektore $h = 1$ i $h = i$ u $l(1) = df(1) = \partial f + \overline{\partial} f$ i $l(i) = df(i) = i(\partial f - \overline{\partial} f)$, respektivno. Iz konformnosti sledi da se $df(i)$ takođe dobija iz $df(1)$ rotacijom za prav ugao u smeru suprotnom od kretanja kazaljki na časovniku; dakle, $l(i) = il(1)$ i otuda $\overline{\partial} f(z) = 0$. □

Preslikavanje f je konformno u oblasti Ω ako i samo ako je konformno u svakoj tački oblasti Ω
Otuda, na osnovu Propozicije 4.5, sledi

Propozicija 4.6 *Preslikavanje f je konformno u oblasti Ω ako i samo ako je*
1. f holomorfno u Ω
2. $f'(z) \neq 0$ za svako $z \in \Omega$

Podvucimo da se u definiciji konformnog preslikavanja u oblasti Ω ne zahteva da je preslikavanje jednolisno $(1-1)$ na oblasti Ω. Tako je npr. exp konformno preslikavanje na $\mathbb{C}$.

4.3 Konformno preslikavanje čuva uglove*

Definicija ugla

U literaturi se često pojavljuju nepreciznosti u vezi sa definicijom ugla, mernog broja ugla i formula za argument proizvoda kompleksnih brojeva. U ovom poglavlju ćemo skicirati precizne dokaze teoreme da konformno preslikavanje čuva uglove i ukazati na neke nepreciznosti u literaturi.

Neka put γ ima izvod u t_0. Tada je $\gamma(t) = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0) + o(t - t_0)$, $t \to t_0$. Ako je dodatno $k = \gamma'(t_0) \neq 0$ prava $z = \gamma(t_0) + k(t - t_0)$, $t \in \mathbb{R}$ naziva se tangenta puta γ u tački $z_0 = \gamma(t_0)$.

Vežba 4.3.1 *Neka je put γ definisan sa $\gamma(t) = t^3 + i|t|^3$, $t \in \mathbb{R}$. Da li put γ ima tangentu u tački 0?*

Definicija 4.2 *Ako $a, b \in \mathbb{C}^*$ i $a = |a|e^{i\alpha}$, tada postoji jedinstveno $\beta \in [\alpha, \alpha + 2\pi)$ tako da je $b = |b|e^{i\beta}$. Ugao $\angle a0b$ (kratko $a0b$) definišemo sa $a0b = \{\rho \text{cis} \varphi : \rho \geq 0, \alpha \leq \varphi \leq \beta\}$ i merni broj $\overline{a0b}$ ugla $a0b$ sa $\gamma = \beta - \alpha$. Ako sa* arg *označimo granu argumenta sa vrednostima u $[0, 2\pi)$, tada je $\gamma = \arg(b\overline{a})$.*

Dva ugla nazivamo *susednim* ako imaju isto teme i jedan zajednički krak, a nalaze se sa raznih strana tog kraka. Ako imamo dva susedna konveksna ugla, njihov zbir definišemo kao uniju. Sabiranjem dva proizvoljna ugla, ako smo prethodno osenčili njihove oblasti, može se pojaviti deo koji je dvostruko osenčen.
Za sabiranje mernih brojeva uglova važi Šalova formula

$$\overline{a0b} + \overline{b0c} = \overline{a0c} \pmod{2\pi}. \tag{4.31}$$

Dokaz Šalove formule: Ako su $a, b, c \in \mathbb{C}^*$ i $a = |a|e^{i\alpha}$ postoje jedinstveni $\beta \in [\alpha, \alpha + 2\pi)$ i $\gamma \in [\beta, \beta + 2\pi)$ tako da je $b = |b|e^{i\beta}$ i $c = |c|e^{i\gamma}$. Tada, na osnovu definicije 4.2,

$$\overline{a0b} + \overline{b0c} = \beta - \alpha + \gamma - \beta = \gamma - \alpha. \tag{4.32}$$

Međutim, postoji jedinstveno $\gamma_0 \in [\alpha, \alpha + 2\pi)$ tako da je $c = |c|e^{i\gamma_0}$ i $\gamma_0 - \alpha = \overline{a0c}$. Kako je $c = |c|e^{i\gamma} = |c|e^{i\gamma_0}$, sledi $\gamma - \gamma_0 = 2k\pi$, gde je $k = 0, 1$. Otuda, na osnovu relacije (4.32), dobijamo

$$\overline{a0b} + \overline{b0c} = \gamma - \alpha = \overline{a0c} + 2k\pi, \tag{4.33}$$

gde je $k = 0, 1$. Iz relacije (4.33) važi (4.31). □

Ako za merni broj orijentisanog ugla $a0b$ uzmemo izraz $\gamma + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, ili preciznije, odgovarajuću klasu ekvivalencije $\{\gamma + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ (videti sledeću definiciju), onda Šalovu formulu možemo pisati u obliku

$$\overline{a0b} + \overline{b0c} = \overline{a0c}.$$

Primer 21 *Neka je $a = e^{i\alpha}$. Prema definiciji 4.2, kada $\alpha \to 2\pi$, $\alpha < 2\pi$, merni broj ugla $\angle 10a$ teži ka 2π. Međutim, tada $a \to 1$, a merni broj ugla $\angle 101$ je 0. Drugim rečima, funkcija* arg *je prekidna na $\mathbb{R}^+$.*

Prethodno razmatranje nas motiviše da uvedemo sledeću definiciju.

Definicija 4.3 *Neka su $a, b \in \mathbb{C}^*$. Mera (merni broj) orijentisanog ugla $a0b$ definiše se i kao višeznačna funkcija (do na $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$)*

$$\operatorname{Arg} b - \operatorname{Arg} a = \operatorname{Arg}(b\overline{a}). \tag{4.34}$$

Definicija 4.4 *Ako $b \neq 0$ i $b \notin \Lambda_{-a}$, ugao $a0b$ može se definisati i kao najmanji konveksan skup koji sadrži poluprave Λ_a i Λ_b. Merni broj orijentisanog ugla $a0b$ je $\gamma = \arg(b\overline{a})$, gde je* arg *grana argumenta sa vrednostima u $(-\pi, \pi]$.*

Vežba 4.3.2 *Objasniti razliku između tri gore navedene definicije.*

Konformno preslikavanje čuva uglove

Ponovimo da je funkcija f konformna u tački $z \in \mathbb{C}$ ako ona ima izvod u toj tački i ako je $f'(z) \neq 0$.

Teorema 4.2 *Pretpostavimo da je:*

(a) *f definisana u nekoj okolini W tačke z, postoji $p = f'(z)$ i neka je $w = f(z)$;*

(b) *$\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to W$ put u W i neka je $z = \gamma(s)$, $s \in (-\epsilon, \epsilon)$;*

(c) *postoji $\dot{\gamma} = \gamma'(s)$;*

(d) *$\Gamma = f \circ \gamma$.*

Tada je:

(1) $\Gamma'(s) = f'(z)\gamma'(s)$, *odnosno*

(2) $\dot{\Gamma} = p\dot{\gamma}$.

Ako dodatno pretpostavimo:

(e) *$p \neq 0$ i γ ima tangentu u tački $z = \gamma(s)$, tj. $\dot{\gamma} \neq 0$,*

tada Γ ima tangentu u $w = \Gamma(s) = f(\gamma(s))$ i važi (1).

Neka put γ_0 ispunjava uslove (b), (c) i (e) prethodne teoreme. Specijalno, neka je $z = \gamma_0(s)$, odnosno, neka putevi γ i γ_0 prolaze kroz fiksiranu tačku z. Uvedimo sledeću definiciju.

Definicija 4.5 *Merni broj θ orijentisanog ugla između puteva γ i γ_0 je merni broj orijentisanog ugla između vektora $\dot{\gamma}$ i $\dot{\gamma_0}$.*

Lema 4.4 *Ako je $h \in \mathbb{C}^*$ i $k > 0$, tada je* $\arg(kh) = \arg h$.

Dokaz: Neka je $w = kh$. Tada je $|w| = |kh| = k|h|$ i otuda $\dfrac{w}{|w|} = \dfrac{h}{|h|}$. Dokaz sada sledi iz definicije argumenta.
Primetimo da je $\arg(-h) \neq \arg h$.

Teorema 4.3 *(Konformno preslikavanje čuva uglove, Konf Ču) Pretpostavimo da funkcija f, putevi γ i γ_0 ispunjavaju gornje uslove i neka je $\Gamma_0 = f \circ \gamma_0$. Tada je merni broj θ orijentisanog ugla između γ i γ_0 jednak mernom broju $\tilde{\theta}$ orijentisanog ugla između Γ i Γ_0.*

Dokaz: Skicirajmo nekoliko dokaza:

1. Neka je $l = df$ u tački z. Ponovimo da je $l(h) = ph$, gde je $h \in T_z$ i T_z tangentni prostor u tački z. Kako je l kompozicija homotetije i rotacije (objasniti!), to l čuva uglove.

2. Iz (2) sledi $\dot{\Gamma}_0\overline{\dot{\Gamma}} = |p|^2\dot{\gamma}_0\overline{\dot{\gamma}}$ i odatle, na osnovu Leme 4.4, $\arg(\dot{\Gamma}_0\overline{\dot{\Gamma}}) = \arg(\dot{\gamma}_0\overline{\dot{\gamma}})$.

3. Na osnovu (2), važi:

   (3) $\operatorname{Arg}\dot{\Gamma} = \operatorname{Arg} p + \operatorname{Arg}\dot{\gamma}$;

   (4) $\operatorname{Arg}\dot{\Gamma}_0 = \operatorname{Arg} p + \operatorname{Arg}\dot{\gamma}_0$.

   Neka je $\tilde{\theta}$ merni broj ugla između $\dot{\Gamma}$ i $\dot{\Gamma}_0$ i θ merni broj ugla između $\dot{\gamma}$ i $\dot{\gamma}_0$. Oduzimanjem relacija (4) i (3), s obzirom na definiciju 4.3, nalazimo

   (5) $\tilde{\theta} = \operatorname{Arg}\dot{\Gamma}_0 - \operatorname{Arg}\dot{\Gamma} = \operatorname{Arg}\dot{\gamma}_0 - \operatorname{Arg}\dot{\gamma} = \theta$. □

Često se u literaturi ne pravi jasna razlika između arg i Arg. Ponovimo da sa Arg označavamo višeznačnu funkciju definisanu na $\mathbb{C}^*$, a sa arg njenu granu; sa $\arg_\alpha$ označavamo granu definisanu na O_α sa vrednostima u $J_\alpha = (\alpha, \alpha + 2\pi)$.

Dodatna razmatranja i Vežbanja:

a. Pokazati da relacije (3) i (4) u opštem slučaju nisu tačne ako Arg zamenimo sa arg, mada se to često čini u literaturi.

   Primer 22 *Neka je $p = i = e^{i\pi/2}$, $a = |a|e^{i\alpha}$, $\alpha \in [0, 2\pi)$ i $\arg = \arg_\alpha$. Tada je $\arg p = \pi/2$ i $\arg a = \alpha$. Otuda $\arg p\, a = \arg p + \arg a + 2k\pi$, gde je $k = 0$ ako je $\alpha < 3\pi/2$ i $k = -1$ ako je $\alpha \geq 3\pi/2$.*

   U tačkama 1. i 2. skicirali smo dokaze teoreme a da u suštini nismo koristili formulu za argument proizvoda, koja privlači studente i autore udžbenika. Podvucimo da se formule (3) i (4) mogu zapisati u sledećem obliku

   (6) $\arg\,\dot{\Gamma} = \arg\,\dot{\gamma} + \arg\,p + 2k\pi$,

(7) $\arg \dot{\Gamma_0} = \arg \dot{\gamma_0} + \arg p + 2k_0\pi$,

gde su k i k_0 u opštem slučaju različiti celi brojevi.

Često se pojavljuju razne varijacije prethodnog razmatranja u kojima je $k = k_0$ i otuda, oduzimanjem relacija (7) i (6), dobijamo

(8) $\arg \dot{\Gamma} - \arg \dot{\Gamma_0} = \arg \dot{\gamma} - \arg \dot{\gamma_0} = \theta$.

b. Objasniti u kom smislu možemo smatrati da su relacije (5), (6) i (7) tačne. Primerom pokazati da relacija (8) (videti Primer 22) nije tačna u opštem slučaju.

U literaturi se pri dokazu teoreme Rušea koristi formula za promenu argumenta proizvoda duž nekog luka bez adekvatnog obrazloženja. Da li je to korektno s obzirom na prethodno razmatranje?

c. Ako je $p = |p|e^{i\alpha}$, da li je $\arg_\alpha \dot{\Gamma} = \alpha + \arg_0 \dot{\gamma}$?

4.4 Harmonijske funkcije i Dirihleov zadatak

O osnovnim svojstvima harmonijskih funkcija i *Dirihleovom zadataku* v. npr. [Ša], [Co], [Ru] i [Ša-La].

Harmonijske funkcije - osnovna svojstva

Realna funkcija u klase C^2 naziva se harmonijska u Ω ako

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{1}$$

Diferencijalni operator na levoj strani jednačine (1) naziva se *Laplasov operator* i označava simbolom Δ; jednostavno se proverava da je

$$\Delta = \Big(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\Big) = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}}; \tag{2}$$

tj. u kompaktnijoj formi

$$\Delta = 4\,\partial \circ \overline{\partial}.$$

Veza između harmonijskih i holomorfnih funkcija izražava se pomoću sledeće dve teoreme.

Teorema 4.4 *Realni i imaginarni deo holomorfne funkcije f u Ω su harmonijske funkcije u Ω.*

Uputstvo: $u = \mathrm{Re} f = \frac{1}{2}\,(f + \overline{f}\,) \quad \partial \circ \overline{\partial}\, u = \frac{1}{2}\,\partial\,(\overline{\partial}\,\overline{f}\,) = 0$ □

Teorema 4.5 *Za proizvoljnu harmonijsku funkciju* $\boldsymbol{u}$ *u oblasti* Ω*, lokalno, u okolini svake tačke postoji holomorfna* f *tako da je* $u = \mathrm{Re} f$*.*

Uputstvo: Neka je $\mathrm{U} = \mathrm{B}(a;r) \subset \Omega$; s obzirom na (1) forma $\omega = -\,u_y\,dx + u_x\,dy$ je zatvorena u U. Otuda integral od ω ne zavisi od puta u U i definiše funkciju

$$v(z) = \int_a^z \omega. \tag{3}$$

Kao u realnoj analizi dokazuje se da je v $\mathbb{R}$-diferencijabilna u U i da

$$v_x = -u_y,\ v_y = u_x. \tag{4}$$

Ali, ovo su uslovi $\mathbb{C}$-diferencijabilnosti funkcije $f = u + iv$, a $u = \mathrm{Re} f$. □
Sledeći primer pokazuje da, u opštem slučaju, za proizvoljnu harmonijsku funkciju u u oblasti Ω, globalno ne postoji holomorfna funkcija f tako da je $u = \mathrm{Re} f$ na Ω.

Primer 23 *Proveriti da je* $u = \ln|z|$ *harmonijska u* $\mathrm{U}' = U \setminus \{0\}$*; a da je grana funkcije* $v = \mathrm{Arg}$ *definisana samo lokalno na* U'*.*

Uputstvo: Preciznije, neka je ln grana def u $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ sa $\mathrm{Im} \ln \in (0, 2\pi)$. Pretpostavimo da postoji holomorfna funkcija f u U' tako da je $u = \mathrm{Re} f$. Pokazati da je $f = \ln + c$ u U', gde je $c \in \mathbb{C}$ konstanta; i otuda da je f prekidna na $(0,1)$. □

Lema 4.5 *Neka je* u *harmonijska funkcija na disku* $B = B(a;r)$ *i neka postoji disk* $B_1 \subset B$ *tako da je* $u = 0$ *na* B_1*, tada je* $u = 0$ *na* B*.*

Dokaz: Po Teoremi 4.5, postoji holomorfna funkcija f tako da je $u = \mathrm{Re} f$ na B. Kako je $u = 0$ na B_1, na osnovu Koši-Rimanovih uslova, dobija se $v = s$ na B_1, gde je $s \in \mathbb{R}$ konstanta. Otuda je prvo $f = is$ na B_1 i, na osnovu teoreme jedinosti, na B; i stoga $u = 0$ na B. □

1. *Beskonačna diferencijabilnost*

Neka je u proizvoljna harmonijska funkcija u oblasti Ω. Tada u ima u svakoj tački oblasti Ω parcijalne izvode svih redova, koji su takođe harmonijske funkcije u Ω.
Dokaz: Neka je z proizvoljna tačka oblasti Ω i U krug sa središtem u z, koji pripada oblasti Ω. Po Teoremi 4.5, postoji holomorfna funkcija f tako da je $u = \mathrm{Re} f$, $u_x = \mathrm{Re} f'$, $u_y = -\mathrm{Im} f'$. Po Teoremi 4.4 ovi parcijalni izvodi su harmonijske funkcije u U. Primenjujući na njih već dokazano, dobija se postojanje i harmoničnost drugih parcijalnih izvoda, itd. □

2. *Teorema o srednjoj vrednosti*

Ako je u harmonijska funkcija u krugu $\mathrm{B} = \mathrm{B}(a; R)$, tada je za $r < R$

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + r\, e^{i\,t})\, dt. \tag{5}$$

Dokaz: Postoji holomorfna funkcija f u krugu B tako da je $u = \mathrm{Re} f$. Na osnovu Teoreme o srednjoj vrednosti za holomorfne funkcije, dobija se

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + r\, e^{i\,t})\, dt$$

Izdvajanjem realnih delova, dobija se (5). □

3. *Teorema jedinosti za harmonijske funkcije*

Ako su dve funkcije u_1 i u_2 harmonijske u Ω jednake na skupu $\mathcal{E}$, koji ima bar jednu unutrašnju tačku, tada je $u_1 \equiv u_2$.

Dokaz: Neka je $u = u_1 - u_2$ i neka $\mathcal{E}^\circ$ označava unutrašnjost skupa $\mathcal{E}$.
Dokažimo da je $\mathcal{E}^\circ$ zatvoren u relativnoj topologiji na Ω. Dokaz sledi iz Leme 4.5. Iz pedagoških razloga korisno je ponoviti detalje iz dokaza Leme 4.5.
Neka je $a \in \Omega$ tačka nagomilavanja $\mathcal{E}^\circ$ i neka je $B = B(a; r) \subset \Omega$ i $f = u + i\,v$ holomorfna u B. Postoji $b \in B \cap \mathcal{E}^\circ$ i otuda postoji krug $V = B(b; r_1) \subset B$ tako da je $u = 0$ na V. Na osnovu Koši-Rimanovih uslova, $f = i\,c$, $c \in \mathbb{R}$, na V i na osnovu Teoreme jedinosti (za holomorfne funkcije) $f = i\,c$ na B. Otuda je $u = 0$ na B i, stoga, a pripada unutrašnjosti skupa $\mathcal{E}$. Dakle, $\mathcal{E}^\circ$ je otvoreno -zatvoren u Ω i na osnovu topološkog svojsta povezanosti $\mathcal{E}^\circ = \Omega$ □

4. *Princip ekstremuma*

Neka je u harmonijska funkcija u oblasti Ω. Ako u dostiže (lokalni) maksimum ili minimum u nekoj tački a, tada je u konstanta u Ω.
Dokaz: $u = \mathrm{Re} f$; ako u dostiže maksimum u a i modul holomorfne funkcije e^f dostiže maksimum u a; otuda je f, a stoga i u, konstanta na U. Prema Teoremi jedinosti u je konstanta na Ω. Slučaj minimuma svodi se na slučaj maksimuma, ako se umesto u razmatra $-u$. □

5. *Teorema Liuvila*

Ako je funkcija u harmonijska u $\mathbb{C}$ i ograničena bar sa jedne strane npr. $u(z) < M$ za sve $z \in \mathbb{C}$, tada je $u \equiv \mathrm{const}$.
Dokaz: postoji cela funkcija f tako da $u = \mathrm{Re} f$. Neka je $\Pi_M = \{w : \mathrm{Re}\, w < \mathrm{M}\}$ i neka je $\mathcal{A}$ bilinearno preslikavanje ove poluravni na jedinični krug U. Kako f preslikava $\mathbb{C}$ na Π_M,to je $\mathcal{A} \circ f$ cela ograničena funkcija, tj. konstanta. Otuda,

sledi da je $f = \text{const}$, a stoga i $u = \text{const}$. □

6. *Invarijantnost u odnosu na konformna preslikavanja*

Ako e φ konformno (opštije holomorfno) preslikavanje oblasti Ω u Ω^* i u harmonijska funkcija na Ω^*, tada je $u \circ \varphi$ harmonijska funkcija na Ω.
Dokaz: Neka je $a \in \Omega$ proizvoljna tačka i $b = \varphi(a)$ i $\mathrm{U} \subset \Omega^*$, krug sa središtem u tački $b = \varphi(a)$. Konstruišimo holomorfnu funkciju f u U tako da je $u = \mathrm{Re} f$; tada je $u \circ \varphi = \mathrm{Re}\,(f \circ \varphi)$ i, kako je $f \circ \varphi$ holomorfna u okolini a, sledi, $u \circ \varphi$ je harmonijska funkcija u toj okolini. □

Dirihleov zadatak

Dirihleov zadatak. Neka je $D \subset \mathbb{C}$ Žordanova oblast i neka je u neprekidna funkcija na ∂D. Odrediti harmonijsko proširenje u u D; tj. konstruisati funkciju u^* koja je neprekidna u $\overline{D}$, harmonijska u D i jednaka sa u na ∂D.
a) *Jedinstvenost.* Pretpostavimo da postoje dva rešenja u_1 i u_2. Tada je $u = u_1 - u_2$ harmoniijska u D, neprekidna na $\overline{D}$ i jednaka nuli na ∂D. Ako u dostiže maksimum ili minimum na D, to je prema principu ekstremuma $u = const$ na D i s obzirom na neprekidnost i u $\overline{D}$; kako je $u \equiv 0$ na ∂D, to je u ovom slučaju $u \equiv 0$ na $\overline{D}$.
Ako u dostiže i maksimum i minimum na ∂D, to su oni jednaki 0 i opet $u \equiv 0$ na $\overline{D}$.
b) *Redukcija na krug.* Pretpostavimo da je Dirihleov zadatak rešiv za jedinični krug $\mathbb{U}$ i dokažimo da je zadatak rešiv za proizvoljnu Žordanovu (prosto povezanu) oblast D.
Na osnovu teoreme Rimana (videti Glavu 6) postoji konformno preslikavanje $\varphi : D \to \mathbb{U}$, koje se po principu korespondencije granica (videti Glavu 7) neprekidno produžava na $\overline{D}$. Neka je na ∂D zadata neprekidna funkcija u i neka je $v = u \circ \varphi^{-1}$ i označimo sa v^* harmonijsko produženje te funkcije u $\mathbb{U}$. Tada je funkcija $u^* = v^* \circ \varphi$ harmonijska u D, neprekidna u $\overline{D}$, a na ∂D jednaka u $\circ \varphi^{-1} \circ \varphi = u$, tj. daje rešenje Dirihleov zadataka za D.
c) *Rešenje za krug.*
Neka je $\mathrm{U} = \mathrm{U}_R$ krug i $\mathrm{K} = \partial\mathrm{U}$ granici kruga. Ponovimo sa $\mathcal{K}(z,\zeta) = \mathcal{K}_z(\zeta) = \dfrac{1}{\zeta - z}$ označavamo *Košijevo jezgro.*
Neka je *Dirihleov zadatak* rešen za krug U sa zadatom funkcijom u na granici kruga $\mathrm{K} = \partial\mathrm{U}$. Konstruišimo holomorfnu funkciju f u U tako da je $\mathrm{Re} f$ rešenje *Dirihleovog zadatka.* Pretpostavimo još da se f produžava neprekidno na $\overline{\mathrm{U}}$. Tada za $z \in \mathrm{U}$, na osnovu Košijeve formule, sledi

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{K}} \mathcal{K}(z,\zeta)\, f(\zeta)\, d\zeta = \int_0^{2\pi} \tilde{\mathcal{K}}(z,\zeta)\, f(\zeta)\, dt, \tag{1}$$

gde je $\zeta = R e^{it}$ i $\tilde{\mathcal{K}}(z,\zeta) = \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{\zeta}{\zeta - z}$. Transformišimo desnu stranu (1) tako da njen realni deo sadrži samo vrednosti $\mathrm{Re} f = u$ na $\partial\mathrm{U}$. Stoga, izaberimo tačku

$z^* = \dfrac{R^2}{\bar{z}}$, simetričnu sa z u odnosu na ∂U i, pozivajući se na Košijevu formulu, po kojoj je,

$$(2) \qquad 0 = \int_0^{2\pi} \tilde{\mathcal{K}}(z^*, \zeta)\, f(\zeta)\, dt\,,$$

oduzmimo (2) od (1). Otuda je

$$(3) \qquad f(z) = \int_0^{2\pi} \mathcal{P}(z,\zeta)\, f(\zeta)\, dt\,,$$

gde je

$$\mathcal{P}(z,\zeta) = \tilde{\mathcal{K}}(z,\zeta) - \tilde{\mathcal{K}}(z^*,\zeta).$$

Kako je, za $\zeta \in$ K,

$$\tilde{\mathcal{K}}(z^*,\zeta) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\overline{z}\zeta}{\overline{z}\zeta - R^2} = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\overline{z}\zeta}{\overline{z}\zeta - \zeta\overline{\zeta}} = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\overline{z}}{\overline{z} - \overline{\zeta}}.$$

Otuda je

$$(4) \qquad \mathcal{P}(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{R^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}.$$

Izdvajajući realne delove iz (3), s obzirom na (4), dobija se

$$(5) \qquad u(z) = \int_0^{2\pi} \mathcal{P}(z,\zeta)\, u(\zeta)\, dt\,.$$

Za $f \equiv 1$,

$$(6) \qquad \int_0^{2\pi} \mathcal{P}(z,\zeta)\, dt = 1.$$

Primetimo da se *Puasonovo jezgro* može predstaviti u obliku

$$(7) \qquad \mathcal{P}(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Re}\,\frac{\zeta + z}{\zeta - z}.$$

Neka je K $= \partial$U, ζ, $\zeta_0 \in$ K i $\zeta \neq \zeta_0$. Iz (7), sledi

$$\lim_{z \to \zeta_0} \mathcal{P}(z,\zeta) = 0,$$

pri čemu je konvergencija ravnomerna po ζ na svakom luku $l \subset$ K koji ne sadrži neku okolinu tačke ζ_0.

Prethodna razmatranja daju motivaciju za sledeću teoremu, koja daje rešenje *Dirihleovog zadatka* za krug.

Teorema 4.6 *Neka je* $u : \mathrm{K} \to \mathbb{R}$ *neprekidna, neka je*

$$u^*(z) = P[u](z) = \int_0^{2\pi} \mathcal{P}(z,\zeta)\, u(\zeta)\, dt \tag{8}$$

i Hu *definisana na zatvorenom krugu* $\overline{\mathrm{U}}$ *sa:* $Hu(z) = P[u](z)$ *za* $z \in \mathrm{U}$ *i* $Hu(z) = u(z)$ *za* $z \in \mathrm{K}$. *Tada važi*
a) Hu *je harmonijska u* U.
b) Hu *je neprekidna na* $\overline{\mathrm{U}}$.

Dokaz: *a*) S obzirom na (7), Hu je realni deo funkcije

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R\, e^{i\,t} + z}{R\, e^{i\,t} - z}\, u(R\, e^{i\,t})\, dt \quad (z \in \mathrm{U}), \tag{9}$$

holomorfne u U i otuda, harmonijska u U.

b) Neka je $\zeta_0 = R\, e^{i\,t_0}$ i

$$\Delta = \int_0^{2\pi} \mathcal{P}(z,\zeta)\, u(\zeta)\, dt - u(\zeta_0) = \int_0^{2\pi} \mathcal{P}(z,\zeta) \big(u(\zeta) - u(\zeta_0) \big)\, dt. \tag{10}$$

Za fiksirano $\varepsilon > 0$, postoji $\delta > 0$ tako da $|u(\zeta) - u(\zeta_0)| < \varepsilon$ za $|t - t_0| < 2\,\delta$.
Neka je $\mathrm{I}_1 = \{t : |t - t_0| < 2\,\delta\}$ i $\mathrm{I}_2 = [0, 2\,\pi] \setminus \mathrm{I}_1$. Otuda je,

$$\Big| \int_{\mathrm{I}_1} \mathcal{P}(z,\zeta) \big(u(\zeta) - u(\zeta_0) \big)\, dt \Big| < \varepsilon \int_0^{2\pi} \mathcal{P}(z,\zeta)\, dt = \varepsilon\,. \tag{11}$$

Neka je $z = r\, e^{i\,\varphi}$; postoji $0 < \rho < \mathrm{R}$ tako da je

$$\mathcal{P}(z,\zeta) < \varepsilon$$

za svako $t \in \mathrm{I}_2$ i svako z za koje je $|\varphi - t_0| < \delta$, $\mathrm{R} - \rho < r < \mathrm{R}$, tj. za svako $z \in G = G_\rho = \{r\, e^{i\,\varphi} : |\varphi - t_0| < \delta,\ \mathrm{R} - \rho < r < \mathrm{R}\}$. Otuda za sve $z \in G$, imamo

$$\Big| \int_{\mathrm{I}_2} \mathcal{P}(z,\zeta) \big(u(\zeta) - u(\zeta_0) \big)\, dt \Big| < 2\,\mathrm{M} \int_0^{2\pi} \mathcal{P}(z,\zeta)\, dt \le 2\,\mathrm{M}\,\varepsilon\, 2\,\pi, \tag{12}$$

gde je $\mathrm{M} = \max\{|u(\zeta)| : \zeta \in \mathrm{K}\}$.
Iz (11) i (12), sledi da je $|\Delta| < (1 + 4\,\pi\,\mathrm{M})\,\varepsilon$ za svako $z \in G$, što je i trebalo dokazati.
$\square$

Jedinični krug

U slučaju jediničnog kruga pogodno je za *Puasonovo jezgro* koristiti oznaku $\mathcal{P}_r(\theta) = 2\pi\,\mathcal{P}(z,1) = \dfrac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$, gde je $z = re^{i\theta}$.
Otuda, sledi da je $\mathcal{P}_r(t) > 0$, $\mathcal{P}_r(t) = \mathcal{P}_r(-t)$,

$$\mathcal{P}_r(t) < \mathcal{P}_r(\delta) \quad (0 < \delta < |t| \leq \pi),$$

i da je

$$\lim_{r\to 1} \mathcal{P}_r(\delta) = 0 \quad (0 < \delta \leq \pi).$$

Iz (7), za $0 \leq r < 1$, sledi da se *Puasonovo jezgro* $\mathcal{P}_r(\theta)$ može predstaviti u obliku

$$\mathcal{P}_r(\theta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} r^{|k|}\, e^{i\,k\,\theta}. \tag{1}$$

Sa L^1 označavamo familiju Lebeg integrabilnih funkcija (videti [Ru], [Al]).
Ako $f \in L^1(\mathrm{T})$ i

$$f^*(r\,e^{i\,\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\,t})\,\mathcal{P}_r(\theta - t)\,dt, \tag{2}$$

funkcija, f^* definisana na U naziva se *Puasonov integral* funkcije f; ponekad kratko pišemo relaciju (2) kao:

$$f^* = P[f].$$

Iz Teoreme 4.6, primenjene na slučaj jediničnog kruga, slede tačke a) i c) sledeće teoreme; a tačka b) iz (1).

Teorema 4.7 *Neka je $f : \mathrm{T} \to \mathbb{C}$ neprekidna, neka je*

$$f^*(r\,e^{i\,\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\,t})\,\mathcal{P}_r(\theta - t)\,dt \tag{3}$$

i Hf definisana na zatvorenom krugu $\overline{\mathrm{U}}$ sa: $Hf(z) = P[f](z)$ za $z \in \mathrm{U}$ i $Hf(z) = f(z)$ za $z \in \mathrm{T}$. Tada je
a) Hf je neprekidna na $\overline{U}$
b) Za $0 \leq r < 1$

$$f^*(r\,e^{i\,\theta}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}_k\; r^{|k|}\, e^{i\,k\,\theta}, \tag{4}$$

gde je

$$\hat{f}_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\,t})\, e^{-ikt}\, dt$$

Furijeov koeficient funkcije f.
c) $u = \mathrm{Re} f$ je harmonijska funkcija u U.

Mada sledeća teorema sledi iz dokaza dela a) Teoreme 4.6 (videti formulu (7) koja se nalazi neposredno pre ove teoreme) i jedinosti rešenja *Dirihleovog zadatka*, pogodno je iskazati je kao posebno tvrđenje.

Teorema 4.8 *Pretpostavimo da je u realna, neprekidna na zatvorenom krugu $\overline{U}$ i harmonijska funkcija u* U. *Tada* (u U) *u je Puasonov integral njene restrikcije na* T, *i u je realni deo holomorfne funkcije*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\, u(e^{it})\, dt \quad (z \in \mathrm{U}). \tag{5}$$

Dokaz: $\mathrm{Re}\, f = Hf$ je harmonijska funkcija na U i u je jednako Hf na T. Otuda, na osnovu Teoreme jedinosti, $u = Hf$ na U i stoga $\mathrm{Re}\, f = u$ na U. □
Napomena: Jasno je da se dokaz ove teoreme može bazirati i na delu a) Teoreme 4.7, koji je specijalni slučaj Teoreme 4.6.

Definicija 4.6 *Kažemo da neprekidna funkcija u na otvorenom skupu Ω zadovoljava svojstvo srednje vrednosti, ako za svako $z \in \Omega$ postoji niz $\{r_n\}$ tako da $r_n > 0$, $r_n \to 0$ kada $n \to +\infty$, i*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z + r_n e^{it})\, dt \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{4.35}$$

Drugim rečima, $u(z)$ je srednja vrednost funkcije u na kružnicama poluprečnika r_n sa središtem u z.

Puasonova formula pokazuje da (4.35) važi za svaku harmonijsku funkciju i svako r za koje $B = \overline{B}(a; r) \subset \Omega$. Dakle, harmonijske funkcije zadovoljavaju mnogo jače svojstvo srednje vrednosti od upravo definisanog. Otuda se sledeća teorema može razmatrati kao iznenađenje.

Teorema 4.9 *Ako neprekidna funkcija u zadovoljava svojstvo srednje vrednosti na otvorenom skupu Ω, tada je u harmonijska funkcija.*

Dokaz: Dovoljno je dokazati za realnu funkciju u. Fiksirajmo $B = \overline{B}(a; R) \subset \Omega$. Puasonov integral daje neprekidnu h na $\overline{B}$, koja je harmonijska na B i poklapa se sa u na granici B. Definišimo $v = u - h$ i $m = \sup\{v(z) : z \in \overline{B}\}$. Pretpostavimo da je $m > 0$ i neka E označava skup tačaka iz $\overline{B}$ za koje je $v(z) = m$. Postoji $z_0 \in E$ tako da je $|z_0 - a| \geq |z - a|$ za sve $z \in E$. Za dovoljno male r bar pola kruga sa središtem u z_0 i poluprečnika r ne pripada E, tako da su odgovarajuće srednje vrednosti v manje od m. Kako v zadovoljava svojstvo srednje vrednosti, dobijamo kontradikciju. Dakle $m = 0$, tako da je $v \leq 0$. Isti postupak se primenjuje na $-v$. Otuda $v = 0$ i stoga $u = h$ u B, i kako je B proizvoljan disk u Ω, u je harmonijska u Ω. □

Definišimo $f_r(z) = f(r\, z)$.

Teorema 4.10 (Vajerštrasova teorema 2*) *Ako je $f \in \mathrm{C}(\mathrm{T})$ i $\varepsilon > 0$, postoji trigonometrijski polinom P tako da je*

$$|f(t) - P(t)| < \varepsilon$$

za svako realno t.

Dokaz: a) Za dato $\varepsilon > 0$ postoji $0 \leq r < 1$ tako da $|f - f_r^*| < \varepsilon/2$ na T
b) Kako red (4) ravnomerno konvergira po $\theta \in [-\pi, \pi]$ postoji n tako da $|f_r^* - S_n| < \varepsilon/2$ na T, gde je

$$S_n = \sum_{-n}^{n} \hat{f}_k \, r^{|k|} \, e^{i\,k\,\theta} \,.$$

Otuda je $|f - S_n| < \varepsilon$ na T. □

Dirihleov zadatak i Puasonovo jezgro na H

Lema 4.6 *Neka je* $P_z(t) = \dfrac{1 - |z|^2}{|z - e^{i\,t}|^2}$, $w = \mathcal{A}z = i\,\dfrac{1+z}{1-z}$, $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1}$, $\zeta = e^{i\,t}$ *i* $\tau = \mathcal{A}(\zeta)$. *Proveriti*
a) $1 - |z|^2 = 2\,v\,|\mathcal{B}'w|$, $|z - e^{i\,t}|^2 = |\mathcal{B}'w||\mathcal{B}'\tau|\,|w-\tau|^2$
b) ako je $P_z(t)\,dt = P_w^*(\tau)\,d\tau$, *tada je*

$$P_w^*(\tau) = -i\,2\,v\,|\mathcal{B}'w|\,\frac{|w-\tau|^{-2}}{|\mathcal{B}'w||\mathcal{B}'\tau|}\,\frac{\mathcal{B}'\tau}{\mathcal{B}\,\tau},$$

c)

$$\mathcal{B}'w = \frac{2\,i}{(w+i)^2}; \;\; |\mathcal{B}'\tau| = \frac{2}{(\tau^2+1)}; \;\; \frac{\mathcal{B}'w}{\mathcal{B}w} = \frac{2\,i}{w^2+1},$$

d) ako je $w = u + iv$, *tada je*

$$P_w^*(\tau) = \frac{2\,v}{|w-\tau|^2}.$$

Teorema 4.11 **Neka je* $\mathcal{P}(z) = \mathcal{P}^*(z) = \dfrac{y}{x^2+y^2}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ograničena neprekidna funkcija i funkcija* $u : \mathrm{H} \to \mathbb{R}$ *definisana sa*

$$u(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathcal{P}(z-\,t)\,dt.$$

Tada je
a) u ograničena, neprekidna funkcija na gornjoj poluravni H
b) u harmonijska funkcija na gornjoj poluravni H
c) za svako τ *u* $\mathbb{R}$

$$\lim_{\mathrm{H}\ni z\to\tau} u(z) = f(\tau)\,.$$

Uputstvo: Kako je $2\,\mathcal{P}(z-t) = P_z^*(t)$, pomoću Leme 4.6, dokaz ove teoreme svodi se na dokaz Teoreme 4.6 (o Dirihleovom problemu) na krugu. □

Vežba 4.4.1 *Neka je* $\mathcal{P}(z) = \mathcal{P}^+(z) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $f : \{z : \mathrm{Re} z = 0\} \to \mathbb{R}$ *ograničena neprekidna funkcija i funkcija* $u : \Pi^+ \to \mathbb{R}$ *definisana sa*

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(i\,t)\,\mathcal{P}(z - i\,t)\,dt.$$

Pokazati da je u *ograničena neprekidna funkcija na desnoj poluravni tako da za svako* τ *u* $\mathbb{R}$

$$\lim_{z \to i\tau} u(z) = f(i\tau)\,.$$

Uputstvo: Sledi neposredno iz Teoreme 4.11. □

Vežba 4.4.2 (*) *Neka je* u *nenegativna, neprekidna u* $\overline{\mathrm{H}}$, *harmonijska na* H *i jednaka nuli na* $\mathbb{R}$.
Dokazati da je $u = \alpha\, y$, *gde je* α *nenegativna konstanta.*

Rešenje: Neka je $v(z) = -v(\overline{z})$ za $z \in H^-$. Na osnovu Teoreme 4.9, v je harmonijska u $\mathbb{C}$. Postoji holomorfna funkcija f na $\mathbb{C}$ tako da je $\mathrm{Im} f = v$. Obzirom da je v nenegativna na H i nula na $\mathbb{R}$, sledi $f(H) \subset \overline{H}$ i $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. Ponovimo da sa B označavamo bilinearno preslikavanje definisano sa $B(w) = \dfrac{i-w}{i+w}$. Kako je $B(\infty) = -1$, funkcija $B \circ f$ je ograničena u okolini ∞ i otuda prvo sledi da $B \circ f$ ima otklonjiv singularitet ∞, i stoga $f = P$ je polinom. Ako je C_ρ polukružnica u gornjoj poluravni i $\Gamma = P \circ C_\rho$, tada je $\Delta \mathrm{Arg} \Gamma = n\pi + o(1)$, kada $\rho \to +\infty$, gde je n stepen polinoma. Iz uslova $f(H) \subset \overline{H}$, sledi $n \le 1$. Otuda je $f(z) = \alpha z + \beta$, gde je $\alpha \ge 0$ i $\beta \in \mathbb{R}$ i stoga $v = \alpha y$. □

Vežba 4.4.3 (*) *Neka je* $f' \in L^1[-\pi, \pi]$. *Da li je tada*

$$c_k(f') = i\,k\,c_k(f), \quad k \in \mathbb{Z}\,?$$

GLAVA 5

Analitičko produženje i regularne grane

5.1 Analitičko produženje

Jednačina $w^2 = z$ pri fiksiranom $z \neq 0$ ima dva rešenja različitog znaka. Sa $\sqrt{z}$ označavamo skup tih rešenja. Dakle, razmatramo $\sqrt{z}$ kao višeznačnu funkciju (jer je funkcija, u uobičajenom smislu, po definiciji jednoznačna). Pokušaj da se odustane od uslova jednoznačnosti u definiciji funkcije vodi ka teškoćama. Npr. kakav je smisao sume $\sqrt{z} + \sqrt{z}$ ako svaki sabirak ima dve vrednosti. Pomoću pojma analitičkog produženja mogu se rešiti ove teškoće.

Počinjemo izučavanje pojma analitičkog produženja ostajući u okvirima teorije jednoznačnih holomorfnih funkcija. Sa te tačke gledišta pod *analitičkim produženjem* funkcije f_0 zadate na $M \subset \mathbb{C}$ podrazumevamo funkciju f koja je holomorfna u nekoj oblasti $\Omega \supset M$, tako da je njena restrikcija na M jednaka f_0:

$$f|_M = f_0.$$

Ovaj se zadatak može rešiti na razne načine.

1. $\quad f_0(z) = \dfrac{1 - \cos z}{z^2}$ def na $\mathbb{C}^*$; na osnovu Tejlorovog razvoja funkcije cos po stepenima z, dobija se

$$f(z) = \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \cdots$$

i pomoću ovog reda proširujemo ovu funkciju na celu ravan $\mathbb{C}$.

2. (a) Suma reda

$$f_0(z) = 1 + z + z^2 + \cdots$$

je definisana i holomorfna samo na krugu U, jer za $|z| \geq 1$ red divergira. Suma ove geometrijske progresije $f_0(z) = \dfrac{1}{1-z}$, $z \in$ U, daje analitičko produženje $f(z) =$

$\dfrac{1}{1-z}$, holomorfno u oblasti $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.
(*b*) Za dato $c \neq 1$, ponovnom primenom formule za sumu geometrijske progresije, dobija se

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z-c)^k}{(1-c)^{k+1}}, \ |z-c| < |1-c|,$$

i specijalno

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z-i)^k}{(1-i)^{k+1}}, \ |z-i| < \sqrt{2}.$$

Kako je $f = -\mathcal{K}_1$ mogu se dve prethodne formule izvesti i pomoću formula za razvoj *Košijevog jezgra.*
3. *Ojlerova gama funkcija*
Ojlerova gama funkcija definiše se, za $\operatorname{Re} z > 0$, integralom po pozitivnoj poluosi

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{z-1}\, dt, \tag{5.1}$$

gde pod t^{z-1} za $t > 0$ podrazumevamo $e^{(z-1)\ln t}$.
Kako je $t^{z-1} = e^{(z-1)\ln t} = e^{(x-1)\ln t} e^{iy \ln t}$, sledi da je $|t^{z-1}| = e^{(x-1)\ln t} = t^{x-1}$ za $t > 0$ i otuda nalazimo da integral (5.1) apsolutno konvergira za $\operatorname{Re} z > 0$. Stoga odgovarajući realni integral konvergira za $x > 0$.
Kako je $d\Big(\dfrac{t^z}{z}\Big) = t^{z-1}$ (diferenciranje po t), na osnovu parcijalne integracije, dobija se

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z). \tag{5.2}$$

Primetimo da se meromorfno proširenje *gama funkcije* u levu poluravan može dobiti pomoću funkcionalne jednačine (5.2). Ovu jednačina se može napisati u obliku

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}, \tag{5.3}$$

a zatim primetiti da je desna strana ove jednačine definisana za $\operatorname{Re} z > -1$, $z \neq 0$. Primenom respektivno (5.2) i (5.3), dobija se

$$\Gamma(z+n) = z\,(z+1)\cdots(z+n-1)\,\Gamma(z), \tag{5.4}$$

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z\,(z+1)\cdots(z+n-1)}\,. \tag{5.5}$$

Pomoću (5.5) definiše se *gama funkcija* za proizvoljno $z \neq 0, -1, -2, \ldots$.
Γ ima proste polove u $z = 0, -1, -2, \ldots$. Rezidum se računa po formuli

$$\operatorname{Res}(\Gamma, -n) = \lim_{z \to -n} (z+n)\,\Gamma(z).$$

Iz (5.4) (ili (5.5)), sledi

$$(z+n)\,\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z\,(z+1)\cdots(z+n-1)}\,.$$

Otuda, kada z teži $-n$, dobija se

$$\operatorname{Res}(\Gamma, -n) = \frac{(-1)^n}{n!} \quad n \geq 0. \tag{5.6}$$

4. Neka je

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^k} = z + z^2 + z^4 + z^8 + \cdots$$

(a) Funkcija f je holomorfna u U i $f(z^2) = f(z) - z$ na U.
(b) f se ne može analitički proširiti u neku oblast koja sadrži U kao pravi podskup.

U glavi 2 razmatrali smo grane argumenta i logaritma. Ponovimo neke osnovne činjenice:
Ako je $0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$ pogodno je umesto $\Omega = \{r\, e^{i\,\varphi} : 0 < r < +\infty,\, \alpha < \varphi < \beta\}$ pisati kratko $\Omega = \{\alpha < \varphi < \beta\}$;
Pogodno je smatrati da je na ovaj način definisana *grana argumenta*, koju obično označavamo sa $\varphi = \arg$ (ili $\varphi_k = \arg_k$) na Ω;
Pod granom respektivno *logaritma* i *n-tog korena* podrazumevaju se respektivno funkcije g i f definisane na Ω sa

$$g(z) = \ln r + i\,\varphi,\ \ z \in \Omega, \tag{5.7}$$

i

$$f(z) = \sqrt[n]{r}\, e^{i\,\varphi/n},\ \ z \in \Omega. \tag{5.8}$$

Dakle, ako ne tvrdimo drugačije, smatramo da *grana argumenta* definiše respektivno *grane logaritma* i *n-tog korena* pomoću formula (5.7) i (5.8); pričemu je $f = e^{g/n}$, a g i f su holomorfne funkcije na Ω.
Koristeći poznate osobine elementarnih funkcija (stepena i korena) jednostavno se proveravaju sledeće tačke (takođe videti podsekciju *elementarne funkcije*).
5. (a) Neka je $D_0 = \{-\pi < \varphi < \pi\}$ i

$$f_0(z) = \sqrt{r}\, e^{i\,\varphi/2}. \tag{5.9}$$

Funkcija f_0 uzajamno jednoznačno preslikava D_0 na desnu poluravan $D_0^* = \{-\pi/2 < \psi < \pi/2\}$.
(b) Razmotrimo sektor $S = \{\pi \leq \varphi < \pi + \delta\}$, gde je $0 < \delta < \pi$. Funkcija f_0 se neposredno, formulom (5.9), produžava u taj sektor i konformno preslikava S na $S^* = \{\pi/2 \leq \psi < (\pi + \delta)/2\}$.
(c) produženu funkciju

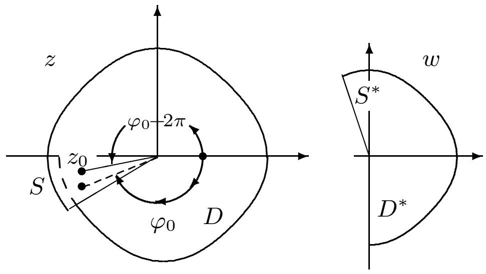
$$f(z) = \sqrt{r}\, e^{i\,\varphi/2},\ \pi \leq \varphi < \pi + \delta, \tag{5.10}$$

ne možemo razmatrati kao analitičko produženje f_0 iz D_0 u oblast $D_0 \cup S$, jer nije jednoznačna funkcija na S; f_0 je definisano na S, pomoću *grane argumenta* $\varphi_0 \in (-\pi, -\pi + \delta)$; a f je definisano na S, pomoću *grane argumenta* $\varphi \in (\pi, \pi + \delta)$. Kako je $\varphi = \varphi_0 + 2\,\pi$, s obzirom na (5.8), dobija se $f = -f_0$ na S.

(d) ako razmatramo f_0 samo u gornjoj poluravni funkcija

$$f(z) = \sqrt{r}\, e^{i\,\varphi/2},\ 0 \le \varphi < \pi + \delta, \tag{5.11}$$

je analitičko produženje f_0.
(e) Neka je $\mathrm{U}' = \{0 < |z| < r_0\}$ šuplja okolina 0. Tada ne postoji *grana korena* $\sqrt{\ }$ na U′ (videti primer 25 u daljem tekstu).



Slika 5.1:

Imajući u vidu primere iz tačaka 5.(a) i 5.(b), nastaje potreba da se uopšti pojam analitičkog produženja tako da sadrži i produženje f_0 iz D_0 u oblast $D_0 \cup S$. Primetimo da se jednoznačnost produženja narušava kada proširena oblast počne „nalezati" na sebe, pokrivajući još jedanput neki svoj deo (npr. u prethodnoj tački 5.(b) sektor S pokriva deo oblasti D_0). Iz toga je proizašla ideja (Riman i Vajerštras) da se nove vrednosti funkcije definišu na novoj oblasti, koja natkriva staru.

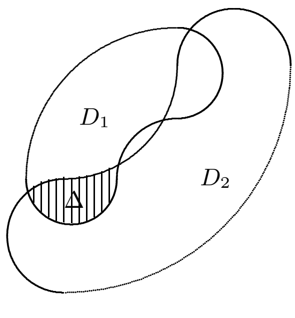
Analitički lanac

Definicija 5.1 *Analitički element (kratko element) je par $\mathcal{F} = (\Omega, f)$, gde je $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ oblast i f holomorfna funkcija u oblasti Ω.*
Ako je $\Omega = \mathrm{U}$ krug, element $\mathcal{F} = (\mathrm{U}, f)$ se naziva kružni element.

Definicija 5.2 *Dva elementa $\mathcal{F}_1 = (\Omega_1, f_1)$ i $\mathcal{F}_2 = (\Omega_2, f_2)$ su neposredno analitičko produženje jedan drugog ako je $\Omega_1 \cap \Omega_2$ neprazan i*

$$f_1 \equiv f_2$$

na nekoj komponenti $\Omega_1 \cap \Omega_2$; u ovom slučaju pišemo $\mathcal{F}_1 \simeq \mathcal{F}_2$.



Slika 5.2:

Motivacija za ove definicije može se dati pomoću razmatranja npr. elementarnih funkcija.

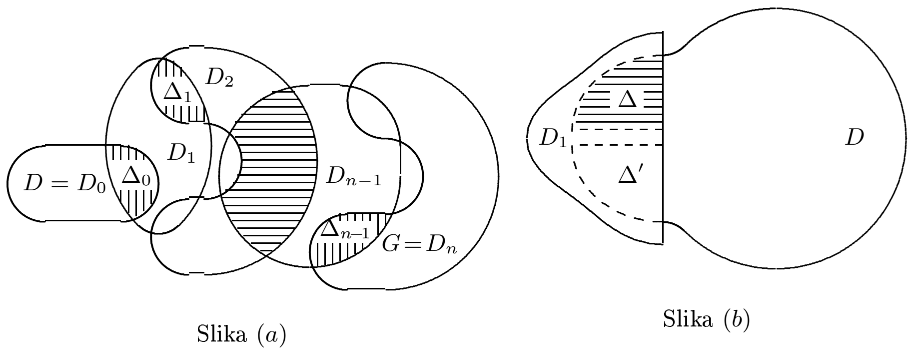
Pogodno je koristiti oznaku:

$$\mathcal{F}_t = (\Omega_t, f_t)$$

za analitičke elemente.

Definicija 5.3 (analitičko produženje preko lanca oblasti) *Analitički lanac je konačan niz elemenata $\mathcal{C}_a = \{\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n\}$*

tako da je $\mathcal{F}_k \simeq \mathcal{F}_{k+1}$ za $k = 0, \ldots, n-1$; u ovoj situaciji pišemo $\mathcal{F}_n \sim \mathcal{F}_0$ i kažemo da je element $\mathcal{F}_n$ analitičko produženje elementa $\mathcal{F}_0$ duž odgovarajućeg lanca oblasti $\mathcal{C} = \{\Omega_0, \Omega_1, \ldots, \Omega_n\}$; ili kratko da su elementi $\mathcal{F}_0$ i $\mathcal{F}_n$ ekvivalentni (posredno, preko lanca oblasti).



Slika 5.3:

Primer 24 (slika 5.3 (b)) *Neka su elementi $\mathcal{F}_0 = (D, f_0)$ i $\mathcal{F}_1 = (D_1, f_1)$ respektivno definisani odgovarajućim granama korena (pomoću formule (5.8), za $n = 2$, tj. formule (5.13)) na oblastima $\mathrm{D} = \mathbb{C}_1 = \{-\pi < \varphi < \pi\}$ i $D_1 = \Pi^- = \{\pi/2 < \varphi < 3\,\pi/2\}$ (leva poluravan).*
Tada je $f_1 = f_0$ na drugom kvadrantu $\Delta = \{\pi/2 < \varphi < \pi\}$, a $f_1 = -f_0$ na trećem kvadrantu $\Delta' = \{\pi < \varphi < 3\pi/2\}$. Dakle ovi elementi su analitičko produženje jedan drugog kroz drugi kvadrant, ali ne kroz treći kvadrant.

Primeri i motivacija; grane logaritma i korena

Primer 25 *Neka je $\mathrm{U}' = \{0 < |z| < r_0\}$ šuplja okolina 0. Tada ne postoji grana korena $\sqrt{\ }$ na U'.*

Rešenje: Ako postoji grana korena Υ na U', tada je nula otklonjiv singularitet za Υ i stoga za Υ'; specijalno Υ' je ograničena funkcija u okolini 0. Iz $\Upsilon^2 = Id$ na U', sledi $2\Upsilon\,\Upsilon' = 1$ i stoga $|\Upsilon'(z)| = \dfrac{1}{2\sqrt{|z|}}$ na U'; dakle, Υ' nije ograničena funkcija u okolini 0; kontradikcija.

Ponovimo, ako je $0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$ pogodno je umesto $\Omega = \{r\,e^{i\,\varphi} : 0 < r < +\infty,\ \alpha < \varphi < \beta\}$ pisati kratko $\Omega = \{\alpha < \varphi < \beta\}$;
pod granom respektivno logaritma i n-tog korena podrazumevati respektivno funkcije g i f definisane na Ω sa

$$g(z) = \ln r + i\,\varphi, \quad z \in \Omega, \tag{5.12}$$

i

$$f(z) = \sqrt[n]{r}\, e^{i\,\varphi/n}, \quad z \in \Omega. \tag{5.13}$$

U sekciji 1.6.5 pokazano je da je f holomorfna funkcija u Ω i stoga (Ω, f) je analitički element.

Primer 26 *Neka su elementi* $\mathcal{F} = (H, f)$, $\mathcal{F}_1 = (\Omega_1, f_1)$, $\mathcal{F}_2 = (\Omega_2, f_2)$ *i* $\mathcal{G} = (H, f_3)$ *definisani odgovarajućim granama korena (pomoću formule (5.13), za* $n = 2$*) na oblastima* $\mathrm{H} = \{0 < \varphi < \pi\}$, $\Omega_1 = \{0 < \varphi < 2\,\pi\}$, $\Omega_2 = \{\pi < \varphi < 3\,\pi\}$ *i* $\mathrm{H} = \{2\,\pi < \varphi < 3\,\pi\}$.
$\mathcal{F}$ *i* $\mathcal{G}$ *su analitičko produženje jedan drugog.*

Motivacija za ovu definiciju (analitičko produženje preko lanca oblasti) može se dati pomoću razmatranja npr. elementarnih funkcija.

Elementarne funkcije

Ponovimo oznake. Sa $D_\alpha = \mathbb{C}^\alpha$ označavamo $\{-\pi + \alpha < \varphi < \pi + \alpha\}$. Dakle, D_α je pogodna oznaka za $O_{\alpha-\pi}$.

Ako je $a = |a|e^{i\alpha} \in \mathbb{C}^*$, ponekad je pogodno pisati $\mathbb{C}_a$ umesto $\mathbb{C}^\alpha$. Podvucimo da $a \in \mathbb{C}_a$.
Mada suštinski nema razlike između D_α i O_α; $D_\alpha = \mathbb{C}^\alpha = -O_\alpha$, u radu sa analitičkim elementima pogodno je koristiti oznaku $\mathbb{C}_a$.

1. *Logaritam*

a. Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$, $D_\alpha = \{-\pi + \alpha < \varphi < \pi + \alpha\}$ i $\mathcal{G}_\alpha = (D_\alpha, g_\alpha)$, gde je

$$g_\alpha(z) = \ln r + i\,\varphi\ , \quad z \in D_\alpha.$$

U sekciji 1.6.4 (Grane Log i Exp) pokazano je da su g_α *regularne grane logaritma* na D_α. Otuda $\mathcal{G}_\alpha = (D_\alpha, g_\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, su analitički elementi.

b. Funkcija Ln može se definisati i pomoću kanonskog elementa. Za početni element može se izabrati npr. krug $\mathrm{B} = \{|z-1| < 1\}$ i neka je g grana logaritma na tom krugu U. Kako je za $n \geqslant 1$,

$$g^{(n)}(z) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{z^n}, \quad z \in \mathrm{B},$$

i otuda specijalno $a_n = g^{(n)}(1)/n! = (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$, na osnovu Tejlorove teoreme, dobija se

$$g(z) = g(1) + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(z-1)^n}{n}, \quad z \in \mathrm{B},$$

gde je $g(1) = 2k\pi\, i$.

Otuda, specijalno sledi za $k = 0$,

$$\ln z = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n}, \quad z \in \mathrm{B},$$

gde je ln druga glavna determinacija (ponovimo određena sa vrednostima argumenta u $(-\pi, \pi)$) i $B = B(1;1)$; i

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}, \quad z \in \mathrm{U},$$

gde je $\mathbb{U} = B(0;1)$.

Vežba 5.1.1 *Neka je $\phi(z) = 1 + z + z^2 + z^3$ i $F = \mathrm{Ln} \circ \phi$.*
Dokazati da postoji regularna grana všz funkcije F na jediničnom krugu $\mathbb{U}$.
Granu g određenu sa $g(0) = 2k\pi\, i$, gde je k ceo broj razviti u Tejlorov red na $\mathbb{U}$.

Uputstvo : Neka je $\phi = \varphi\psi$, gde je je $\varphi(z) = 1 + z$, $\psi(z) = 1 + z^2$ i ln druga glavna detrminacija logaritma. Kako funkcije φ i ψ preslikavaju $\mathbb{U}$ u $B = B(1;1) \subset \Pi^+$, funkcije $g_1 = \ln \circ \varphi$ i $g_2 = \ln \circ \psi$ su analitičke na $\mathbb{U}$; i funkcija $\ln \circ \varphi + \ln \circ \psi$ je grana všz funkcije F. Proveriti da je $g = g_1 + g_2 + 2k\pi\, i$ i

$$g_1(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}, \tag{5.14}$$

$$g_2(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^{2n}}{n}. \tag{5.15}$$

2. *Koren*

Pod n-tim korenom (n prirodan broj) podrazumevamo analitičku funkciju $w = \sqrt[n]{z}$ definisanu na sledeći način. U ravni $\overline{\mathbb{C}}$ sa isečenom negativnom poluosom $D_0 = \mathbb{C}_1 = \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{R}^-$ definišimo funkciju

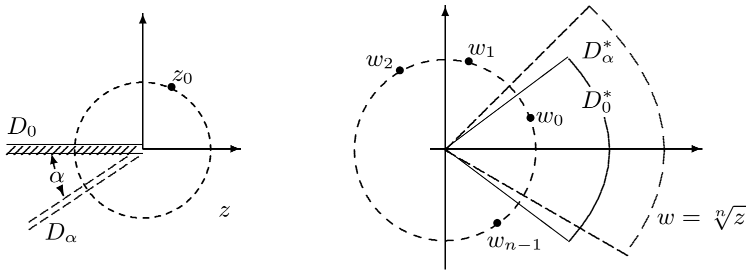
$$f_0(z) = \sqrt[n]{r}\, e^{i\,\varphi/n}.$$

Par $\mathcal{F}_0 = (D_0, f_0)$ je analitički element. Analitička funkcija koja se dobija pri analitičkom produženju ovog elementa naziva se n-ti koren. Tako produženje se može opisati poću parova $\mathcal{F}_\alpha$.

Za $\alpha \in \mathbb{R}$, neka je $D_\alpha = \{-\pi + \alpha < \varphi < \pi + \alpha\}$ i

$$f_\alpha(z) = \sqrt[n]{r}\, e^{i\,\varphi/n}.$$

Kada je oznaka f_α zauzeta koristimo i oznaku $\Upsilon = \Upsilon_\alpha$ umesto f_α.
Ponovimo, u sekciji 1.6.4 (Grane Log i Exp) pokazano je da su g_α *regularne grane*



Slika 5.4:

logaritma na D_α (videti takođe pasus Elementarne funkcije (o logaritmu)). Kako je $f_\alpha = e^{g_\alpha/n}$ na D_α, sledi da su f_α holomorfne funkcije na D_α; otuda, na osnovu definicije produženja, sledi da su
$\mathcal{F}_\alpha = (D_\alpha, f_\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, elementi, i da su produženja elementa $\mathcal{F}_0$ (pri $|\alpha| < \pi$ neposredna).
Pogodno je ovo dokazati (preciznije da su (D_α, f_α) analitički elementi) pomoću razmatranja stepene funkcije (i interesantno, s pedagoške tačke gledišta).

Koren i Stepena funkcija

$$z = g(w) = w^n, \tag{5.16}$$

gde je n prirodan broj holomorfna je u $\mathbb{C}$. Kako je izvod $g'(w) = n\,w^{n-1}$, za $n > 1$, različit od nule za $w \neq 0$, sledi da je (5.16) konformno na $\mathbb{C}^*$.
U polarnim koordinatama $z = re^{i\,\varphi}$, $w = \rho e^{i\,\psi}$ (5.16) se može napisati u obliku:

$$r = \rho^n, \;\; \varphi = n\,\psi. \tag{5.17}$$

Otuda, sledi da je preslikavanje (5.16) jednolisno u sektoru
$D^*_\alpha = \{(-\pi+\alpha)/n < \psi < (\pi+\alpha)/n\}$, $g(D^*_\alpha) = D_\alpha$
i da je $f = f_\alpha$ inverzno preslikavanje restrikcije preslikavanja (5.16) na D^*_α.
Na osnovu teoreme o izvodu inverzne funkcije

$$f' = \frac{1}{n\,f^{n-1}}$$

na D_α, i otuda, $\mathcal{F}_\alpha = (D_\alpha, f_\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, su analitički elementi. □

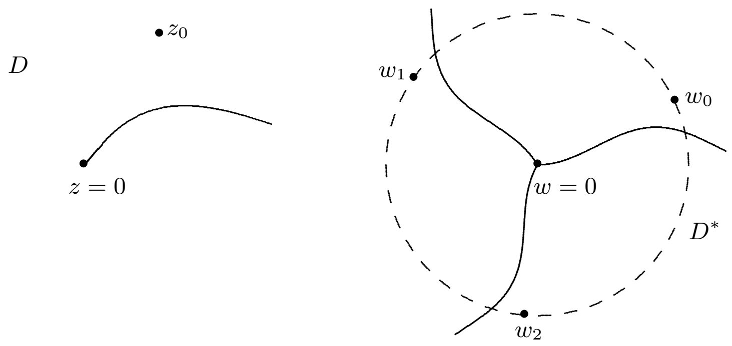
Svakoj tački $z_0 \in D_0$ analitička funkcija $\sqrt[n]{z}$ dodeljuje tačno n-vrednosti. Zaista, sve vrednosti holomorfnih funkcija koje pripadaju elementima $\mathcal{F}_\alpha$ (grane analitčke funkcije $\sqrt[n]{z}$) određene su po formuli

$$w = \sqrt[n]{r_0}\, e^{i\,\frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n}}, \tag{5.18}$$

gde je $r_0 = |z_0|$, φ_0 jedna vrednost $\mathrm{Arg}z_0$, a k proizvoljan ceo broj. Ako defininišimo $w_0 = \sqrt[n]{r_0}\, e^{i\,\frac{\varphi_0}{n}}$, iz formule je jasno, da se druge vrednosti w razlikuju od w_0 za multipl $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, a ti multipli (množitelji) (n-ti koreni iz 1) dobijaju se iz vektora 1 rotacijom za multipl od $\frac{2\pi}{n}$, tj. imaju n različitih vrednosti.

Na taj način, među vrednostima datim formulom (5.18) ima samo n različitih, $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$, koje se dobijaju zamenom u (5.18) $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Te vrednosti su temena pravilnog n-tougla sa centrom u $w = 0$, a jedno od temena ovog n-tougla je tačka w_0 (videti sl. 5.4).
U zaključku recimo nešto o granama funkcije $\sqrt[n]{z}$, tj. holomorfnim funkcijama koje pripadaju njenim elementima (ne samo iz familije $\mathcal{F}_\alpha$).

Po Teoremi o monodromiji (videti u tekstu koji sledi) postoji grana funkcije $\sqrt[n]{z}$ u proizvoljnoj prosto-povezanoj oblasti D koja ne sadrži tačke $z = 0$ i $z = \infty$ (za $\sqrt[3]{z}$ videti sliku 5.5). Primer takve oblasti je kompleksna ravan sa proizvoljnim zasekom koji spaja tačke 0 i ∞ (granica oblasti mora biti povezana). Na slici 5.5 data je jedna takva oblast D i njena slika D^* pri preslikavanju jednom od grana $\sqrt[3]{z}$; dve druge grane preslikavaju D respektivno na oblasti $e^{2\pi i/3}D^*$ i $e^{4\pi i/3}D^*$, dobijene iz D^* rotacijom za uglove $2\pi/3$ i $4\pi/3$.



Slika 5.5:

Uopšte, granu možemo izdvojiti u svakoj oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$, koja zadovoljava sl. uslov
(*) ne sadrži zatvoren put, koji okružuje 0
pri obilazku takvih puteva veličina arg menja se za multipl 2π i analitičko produženje duž takvih puteva može dovesti do drugog elementa.

U oblastima koje zadovoljavaju $(*)$ može se izdvojiti n-različitih grana funkcije $\sqrt[n]{z}$

Svaka grana razlikuje se od druge množenjem sa $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ i određena je sa domenom i vrednosti u jednoj tački; na primer može se govoriti o grani $\sqrt[3]{z}$ koja je definisana u $\mathbb{C}_1$ i jednaka 1 za $z = 1$; druge dve grane $\sqrt[3]{z}$ u toj oblasti pri $z = 1$ određene su vrednostima $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ i $e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{i\frac{-2\pi}{3}}$.

Specijalno, korektno je definisan izvod

$$(\sqrt[n]{z})' = \frac{1}{n(\sqrt[n]{z})^{n-1}} = \frac{\sqrt[n]{z}}{nz},$$

koji je takođe anlitička funkcija.

Oblast $\Omega \subset \mathbb{C}$ zadovoljava uslov $(*)$ ako
ne sadrži prostu zatvorenu specijalnu poligonalnu liniju, koja okružuje 0;
tj. ako i samo ako
(**) za svaku prostu zatvorenu specijalnu poligonalnu liniju Λ koja pripada Ω, sledi $0 \in \mathrm{Ext}\Lambda$;
tj. 0 pripada neograničenoj komponenti skupa $\mathbb{C} \setminus \Omega$.

Grubo, vizuelno rečeno, tada $(*)$ znači da $0 \notin \Omega$ i 0 ne pripada nekoj ograničenoj „rupi" u Ω; preciznije, ako je Ω_0 unija ograničenih „rupa" (ograničenih komponenti skupa Ω^c) i Ω^* unija Ω i Ω_0, tada $(*)$ znači da $0 \notin \Omega^*$. Drugim rečima, ako Ω ima ograničene „rupe" Ω_k (ograničene komponente skupa Ω^c) i ako je $\Omega_0 = \overline{\cup \Omega_k}$, tada $(*)$ znači da $0 \notin \Omega$ i $0 \notin \Omega_0$; podvucimo da je u ovoj situaciji $\Omega \cup \Omega_0$ prosto povezana oblast koja ne sadrži 0.

Definicija 5.4 *Kažemo da je oblast Ω specijalnog $O-tipa$ ako $\Omega \subseteq O_\alpha$ za neko $\alpha \in \mathbb{R}$.*
Kažemo da je oblast Ω, $O-tipa$ ako $\Omega \subseteq D$, gde je D prosto-povezanoj oblasti koja ne sadrži tačke $z = 0$ i $z = \infty$.

Može se pokazati da oblast $\Omega \subset \mathbb{C}$ zadovoljavaju uslov $(*)$ ako i samo ako je $O-tipa$.

Dakle, primeri oblasti, koje zadovoljavaju uslov $(*)$ su oblasti O-tipa: (specijalno O_α i $\mathbb{C}_\alpha$), prsten $V = V(a : r, R)$, ako je $R \leq |a|$ (tj. $0 \notin V$), gornja poluravan, pojas koji ne sadrži koordinatni početak 0, varšavski krug itd.
Ako je K kompaktan skup u $\mathbb{C}$, tada oblast $\Omega = \mathbb{C} \setminus K$ ne zadovoljava uslov $(*)$; specijalno $\mathbb{C}'$, $\mathbb{U}'$, prsten $V(a : r, R)$, ako je $|a| < R$ (tj. $0 \in V$) ne zadovoljavaju uslov $(*)$.

Neka je γ spirala $\gamma(r) = re^{i\,r}$, $0 \leq r < +\infty$, tj. beskonačna spirala $r = \theta$, $0 \leq \theta < +\infty$; oblast $G = \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ je prosto povezana i zadovoljava uslov $(*)$;
ako neki zatvoren krug $\overline{B} \subset G$, tada jasno oblast $G \setminus \overline{B}$ zadovoljava uslov $(*)$, ali nije prosto povezana.
U oblastima koje zadovoljavaju $(*)$ može se izdvojiti grana argumenta, logaritma, $\sqrt[n]{\ }$, itd. (za strog dokaz videti sekciju postojanje grana 5.2).

5.1.1 Analitičko produženje duž puta-kružni elementi

Potpuna analitička funkcija

Do pojma analitičke funkcije dolazimo ako razmatramo familiju elemenata $\mathcal{F}_\alpha = (\Omega_\alpha, f_\alpha)$, gde je $\alpha \in \mathbf{A}$ i $\mathbf{A}$ proizvoljni skup indeksa, pri čemu se pretpostavlja da je svaki od ovih elemenata dobijen iz proizvoljnog drugog analitičkim produženjem. Holomorfne funkcije f_α, $\alpha \in \mathbf{A}$, koje pripadaju elementima, nazivaju se *grane* razmatrane analitičke funkcije.

Radi udobnosti konkretizujemo ovaj pojam; zamenimo proizvoljne elemente kanonskim i produženje - produženjem duž puta.

Kanonski element sa centrom u $a \in \overline{\mathbb{C}}$ naziva se $\mathcal{F}_a = (\mathrm{U}_a, f_a)$, gde je f_a suma stepenog reda sa centrom u a i $\mathrm{U}_a = B_a$ krug konvergencije tog stepenog reda. Nazivaćemo U_a krugom konvergencije elementa $\mathcal{F}_a$ i označavaćemo sa R_a radijus tog kruga ako je $a \neq \infty$, ili radijus njegovog komplementa, ako je $a = \infty$. Preciznije:

Definicija 5.5 *Analitički element (kratko element) je par $\mathcal{F} = (\Omega, f)$, gde je $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ oblast i f holomorfna funkcija u oblasti Ω.*
Ako je $\Omega = \mathrm{U}$ krug, element $\mathcal{F} = (\mathrm{U}, f)$ se naziva kružni element. Kanonski element sa centrom u tački $a \in \overline{\mathbb{C}}$ naziva se $\mathcal{F}_a = (\mathrm{U}_a, f_a)$, gde je f_a suma stepenog reda sa centrom u a i U_a krug konvergencije tog reda; U_a nazivamo krug konvergencije elementa $\mathcal{F}_a$; označimo sa R_a radijus tog kruga ako je $a \neq \infty$, ili radijus njegovog komplementa ako je $a = \infty$.
Ako je $a \in \mathbb{C}$, krug konvergencije elementa $\mathcal{F}_a$ ima oblik $\mathrm{U}_a = \{z : |z - a| < R_a\}$, gde je $R_a \leq \infty$, a funkcija

$$f_a(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\,(z-a)^n;$$

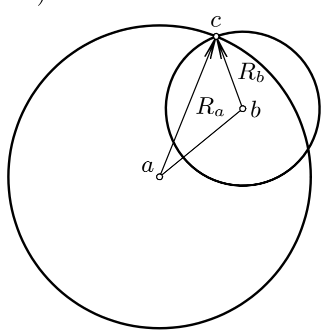
a ako je $a = \infty$, to je $\mathrm{U}_a = \{z : |z| > R_a\}$, gde je $R_a \geq 0$, a funkcija

$$f_a(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{z^n}\,.$$

Ako je funkcija f holomorfna na krugu $B = B(a, r)$, funkcija f se može razviti u stepeni red oko tačke a. U opštem slučaju radijus konvergencije stepenog reda R je veći od r; označimo sa f_1 funkciju definisanu ovim stepenim redom i sa B_1 krug $B(a; R)$. Par (B_1, f_1) je kanonski element, a par (B, f) kružni element.

Ako je kanonski element $\mathcal{F}_b = (U_b, f_b)$ neposredno analitičko produženje elementa $\mathcal{F}_a = (U_a, f_a)$ i, sem toga, $b \in U_a$, to se produženje jednostavno svodi na razlaganje f_a po stepenima $z - b$:

$$f_b(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f_a^{(n)}(b)}{n!}(z-b)^n.$$



Slika 5.6:

Primetimo da krugovi U_a i U_b ne mogu kompaktno pripadati jedan drugom; ako npr. $U_b \Subset U_a$, to je f_b holomorfna u većem krugu, nego U_b, sa centrom u b, i stoga U_b nije krug konvergencije. Otuda ∂U_a i ∂U_b imaju zajedničku tačku c, i iz nejednakosti trougla, prvo

sledi $||a-c|-|b-c|| \leq |a-b|$, i kako je
$R_a = |a-c|$ i $R_b = |b-c|$, dobija se

$$|R_a - R_b| \leq |a-b|. \qquad (5.19)$$

Definicija 5.6 (Analitičko produženje duž puta-kružni elementi) *Neka je* $\gamma : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ *put. Kažemo da je kružni element* $\mathcal{F}_0 = (B_0, f_0)$*, sa centrom u* $\gamma(0)$*, produživ duž puta* γ*, ako postoji familija kružnih elemenata*

$$\mathcal{F}_\tau = (B_\tau, f_\tau), \tag{5.20}$$

$\tau \in I$*, sa centrima u* $\gamma(\tau)$ *tako da*
(a) *za svako* $\tau \in \mathrm{I}$ *postoji* $\delta > 0$ *tako da* $|t-\tau| < \delta$ *povlači*
$\gamma(t) \in B_\tau$ *i* $\mathcal{F}_t$ *je neposredno analitičko proširenje elementa* $\mathcal{F}_\tau$*.*
U ovoj situaciji kažemo $\mathcal{F}_1$ *analitičko produženje* $\mathcal{F}_0$ *duž puta* γ*; ili* $\mathcal{F}_1$ *je dobijen iz* $\mathcal{F}_0$ *analitičkim produženjem duž puta* γ*.*
U ovoj situaciji takođe kažemo da je $\mathcal{F}_\tau = (B_\tau, f_\tau)$*,* $\tau \in I$*, kružni-analitički lanac duž* γ *(sa centrima na* γ*).*

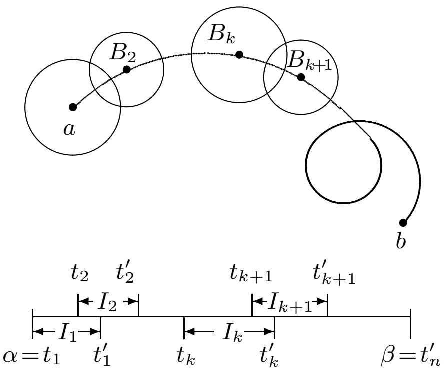
Lema 5.1 *Radijusi* $\rho(t)$ *elemenata* $\mathcal{F}_t$ *iz familije (5.20) koja ostvaruje analitičko produženje duž puta* γ *su neprekidne funkcije od* t *na* I*, ako su konačni.*

Dokaz: Ako je $\rho(t) = \infty$ za neko t onda je f_t cela funkcija i $\rho(t) = \infty$ za sve $t \in I$.

Za proizvoljno t_0 postoji interval I tako da element $\mathcal{F}_t$ je neposredno analitičko produženje elementa $\mathcal{F}_{t_0}$. Iz nejednakosti (5.19) sledi

$$|\rho(t) - \rho(t_0)| \leq |\gamma(t) - \gamma(t_0)|.$$

Iz ove nejednakosti sledi neprekidnost u t_0. $\square$



Slika 5.7:

Teorema 5.1 *Ako su elementi* $\mathcal{F}$ *i* $\mathcal{G}$ *analitičko produženje duž puta* γ*, to su i analitičko produženje preko lanca oblasti.*

Dokaz: Neka je $\mathcal{F}_t$, $t \in I$, familija elemenata, koja ostvaruje analitičko produženje duž puta γ. Na osnovu Leme 5.1 radijusi su neprekidne funkcije na I, i stoga, postoji $\varepsilon > 0$ tako da $\rho(t) \geq \varepsilon$ za sve $t \in I$. Kako je γ neprekidna funkcija na I možemo izabrati konačan broj tačaka t_ν: $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ tako da tačke $z_\nu = \gamma(t_\nu)$, zadovoljavaju $|z_\nu - z_{\nu-1}| < \varepsilon$ za $\nu = 1, \cdots, n$.

Po Definiciji 5.2, sledi da je $\mathcal{F}^\nu = \mathcal{F}_{t_\nu}$ neposredno analitičko produženje elementa $\mathcal{F}^{\nu-1} = \mathcal{F}_{t_{\nu-1}}$, $\nu = 1, \cdots, n$. Kako je $\mathcal{F}^0 = \mathcal{F}$ i $\mathcal{F}^n = \mathcal{G}$, to je $\mathcal{G}$ analitičko produženje $\mathcal{F}$ preko lanca oblasti. $\square$

Primer 27 *Razmotriti u krugu $B = \{|z-1| < 1\}$ funkciju*

$$f(z) = \sqrt{r}\, e^{i\,\varphi/2},$$

$$z = re^{i\varphi}, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

Neka je γ_0 put definisan sa $\gamma_0(t) = e^{it}$, $0 \le t \le \pi$ (gornja polukružnica). Na osnovu Teoreme 5.1 i Teoreme B (Teorema 7.5, Nezavisnost produženja od puta; koja sledi), da bi dobili analitičko produženje $\mathcal{F}$ duž puta γ_0 dovoljno je razmotriti lanac krugova B, B' i V, gde je $B' = \{|z-i| < 1\}$ i $V = \{|z+1| < 1\}$.

Takvo analitičko produženje duž puta može se opisati neposredno po formuli (5.13) šireći oblast definisanosti parametra φ u toj formuli: za B'- na segment $[0,\pi]$ i za V- na segment $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Jasno je da je par $\mathcal{F} = (B, f)$ kanonski element. Kao rezultat analitičkog produženja, u krugu V, dobijamo holomorfnu funkciju

$$g_0(z) = \sqrt{r}\, e^{i\,\varphi/2}, \quad z = re^{i\varphi}, \quad \frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2},$$

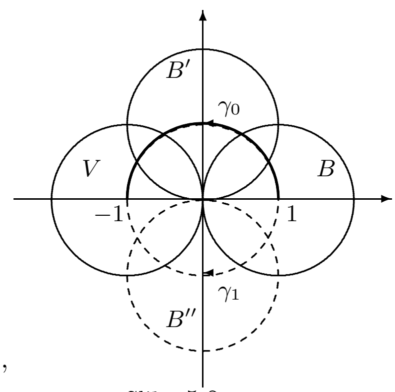
i par $\mathcal{G}^0 = (V, g_0)$, koji je analitičko produženje $\mathcal{F}$ duž puta γ_0. Specijalno, na negativnom dijametru kruga V, nalazimo $\varphi = \pi$, i stoga

$$g_0(z) = \sqrt{-x}\, e^{i\,\pi/2} = i\sqrt{-x},$$

gde je $-x = |z| > 0$.

Analogno, pomoću lanca krugova B, B'', V, gde je $B'' = \{|z+i| < 1\}$, ostvaruje se analitičko produženje $\mathcal{F}$ duž puta $\gamma_1(t) = e^{it}$, $0 \ge t \ge -\pi$. Analitičko produženje duž puta može se opisati neposredno po formuli (5.13) šireći oblast definisanosti parametra φ u toj formuli: za B''- na segment $[-\pi, 0]$ i za V- na segment $[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$. Kao rezultat analitičkog produženja, u krugu V, dobijamo holomorfnu funkciju

$$g_1(z) = \sqrt{r}\, e^{i\,\varphi/2}, \quad z = re^{i\varphi}, \quad -\frac{3\pi}{2} < \varphi < -\frac{\pi}{2},$$



Slika 5.8:

i par $\mathcal{G}^1 = (V, g_1)$, koji je analitičko produženje $\mathcal{F}$ duž puta γ_1. Specijalno, na negativnom dijametru kruga V, nalazimo $\varphi = -\pi$, i stoga

$$g_0(z) = \sqrt{-x}\, e^{-i\,\pi/2} = -i\sqrt{-x},$$

gde je $-x = |z| > 0$. Jednostavno je proveriti da je $g_1 = -g_0$ na V, i stoga da su elementi $\mathcal{G}^0$ i $\mathcal{G}^1$ različiti. $\square$

Neka je dat put γ. Ako radimo sa proizvoljnim elementima $\mathcal{F}_t = (\Omega_t, f_t)$ pogodno je da se uvede sledeća definicija.
Pretpostavimo da je $\gamma(t) \in \Omega_t$ za svako $t \in I$. Za $t \in I$ označimo sa B_t krug u Ω_t sa središtem u $\gamma(t)$ maksimalnog poluprečnika ρ_t.

Definicija 5.7 (analitički lanac duž γ) * *Neka je* $\gamma : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ *i* $\mathcal{F}_t = (\Omega_t, f_t)$, $t \in I$, *familija elemenata tako da:*
(b) $\gamma(t) \in \Omega_t$ *za svako* $t \in I$
(c) $\mathcal{F}_t^* = (B_t, f_t)$, $t \in I$, *kružni-analitički lanac duž* γ *(sa centrima na* γ*),*
gde za $t \in I$, *sa* B_t *označimo krug maksimalnog poluprečnika* ρ_t *u* Ω_t, *sa središtem u* $\gamma(t)$.
U ovoj situaciji kažemo da je $\mathcal{F}_\tau = (\Omega_\tau, f_\tau)$, $\tau \in I$, *analitički lanac duž* γ.
Takođe kažemo da je $\mathcal{F}_1$ *analitičko produženje* $\mathcal{F}_0$ *duž puta* γ *(pomoću analitičkih lanaca); ili* $\mathcal{F}_1$ *je dobijen iz* $\mathcal{F}_0$ *analitičkim produženjem duž puta* γ *pomoću analitičkih lanaca.*

Pogodno je razmotriti primer 27 koristeći definicije analitičkog proguženja duž puta, pomoću lanca. Naime, neka je $\mathcal{F}_t = (D_t, \Upsilon_t)$, gde je Υ_t grana korena na D_t, definisana pomoću formule (5.13); $\mathcal{F}_\pi$ i $\mathcal{F}_{-\pi}$ su analitičko produženje $\mathcal{F}_0$, respektivno, duž γ_0 i γ_1.

Primer 28 *Neka je* $\mathrm{I} = \Big[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + 2\,\pi\Big]$ *i* $\gamma(t) = \rho(t)\, e^{i\,t}$, $-\frac{\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{4} + 2\,\pi$, *i* ρ *pozitivna neprekidna funkcija na* I *tako da je* $\rho(0) = \rho(2\,\pi) = 1$*; Tada su oblasti* D_0 *i* $D_{2\,\pi}$ *jednake, a elementi* f_0 *i* $f_{2\,\pi}$ *su različiti, mada je* $f_{2\,\pi}$ *analitičko produženje* f_0 *duž restrikcije* γ *na* $0 \le t \le 2\pi$.

S obzirom na Primer 24, pogodno je razmatrati kružne elemente (ili samo kanonske). Dakle, pogodno je pretpostaviti da su ovoj definiciji sve oblasti $\Omega_t = U_t$, $t \in \mathrm{I}$, krugovi. Ako radimo sa kružnim elementima $\mathcal{F}_\tau = (U_\tau, f_\tau)$ onda uslov (c) znači:
(c') za svako $\tau \in \mathrm{I}$ postoji $\sigma > 0$ tako da
$\gamma(t) \in U_\tau$ i $\mathcal{F}_t \simeq \mathcal{F}_\tau$ (tj. $f_t = f_\tau$ na $U_t \cap U_\tau$)
za $|t - \tau| < \sigma$.

Analitičko produženje duž puta - pomoću klice

Definicije potpune analitičke funkcije

Analitička funkcija (potpuna) je familija kanonskih elementa, koji se dobijaju iz nekog elementa $\mathcal{F} = (B, f)$ analitičkim produženjem duž svih puteva, sa početkom u centru a, elementa $\mathcal{F}$ duž kojih je produženje moguće.

Dva elementa $\mathcal{F} = (\Omega, f)$ i $\mathcal{G} = (G, g)$ čije oblasti sadrže tačku $a \in \overline{\mathbb{C}}$ nazivaju se ekvivalentni u a ako postoji okolina te tačke u kojoj je $f \equiv g$.

Neka $a \in \Omega$. Familija elemenata ekvivalentnih u tački a elementu $\mathcal{F} = (\Omega, f)$ naziva se *klica analitičke funkcije* i označava sa $[\mathbf{f}]_a$.
Kažemo da su dve *klice* $[\mathbf{f}]_a$ i $[\mathbf{g}]_b$ ekvivalentne posredno, preko nekog lanca oblasti, (kratko ekvivalentne), ako postoje elementi $\mathcal{F} \in [\mathbf{f}]_a$ i $\mathcal{G} \in [\mathbf{g}]_b$ tako da je $\mathcal{F} \sim \mathcal{G}$; pišemo $[\mathbf{f}]_a \sim [\mathbf{g}]_b$.

Ako je $[\mathbf{f}]_a$ *klica analitičke funkcije, potpuna analitička funkcija* dobijena iz $[\mathbf{f}]_a$ je familija $\mathcal{F}^*$ svih klica $[\mathbf{g}]_b$ koje su posredno (preko nekog lanca oblasti) ekvivalentne sa $[\mathbf{f}]_a$.

Vežba 5.1.2 *Proveriti da su navedene definicije potpune analitičke funkcije ekvivalentne.*

Sabiranje analitičkih funkcija nije definisano u opštem slučaju.
Razmotrimo npr. sabiranje analitičkih funkcija, $\mathcal{F}^*$ i $\mathcal{G}^*$. Pretpostavimo da postoje elementi (Ω, f) i (Ω, g) tih funkcija sa zajedničkom oblasti Ω. Holomorfne funkcije f i g možemo sabrati i dobiti element $(\Omega, f+g)$. Familija elemenata koji se dobija iz elementa $(\Omega, f+g)$ obrazuje novu analitičku funkciju, koju je prirodno smatrati sumom $\mathcal{F}^*$ i $\mathcal{G}^*$. Da bi definicija bila korektna treba da ne zavisi od izbora početnih elemenata; a to nije uvek ispunjeno. Proveriti za vežbu sledeće tačke
1. $\sqrt{z} + \sqrt{z}$ nije korektno definisan
2.
$$(\sqrt[n]{z})' = \frac{\sqrt[n]{z}}{n\,z}, \ z \neq 0.$$

3. „Prirodna" jednakost

$$\operatorname{Ln} z + \operatorname{Ln} z = 2 \operatorname{Ln} z, \ z \neq 0,$$

nije korektna.
4.
$$(\operatorname{Ln} z)' = \frac{1}{z}, \ z \neq 0.$$

Analitičko produženje duž puta-pomoću klice

Definicija 5.8 (Analitičko produženje duž puta-pomoću klice*) *Neka je* $\gamma : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ *put i pretpostavimo da za svako* $\tau \in \mathrm{I}$ *postoji element* $\mathcal{F}_\tau = (\Omega_\tau, f_\tau)$ *tako da:*
(a_1) $\gamma(\tau) \in \Omega_\tau$;
(b_1) *za svako* $\tau \in \mathrm{I}$ *postoji* $\sigma > 0$ *tako da*
$\gamma(t) \in \Omega_\tau$ *i* $[f_t]_{\gamma(t)} = [f_\tau]_{\gamma(t)}$ *za* $|t - \tau| < \sigma$.
Tada je $\mathcal{F}_1$ *analitičko produženje* $\mathcal{F}_0$ *duž puta* γ*; ili* $\mathcal{F}_1$ *je dobijen iz* $\mathcal{F}_0$ *analitičkim produženjem duž puta* γ.

Ponovimo, za $t \in I$ označimo sa B_t krug u Ω_t sa središtem u $\gamma(t)$ maksimalnog poluprečnika ρ_t.

Podvucimo da tada, iz (b_1), s obzirom na definiciju klice, neposredno sledi $f_t(z) = f_\tau(z)$ za $z \in B_t \cap B_\tau$, kada je $|t - \tau| < \delta$. Može se pokazati da su Definicije

5.7 i 5.8 ekvivalentne. Ponovimo, u definiciji uslov (b_1) možemo zameniti sa:
(b_2) za svako $\tau \in \mathrm{I}$ postoji $\delta > 0$ tako da
$\gamma(t) \in \Omega_\tau$ i $f_t(z) = f_\tau(z)$ za $z \in B_t \cap B_\tau$ i $|t - \tau| < \delta$.
Ako radimo sa kružnim elementima $\mathcal{F}_\tau = (U_\tau, f_\tau)$ onda uslov (b_1) je jednostavniji:
(b_2) za svako $\tau \in \mathrm{I}$ postoji $\sigma > 0$ tako da
$\gamma(t) \in U_t$ i $\mathcal{F}_t \simeq \mathcal{F}_\tau$ za $|t - \tau| < \sigma$.
S obzirom na Primer 24, pogodno je razmatrati kružne elemente (ili samo kanonske). Dakle, pogodno je pretpostaviti da su ovoj definiciji sve oblasti $\Omega_t = U_t$, $t \in \mathrm{I}$, krugovi.

5.1.2 Nezavisnost produženja od puta

Sledeće tri teoreme će biti dokazane u sekciji 7.2.

Teorema A[Teorema 7.4, Jedinost produženja duž puta] *Ako je (B, f) element i γ put sa početnom tačkom u centru B, tada (B, f) dopušta najviše jedno analitičko produženje duž γ.*

Pre nego što formulišemo narednu teoremu, potrebno je da uvedemo sledeću definiciju.

Definicija A [Definicija 7.2] *Pretpostavimo da su tačke a i b u topološkom prostoru X i H neprekidno preslikavanje I^2 u X tako da je $H(0,t) = a$ i $H(1,t) = b$ za svako $t \in I$. Za puteve γ_t definisane sa*

$$\gamma_t(s) = H(s,t) \qquad (s \in I,\, t \in I) \tag{5.21}$$

kaže se da formiraju jedno-parametarsku familiju puteva $\{\gamma_t\}$ iz a u b u X.

Teorema B [Teorema 7.5, Nezavisnost produženja od puta] *Neka je $\{\gamma_t\}$ jedno-parametarska familija puteva iz a u b, B krug sa središtem u a i neka element (B, f) ima analitičko produženje duž svakog puta γ_t. Ako je f_0 analitičko produženje duž puta γ_0 i f_1 duž γ_1, tada je $f_0 = f_1$.*

Teorema C [Teorema 7.7, Monodromija] *Pretpostavimo da je Ω prosto povezana oblast, (B, f) element, $B \subset \Omega$, i da se (B, f) može produžiti duž svakog puta γ u Ω sa početnom tačkom u centru kruga B. Tada postoji $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tako da $g(z) = f(z)$ za svako $z \in B$.*

Neka je f_0 druga glavna grana korena i $\mathbb{B} = B(1;1)$. Kružni element (B, f_0) je analitički produživ duž svakog puta u $\mathbb{C}^*$. Na osnovu primera 27 ne postoji funkcija $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ tako da $f(z) = f_0(z)$ za svako $z \in \mathbb{B}$. Dakle, u ovoj situaciji ne važi Teorema o monodromiji jer $\mathbb{C}^*$ nije prosto povezana oblast.

Propozicija 5.1 *Neka je $\Omega \neq \mathbb{C}$ prosto povezana oblast. Tada postoji konformno preslikavanje φ oblasti Ω u jedinični krug $\mathbf{U}$.*

Dokaz: Neka je $c \notin \Omega$ i U_0 krug u Ω. Tada, na U_0, postoji grana φ_0 korena $\sqrt{z-c}$. Jasno je da
1) Element $(\mathrm{U}_0, \varphi_o)$ može se analitički produžiti duž svakog puta γ u Ω, sa početnom tačkom u centru U_0 (objasniti!).
2) Neka je funkcija E_c definisana sa $E_c(z) = z - c$. Kako je Ω prosto povezana, na osnovu tačke 1) i Teoreme o monodromiji (objasniti!), postoji $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$ tako da je $\varphi^2 = E_c$, tj. $\varphi^2(z) = z - c$ u Ω.
Kako je φ otvoreno preslikavanje, $\varphi(\Omega)$ sadrži krug $\mathrm{U} = \mathbf{U}(a; r)$, gde je $0 < r < |a|$. Ako $w \in \varphi(\Omega)$, tada je $w = \varphi(z)$ za $z \in \Omega$ i stoga $w^2 = \varphi^2(z) = z - c$, tj. $z = w^2 + c$. Otuda sledi da $-w \notin \Omega$ i stoga krug $\mathbf{U}(-a; r)$ ne seče $\varphi(\Omega)$. Otuda je $|\varphi(z) + a| > r$ za $z \in \Omega$ i stoga preslikavanje $\psi = \dfrac{r}{\varphi + a}$ preslikava oblast Ω u jedinični krug $\mathbf{U}$. $\square$
Propozicija 5.1 je „korak” u dokazu Rimanove teoreme; za opštije rezultate videti sekciju 5.2 (*Postojanje grana*), u kojoj se ne pozivamo na Teoremu o Monodromiji. Za vežbu izvesti ovaj rezultat pomoću Teoreme C (Teorema 7.7); uputstvo: ako je Λ zatvorena prosta poligonalna linija u Ω, tada tačka c ne pripada $\mathrm{Int}\Lambda$, tj. Λ ne „obilazi” oko c i stoga je $\mathrm{Ind}_\Lambda c = 0$.

5.2 Postojanje grana

Definicija 5.9 *Poligonalna linija koja se sastoji od horizontalnih i vertikalnih intervala naziva se specijalna poligonalna linija.*

Oblast $E_R = \{|z| > R\}$ nije prosto povezana; na oblast $E_R \cup \{\infty\}$ direktno se ne primenjuje prethodna definicija, mada je oblast $E_R \cup \{\infty\}$ slika kruga $U_{\frac{1}{R}}$ pri kompleksnoj inverziji. U nameri da obuhvatimo i ovakve sučajeve, definicija se može proširiti:
Neka je Ω otvoren skup u $\overline{\mathbb{C}}$ koji sadrži tačku ∞. Pretpostavimo da je $\Omega \neq \mathbb{C}, \overline{\mathbb{C}}$. Tada postoji tačka $c \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Neka je $\varphi(z) = \frac{1}{z-c}$. Skup $\Omega^* = \varphi(\Omega)$ je otvoren u $\mathbb{C}$. Ako je Ω^* poligonalno prosto povezan, kažemo da je Ω prosto povezan.

U ovoj sekciji pogodnio je koristi poligonalnu definiciju prosto povezane oblasti.

Definicija 5.10 (Prosto povezana oblast) *Oblast D u $\mathbb{C}$ je prosto povezana (poligonalno) ako* $\mathrm{Int}\Lambda$ *pripada D za svaku specijalnu zatvorenu prostu poligonalnu liniju Λ, koja pripada oblasti D.*

U posekciji 7.3.4 dokazuje se : ako je oblast prosto povezana u smislu definicije pomoću granice, tada je poligonalno prosto povezana.
U ovoj sekciji dokazujemo teoreme o postojanju regularnih grana korena i logaritma.

U sledećem pasusu navedena su osnovna svojsta grana argumenta na koja ćemo se često pozivati u ovom odeljku. Čitalac može naći više detalja o svojstvima grana argumenta npr. u [Ma 1] i [Ma 3].

Grane Argumenta

Definicija 5.11 *Neka je* F *višeznačna funkcija u oblasti* Ω *i* $\gamma : I \to \Omega$ *put. Funkcija* Φ *naziva se grana* F *duž* γ*, ako je*
a. Φ *neprekidna na* I*,*
b. $\Phi(t) \in F(\gamma(t))$ *za* $t \in I$*.*

Lema 5.2 (Postoji grana korena, lokalno) *Neka je* f *holomorfna na oblasti* Ω*,* $\Omega_1 = f(\Omega)$ *oblast specijalnog* $O-$*tipa i* $n \geq 2$ *prirodan broj. Tada postoji* $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ *tako da je* $g^n = f$ *na* Ω*.*

Uputstvo: 1. Na $\Omega_1 = f(\Omega)$ postoji grana ln višeznačne funkcije (všz) Ln; definišimo $h = \ln \circ f$ i $g = \exp(h/n)$.
2. Na $\Omega_1 = f(\Omega)$ postoji grana g_1 višeznačne funkcije (všz) $\sqrt[n]{}$; izabrati $g = g_1 \circ f$.
□

Teorema 5.2 *Neka je* $\gamma : I \to \Omega$ *put i* $f : \Omega \to \mathbb{C}^*$ *neprekidno preslikavanje. Tada postoji grana funkcije* $\operatorname{Arg} f$ *duž* γ*.*
Ako su φ_1 *i* φ_2 *dve grane* $\operatorname{Arg} f$ *duž* γ*, tada je* $\varphi_1 - \varphi_2 = const$ *na* I*.*

Uputstvo: Dokaz je sličan dokazu teoreme o postojanju primitivne duž puta. □

Teorema 5.3 *Neka je* $\gamma : I \to \Omega$ *put i* $f, g : \Omega \to \mathbb{C}^*$ *neprekidna preslikavanja. Tada je*

$$\Delta_\gamma \operatorname{Arg}(fg) = \Delta_\gamma \operatorname{Arg} f + \Delta_\gamma \operatorname{Arg} g$$

Uputstvo: Ako su φ_1 i φ_2 respektivno grane $\operatorname{Arg} f$ i $\operatorname{Arg} g$ duž γ, tada je $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ grana $\operatorname{Arg}(fg)$ duž γ. □

Teorema 5.4 *Neka je* $\gamma : I \to \Omega$ *put i* $f : \Omega \to \mathbb{C}^*$ *neprekidno preslikavanje i* $n \geq 1$ *prirodan broj.*
Tada postoje grane $\operatorname{Arg} f$ *i* $\operatorname{Arg} \sqrt[n]{f}$ *duž* γ*; i*

$$\Delta_\gamma \operatorname{Arg} \sqrt[n]{f} = \frac{1}{n} \Delta_\gamma \operatorname{Arg} f.$$

Uputstvo: Ako je φ grana $\operatorname{Arg} f$ duž γ, tada je $\psi = \varphi/n$ grana $\operatorname{Arg} \sqrt[n]{f}$ duž γ. □

Teorema 5.5 (postoji grana korena) *Neka je* Ω *oblast. Pretpostavimo*
a. $f : \Omega \to \mathbb{C}^*$ *holomorfna funkcija*
b. postoji prirodan broj $n \geq 2$ *tako da je* $\Delta_\Lambda \operatorname{Arg} f$ *jednako* $2\pi n$ *ili* 0 *za svaku zatvorenu pozitivno orijentisanu Žordanovu poligonalnu liniju* Λ *u* Ω*.*
Tada postoji $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ *tako da je* $g^n = f$ *na* Ω*.*

Teorema važi ako se uslov *b.* zameni uslovom
c. postoji prirodan broj $n \geq 2$ tako da je $\Delta_\Lambda \operatorname{Arg} f$ jednako $2\pi m$, gde je m deljivo sa n ili 0, za svaku zatvorenu pozitivno orijentisanu Žordanovu poligonalnu liniju Λ u Ω. Ova verzija Teoreme 5.5 često se koristi u primenama. Videti Primer 31,

koji sledi; takođe podvucimo da m u ovom primeru zavisi od konture Λ.

Uputstvo: Neka je $z_0 \in \Omega$ i neka je $\varphi_0 \in \mathrm{Arg} f(z_0)$; neka je $z \in \Omega$ proizvoljna tačka i Λ proizvoljna poligonalna linija koja „spaja" tačke z_0 i z u Ω, $\varphi = \varphi_0 + \Delta_\Lambda \mathrm{Arg} f$ i $\psi = \varphi/n$. Definišimo $g(z) = \sqrt[n]{|f(z)|} e^{i\,\psi(z)}$.
Može se pokazati, razlaganjem specijalne zatvorene poligonalne linije na proste, da iz b. sledi da $g(z)$ ne zavisi od izbora puta Λ. Jednostavno se proverava da je $g^n = f$ na Ω.
Neka je $a \in \Omega$ proizvoljna tačka i $r = |f(a)|$ i $A = B(f(a); r)$; kako je $f(a) \neq 0$, sledi A je oblast O-tipa i kako je f neprekidna u tački a postoji krug B sa središtem u a tako da $f(B) \subset A$. Otuda, na osnovu Leme 5.2, postoji holomorfna funkcija $\mathcal{G}$ tako da $\mathcal{G}^n = f$ na B. Kako je $g^n = f$ na Ω otuda je $\left(\frac{g}{\mathcal{G}}\right)^n = 1$ na B. Neka je $\omega_k = \exp(i2k\pi/n)$. Kako je $\frac{g}{\mathcal{G}}$ neprekidna funkcija na B, otuda je $g = c\mathcal{G}$ na B, gde je $c = \omega_k$ za neko $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Otuda, kako je $a \in \Omega$ proizvoljna tačka, g je holomorfna na Ω. $\square$

Teorema 5.6 (Postoji grana ln) *Neka je Ω oblast. Pretpostavimo*
a. $f : \Omega \to \mathbb{C}^*$ holomorfna funkcija,
b. $\Delta_\Lambda \mathrm{Arg}\, f = 0$ za svaku zatvorenu Žordanovu poligonalnu liniju Λ u Ω.
Tada postoji $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tako da je $e^g = f$ na Ω.

Uputstvo: Definišimo $g(z) = \ln|f(z)| + i\varphi$, gde je φ definisano kao u uputstvu za dokaz prethodne teoreme. $\square$

Pretpostavimo da važi uslov a. prethodne teoreme i da je Ω prosto povezana oblast. Neka je Λ zatvorena specijalna Žordanovu poligonalna liniju u Ω. $\mathrm{Int}(\Lambda)$ se može podeliti na konačan broj pravougaonika R_k tako da je svaka oblast $f(R_k)$ specijalnog $O - tipa$. Neka je γ_k pozitivno orjentisana granica pravougaonika R_k i $\Gamma_k = f \circ \gamma_k$. Tada je $\Delta Arg \Gamma_k = \Delta_{\gamma_k} Arg f = 0$. Otuda, sabiranjem, dobija se $\Delta_\Lambda \mathrm{Arg}\, f = \sum \Delta_{\gamma_k} Arg f = 0$. Dakle iz uslov a. sledi uslov b. i otuda se dobija sledeći rezultat:

Teorema 5.7 (Postoji grana ln na prosto povezanoj oblasti) *Neka je Ω prosto povezana oblast i $f : \Omega \to \mathbb{C}^*$ neprekidna (respektivno holomorfna) funkcija na Ω.*
Tada postoji g neprekidna (respektivno holomorfna) funkcija na Ω tako da je $e^g = f$ na Ω.
Funkcija $h = e^{g/n}$ je neprekidna (respektivno holomorfna) na Ω i zadovoljava jednačinu $h^n = f$.

Ponovimo da ne postoji grana logaritma, korena na $\mathbb{C}^*$ i na kružnom prstenu $A = A(0; r, R)$, gde je $0 < r < R$; mada je funkcija $f(z) = z$ različita od 0 u ovim oblastima. Dakle, prethodna teorema ne važi u opštem slučaju bez pretpostavke da je oblast Ω prosto povezana.

Primer 29 *Neka polinom P nema nula na $\mathbb{U}$ i neka je $F = \mathrm{Ln} \circ P$. Dokazati da postoji regularna grana všz funkcije F na jediničnom krugu $\mathbb{U}$.*

Uputstvo: Primeniti Teoremu o postojanju neprekidne grane logaritma. □

Primer 30 *Neka je $f(z) = 1 - z^3$. Dokazati*
a. $z_k = \exp(i2k\pi/3)$ su rešenja jednačne $f(z) = 0$
b. ako je $l_k = [0, z_k]$, $l = l_0 \cup l_1 \cup l_2$ i $D = \mathbb{C} \setminus l$, tada funkcija $\sqrt[3]{f}$ dopušta izdvajanje regularne grane na D.

Uputstvo: Primeniti Teoremu 5.5. Neka je Λ specijalna zatvorena poligonalna linija u oblasti D i $G = \mathrm{Int}(\Lambda)$. Kako je G povezan skup tada postoje dve mogućnosti
a. $l \subset \mathrm{Int}(\Lambda)$,
b. $l \subset \mathrm{Ext}(\Lambda)$.
Kako je $z^3 - 1 = (z - z_0)(z - z_1)(z - z_2)$, nalazi se

$$\Delta_\Lambda \mathrm{Arg}\, f = \sum_{k=0}^{2} \Delta_\Lambda \mathrm{Arg}\,(z - z_k) = 2\,\pi \sum_{k=0}^{2} \mathrm{Ind}_\Lambda\,(z_k).$$

Otuda, na osnovu Teoreme o indeksu za prostu zatvorenu konturu (Teorema 1.13), sledi da je u slučaju *a.* : $\Delta_\Lambda \mathrm{Arg}\, f = 3\,(2\pi)$, a u slučaju *b.* : $\Delta_\Lambda \mathrm{Arg}\, f = 0$. □

Primer 31 *Neka je $f(z) = 1 - z^4$. Dokazati*
a. $z_k = \exp(i2k\pi/4)$ su rešenja jednačne $f(z) = 0$,
b. ako je $l_1 = [-i, 1]$, $l_2 = [-1, i]$ i $l = l_1 \cup l_2$ i $D = \mathbb{C} \setminus l$, tada funkcija $\sqrt[2]{f}$ dopušta izdvajanje regularne grane na D.
c. ne postoji regularna grana funkcije $\sqrt[4]{f}$ na D.

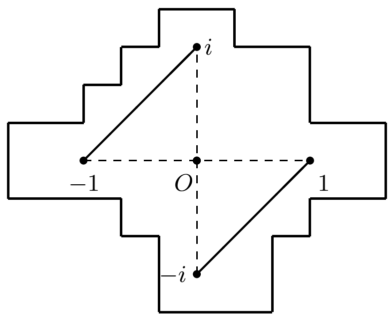
Uputstvo: Primeniti Teoremu 5.5. Neka je Λ specijalna prosta zatvorena poligonalna linija u oblasti D i $G = \mathrm{Int}(\Lambda)$. Kako je G povezan skup tada postoje četiri mogućnosti

a. $l \subset \mathrm{Int}(\Lambda)$,

b. $\{-i, 1\} \subset \mathrm{Int}(\Lambda)$ i $\{-1, i\} \subset \mathrm{Ext}(\Lambda)$,

c. $\{-1, i\} \subset \mathrm{Int}(\Lambda)$ i $\{-i, 1\} \subset \mathrm{Ext}(\Lambda)$,

d. $l \subset \mathrm{Ext}(\Lambda)$.



Slika 5.9:

Kako je $f(z) = -(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)$, nalazi se

$$\Delta_\Lambda \mathrm{Arg}\, f = \sum_{k=0}^{3} \Delta_\Lambda \mathrm{Arg}\,(z - z_k) = 2\,\pi \sum_{k=0}^{3} \mathrm{Ind}_\Lambda\,(z_k).$$

Otuda, na osnovu Teoreme o indeksu za prostu zatvorenu konturu, sledi da je u slučaju a. : $\Delta_\Lambda \mathrm{Arg}\, f = 4\,(2\pi)$; u slučajevima b. i c. : $\Delta_\Lambda \mathrm{Arg}\, f = 2\,(2\pi)$; a u slučaju d. : $\Delta_\Lambda \mathrm{Arg}\, f = 0$.

Podvucimo da se $\Delta_\Lambda \mathrm{Arg}\, f$ može izračunati i pomoću Principa argumenta. Naime $\Delta_\Lambda \mathrm{Arg}\, f = 2\pi n$, gde je n broj nula funkcije f u oblasti $G = \mathrm{Int}(\Lambda)$. Iz Principa indeksa sledi $\mathrm{Ind}_\Gamma 0 = n$, gde je $\Gamma = f \circ \Lambda$.
U vezi sa ovim primerom videti Zadatak 4.25 [Je-Ma]. □

Propozicija 5.2 *Pretpostavimo da je D prosto povezana oblast u $\mathbb{C}$, f holomorfna funkcija na D i da funkcija f u oblasti D ima konačno nula $z_1, z_2, \ldots, z_m$. Neka je ukupan broj nula, računajući i višestrukost, jednak $n \geq m$, γ prost Žordanov put (opštije povezan skup) čiji trag sadrži ove tačke i pripada oblasti D i neka je $G = D \setminus \gamma^*$. Dokazati da postoji holomorfna grana funkcije $\sqrt[n]{f}$ u oblasti G.*

Uputstvo: Neka je Λ specijalna prosta zatvorena poligonalna linija u oblasti G. Pretpostavimo da je $\gamma^* \subset \mathrm{Int}\,\Lambda$ i neka je $\Gamma = f \circ \Lambda$. Na osnovu Principa indeksa $\mathrm{Ind}_\Gamma(0) = n$. Ako je $\gamma^* \subset \mathrm{Ext}\,\Lambda$, s obzirom na to da je D prosto povezana oblast, sledi da je $\mathrm{Ind}_\Gamma(0) = 0$ (objasniti). □

Definicija 5.12 *Neka je $J = [a, b]$ orijentisan segment, V okolina segmenta J i funkcija g definisana na $V \setminus J$. Tada postoji linearno preslikavanje λ tako da su $\lambda(a)$ i $\lambda(b)$ realni brojevi i $\lambda(a) < \lambda(b)$. Neka je l inverzno preslikavanje preslikavanja λ, $\Pi^+ = l(H^+)$ i $\Pi^- = l(H^-)$.*
Ako $c \in [a, b]$ i ako postoji granična vrednost

$$\lim_{\Pi^+ \ni z \to c} g(z)\,,$$

označavamo je sa $g^+(c)$; slično se definiše $g^-(c)$; ako je $J = J_k$ onda pišemo $g_k^+(c)$ umesto $g^+(c)$.

Propozicija 5.3 *Neka je $a < b$. Postoji grana h všz $\mathcal{H}(z) = (z - a)^\alpha (z - b)^\beta$ na $D = \mathbb{C} \setminus [a, b]$ ako i samo ako je $\alpha + \beta$ ceo broj.*

Uputstvo: Neka je $\alpha + \beta = k$, $Az = \dfrac{z - a}{z - b}$, $\mathcal{G}(z) = (Az)^\alpha$ i $D = \mathbb{C} \setminus [a, b]$. Tada je $\mathcal{H}(z) = \mathcal{G}(z)(z - b)^k$ i A preslikava D na $O_{-\pi} \setminus \{1\}$.
Kako na oblasti $O_{-\pi}$, postoji grana ln (definisana sa vrednostima u $(-\pi, \pi)$) višeznačne funkcije Ln, funkcija $g = \exp(\alpha\ \ln \circ A)$ je grana $\mathcal{G}$.
Neka je $h = g(z - b)^k$. □

Pretpostavimo da su $\alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R}$.
Kako je $A[a, b) = \mathbb{R}^-$, $H^- = A(H^+)$, $H^+ = A(H^-)$, $\ln^+ t = \ln|t| + i\pi$ i $\ln^- t = \ln|t| - i\pi$ za $t < 0$, sledi

$$(\ln \circ A)^+(x) = (\ln^- \circ A)(x) = \ln|A(x)| - i\pi \quad \text{i}$$

$$(\ln \circ A)^-(x) = (\ln^+ \circ A)(x) = \ln |A(x)| + i\pi.$$

a. Otuda, ako je $a < x < b$, sledi

$$g^+(x) = e^{\alpha(\ln \circ A)^+(x)} = e^{\alpha(\ln |A(x)| - i\pi)} = e^{\alpha \ln |A(x)|} e^{-\alpha i\pi} = e^{-i\alpha\pi} \, |g(x)|,$$

i slično $g^-(x) = e^{i\alpha\pi} \, |g(x)|$; i stoga
$h^+(x) = e^{i\beta\pi} \, |h(x)|$, $h^-(x) = e^{-i\beta\pi} \, |h(x)|$.
Na osnovu $A(\mathbb{R} \setminus (a, b]) = \mathbb{R}^+$, nalazi se
b. ako $x \notin [a, b]$, tada je $g(x) > 0$ i otuda
$h(x) = (-1)^k |h(x)|$ za $x < a$ i $h(x) > 0$ za $x > b$. □

Pogodno je sumirati prethodno razmatranje:

Propozicija 5.4 *Pretpostavimo da su $\alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R}$. Neka je $k = \alpha + \beta$ ceo broj, $\mathcal{H}(z) = (z-a)^\alpha (z-b)^\beta$, $Az = \dfrac{z-a}{z-b}$ i $\mathcal{G}(z) = (Az)^\alpha$. Tada postoje grane g i h respektivno višeznačnih funkcija $\mathcal{G}$ i $\mathcal{H}$ na $D = \mathbb{C} \setminus [a, b]$ tako da:*
a. ako je $a < x < b$, tada

$$g^+(x) = e^{-i\alpha\pi} \, |g(x)|, \; g^-(x) = e^{i\alpha\pi} \, |g(x)|,$$
$$h^+(x) = e^{i\beta\pi} \, |h(x)|, \; h^-(x) = e^{-i\beta\pi} \, |h(x)|;$$

b. ako $x \notin [a, b]$, tada je $g(x) > 0$ i

$$h(x) = (-1)^k |h(x)| \text{ za } x < a,$$
$$h(x) > 0 \text{ za } x > b.$$

Pomoću ove Posledice izvode se formule (5.23) i (5.25) u sledećoj sekciji 5.3.

Vežba 5.2.1 *Neka je $p(z) = z^2 - 2z + 2$.*
Dokazati da postoji grana f všz funkcije $\sqrt{p}$ u oblasti $B = \{z : |z-1| < 1\}$, određena sa $f(0) = \sqrt{2}$.
Funkciju

$$F(z) = \frac{1 + z^2(z-1)f(z)}{z-1}$$

razviti u Loranov red u oblast $B' = \{0 < |z-1| < 1\}$.

Uputstvo: Koreni polinoma p su $z_1 = -1 + i$ i $z_2 = -1 - i$. Neka je Λ specijalna prosta zatvorena poligonalna linija u B'. Kako Λ ne „obilazi” oko tačaka z_1 i z_2 i kako je $p(z) = (z - z_1)(z - z_2)$, dobija se $\Delta_\Lambda \mathrm{Arg}\, p = \Delta_\Lambda \mathrm{Arg}\,(z - z_1) + \Delta_\Lambda \mathrm{Arg}(z - z_2) = n_\Lambda z_1 + n_\Lambda z_2 = 0$. Otuda, postoji grana f všz funkcije $\sqrt{p}$ u oblasti B.
Kako je $p(z) = z^2 - 2z + 2 = 1 + (z-1)^2$,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} 1/2 \\ k \end{pmatrix} (z-1)^k.$$

Zameniti $z^2 = 1 + 2(z-1) + (z-1)^2$ u formuli

$$F(z) = \frac{1}{z-1} + z^2 + \frac{f(z)}{z-1}.$$

□

5.3 Regularne grane i integrali

1. Neka je F definisana sa $F(z) = \mathrm{Ln}\dfrac{z}{z-1}$.
Dokazati da F dopušta izdvajanje regularne grane u oblasti $E = \{z : |z| > 1\}$.
Uputstvo: Neka je $w = Az = \dfrac{z}{z-1}$, K jedinična kružnica i l prava definisana sa $l = \{z : \mathrm{Re}\, z = 1/2\}$. Kako je $A(-1) = 1/2$, A preslikava K na l i otuda kako je $A(\infty) = 1$, A preslikava E na $E_* = A(E) = \{w : \mathrm{Re}\, w > 1/2\} \setminus \{1\}$.
U oblasti E_*, postoji regularna grana $\varphi = \arg$ sa vrednostima u $\left(\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ i postoje grane $\psi_k = \ln_k$ definisane sa

$$\ln_k(w) = \ln|w| + i(\arg w + 2k\pi)\,,$$

gde je k ceo broj. Dakle, funkcije $f_k = \psi_k \circ A$ su regularne grane funkcije F. $\square$

2. Alternativni dokaz Propozicije 5.3

Uputstvo: Neka je $\mathcal{H}(z) = (z-a)^\alpha (z-b)^\beta$ višeznačna funkcija i $D = \mathbb{C} \setminus [a, b]$.
Neka je γ specijalna prosta poligonalna linija u $D = \mathbb{C} \setminus [a, b]$ i φ_a, φ_b respektivno grane argumenta $z - a$ i $z - b$ duž γ. Tada je $\varphi = \alpha\,\varphi_a + \beta\,\varphi_b$ grana argumenta $\mathcal{H}$ duž γ; specijalno ako je γ zatvorena $\psi = \Delta_\gamma \mathrm{Arg}\, \mathcal{H} = \alpha\, 2\pi\, K_\gamma(a) + \beta\, 2\pi\, K_\gamma(b)$, gde je ponovimo $K_\gamma = \mathrm{Ind}_\gamma$ (funkcija indeks puta γ). Otuda je
1. $\psi = 2(\alpha + \beta)\,\pi$ ako je $a, b \in \mathrm{Int}(\gamma)$.
2. $\psi = 0$ ako je $a, b \in \mathrm{Ext}(\gamma)$.
Dakle, ako je $\alpha + \beta$ ceo broj, tada postoji grana višeznačne funkcije $\mathcal{H}(z) = (z-a)^\alpha (z-b)^\beta$ na $D = \mathbb{C} \setminus [a, b]$. $\square$

3. Neka su φ_a, φ_b respektivno grane argumenta $(z - a)$ i $(z - b)$ na $D = \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ sa vrednostima u $(-\pi, \pi]$ i neka je funkcija $\mathcal{H}$ definisana kao u dokazu Propozicije 5.3.
Dokazati
1. Funkcije φ_a i φ_b su prekidne na $l = (-\infty, a)$,
2. ako je $\alpha + \beta$ ceo broj funkcija $e^{i\varphi}$ je neprekidna na $l = (-\infty, a)$,
3. funkcija $h = |\mathcal{H}|\, e^{i\varphi}$ je holomorfna na D.

Primer 32 *Neka je $p(z) = 1 - z^n$, $n \geq 2$. Dokazati*
a. $a_k = \exp(i2k\pi/n)$ su rešenja jednačne $p(z) = 0$
b. ako je $l_k = [0, a_k]$, $l = \cup_{k=0}^{n-1} l_k$ i $D = \mathbb{C} \setminus l$, funkcija $\sqrt[n]{p}$ dopušta izdvajanje regularne grane g na D
c. ako je $f = 1/g$, dokazati da je $a_k\, f_k^+(\rho a_k) = f_0^+(\rho)$ za $0 < \rho < 1$.

Uputstvo: Neka je $\varphi_k = 2k\pi/n$ i neka je $\mathcal{C} = \mathcal{C}_k$ kružni luk definisan sa $\mathcal{C}(t) = r\exp(i\,t)$, $\varphi_k \leq t \leq \varphi_{k+1}$, $r < 1$. Tada je $\Gamma = p \circ \mathcal{C}$ kružnica sa središtem u tački 1 i $0 \in \mathrm{Ext}(\Gamma)$. Otuda je $\Delta_{\mathcal{C}} \mathrm{Arg}\, p^{-1/n} = 0$. $\square$

Ako je $\gamma = \gamma_k$ negativno orijetisana kružnica sa središtem a_k poluprečnika ε, tada je $\Gamma = p \circ \gamma$ prosta zatvorena negativno orijentisana kontura oko 0 ako je ε dovoljno malo. Otuda je $\Delta_\gamma \mathrm{Arg}\, p^{-1/n} = \varphi_1$.

Za vežbu videti npr. [Je-Ma]: Zadaci 4.21-4.25, 7.29-7.31.

Integrali

Teorema 5.8 *Ako je $\alpha, \beta \in (-1, +\infty)$, $\alpha + \beta = k$ ceo broj, R racionalna funkcija koja nema polove na $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$ i*

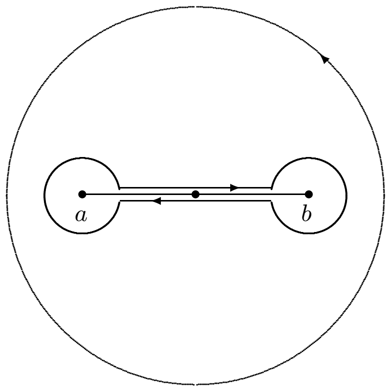
$$I = \int_a^b (x-a)^\alpha (b-x)^\beta R(x)dx\,, \tag{5.22}$$

gde $(x-a)^\alpha (b-x)^\beta$ oznaka za nenegativnu funkciju (iz realne analize) na $[a, b]$. Tada je

$$\sin(\beta\pi)\, I = \pi \left(\sum \mathrm{Res}(f, z) + \mathrm{Res}(f, \infty) \right), \tag{5.23}$$

gde je $f = h\, R$ i h funkcija, definisana u dokazu Propozicije 5.4.

Uputstvo: Neka je h regularna grana u oblasti D, koja je definisana u Propozicije 5.4 (videti razmatranje posle Propozicije 5.3). Integraliti funkciju $f = h\,R$ duž konture na sl. 5.10. Neka je r dovoljno veliko tako da kružnica K_r sadrži sve singularitete racionalne funkcije R. Kako je $h^+(x) - h^-(x) = 2i \sin(\beta\pi)\, |h(x)|$ i $|h(x)| = (x-a)^\alpha (b-x)^\beta$ $(a < x < b)$, primenom Košijeve teoreme o rezidumima, dobija se (5.23) (objasniti detalje!).



Slika 5.10:

Pomoću smene $\beta = k - \alpha$, (5.22) se može napisati u obliku

$$I = \int_a^b \left(\frac{x-a}{b-x} \right)^\alpha R(x)dx\,, \tag{5.24}$$

gde je R racionalna funkcija koja nema polove na $(a, b]$ i ima najviše prost pol u a. Kako je (5.24) specijalni slučaj (5.22), gde je $\beta = -\alpha$, i stoga $\sin(\alpha\pi) = -\sin(\beta\pi)$, iz (5.23), sledi

$$\sin(\alpha\pi)\, I = -\pi \left(\sum \mathrm{Res}(f, z) + \mathrm{Res}(f, \infty) \right), \tag{5.25}$$

gde je $f = g\,R$ i g definisana u Posledici 5.4. □

Napomena: Pri izračunavanju integrala zadatog jednačinom (5.22), u literaturi se često funkcija h definiše tako da je

$$h^+(x) = (x-a)^\alpha (b-x)^\beta, \text{ za } a \le x \le b.$$

U tom slučaju je
$h^{-}(x) = e^{i\alpha 2\pi} h^{+}(x) \quad a \le x \le b.$

1. Izračunati $I = P(a,b) = \int\limits_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}dx\,.$

Uputstvo: *a*. Primenom formule (5.23), za $\alpha = \beta = 1/2$, kako je $c_{-1} = -(b-a)^2/8$, dobija se $I = \pi(b-a)^2/8$. Primetimo da je $P(-1,1) = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$ površina jediničnog polukruga.

b. Alternativno rešenje: Kako je $y = \sqrt{(x-a)\,(b-x)}$, $a \le x \le b$, jednačina polukružnice sa središtem u $c = (a+b)/2$, poluprečnika $r = (b-a)/2$, integral $P(a,b)$ jednak je površini polukruga $\pi\, r^2/2$. $\square$

2. Izračunati $I = I(a,b) = \displaystyle\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}.$

Uputstvo: *a*. Primenom formule (5.23) za $\alpha = \beta = -1/2$, kako je $c_{-1} = 1$, dobija se $I = \pi$. Primetimo da za $a = -1$, $b = 1$, integral I se može iterpretitati i kao dužina jedinične polukružnice.

b. Alternativno rešenje: Na osnovu formule za dužinu krive, dužina polukružnice, definisane u *b*. (Zadatak 1), jednaka je $l = r\,I$. Kako $l = \pi\, r$, sledi $l = \pi\, r = r\, I$ i otuda $I = \pi$. $\square$

3. Izračunati

$$I = \int_a^b \frac{1}{x-c}\,\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \quad (a < b < c).$$

Uputstvo: Primenom formule (5.23) za $\alpha = \beta = -1/2$, kako je $\mathrm{Res}(f,c) = h(c) = \dfrac{1}{\sqrt{(c-a)(c-b)}}$, dobija se $I = -\pi h(c)$. $\square$

4. Ako je $\alpha, \beta \in (-1,0)$, $\alpha + \beta = -1$ i

$$I = \int_a^b (x-a)^{\alpha}(b-x)^{\beta}dx\,,$$

tada je $I = \dfrac{\pi}{\sin(|\beta|\pi)}$.
Specijalno,
a. $B(p, 1-p) = \displaystyle\int_a^b (x-a)^{p-1}(b-x)^{-p}dx = \frac{\pi}{\sin(p\pi)} \; (0 < p < 1).$

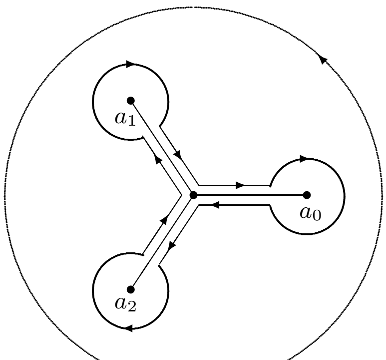
b. Neka je $n \ge 2$ prirodan broj. Pomoću smene $t = x^n$ integral $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}$ izraziti pomoću Ojlerove beta funkcije: $I_n = \dfrac{1}{n}B(p, 1-p)$, gde je $p = \dfrac{1}{n}$.

5. Izračunati $I = \int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}{(1+x)^3} dx$.
Uputstvo: Neka je $R(z) = (1+z)^{-3}$, $f = hR$ i h grana definisana kao u Propoziciji 5.4. Kako je $h^4 = z(z-1)^3$, otuda sledi
$4h^3h' = (z-1)^3 + 3z(z-1)^2$,
$4(3h^2(h')^2 + h^3h'') = 3(z-1)^2 + 3((z-1)^2 + 2z(z-1))$.
Primenom Propozicije 5.4 ($\alpha = 1/4$, $\beta = 3/4$ i $k = 1$), nalazimo da je $h(-1) = -2^{3/4}$, $h''(-1) = 3 \cdot \frac{2^{3/4}}{64}$ i $S = \mathrm{Res}\,(f, -1) = \frac{1}{2}h''(-1)$. Kako je $c_{-1} = 0$ primenom formule (5.23) za $\beta = \frac{3}{4}$, dobija se $I \sin\frac{\pi}{4} = \pi S$ i otuda sledi $I = \frac{3\pi}{64}\sqrt[4]{2}$. □

6. Izračunati $I = \int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x^5(1-x)}}{1+x^2} dx$.
Uputstvo: Neka je $\alpha = \frac{2}{3}$, $Az = \frac{z}{z-1}$, $\mathcal{G}(z) = (Az)^\alpha$, g grana $\mathcal{G}$ definisana u Posledici 5.4, $R(z) = \frac{z(1-z)}{1+z^2}$ i $f = g\,R$.
a. Pomoću smene $z = Jw$ pokazuje se da je $\mathrm{Res}\,(f, \infty) = -\frac{1}{3}$.
b. Kako je $Ai = \exp(-i\pi/4)$ i otuda $g(i) = |g(i)| \exp(-i\alpha\pi/4) = \exp(-i\pi/6)$, dobija se $\mathrm{Res}(f, i) = \frac{1}{2}(1-i) \exp\Big(-i\frac{\pi}{6}\Big) = \frac{\sqrt{2}}{2} \exp\Big(-i\frac{5\pi}{12}\Big)$.

Otuda, s obzirom na to da je, $\mathrm{Res}(f, -i) = \overline{\mathrm{Res}(f, i)}$, na osnovu formule (5.25), nalazi se $I = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\Big(\frac{1}{3} - 2^{1/2}\sin\frac{\pi}{12}\Big)$. □

7. Neka je $n \geq 2$ prirodan broj. Pomoću funkcije f definisane u Primeru 32 i konture na slici 5.11 izračunati integral $I = I(n) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}$.
Uputstvo: Neka je $a_k = \exp(i2k\pi/n)$ i $\varphi_0 = 2\pi/n$. Kako je $f_k^-(\rho a_k) = \exp(i\varphi_0)\, f_k^+(\rho a_k)$, $a_k\, f_k^+(\rho a_k) = f_0^+(\rho)$ za $0 < \rho < 1$, dobija se prvo $\int_{l_k} f_k^+ = I$ i otuda



Slika 5.11: n=3

$$I_k = \int_{l_k} f_k^+ - \int_{l_k} f_k^- = (1 - \exp(i\varphi_0)) \int_{l_k} f_k^+ = (1 - \exp(i\varphi_0))\, I, \tag{5.26}$$

gde je k = 0, 1,..., n-1. Kako je $1-\exp(i\varphi_0) = -2i\sin\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)\exp\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)$, iz (5.26), sledi

$$I_k = -2i\sin\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)\exp\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) I\,, \tag{5.27}$$

gde je, ponovimo, $\varphi_0 = 2\pi/n$.
Na osnovu Košijeve teoreme o rezidumima (Teorema 2.37), nalazi se

$$\sum_{k=0}^{n-1} I_k = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f,\infty)\,. \tag{5.28}$$

Proveriti da je za $x>1$, $f(x) = \exp(i\,\theta_0)\;x^{-1}\left(1-\frac{1}{x^n}\right)^{-1/n}$, gde je $\theta_0 = \frac{\pi}{n}$ i da je otuda $\mathrm{Res}\,(f,\infty) = -\exp(i\,\theta_0)$.
Otuda, kako je $\frac{\varphi_0}{2} = \theta_0$, s obzirom na (5.27) i (5.28), dobija se $n\,I\,\sin\,\theta_0 = \pi$. □

Za vežbu videti npr. [Je-Ma]: IZRAČUNAVANJE NEKIH REALNIH INTEGRALA, Zadaci 8.17-8.37, i RAZNI ZADACI 10.57-10.77.

5.4 Inverzne funkcije - zadaci

1. Neka su bilinearne funkcije A i B definisane sa
   $A(\zeta) = i\frac{1-\zeta}{1+\zeta}$ i $B(\omega) = \frac{i-\omega}{i+\omega}$.
   Dokazati:
   (a) A preslikava U na H
   (b) $B = A^{-1}$.

   Ponovimo da je funkcija Žukovskog definisana sa $w = Z(z) = \frac{1}{2}(z+z^{-1})$.

2. Inverzna funkcija je $z = Z^{-1}(w) = w + \sqrt{w^2-1}$.

3. Neka je $Rz = iz$ i $R_1\zeta = -i\zeta$. Dokazati:
   (a) $\sin = Z\circ R_1\circ e\circ R$
   (b) $\mathrm{Arcsin} = R^{-1}\circ \mathrm{Ln}\circ R_1^{-1}\circ Z^{-1}$,
   $\mathrm{Arcsin}z = -i\mathrm{Ln}(iz+\sqrt{1-z^2})$.

4. Dokazati:
   (a) $\cos = Z\circ e\circ R$
   (b) $\mathrm{Arccos}\,z = i\mathrm{Ln}(z+\sqrt{z^2-1})$.

Uputstvo: Rešavanjem jednačine $\cos w = z$, ili $\dfrac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} = z$, ili konačno,

$$e^{2iw} - 2i\, z\, e^{iw} + 1 = 0$$

kao kvadratne jednačine u odnosu na e^{iw}, dobija se

$$e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1}.$$

Otuda sledi (b). Primetimo da ispred logaritma pišemo i, a ne $1/i$ kako bi trebalo jer, s obzirom na relaciju

$$\frac{1}{z + \sqrt{z^2 - 1}} = z - \sqrt{z^2 - 1}$$

promena znaka ispred logaritma svodi se na promenu znaka ispred korena, a koren u kompleksnoj analizi, ionako po definiciji ima dve vrednosti. □

5. Dokazati:

   (a) $\operatorname{tg} = A \circ e \circ R_2$, gde je $R_2 z = 2iz$

   (b) $\operatorname{Arctg} z = \dfrac{1}{2i} \operatorname{Ln} \dfrac{i - z}{i + z}$.

6. Neka je J inverzija, tj. $J\zeta = \zeta^{-1}$. Dokazati:

   (a) $\operatorname{ctg} = J \circ \operatorname{tg}$, $\operatorname{Arcctg} = (\operatorname{Arctg}) \circ J$

   (b) $B_1 = B \circ J = -J \circ B$

   (c) $\operatorname{Arcctg} z = \dfrac{1}{2i} \operatorname{Ln} \dfrac{z + i}{z - i}$.

Označimo sa U' jedinični disk bez 0.

7. Dokazati da višeznačna funkcija Ln ne dopušta izdvajanje regularne grane na U'.

   Rešenje: Pretpostavimo suprotno da je f regularna grana Ln na U'. Tada je $f'(z) = 1/z$ na U' i, na osnovu KIT (o izvodu) $\int_\gamma f'(z)\, dz = 0$

   za svaku zatvorenu konturu γ u U'; videti takođe Vežbu 1.6.12 □

8. Dokazati da višeznačna funkcija $\operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2})$ ne dopušta izdvajanje regularnih grana na oblasti $D = \mathbb{C} \setminus l$, gde je $l = [-1, 1]$.

   Rešenje: Pretpostavimo suprotno da postoji regularna grana g na D. Tada je e^g regularna grana na D i otuda funkcija Z^{-1} dopušta izdvajanje regularne grane ψ na D. Kako $\psi(D)$ nema zajedničkih tačaka sa T, sledi $\psi(D) \subset U$ ili $\psi(D) \subset E$. Neka je na primer $\psi(D) \subset U$. Tada je $\psi(D) = U'$ i otuda, višeznačna funkcija Ln dopušta izdvajanje regularne grane na U'; što je kontradikcija sa 7. □

9. Dokazati da postoji regularna grana Arcctg na oblasti $D_1 = \mathbb{C} \setminus l_1$, gde je $l_1 = [-i, i]$.

   Rešenje: B_1 preslikava D_1 na O_π. Na O_π postoji regularna grana Ln. $\square$

10. Uraditi za vežbu:

    (a) Neka je $l_2 = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ i $D_3 = \mathbb{C} \setminus l_2$. Dokazati da $Z(H) = D_3$ i da otuda postoji regularna grana ${Z_0}^{-1}$ višeznačne funkcije Z^{-1} na D_3.

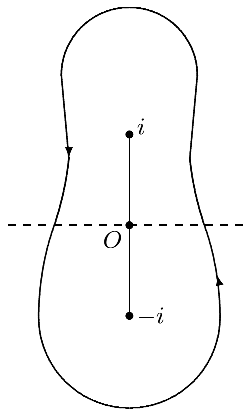
    (b) Neka je ln grana višeznačne funkcije Ln na Π^-. Dokazati da je $f_0 = R_1 \circ \ln \circ R \circ {Z_0}^{-1}$ regularna grana višeznačne funkcije Arcsin na D_3.

    Rešenje: $Z_0^{-1}(D_3) = H$ i $R(H) = \Pi^-$. $\square$

    (c) Neka je $\Pi_2 = \{w : |\mathrm{Re}\, w| < \pi/2\}$. Dokazati da je $f_0(D_3) = \Pi_2$.

    Rešenje: ln preslikava Π^- na Π_1 i $R_1(\Pi_1) = \Pi_2$. $\square$

    (d) $\sin(\Pi_2) = D_3$.



Slika 5.12: Reg. gr. korena

11. Neka je $D = \mathbb{C} \setminus l$, gde je $l = [-i, i]$. Dokazati da postoji regularna grana f višeznačne funkcije F, definisane sa $F(z) = \sqrt{1+z^2}$, na D.

12. Rešiti jednačinu $\sin z + \cos z = 2$.

    Rešenje: 1. način: Koristeći formule $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ i smenu $w = e^{iz}$ transformišemo polaznu jednačinu u kvadratnu jednačinu po w. Posle toga koristimo $z = -i\mathrm{Ln}(w)$.
    2. način: $(\sin z + \cos z)^2 = (\sin z)^2 + 2 \sin z \cos z + (\cos z)^2 = 4$, zatim na osnovu identiteta $(\sin z)^2 + (\cos z)^2 = 1$ i adicione formule $2 \sin z \cos z = sin(2z)$ sledi $\sin(2z) = 3$. Zatim se koristi formula $\mathrm{Arcsin} w = -i\mathrm{Ln}(iw + \sqrt{1-w^2})$. Dalje je $2z = \mathrm{Arcsin} 3$, $\mathrm{Arcsin} w = -i\mathrm{Ln}\Upsilon(w)$, gde je $\Upsilon(w) = iw + \sqrt{1-w^2}$, $\Upsilon(3) = i3 + \sqrt{-8} = 3i \pm \sqrt{8}i = (3 \pm \sqrt{8})i = w_o$, $\mathrm{Ln}\, w_0 = \ln|(3 \pm \sqrt{8})i| + i(\pi/2 + 2k\pi) = 1/2 \ln 17 + i(\pi/2 + 2k\pi)$. I na kraju $z = z_k = 1/2\, \mathrm{Arcsin} 3 = \pi/4 + k\pi - i/4 \ln 17,\ k \in \mathbb{Z}$.

GLAVA 6

Osnovi geometrijske teorije

6.1 Geometrijski principi

6.1.1 Princip argumenta

Logaritamski rezidum

Neka je funkcija f holomorfna u šupljoj okolini $B' = \{0 < |z-a| < r\}$ tačke $a \in \mathbb{C}$ i nema nula u B'.

Definicija 6.1 *Logaritamski rezidum funkcije f u tački $a \in \mathbb{C}$ je rezidum logaritamskog izvoda*

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = (\mathrm{Ln} f(z))' \tag{6.1}$$

funkcije f u tački a.

Za logaritamski rezidum funkcije f u tački a koristićemo oznaku $\mathrm{Log\,Res}_a f$. Dakle,

$$\mathrm{Log\,Res}(f,a) = \mathrm{Log\,Res}_a f = \mathrm{Res}_a \frac{f'}{f}.$$

Osim u izolovanim singularnim tačkama (jednoznačnog karaktera), funkcija f može imati logaritamski rezidum različit od nule i u svojim nulama.
Ponovimo, neka je funkcija f holomorfna u nekoj šupljoj okolini $B' = \{0 < |z-a| < r\}$ tačke $a \in \mathbb{C}$ i nema nula u B'. Dodatno pretpostavimo da je
1. funkcija f je holomorfna u tački a i $f(a) = 0$ ili
2. f ima pol u tački a.

1. Neka je, dalje, $a \in \mathbb{C}$ nula reda n funkcije f. Tada u nekoj okolini $V = V_a$ imamo $f(z) = (z-a)^n \varphi(z)$, gde je φ holomorfna i nema nula u V_a. Kako je

$$f'(z) = n(z-a)^{n-1}\varphi(z) + (z-a)^n \varphi'(z),$$

otuda prvo dobijamo

$$\frac{f'}{f} = \frac{n}{z-a} + \frac{\varphi'}{\varphi}. \tag{6.2}$$

Iz ovog izraza zaključujemo da u nuli reda n logaritamski izvod funkcije ima pol prvog reda sa rezidumom n, tj. logaritamski rezidum u nuli jednak je redu te nule.

2. Ako je a pol funkcije f reda $m \geq 1$, tada u nekoj okolini V tačke a imamo $f(z) = (z-a)^{-m}\psi(z)$, gde je ψ holomorfna i nema nula u V. Kao u slučaju nule, dobijamo

$$\frac{f'}{f} = \frac{-m}{z-a} + \frac{\psi'}{\psi},$$

i otuda

$$\operatorname{Log}\operatorname{Res}_a f = -m.$$

Logaritamski rezidum u polu jednak je redu pola sa znakom minus.

Pogodno je da se saglasimo da iskazi „funkcija f ima pol reda $n \geq 1$ u tački a" i „funkcija f ima nulu (u uopštenom smislu) reda $-n$ u tački a" imaju isto značenje.

Lema 6.1 (Log Res) *Ako funkcija f ima nulu reda $n \in \mathbb{Z}$ u tački $a \in \mathbb{C}$, tada je*

$$\operatorname{Log}\operatorname{Res}_a f = \operatorname{Res}_a \frac{f'}{f} = n. \tag{6.3}$$

Saglasimo se da se od sada svaka nula i pol računaju onoliko puta koliki je njihov red.

Definicija 6.2 *Funkcija koja u oblasti Ω nema drugih singulariteta osim polova naziva se meromorfna funkcija na Ω.*

Teorema 6.1 (T $\sum$ Log Res) (Logaritamski rezidum u odnosu na konturu, broj nula i polova) *Neka je G regularna oblast, f meromorfna funkcija na $\overline{G}$ i neka ∂G ne sadrži ni nule ni polove funkcije f. Ako su N i P, respektivno, ukupan broj nula i polova funkcije f u G, tada je*

$$I = I_f = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f}dz = N - P, \tag{6.4}$$

gde je γ pozitivno orijentisana granica oblasti G.

Dokaz: Kako f ima u G samo konačno mnogo nula, $a_1, \ldots, a_n$ i konačno mnogo polova, $b_1, \ldots, b_m$, a ∂G ne sadrži ni nule ni polove, funkcija $g = f'/f$ je holomorfna u oblasti $\overline{G} \backslash \{a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m\}$. Otuda, na osnovu Osnovne Teoreme o Rezidumima,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f}dz = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}_{a_j} g + \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Res}_{b_j} g. \tag{6.5}$$

Na osnovu Leme 6.1 je

$$\operatorname{Res}_{a_j} g = n_j, \qquad \operatorname{Res}_{b_j} g = -p_j, \tag{6.6}$$

gde su n_j i p_j, respektivno, red nule a_j i pola b_j. Zamenjujući (6.6) u (6.5) i koristeći dogovor o računanju nula i polova (po kome je $N = \sum n_j$ i $P = \sum p_j$) dobijamo (6.4).

Ako koristimo pojam nule (u opštem smislu), ovaj dokaz dobija kompaktniji oblik. Tada funkcija f ima konačno mnogo nula (u uopštenom smislu), $c_1, \ldots, c_s$. Na osnovu Leme 6.1 (Log Res), $\mathrm{Res}_{c_j} g = k_j$, gde je k_j red nule c_j. Otuda primenom osnovne Teoreme o rezidumu dobijamo

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f}dz = \sum_{j=1}^{s} \mathrm{Res}_{c_j} g = k,$$

gde je $k = \sum\limits_{j=1}^{s} k_j$ ukupan broj nula (u opštem smislu). □

Teorema Rušea

Pogodno je uvesti oznake:

$$I_h = I_\gamma(h) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{h'}{h}dz,$$

kada integral postoji. Ako je h meromorfna funkcija na oblasti G, sa $N_h = N(h, G)$ i $P_h = P(h, G)$ označavamo broj nula i polova funkcije h na G.

Teorema 6.2 (Ruše) *Pretpostavimo da je G regularna oblast i označimo sa γ pozitivno orijentisanu granicu oblasti G. Neka su ispunjeni sledeći uslovi:*
(a) f i g su holomorfne na $\bar{G}$,
(b) $|g(z)| < |f(z)|, \qquad z \in \partial G$.
Ako je $h = f + g$, tada h i f imaju jednak broj nula u G, tj. $N_h = N_f$.

Dokaz: Iz (b) sledi da funkcije f i h nemaju nula na ∂G ($|h(z)| \geq |f(z)| - |g(z)|$, $z \in \partial G$). Kako je $h = f\Big(1 + \dfrac{g}{f}\Big)$, pogodno je uvesti oznake: $\psi = \dfrac{g}{f}$, $\varphi = 1 + \psi$ i predstaviti h u obliku $h = f\varphi$. Iz $(f\varphi)' = f'\varphi + f\varphi'$ dobijamo $I_h = I_{f\varphi} = I_f + I_\varphi$, gde se integrali računaju u odnosu na γ, i otuda, s obzirom na Teoremu 6.1 (Log Res) u odnosu na konturu i broj nula, sledi $N_h = N_f + I_\varphi$. Sada dokaz teoreme sledi na osnovu sledeće leme (videti takođe Posledicu 6.2 Leme 6.3):

Lema 6.2

$$I_\varphi = I_\gamma(\varphi) = 0.$$

Dokaz: Iz pretpostavke (b) sledi prvo

$$|\varphi(z) - 1| = |\psi(z)| < 1, \qquad z \in \partial G$$

i stoga φ preslikava ∂G u $B = B(1;1) \subseteq \Pi^+$. Kako na Π^+ postoji grana ln višeznačne funkcije Ln, funkcija $\ln\varphi$ je primitivna za funkciju $\frac{\varphi'}{\varphi}$, u nekoj okolini konture γ. Otuda, na osnovu KIT', sledi

$$I_\varphi = \frac{1}{2\pi\, i}\int_\gamma (\ln\,\varphi)'\,dz = 0.$$

□

Podvucimo da se Lema 6.3, Propozicija 6.1, Posledica 6.2 i Teorema 6.3 (koje dokazujemo u daljem tekstu) mogu razmatrati kao uopštenja ove Leme.

Na osnovu Teoreme 6.1 iz Leme 6.2 sledi da je $n_\varphi = p_\varphi$. U sledećem primeru, koji se odnosi na jedinični disk Δ, funkcija φ ima sledeća svojstva:
1. $\varphi(T) \subseteq \Pi^+$,
2. φ ima četiri nule i četiri pola u Δ.

Primer 33 *Odrediti broj nula funkcije*

$$h(z) = z^9 - 6z^4 + 3z - 1$$

u Δ.

Rešenje: Neka je $f(z) = -6z^4$ i $g(z) = z^9 + 3z - 1$. Tada je $h = f + g$, $|f(z)| = 6$, $|g(z)| \leq 5$, $z \in T$. Na osnovu Teoreme Rušea h ima 4 nule u Δ. Dakle, $\varphi(z) = \frac{h(z)}{f(z)}$ je meromorfna u Δ, $N_\varphi = 4$, $P_\varphi = 4$ i $I_\varphi = N_\varphi - P_\varphi = 0$. □

Napomena: Teorema Rušea se primenjuje i na višestruko povezane oblasti; za ilustraciju videti Podsekciju 6.3.3 (Rušeov stav i Lema Mihajlova, Zadatak 3).

Vežba 6.1.1 *U dokazu Teoreme 6.2 (Ruše) ustanovljeno je da* $\varphi(\partial G) \subset \Pi^+$.
a. Ako je φ *holomorfna funkcija na* G *dokazati da je* $\varphi(G) \subset \Pi^+$.
b. Da li je $\varphi(G) \subset \Pi^+$ *u opštem slučaju?*

Rešenje: Ne u opštem slučaju; preciznije *b.* važi ako i samo ako je φ holomorfna funkcija na G. □

Vežba 6.1.2 (Osnovni Stav Algebre) *Ako je n pozitivan ceo broj i $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, gde su $a_0, \ldots, a_{n-1}$ kompleksni brojevi, tada P ima tačno n nula u kompleksnoj ravni.*

Uputstvo: Neka je $p_1(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$. Tada je $P(z) = z^n + p_1(z)$ i postoji R tako da je $|z|^n > |P_1(z)|$ na kružnici T_R. Funkcija $f(z) = z^n$ ima u tački 0 nulu n-tog reda i otuda na osnovu Rušeovog stava polinom P ima tačno n nula u krugu U_R.

Princip argumenta

Lema 6.3 (Int Log$'_{loc}$) (Integral logaritamskog izvoda) *Neka su ispunjeni sledeći uslovi:*
(a) *f je holomorfna u oblasti Ω i nema nula na konturi γ koja pripada oblasti Ω;*
(b) *trag konture $\Gamma = f\circ\gamma$ pripada oblasti O -ravan bez zraka iz koordinatnog početka. Tada je*

$$J = \int_\gamma \frac{f'}{f}\,dz = \ln f(b) - \ln f(a), \tag{6.7}$$

gde je $a = \gamma(0)$, $b = \gamma(1)$ i $\ln$ grana logaritma na O.

Posledica 6.1 *Ako su ispunjeni uslovi Leme 6.3 i ako je kontura γ zatvorena, tada je:*

$$J = 0.$$

Dokaz leme 6.3: Ponovimo da na O postoje grane arg i ln takve da $\arg = \operatorname{Im}\ln$. Kako je $(\ln f)' = \dfrac{f'}{f}$ na γ^*, dobijamo:

$$J = \int_\gamma \frac{f'}{f}\,dz = \int_\gamma (\ln f)'dz,$$

i otuda, s obzirom na kompleksnu verziju Njutn-Lajbnicove formule (osnovne Teoreme integralnog računa),

$$J = \ln f\Big|_a^b = \ln f(b) - \ln f(a).$$

Ponovimo da sa $\Delta_\gamma \mathrm{Arg} f$ označavamo priraštaj funkcije f duž konture γ, tj. vrednost izraza $\arg f(b) - \arg f(a)$. Sada (6.7) možemo napisati u obliku:

$$J = \ln|f(b)| - \ln|f(a)| + i\Delta_\gamma \mathrm{Arg} f. \tag{6.8}$$

□

Pokažimo da formula (6.8) važi i kada uslov (b) Leme 6.3 nije ispunjen.

Propozicija 6.1 (Integral logaritamskog izvoda i promena argumenta) *Ako važi uslov (a) Leme 6.3, tada je*

$$J = \int_\gamma \frac{f'}{f}\,dz = \ln|f(b)| - \ln|f(a)| + i\Delta_\gamma \mathrm{Arg} f \tag{6.9}$$

Dokaz: Podelimo konturu γ tačkama $z_0 = a, z_1, \ldots, z_n = b$ na konačan broj kontura $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ tako da svaka kontura $\Gamma_k = f\circ\gamma_k$ pripada nekoj oblasti O^k -ravan bez zraka iz koordinatnog početka $(k = 1, \ldots, n)$. Primenom Leme 6.3 na svaku konturu γ_k $(k = 1, \ldots, n)$ dobijamo:

$$J_k = \int_{\gamma_k} \frac{f'}{f}\,dz = \ln f(z_k) - \ln f(z_{k-1}),$$

tj.

$$J_k = \ln|f(z_k)| - \ln|f(z_{k-1})| + i\Delta_{\gamma_k}\mathrm{Arg}f.$$

Sabirajući ove jednačine (ponovimo da je $\Delta_\gamma \mathrm{Arg}f = \sum_{k=1}^{n} \Delta_{\gamma_k}\mathrm{Arg}f$) dobijamo (6.9).
□

Definicija 6.3 *Ako je $f = E$ identičko preslikavanje, umesto $\Delta_\gamma \mathrm{Arg}f$ pišemo $\Delta \mathrm{Arg}\gamma$.*

Napomena: U klasičnoj literaturi nalazimo varijacije sledećeg postupka. Neka je f holomorfna na zatvorenoj konturi γ i različita od nule na γ^* ($0 \notin f(\gamma^*)$). Tada je:

$$J = \int_\gamma \frac{f'}{f}\,dz = \mathrm{Ln}\,f\big|_a^b = \mathrm{Ln}\,|f|\big|_a^b + i\mathrm{Arg}f\big|_a^b\,.$$

Kako je γ zatvoren put, to je $a = \gamma(0) = \gamma(1) = b$ i otuda $J = i\Delta_\gamma \mathrm{Arg}f$. Sledeći primer (videti takođe Primer 35) pokazuje da ovaj postupak ima izvesne nepreciznosti.

Primer 34 *Neka je $\mathcal{K}_1$ pozitivno orijentisana kružnica, $\gamma = \mathcal{K}_1$ i $f(z) = z$. Dokazali smo da ne postoji grana* $\mathrm{Ln}\,z$ *na* $\mathbb{C}^*$. *Na isti način dokazuje se da ne postoji grana* Ln *u okolini V kružnice K_1.*

Ipak, prethodno razmatranje ima smisla ako podelimo $\mathcal{K}_1$ na gornju polukružnicu γ_0 i donju polukružnicu γ_1 (ideja primenjena u Propoziciji 6.1). Ostavljamo detalje čitaocu. Ako je u prethodnom Primeru $f(z) = z^2$ onda se kružnica $\mathcal{K}_1$ može podeliti na četiri kružna luka čiji tragovi respektivno pripadaju I, II, III i IV kvadrantu.

Posledica 6.2 (Log Res u odnosu na zatvorenu konturu i Δ Arg) *Neka je funkcija f holomorfna na nekoj okolini V zatvorene konture γ i različita od nule na γ^*. Tada je*

$$J = \int_\gamma \frac{f'}{f}\,dz = i\Delta_\gamma \mathrm{Arg}f.$$

Mada sledeći rezultat neposredno sledi iz Posledice 6.2, formulišemo ga kao teoremu imajući u vidu primene.

Teorema 6.3 (Log Res u odnosu na cikl i promena argumenta) *Neka su ispunjeni sledeći uslovi:*
(a) G je regularna oblast i f meromorfna na $\overline{G}$,
(b) ∂G ne sadrži ni nule ni polove funkcije f.
Ako je γ pozitivno orijentisana granica oblasti G, tada je

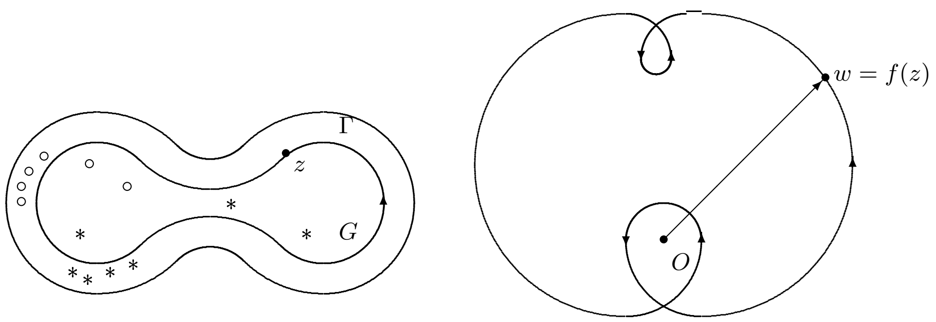
$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f}\,dz = \frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \mathrm{Arg}\,f. \tag{6.10}$$

Dokaz: Iz (a) i (b) sledi da je funkcija f holomorfna u nekoj okolini ∂G. Neka se cikl γ sastoji od spoljašnje pozitivno orijentisane konture γ_0 i unutrašnjih negativno orijentisanih kontura $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$. Na osnovu Posledice 6.2 (Integral Log Res je jednak $i\Delta$ Arg),

$$J_k = \int_{\gamma_k} \frac{f'}{f}\, dz = i\Delta_{\gamma_k} \mathrm{Arg}\, f, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Sabirajući ove jednačine i uvodeći „prirodnu definiciju" $\Delta_\gamma \mathrm{Arg}\, f = \sum \Delta_{\gamma_k} \mathrm{Arg}\, f$, dobijamo (6.10). □

Sledeći rezultat je direktna posledica Teoreme 6.1 i Teoreme 6.3.



Slika 6.1:

Teorema 6.4 (Princip Argumenta, PArg) *Pri uslovima Teoreme 6.3, razlika između broja nula n i broja polova p funkcije f u oblasti G jednaka je priraštaju argumenta te funkcije duž pozitivno orijentisane granice γ oblasti G podeljenom sa 2π, tj.*

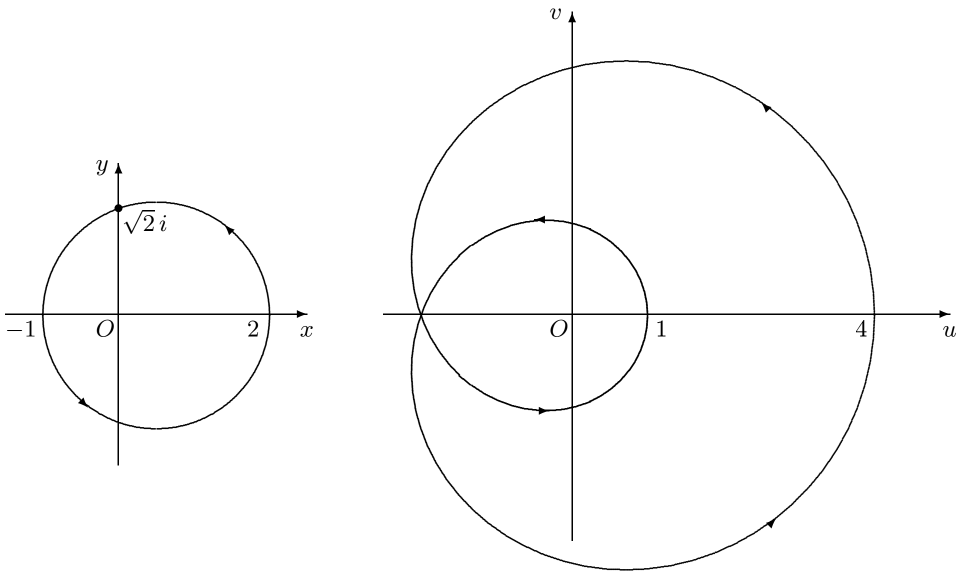
$$N - P = \frac{1}{2\pi} \Delta_\gamma \mathrm{Arg}\, f.$$

Dokaz: Na osnovu Teoreme 6.1 logaritamski rezidum u odnosu na cikl γ je $I = N - P$, a na osnovu Teoreme 6.3 sledi $I = \dfrac{1}{2\pi} \Delta_\gamma \mathrm{Arg}\, f$. □

Primer 35 *Neka je $U = U(1/2; 3/2)$, $\mathcal{K}$ pozitivno orijentisana granica oblasti U i $f(z) = z^2$.*

a) Nacrtati trag puta $\Gamma = f \circ \mathcal{K}$.

b) Za dato ω odrediti broj rešenja jednačine $f(z) = \omega$ u U.



Slika 6.2: Preslikavanje kruga pomoću z^2

Uputstvo: Videti sliku 6.2. □

U nameri da damo jasniju geometrijsku interpretaciju Teoreme 6.4, pretpostavimo da se γ sastoji od jedne konture i neka je $\Gamma = f \circ \gamma$. Iz definicije promene argumenta i razmatranja koja se pojavljuju na nekoliko mesta (npr. kod dokaza Rušeove teoreme koji sledi, spec. Propozicije 6.3; Principa korespondencije oblasti (Sekcija 6.3), itd.) intuitivno zaključujemo da $\Delta_\gamma \mathrm{Arg} f/2\pi$ geometrijski predstavlja „broj obilazaka" oko tačke $w = 0$ vektora $w = f(z)$ kada z „prolazi" γ^* (preciznije, vektora $w = \Gamma(t) = f(\gamma(t))$ pri „kretanju" $t \in I$ „od 0 do 1"). Taj broj nazivamo indeksom puta Γ u odnosu na tačku $w = 0$ i označavamo simbolom $\mathrm{Ind}_\Gamma 0$. Kako je

$$\Delta_\gamma \mathrm{Arg}\, f = \Delta \mathrm{Arg}\Gamma, \tag{6.11}$$

formalno možemo definisati $\mathrm{Ind}_\Gamma 0 = \dfrac{1}{2\pi}\Delta\mathrm{Arg}\Gamma$. Kako je, na osnovu Teoreme 6.3, Log Res identičkog preslikavanja E u odnosu na konturu Γ

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dw}{w} = \frac{1}{2\pi}\,\Delta_\Gamma \mathrm{Arg}\, E = \frac{1}{2\pi}\Delta\mathrm{Arg}\Gamma,$$

dobija se:

$$\mathrm{Ind}_\Gamma 0 = \frac{1}{2\pi\, i}\int_\Gamma \frac{dw}{w}. \tag{6.12}$$

U udžbenicima koji izbegavaju geometrijski pristup formula (6.12) uzima se za definiciju $\mathrm{Ind}_\Gamma 0$. Sada PArg možemo zapisati kao

$$N - P = \frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \mathrm{Arg}\, f = \mathrm{Ind}_\Gamma 0.$$

Umesto nula funkcije f možemo razmatrati njene $a-$tačke, tj. rešenja jednačine $f(z) = a$. Zato je dovoljno u našim razmatranjima zameniti funkciju f funkcijom f_a (definisanom sa $f_a(z) = f(z) - a$). Ako ∂G ne sadrži a-tačke (i, prema pretpostavkama teoreme 6.3, polove) funkcije f, na osnovu PArg,

$$N_a - P = \frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \mathrm{Arg}(f(z) - a) = \frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \mathrm{Arg}\, f_a, \tag{6.13}$$

gde je n_a ukupan broj a-tačaka funkcije f u oblasti G. Smena promenljive $w = f(z)$ u formuli (6.13) daje motivaciju da se definiše indeks Γ u odnosu na a,

$$\mathrm{Ind}_\Gamma a = \frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \mathrm{Arg}(w - a) = \frac{1}{2\pi}\Delta \mathrm{Arg}\Gamma_a,$$

gde Γ_a označava konturu definisanu sa $\Gamma_a(t) = \Gamma(t) - a$. Za detalje u vezi sa definicijom indeksa videti sekciju Promena argumenta duž puta u Glavi 7. Otuda (6.13) možemo zapisati u obliku:

$$N_a - P = \mathrm{Ind}_\Gamma a. \tag{6.14}$$

Dakle, dokazali smo:

Teorema 6.5 (Princip Indeksa, PInd) *Neka su ispunjeni uslovi:*
(a) G je regularna oblast i f meromorfna na $\overline{G}$;
(b) ∂G ne sadrži ni a-tačke ni polove funkcije f.
Ako su n_a i p, respektivno, ukupan broj a-tačaka i polova funkcije f u G, tada je

$$N_a - P = \mathrm{Ind}_\Gamma a,$$

gde je $\Gamma = f \circ \gamma$ i γ pozitivno orijentisana granica oblasti G.

Skicirajmo još jedan dokaz Rušeove teoreme pomoću PArg.

Dokaz Rušeove teoreme pomoću promene argumenta

Koristićemo oznake iz dokaza Teoreme Rušea. Ponovimo, $\psi = \dfrac{g}{f}$ i $\varphi = 1 + \psi$. U klasičnoj literaturi nalazimo varijaciju sledećeg razmatranja. Pri izboru odgovarajućih vrednosti argumenta imamo

1° $\Delta_\gamma \mathrm{Arg}\, h = \Delta_\gamma \mathrm{Arg}\,(f\varphi) = \Delta_\gamma \mathrm{Arg}\, f + \Delta_\gamma \mathrm{Arg}\, \varphi$.

Tačka $\psi(z) = \dfrac{g(z)}{f(z)}$ „ne izlazi" iz jediničnog kruga kada z „prolazi" duž γ^*. Otuda vektor $\varphi(z) = 1 + \psi(z)$ „ne može obići" oko tačke 0 kada z „prolazi" duž γ^* i, stoga, važi

2° $\Delta_\gamma \mathrm{Arg}\, \varphi = 0$.

Iz 1° i 2° dobijamo

3° $\Delta_\gamma \mathrm{Arg}\, h = \Delta_\gamma \mathrm{Arg}\, f$

i otuda, na osnovu PArg,

$$N_h = N_f.$$

Prethodno razmatranje je prozračno vizuelno i privlači studente na osnovnom kursu. Za čitaoca koji ima potrebu da razjasni pojam i svojstva promene argumenta dodajemo sledeće razmatranje.

Uputstvo (za 1°): Podelimo konturu γ na konačan broj kontura $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, tako da konture $f \circ \gamma_k$ pripadaju poluravnima Π^k, pri čemu $0 \notin \Pi^k$, $k = 1, \dots, n$. Za dokaz svojstva 1° videti, takođe, Propoziciju 6.4.

Na osnovu Leme 6.2 i Propozicije 6.1 važi $\Delta_\gamma \mathrm{Arg}\, \varphi = 0$, tj. 2°. Smatramo da je korisno dati direktan dokaz 2° (videti Propoziciju 6.2).

Definicija 6.4 *Kažemo da je oblast Ω tipa - O ako $\Omega \subseteq O_\alpha$ za neko $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Propozicija 6.2 *Ako je γ pozitivno orijentisana zatvorena kružnica, f neprekidna na γ^* i $\Gamma = f \circ \gamma$ pripada oblasti Ω tipa - O, tada je*

$$\Delta_\gamma \mathrm{Arg}\, f = \Delta \mathrm{Arg}\, \Gamma = 0.$$

Dokaz: Na oblasti Ω postoji grana argumenta arg. Otuda, s obzirom da je Γ zatvorena kontura, tj. $\Gamma(0) = \Gamma(1)$, sledi:

$$\Delta_\gamma \mathrm{Arg}\, f = \Delta \mathrm{Arg}\, \Gamma = \arg \Gamma(1) - \arg \Gamma(0) = 0.$$

□

Propozicija 6.3 (Polarna reprezentacija puta) *Neka je $\gamma : I \to \mathbb{C}^*$ put. Dokazati da postoji neprekidna funkcija $\varphi : I \to \mathbb{R}$ tako da*

$$\frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|} = e^{i\varphi(t)}, \qquad t \in I$$

i da je

$$\Delta \mathrm{Arg} \gamma = \varphi(1) - \varphi(0).$$

Funkcija φ se naziva neprekidna grana argumenta duž puta γ.

Podvucimo φ je neprekidna grana argumenta duž puta γ ako je $\varphi : I \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija i $\gamma(t) = |\gamma(t)| e^{i\varphi(t)}$, $t \in I$. Otuda je specijalno $\varphi(t) \in \mathrm{Arg}\, \gamma(t)$, $t \in I$.

Propozicija 6.4 *Ako je γ put, $f, g : \gamma^* \to \mathbb{C}^*$ neprekidne funkcije i $\Gamma_1 = f \circ \gamma$, $\Gamma_2 = g \circ \gamma$ dokazati:*

$$\Delta_\gamma \mathrm{Arg}\, (fg) = \Delta_\gamma \mathrm{Arg}\, f + \Delta_\gamma \mathrm{Arg}\, g.$$

Dokaz: Neka su φ_1 i φ_2, respektivno, neprekidne grane argumenta duž Γ_1 i Γ_2. Funkcija
$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$
je neprekidna grana argumenta duž puta $\Gamma = h \circ \gamma$, gde je $h = fg$. $\square$

6.1.2 Princip očuvanja oblasti

Lokalno ponašanje analitičkih funkcija

Prvo, dokazujemo lemu koja je jednostavna posledica Teoreme Jedinosti (Teorema 2.19).

Lema 6.4 (lok) *Pretpostavimo da je f nekonstantna holomorfna funkcija u nekoj oblasti Ω, $z_0 \in \Omega$ i da je $w_0 = f(z_0)$. Tada postoji krug $\overline{B} = \{|z - z_0| \leq r\}$, $r > 0$, tako da u njemu sem centra nema drugih w_0-tačaka, niti nula funkcije f'.*

Dokaz: Pokažimo prvo da postoji krug $\overline{B}_1 = \{|z - z_0| \leq r_1\}$ tako da u njemu sem centra nema drugih nula funkcije f'. Ako pretostavimo suprotno, onda postoji niz različitih tačaka $z_n \in \Omega$ tako da $z_n \to z_0$ i $f'(z_n) = 0$. Na osnovu Teoreme Jedinosti (Teorema 2.19) $f' \equiv 0$ na Ω i otuda $f \equiv \text{const}$ na Ω; što je kontradikcija sa pretpostavkom da je f nekonstantna funkcija u Ω. Slično, ponovnom primenom Teoreme Jedinosti, pokazujemo da postoji krug $\overline{B} = \{|z - z_0| \leq r\}$, $0 < r \leq r_1$, tako da u njemu sem centra nema drugih w_0-tačaka. Otuda, u probušenom krugu $\overline{B} = \{0 < |z - z_0| \leq r\}$ nema w_0-tačaka, i nema nula funkcije f'. $\square$

Lema 6.5 (m-list lok) *Pretpostavimo da je f nekonstantna holomorfna funkcija u nekoj oblasti Ω, $z_0 \in \Omega$ i da je $w_0 = f(z_0)$. Ako je m red nule funkcije $f - w_0$ u z_0, tada postoji $\mu > 0$ i disk $B = B(z_0, r) \subseteq \Omega$ tako da za proizvoljno w_1, $0 < |w_1 - w_0| < \mu$, jednačina $f - w_1$ ima tačno m različitih rešenja u B.*

Dokaz: Na osnovu Teoreme Jedinosti (Teorema 2.19) (preciznije Leme 6.4) izaberimo krug $\overline{B} = \{|z - z_0| \leq r\}$ tako da u njemu sem centra nema drugih w_0-tačaka, niti nula funkcije f'. Označimo sa $K = \{|z - z_0| = r\}$ granicu ovog kruga i neka je
$$\mu = \min_{z \in K} |f(z) - w_0|. \tag{6.15}$$
Jasno je da je $\mu > 0$. Modul neprekidne funkcije $f - w_0$ dostiže na K minimalnu vrednost i kada bi bilo $\mu = 0$ onda bi na K postojale w_0-tačke funkcije f suprotno konstrukciji kruga B. Neka je $|w_1 - w_0| < \mu$. Imamo
$$f(z) - w_1 = f(z) - w_0 + (w_0 - w_1),$$
pri čemu na K, s obzirom na (6.15), $|f(z) - w_0| \geq \mu$. Kako je $|w_1 - w_0| < \mu$ i stoga $|f(z) - w_0| > |w_1 - w_0|$, na osnovu teoreme Rušea zaključujemo da funkcija $f - w_1$ ima unutar K isti broj nula kao i funkcija $f - w_0$, tj. m. Kako je još $f'(z) \neq 0$ pri

$0 < |z - z_0| < r$, to funkcija $f - w_1$ za proizvoljnu vrednost w_1, $0 < |w_1 - w_0| < \mu$, ima samo proste nule u $B' = \{z : 0 < |z - z_0| < r\}$ (videti Vežbu 6.1.3). Otuda funkcija f dobija vrednost w_1 u tačno m različitih tačaka kruga B. Podvucimo da odavde specijalno sledi relacija

$$B^* = B(w_0; \mu) \subseteq f(\Omega).$$

□

Vežba 6.1.3 *Neka je f holomorfna u nekom krugu $B = B(z_0, r)$ i $f(z_0) = w_0$. Ako je z_0 nula reda $s \geq 2$ funkcije $f - w_0$, tada je $f'(z_0) = 0$.*

Uputstvo: $f(z) = (z-z_0)^s\varphi(z)$, gde je φ holomorfna u B; $f'(z) = s\,(z-z_0)^{s-1}\varphi(z) + (z - z_0)^s\varphi'(z)$. □

Navedimo nekoliko važnih posledica Leme 6.5 (m-list lok).

Princip očuvanja oblasti

Teorema 6.6 *[Princip očuvanja oblasti, POOb] Ako je f nekonstantna holomorfna funkcija u oblasti Ω, tada je $\Omega^* = f(\Omega)$ oblast.*

Uputstvo:
1. Ostavlja se čitaocu da proveri da je Ω^* povezan skup.
2. Neka je $w_0 \in \Omega^*$ i neka je $z_0 \in f^{-1}\{w_0\}$; i $B = B(z_0, r) \subset \Omega$. Ako je $f^{(m)}(z_0) = 0$ za $m \geq 1$, primenom Tejlorove teoreme na krug B, sledi da je $f \equiv f(z_0)$ na B i otuda, na osnovu Teoreme Jedinosti (Teorema 2.19), da je da je $f \equiv f(z_0)$ na Ω; što je kontradikcija sa pretpostavkom da je f nekonstantna funkcija u Ω. Dakle postoji prirodni broj m tako da je $f^{(m)}(z_0) \neq 0$ i stoga postoji najmanji prirodni broj m tako da je

$$f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

Otuda i iz Leme 6.5 (m-list lok) sledi da postoji $\mu > 0$ tako da je

$$B(w_0, \mu) \subseteq \Omega^*.$$

□

Primer 36 *Primer $f(z) = x^2 + iy$ pokazuje da POOb ne važi za beskonačno diferencijabilna preslikavanja.*

Uputstvo: Neka je $B_r = \{z : |z| < r\}$, $r > 0$. Proveriti da je $f(\mathrm{B_r}) = \mathrm{B_r}^*$, gde je $\mathrm{B_r}^* = \{w : 0 \leq u < r^2 - v^2\}$ i da skup $\mathrm{B_r}^*$ nije otvoren. Neka je $w = u + iv = x^2 + iy$. Otuda je $u = x^2$ i $v = y$. Kako $z \in B_r$ akko $x^2 + y^2 < r^2$, sledi $u + v^2 < r^2$ i $u \geq 0$; tj. $f(\mathrm{B_r}) \subset \mathrm{B_r}^*$. S druge strane ako je $w \in \mathrm{B_r}^*$ i ako je $x = \sqrt{u}$, $y = v$, tada je $f(z) = w$. □

Teorema 6.7 (Lokalna Jednolisnost, Lok 1-1)** *Neka je $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$ i $\varphi'(z_0) \neq 0$. Tada Ω sadrži okolinu V tačke z_0 tako da:*
(a) φ je 1-1 na V,
(b) $W = \varphi(V)$ je otvoren skup
(c) Ako je $\psi : W \to V$ definisano sa $\psi(\varphi(z)) = z$, tada je $\psi \in \mathcal{H}(W)$.

Tačke (a) i (b) ove teoreme slede na osnovu Teoreme o implicitnoj funkciji (videti Vežbu 6.1.5). Dokaz koji navodimo bazira se na Leme 6.5.
Dokaz: Neka je $w_0 = \varphi(z_0)$. S obzirom da je φ' neprekidna funkcija i $\varphi'(z_0) \neq 0$, postoji krug $B_1 = B(z_0, r_1) \subset \Omega$, tako da φ' nema nula u B_1.
Iz uslova teoreme zaključujemo da je z_0 nula prvog reda funkcije $\varphi - w_0$. Otuda, primenom Leme 6.5 (m-list lok) na B_1, zaključujemo da postoje krugovi $B \subset B_1$ i B^*, respektivno, sa centrima u z_0 i w_0 tako da za svaki $w_1 \in B^*$ jednačina $\varphi = w_1$ ima tačno jedno rešenje u B i da φ' nema nula na B.

Kako je φ neprekidna funkcija u z_0, postoji $V = B(z_0; \rho) \subseteq B$, tako da je $\varphi(V) \subseteq B^*$; Otuda φ je 1-1 na V i na osnovu POOb, W je otvoren skup.

Da bismo dokazali (c) fiksirajmo $w_1 \in W$. Tada je $\varphi(z_1) = w_1$ za jedinstveno $z_1 \in V$. Ako je $w \in W$ i $\psi(w) = z \in V$, tada je

$$\frac{\psi(w) - \psi(w_1)}{w - w_1} = \frac{z - z_1}{\varphi(z) - \varphi(z_1)}.$$

Kako je ψ neprekidno (dokazati!) $z \to z_1$ kada $w \to w_1$. Otuda, kako je $\varphi' \neq 0$ na B, dobijamo

$$\psi'(w_1) = \frac{1}{\varphi'(z_1)}.$$

□

Sledeća teorema je suštinski sadržana u Lemi 6.5 (m-list lok), ali izgleda korisno izdvojiti je kao poseban rezultat.

Teorema 6.8 (jednolisno $\Rightarrow$ konformno)** *Pretpostavimo da je Ω oblast, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ i f jednolisno na Ω. Tada je $f'(z) \neq 0$ za svako $z \in \Omega$ i inverzno preslikavanje f^{-1} je holomorfna funkcija.*

Dokaz: Ako bi $f'(z_0)$ bilo 0 za neko $z_0 \in \Omega$, hipoteze Leme 6.5 (m-list lok) (videti takođe Teoremu 6.9) važile bi za neko $m > 1$, tako da bi f bilo m-valentno u nekoj šupljoj okolini tačke z_0, što je kontradikcija sa pretpostavkom da je f jednolisna na Ω.
Na osnovu dela (c) Teoreme 6.7 (Lok $1-1$) sledi da je f^{-1} holomorfna funkcija. □

Sledeća teorema, koja se može razmatrati kao analitička forma Leme 6.5 (m-list lok), daje formulu za lokalno predstavljanje holomorfne funkcije pomoću jednolisne holomorfne funkcije.

Teorema 6.9 (Lok ponašanje holo) *Pretpostavimo da je f holomorfna nekonstantna funkcija u nekoj oblasti Ω, $z_0 \in \Omega$, i da je $f(z_0) = w_0$. Neka je m red nule* *funkcije $f - w_0$ u z_0. Tada postoji okolina V tačke z_0, $V \subseteq \Omega$, i postoji $\varphi \in \mathcal{H}(V)$ tako da je:*

(a) *$f(z) = w_0 + \big(\varphi(z)\big)^m$ za sve $z \in V$;*

(b) *φ' nema nule u V i φ je invertibilno preslikavanje okoline V na disk $B(0;r)$.*

Dokaz: Bez gubitka opštosti možemo pretpostaviti da je Ω dovoljno mala kružna okolina tačke z_0 tako da je $f(z) \neq w_0$ za $z \in \Omega\backslash\{z_0\}$. Tada

$$f(z) - w_0 = (z - z_0)^m g(z) \qquad (z \in \Omega), \tag{6.16}$$

gde je $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ i nema nula na Ω. Na osnovu teoreme o postojanju neprekidne grane logaritma, $g = \exp(h)$ za neko $h \in \mathcal{H}(\Omega)$. Definišimo

$$\varphi(z) = (z - z_0) \exp \frac{h(z)}{m} \qquad (z \in \Omega).$$

Tada (a) važi za svako $z \in \Omega$. Takođe, $\varphi(z_0) = 0$ i $\varphi'(z_0) \neq 0$. Postojanje okoline V takve da važi (b) sledi iz Teoreme 6.7 (Lok $1-1$). □

Skicirajmo još jedan dokaz Teoreme 6.7 (Lok $1-1$), koji se bazira na Principu Korespondencija oblasti (PKOb, Sekcija 6.3).

Teorema A[Teorema 6.7, Lokalna Jednolisnost, Lok 1-1]** *Neka je $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$ i $\varphi'(z_0) \neq 0$. Tada Ω sadrži okolinu V tačke z_0 tako da važi:*
(a) φ je $1-1$ na V;
(b) $W = \varphi(V)$ otvoren skup i
(c) ako je $\psi : W \to V$ definisano sa $\psi(\varphi(z)) = z$ tada je $\psi \in \mathcal{H}(W)$.
Uputstvo: Pokazati da Ω sadrži disk $\overline{B} = \overline{B}(z_0;r)$ tako da

$$|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)| \geq \frac{1}{2}|\varphi'(z_0)||z_1 - z_2|, \qquad z_1, z_2 \in \overline{B}. \tag{6.17}$$

Za dokaz nejednakosti (6.17), može se koristiti i Lema 7.3.
Dakle, (a) važi ako izaberemo $V = B$. Neka su Γ_r konture $f \circ \mathcal{K}_r$, gde su $\mathcal{K}_r$ pozitivno orijentisane kružnice poluprečnika r sa središtem u z_0. Iz PKOb sledi da je $f(B) = \mathrm{Int}(\Gamma_r)$. □
Napomena: Ideja dokaza prethodne teoreme može se iskoristiti za dokaz jedne verzije teoreme o implicitnoj funkciji. Dokaz u Šabatu [Ša] baziran je na Rušeovom stavu, a u Rudinu [Ru] na PMM.

Vežba 6.1.4 *Dokazati nejednakost (6.17), bez pozivanja na Lema 7.3.*

Vežba 6.1.5 *Dokazati delove (a) i (b) Teoreme 6.7 (Teorema A) pomoću teoreme o implicitnoj funkciji.*

Uputstvo: Kako je $J_\varphi(z) = |\varphi'(z)|^2$, to je jakobijan J_φ različit od nule u nekoj okolini tačke z_0. Dakle, jakobijan preslikavanja $(x, y) \to (u, v)$ je različit od nule u nekoj okolini tačke z_0, gde je $\varphi = u + iv$. □

Vežba 6.1.6 *Neka je $f(z) = x + iy^3$. Pokazati da je f $\mathbb{R}$-beskonačno diferencijabilna funkcija, 1-1 na $\mathbb{C}$ i da je Jakobijan funkcije f jednak 0 na x -osi.*

Napomena: Teorema 6.7, se ne može primeniti, jer f nije holomorfna funkcija.

6.1.3 Princip maksimuma modula; Švarcova lema

Princip maksimuma modula (PMM)

Teorema 6.10 (PMM1) *Ako je funkcija f holomorfna u oblasti Ω i $|f|$ dostiže lokalni maksimum u nekoj tački $z_0 \in \Omega$, tada je f konstantna.*

Dokaz: Neka je $w_0 = f(z_0)$. Iz uslova teoreme sledi da postoji disk $B = B(z_0; r)$, tako da $|f|$ dostiže maksimum $|w_0| = |f(z_0)|$ na B. Ako je f konstanta na Ω tvrđenje je dokazano.
Ostaje da se razmotri slučaj $f \neq \mathrm{const}$ na Ω.
Ako je $f \neq \mathrm{const}$ na Ω, onda je na osnovu teoreme jedinosti $f \neq \mathrm{const}$ i na B. Na osnovu POOb postoji disk $B^* = \{w \mid |w - w_0| < \mu\}$, $B^* \subseteq f(B)$. U disku B^* postoji tačka w_1 ($w_1 = sw_0$, $1 < s < 1 + \dfrac{\mu}{|w_0|}$, za $w_0 \neq 0$, i $|w_1| < \mu$ za $w_0 = 0$) tako da $|w_1| > |w_0|$. Vrednost w_1 funkcija f dobija u nekoj tački $z_1 \in B$ suprotno pretpostavci da $|f|$ dostiže na B maksimum u z_0. □

Teorema 6.11 (PMM2) *Ako je funkcija f holomorfna u oblasti Ω i neprekidna na $\overline{\Omega}$, tada $|f|$ dostiže maksimum na $\partial\Omega$.*

Dokaz: Neka je $f = \mathrm{const}$ na Ω. S obzirom na to da je f neprekidna na $\overline{\Omega}$, $f = \mathrm{const}$ na $\overline{\Omega}$ i, otuda, tvrđenje je jasno. Ako je $f \neq \mathrm{const}$, tada, na osnovu PMM1, $|f|$ ne može dostići maksimum u tački oblasti Ω. Kako, zbog neprekidnosti funkcije $|f|$ na $\overline{\Omega}$, $|f|$ dostiže maksimum u nekoj tački $z_0 \in \overline{\Omega}$, zaključujemo da $z_0 \in \partial\Omega$. □

Analogno tvrđenje za minimum modula, u opštem slučaju, nije tačno. Npr. modul funkcije $f(z) = z$ na krugu $U = \{z : |z| < 1\}$ dostiže minimum u tački $z = 0$. Međutim, važi:

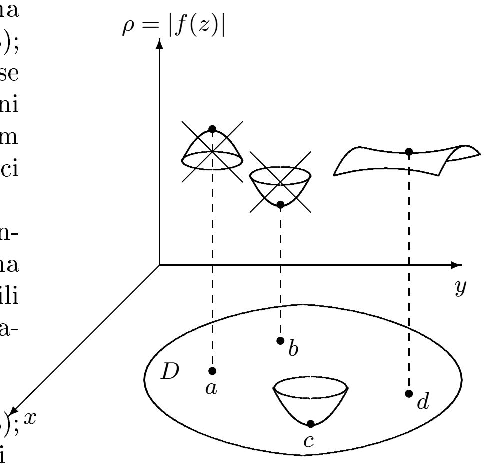
Teorema 6.12 (Princip minimuma modula) *Ako je funkcija f holomorfna u oblasti Ω i nema nula u Ω, tada $|f|$ dostiže lokalni minimum u $z_0 \in \Omega$ samo ako je $f =$ const na Ω.*

Dokaz: Kako je f holomorfna i nema nula na Ω, funkcija $g = 1/f$ je holomorfna na Ω. Ako $|f|$ dostiže lokalni minimum u nekoj tački z_0, tada $|g|$ dostiže lokalni maksimum u z_0 i, na osnovu PMM1, g je konstanta na Ω i, otuda, f je konstanta na Ω. □

Površ modula holomorfne funkcije

Dobijeni rezultati (princip maksimuma i minimuma modula) pokazuju da površ modula holomorfne funkcije (koristi se i naziv reljef funkcije f), tj. površ u prostoru (x, y, ρ) sa jednačinom $\rho = |f(z)|$ (videti sliku 6.3) ima neke strukturne osobenosti.

Pretpostavimo da je f holomorfna nekonstantna funkcija; tada ona nema lokalni maksimum (tačke a na slici 6.3); i nema lokalni minimum izuzev ako se lokalni minimum ne nalazi na jednačini $\rho = 0$ (preciznije, ako $|f|$ ima minimum u z_0, tada je $f(z_0) = 0$); (tačka b na slici 6.3).
Tangetna ravan na tu površ je horizontalna u tim i samo tim tačkama u kojima se anuliraju parcijalni izvodi $|f|_x$ i $|f|_y$ ili ekvivalentno oba izvoda $D|f|$ i $\overline{D}|f|$ (stacionarne tačke).



Slika 6.3: Površ modula funkcije

Jednostavno se izvodi formula (6.18); iz $|f|^2 = f\overline{f}$, sledi $2|f|D|f| = \overline{f}\,f'$ i $2|f|\overline{D}|f| = \overline{f'}\,f$ i otuda

$$D|f| = \frac{\overline{f}}{2|f|}f'(z), \quad \overline{D}|f| = \frac{f}{2|f|}\overline{f'(z)}. \tag{6.18}$$

Na prvi pogled, stacionarne tačke funkcije $|f|$ mogu biti ili njene nule (minimum $|f|$ na nivo liniji $\rho = 0$ (c na sl. 6.3), ili nule njenog izvoda (sedlasta tačka površi modula, d na sl. 6.3); ipak treba dati preciznije tumačenje formule (6.18) u tačkama u kojima se f anulira.
Npr. funkcija $\rho(z) = |z|$ (koja definiše konusnu površ) nema paricjalne izvode u $(0, 0)$ i stoga treba precizirati značenje formule (6.18) u tačkama z u kojima se f anulira, tj. $f(z) = 0$.
Dokažimo: ako je $f(z_0) = 0$ i $f'(z_0) \neq 0$, tada ne postoje parcijalni izvodi funkcije ρ u z_0 (tj. ne postoji tangetna ravan u $(z_0, 0)$).
Bez gubitka opštosti pretostavimo da je $z_0 = 0$ i neka je $\lambda = |f'(z_0)|$; tada je $\rho(z) = \lambda|z| + o(z)$, $z \to 0$; i otuda je desni parcijalni izvod u $(0, 0)$ jednak λ, a levi $-\lambda$.
Dakle, stacionarne tačke funkcije $|f|$ su tačno samo nule njenog izvoda.

Neka je $f(z) = c + z^3 + 3z$. Kako je $f'(z) = 3(z^2 + 1)$, stacionarne tačke površi modula funkcije f su $\pm i$.

Princip Maksimuma Modula ima važne primene u teoriji funkcija. Na primer, pomoću ovog principa jednostavno je objasniti da Rungeova teorema ne važi u višestruko povezanim oblastima (videti tačku 4).

Prvo, formulišimo Rungeovu teoremu.

Teorema 6.13 (Rungeova teorema) *Neka je f holomorfna funkcija u prosto povezanoj oblasti D i K proizvoljan kompaktan podskup oblasti D. Tada za svako $\epsilon > 0$ postoji polinom P tako da je $\|f - P\|_K = \max\{|f(z) - P(z)| : z \in K\} < \varepsilon$.*

1. Ako je f holomorfna u prstenu $A(r, R)$, $0 < r < 1 < R$, i postoji niz polinoma P_n, koji ravnomerno konvergira ka f na T, tada se f holomorfno proširuje na U.
Uputstvo: Iz $||P_n - f||_T = \max\{|P_n(z) - f(z)| : z \in T\} \to 0$, na osnovu Principa Maksimuma Modula, sledi da je P_n Košijev niz na $\overline{U}$. Stoga, niz P_n ravnomerno konvergira ka holomorfnoj funkciji f_0 na U.
2. Primer $J(z) = 1/z$ pokazuje da Rungeova teorema ne važi za ovu funkciju na oblasti U'.
3. Ako je f holomorfna u U, neprekidna na $\overline{U}$ i $|f| = 1$ na T, tada je f racionalna funkcija.
Za vežbu videti npr. [Ša]: gl. IV, Zadaci 6, 9-17, 22.

Lema Švarca*

Lema 6.6 (Lema Švarca (Schwarz), LŠ) *Neka je f holomorfna u krugu $U = \{z \mid |z| < 1\}$, $|f(z)| \leq 1$ za svaki $z \in U$ i $f(0) = 0$. Tada je*

(1) $\qquad |f(z)| \leq |z| \qquad (z \in U)$,

(2) $\qquad |f'(0)| \leq 1$.

Ako jednakost važi u (1) *za neko $z \in U \setminus \{0\}$, ili jednakost važi u* (2)*, tada je*

$$f(z) = e^{i\alpha} z,$$

gde je α realna konstanta.

Dokaz: Na osnovu Tejlorove teoreme je

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots, \qquad z \in U.$$

Kako je $f(0) = 0$, dobijamo $c_0 = 0$. Otuda, funkcija

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{z} = c_1 + c_2 z + \cdots$$

ima otklonjiv singularitet u tački 0, pa je holomorfna na U.
Ponovimo da sa $U_r = \{|z| < r\}$ označavamo krug i sa $T_r = \{|z| = r\}$ njegovu granicu.
Neka je $0 < r < 1$. Prema PMM2 funkcija $|\varphi|$ na $\overline{U_r}$ dostiže maksimum na T_r. Kako je $|\varphi| \leq 1/r$ na T_r, jer je po uslovu $|f| \leq 1$, otuda je

$$|\varphi(z)| \leq \frac{1}{r} \tag{6.19}$$

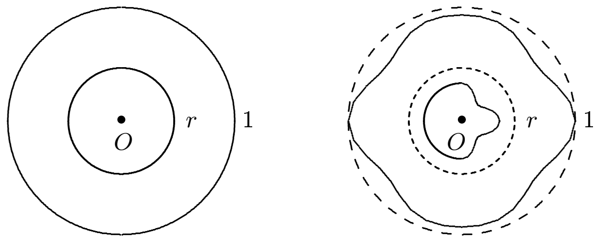
na celom U_r.
Fiksirajmo $z_0 \in U$ i neka r teži 1. Tada je $r_0 = |z_0| < 1$ i za svako $r_0 \leq r < 1$, sledi $z_0 \in U_r$ i stoga, na osnovu (6.19), da važi

$$|\varphi(z_0)| \leq 1/r.$$

Otuda, prelaskom na graničnu vrednost, kada r teži 1, dobijamo da je $|\varphi(z_0)| \leq 1$, tj. $|f(z_0)| \leq |z_0|$. Stoga kako je z_0 proizvoljno izabrana tačka iz U, sledi

$$|\varphi(z)| \leq 1, \ (z \in U), \quad (6.20)$$

tj. $|f(z)| \leq |z|$ za svaki $z \in U$.



Slika 6.4: Švarcova lema

Kako je $\varphi(0) = \lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z} = f'(0)$, iz (6.20) dobijamo obe nejednakosti (1) i (2).

Ako jednakost važi u (1) za neko $z \in U\backslash\{0\}$, ili važi u (2), s obzirom na nejednakost (6.20) zaključujemo da $|\varphi|$ dostiže lokalni maksimum u nekoj tački kruga U. Otuda na osnovu PMM1, φ je konstantna funkcija, čiji je modul jednak 1 tj. $f(z) = e^{i\alpha} z$.

Iz Leme 6.6 sledi da pri holomorfnom preslikavanju kruga U u sebe, koje preslikava centar u centar, proizvoljna kružnica $K_r = \{|z| = r\}$, $0 < r < 1$, se preslikava u krug $U_r = \{|z| < r\}$ ili je f rotacija oko tačke 0. □

Lema 6.7 (Lema Subordinacije, Lem Sub) *Neka je φ konformni izomorfizam oblasti D na* U*, $z_0 \in D$ i $\varphi(z_0) = 0$. Ako je $F : D \to$ U holomorfno preslikavanje, tada je*

$$|F'(z_0)| \leq |\varphi'(z_0)|.$$

Uputstvo: Ako je $F(z_0) = 0$, primeniti *Švarcovu lemu* na funkciju $F \circ \varphi^{-1}$. Ako je $w_0 = F(z_0) \neq 0$ umesto funkcije F razmatrati $\varphi_{w_0} \circ F$. □
Dakle, ako je data oblast D, $z_0 \in D$ i ako postoji konformni izomorfizam φ oblasti D na U tako da je $\varphi(z_0) = 0$ tada u klasi $\mathcal{F}$ holomorfnih funkcija koje preslikavaju oblast D u U najveće istezanje u $z_0 \in D$ ima konformni izomorfizam φ.
Ova lema daje motivaciju za dokaz Rimanove teoreme.
Za $a \in$ U definiše se pseudohiperboličko rastojanje $\delta(z, a) = |\varphi_a(z)|$.
Na osnovu *Švarcove leme* dokazuje se:
Ako je $F :$ U $\to$ U holomorfno preslikavanje,tada je

$$\delta(F(z), F(a)) \leq \delta(z, a)$$

za svako $z, a \in$ U.
Otuda sledi da holomorfna preslikavanja $F :$ U $\to$ U ne povećavaju neeuklidsko rastojanje na U (videti [Ma 3]).

Dokaz PMM pomoću Teoreme o srednjoj vrednosti

Teorema 6.14 (Teorema o srednjoj vrednosti) *Neka je $B = B(a;r)$ krug i $f \in \mathcal{H}(\overline{B})$. Tada je*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + re^{it})dt. \tag{6.21}$$

Dokaz: Na osnovu KIF za krug,

$$f(a) = \frac{1}{2\pi\, i}\int_{K_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a}d\zeta,$$

gde je $\mathcal{K}_r$ pozitivno orijentisana kružnica sa središtem u tački a poluprečnika r. Koristeći parametarsku jednačinu kružnice, $\mathcal{K}_r : \ \zeta = a + re^{it}, \ 0 \le t \le 2\pi$, na osnovu formule za integraciju duž kružnice dobijamo (6.21).

Posledica 6.3 *Neka su ispunjeni uslovi Teoreme o srednjoj vrednosti i neka je $u = \operatorname{Re} f$. Tada je*

$$u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + re^{it})dt.$$

Teorema 6.15 (PMM1) *Neka je $B = B(a;r)$. Ako je $f \in \mathcal{H}(\overline{B})$ i $|f|$ ima maksimum u a, tada je f konstanta na $\overline{B}$.*

Dokaz: Neka je $b = f(a)$.
1° Ako je $b = 0$, tada je $|f| \equiv 0$ na $\overline{B}$ i otuda $f \equiv 0$ na B.
2° Ako je $b \neq 0$, tada je $b = |b|e^{i\beta}$. Neka je $f_1 = e^{-i\beta}f$, $f_2 = f_1(a) - f_1$ i $u = \operatorname{Re} f_2$. Tada je $u \ge 0$ na $\overline{B}$ i $u(a) = 0$. Na osnovu Teoreme o srednjoj vrednosti za svaki ρ, $0 \le \rho \le r$ je:

$$0 = u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(a + \rho e^{it})dt.$$

Kako je $u \ge 0$, sledi da je $u \equiv 0$ na $K_\rho = \{|z - a| = \rho\}$ i otuda na $\overline{B}$. Pomoću C-R uslova dobijamo da je f_2 konstanta na $\overline{B}$, a otuda sledi da je f konstantno na $\overline{B}$.
□

6.2 Rimanova teorema

6.2.1 Konformni izomorfizmi i automorfizmi

Definicija 6.5 *Konformno $1-1$ preslikavanje f oblasti Ω_1 na oblast Ω_2 nazivamo konformni izomorfizam, a oblasti koje takvo preslikavanje dopuštaju su izomorfne ili konformno ekvivalentne.*

Izomorfizam oblasti na sebe naziva se konformni automorfizam.

Može se dokazati da familija automorfizama proizvoljne oblasti Ω obrazuje grupu koja se naziva grupa automorfizama te oblasti i označava simbolom $\operatorname{Aut}\Omega$.

Teorema 6.16 *Ako je $f_0 : \Omega_1 \to \Omega_2$ bilo koji fiksiran izomorfizam, tada se svaki izomorfizam $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ može predstaviti u obliku:*

$$f = \varphi \circ f_0, \qquad \varphi \in \operatorname{Aut}\Omega_2. \tag{6.22}$$

Dokaz: Ako je $\varphi \in \operatorname{Aut}\Omega_2$ bilo koji automorfizam oblasti Ω_2, kompozicija $\varphi \circ f_0$ je konformno preslikavanje Ω_1 na Ω_2. S druge strane, neka je f proizvoljan izomorfizam. Tada je $\varphi = f \circ f_0^{-1}$ konformno preslikavanje Ω_2 na sebe tj. automorfizam Ω_2. Otuda važi (6.22).

U daljem izlaganju razmatramo kanonske oblasti $\overline{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$ i $U = \{|z| < 1\}$.

Vežba 6.2.1 *Dokazati da dve različite kanonske oblasti nisu međusobno izomorfne.*

Uputstvo: Primeniti Teoremu Liuvila.

Teorema 6.17 *Svaki konformni automorfizam kanonske oblasti je bilinearna funkcija.*

Dokaz: Neka je φ proizvoljni automorfizam $\overline{\mathbb{C}}$. Postoji jedinstvena tačka $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ koja se preslikava u beskonačno daleku tačku, $\varphi(z_0) = \infty$, i otuda je φ holomorfno u $\overline{\mathbb{C}} \backslash \{z_0\}$, a u tački z_0 ima pol. U okolini pola reda $n \geq 2$ funkcija je nejednolisna (dokazati!) i otuda φ ima u z_0 pol prvog reda. Po Teoremi o obliku meromorfne funkcije koja ima konačan broj polova u $\overline{\mathbb{C}}$ (Teorema 2.36), φ ima oblik:

$$\varphi(z) = \frac{A}{z - z_0} + B, \quad \text{ako } z_0 \neq \infty$$

ili $\varphi(z) = Az + B$, ako $z_0 = \infty$ (A i B su konstante). Otuda, φ je bilinearno.

Slučaj otvorene ravni $\mathbb{C}$ razmatra se analogno. Dovoljno je dokazati da $\varphi(z) \to \infty$ kada $z \to \infty$. Suprotno, postoji niz z_n takav da $|z_n| \to +\infty$, a $w_n = \varphi(z_n) \to w_0 \in \mathbb{C}$. Neka je $z_0 = \varphi^{-1}(w_0)$ itd.

Razmotrimo sada slučaj otvorenog jediničnog diska U. Ponovimo da smo za $a \in \mathbb{C}$ definisali preslikavanje

$$\varphi_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}.$$

Neka je φ proizvoljni automorfizam U. Uvedimo oznaku $\varphi(0) = a$ i razmotrimo kompoziciju $f = \varphi_a \circ \varphi$, koja je automorfizam U, pri čemu je $f(0) = 0$. Kako je $|f(z)| < 1$ za svako $z \in U$, to primenom Švarcove Leme iz prethodnog paragrafa, dobijamo: $|f(z)| \leq |z|$ za svako $z \in U$. No, kako i inverzno preslikavanje $z = f^{-1}(w)$

zadovoljava uslove iste leme, to je $|f^{-1}(w)| \leq |w|$ za sve $w \in U$. Otuda, zamenjujući $w = f(z)$, dobijamo:

$$|z| \leq |f(z)| \text{ za sve } z \in U.$$

Na taj način nalazimo da je $|f(z)| = |z|$ za sve $z \in U$ i otuda, po Lemi Švarca, zaključujemo da važi $f(z) = e^{i\alpha}z$. Ali, tada je $\varphi = \varphi_a^{-1} \circ f = \varphi_{-a}(e^{i\alpha}z)$ bilinearno preslikavanje. □

Za opisivanje automorfizama φ pogodnije je razmatrati tačku a za koju je $\varphi(a) = 0$ i funkciju $f = \varphi \circ \varphi_{-a}$. Slično se dokazuje sledeći rezultat:

Propozicija 6.5 *Ako je $\varphi \in \operatorname{Aut} U$ i $\varphi(a) = 0$ za neko $a \in U$, tada je*

$$\varphi = e^{i\alpha}\varphi_a \text{ za neko } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Dokaz: Funkcija $f = \varphi \circ \varphi_{-a}$ je automorfizam U i $f(0) = 0$. Kao u prethodnom razmatranju, zaključujemo da je $f = e^{i\alpha}E$, gde je E identičko preslikavanje. Otuda je $e^{i\alpha}E = \varphi \circ \varphi_{-a}$, tj. $\varphi = e^{i\alpha}E \circ \varphi_a = e^{i\alpha}\varphi_a$. □

Poboljšavajući rezultate paragrafa o Bilinearnim preslikavanjima potpuno opisujemo sve (konformne) automorfizme kanonskih oblasti:

(1) Zatvorena ravan:

$$\operatorname{Aut}(\overline{\mathbb{C}}) = \{z \to \frac{az+b}{cz+d} \,:\, ad - bc \neq 0\}.$$

(2) Otvorena ravan:

$$\operatorname{Aut}(\mathbb{C}) = \{z \to az + b \,:\, a \neq 0\}.$$

(3) Jedinični krug:

$$\operatorname{Aut}(U) = \{z \to e^{i\alpha}\frac{z-a}{1-\bar{a}z} \,:\, |a| < 1, \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Vežba 6.2.2 *Proveriti da je:*

$$\varphi_a'(z) = (1 - |a|^2)(1 - \overline{a}z)^{-2}$$

i otuda:

$$\varphi_a'(0) = 1 - |a|^2, \quad \varphi_a'(a) = (1 - |a|^2)^{-1}.$$

6.2.2 Princip kompaktnosti

Definicija 6.6 *Familija $\mathcal{F} = \{f\}$ funkcija definisanih u oblasti Ω naziva se ravnomerno ograničena unutar Ω ako za proizvoljan skup $K \Subset \Omega$ postoji konstanta $M = M(K)$ tako da važi:*

$$|f(z)| \leq M$$

za sve $z \in K$ i sve $f \in \mathcal{F}$.

Definicija 6.7 *Familija funkcija $\mathcal{F}$ definisanih u oblasti Ω naziva se kompaktnom u Ω ako se iz svakog niza $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$ može izdvojiti podniz f_{n_k} koji ravnomerno konvergira na proizvoljnom $K \Subset \Omega$ (kažemo: ravnomerno konvergira na kompaktima).*

Teorema 6.18 (Montel, TM) *Ako je familija $\mathcal{F}$ funkcija holomorfnih u oblasti Ω ravnomerno ograničena unutar Ω, tada je $\mathcal{F}$ kompaktna u Ω.*

Za dokaz ove Teoreme videti [Ru], [Ša] i [Ah].

Definicija 6.8 *Neka je $\mathcal{F}$ neka familija funkcija koje su definisane u oblasti Ω. Funkcionalom na $\mathcal{F}$ naziva se preslikavanje*

$$J : \mathcal{F} \to \mathbb{C}$$

(to znači da je dat postupak koji svakom $f \in \mathcal{F}$ dodeljuje kompleksan broj $J(f)$).

Funkcional J naziva se neprekidnim ako za proizvoljan niz $\{f_n\} \in \mathcal{F}$, koji ravnomerno konvergira ka $f_0 \in \mathcal{F}$ na proizvoljnom $K \Subset \Omega$, važi:

$$J(f_n) \to J(f_0).$$

Primer 37 *Neka je $\mathcal{H}(\Omega)$ familija svih funkcija f koje su holomorfne u Ω i a proizvoljna tačka u Ω. Ako je*

$$J(f) = c_k(f) = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \qquad k \geq 0,$$

tada je J neprekidan funkcional na $\mathcal{H}(\Omega)$.

Dokaz: Ako $f_n \to f$ ravnomerno na svakom $K \Subset \Omega$, to uzimajući za K kružnicu

$$K_r = \{|z - a| = r\} \Subset \Omega,$$

za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji N tako da $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ za svako $n > N$ i za svako $z \in K_r$. Otuda iz Košijeve nejednakosti dobijamo da je za $n > N$

$$|c_k(f_n) - c_k(f)| \leq \frac{\varepsilon}{r^k},$$

a to znači neprekidnost funkcionala $c_k(f)$. □

Definicija 6.9 *Kompaktna familija funkcija $\mathcal{F}$ naziva se kompaktna u sebi, ako granica f_0 proizvoljnog niza $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$, koji ravnomerno konvergira na svakom $K \Subset \Omega$, pripada $\mathcal{F}$, tj. $f_0 \in \mathcal{F}$.*

Teorema 6.19 *Svaki funkcional J neprekidan na kompaktnoj u sebi familiji $\mathcal{F}$ dostiže supremum na $\mathcal{F}$, tj. postoji $f_0 \in \mathcal{F}$, tako da je za svako $f \in \mathcal{F}$*

$$|J(f_0)| \geqslant |J(f)|.$$

Dokaz: Neka je $A = \sup\{|J(f)| : f \in \mathcal{F}\}$. Po definiciji supremuma postoji niz $f_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$, tako da $|J(f_n)| \to A$, kad $n \to +\infty$. Kako je $\mathcal{F}$ kompaktna u sebi, postoji podniz f_{n_k}, $k \in \mathbb{N}$, koji ravnomerno konvergira na svakom $K \Subset \Omega$ ka nekoj funkciji $f_0 \in \mathcal{F}$. S obzirom na neprekidnost funkcionala J nalazimo da je $|J(f_0)| = \lim_{k \mapsto +\infty} |J(f_{n_k})| = A$. Otuda, prvo, sledi da je $A < +\infty$ i, drugo, $|J(f_0)| \geqslant |J(f)|$ za svako $f \in \mathcal{F}$. □

Teorema 6.20 (Vajerštrasova teorema) *Ako niz funkcija f_n holomorfnih u oblasti Ω ravnomerno na kompaktima konvergira ka funkciji f, tada je f holomorfna u Ω.*

Dokaz: Kao u realnoj analizi dokazuje se da je f neprekidna. Neka je Δ trougao koji kompaktno pripada Ω. Kako je $\int\limits_{\partial\Delta} f_n dz = 0$, na osnovu uniformne konvergencije, sledi $\int\limits_{\partial\Delta} f dz = 0$ i, otuda, na osnovu Morerine teoreme, f je holomorfna u Ω. □

Teorema 6.21 (Hurvicova teorema) *Neka niz funkcija f_n holomorfnih u oblasti Ω ravnomerno na kompaktima konvergira ka funkciji $f \neq \text{const}$ i neka je $f(z_0) = 0$, za neko $z_0 \in \Omega$. Tada za proizvoljan krug $B = B_r = \{|z - z_0| < r\} \subseteq \Omega$ postoji n_0 tako da se funkcije f_n anuliraju u B za $n > n_0$.*

Dokaz: Po teoremi Vajerštrasa, f je holomorfna u Ω i, po teoremi jedinosti, postoji $B'_\rho = \{0 < |z - z_0| \leq \rho\} \Subset \Omega$ na kome je $f \neq 0$ (može se smatrati da je $\rho < r$). Označimo sa $K_\rho = \{|z - z_0| = \rho\}$ i $\mu = \min\{|f(z)| : z \in K_\rho\}$. Važi: $\mu > 0$. Kako $f_n \to f$ na K_ρ, postoji N tako da je $|f_n(z) - f(z)| < \mu$ za svako $z \in K_\rho$ i svako $n > N$. Za takve n, $|f_n(z) - f(z)| < \mu \leq |f(z)|$ za svako $z \in K_\rho$, i otuda po teoremi Rušea, funkcija $f_n = f + (f_n - f)$ ima unutar K_ρ isti broj nula kao i f, a to znači tačno jednu nulu u B_ρ i stoga bar jednu nulu B_r. □

Primer 38 *Niz $f_n(z) = \exp(iz/n)$ ravnomerno konvergira nuli na kompaktima u H, mada se funkcije $f_n(z)$ ne anuliraju na H.*

Posledica 6.4 *Ako niz funkcija f_n holomorfnih i jednolisnih u oblasti Ω konvergira ravnomerno na svakom $K \Subset \Omega$, tada je granična funkcija f tog niza ili jednolisna ili konstanta.*

Dokaz: Neka je $f(z_1) = f(z_2)$ za $z_1 \neq z_2$ $(z_1, z_2 \in \Omega)$ i $f \neq \text{const}$. Razmotrimo niz funkcija $g_n(z) = f_n(z) - f_n(z_2)$ u krugu $B = \{|z - z_1| < r\}$, gde je $r \leq |z_1 - z_2|$. Granična funkcija $g(z) = f(z) - f(z_2)$ nije identički jednaka konstanti na B, anulira se u tački z_1, a otuda se (po teoremi Hurvica) i sve funkcije g_n počev od nekog indeksa anuliraju u tom krugu. To, pak, protivreči jednolisnosti funkcije f_n. □

Primer 39 *Niz jednolisnih funkcija $f_n(z) = \dfrac{nz}{nz+1}$ konvergira na $\mathbb{C}$ ka funkciji f koja uzima samo dve vrednosti 0 i 1, tj. $f(\mathbb{C}) = \{0, 1\}$.*

6.2.3 Rimanova teorema

Ponovimo (videti sekciju 5.2) da poligonalna linija koja se sastoji od horizontalnih i vertikalnih intervala se naziva specijalna poligonalna linija. Takođe, oblast $D \subset \mathbb{C}$ je prosto povezana (poligonalno) ako $\mathrm{Int}\Lambda$ pripada D za svaku specijalnu zatvorenu prostu poligonalnu liniju Λ, koja pripada oblasti D.

U literaturi se pojavljuju različite definicije prosto povezane oblasti. Navodimo neke od njih:

1. Oblast Ω je prosto-povezana ako je $\partial\Omega$ povezan u $\overline{\mathbb{C}}$ (pomoću granice).
2. $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ je prosto-povezana ako je $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ povezan (pomoću komplementa).
3. $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ je prosto-povezana ako je svaka zatvorena putanja u Ω homotopna tački u Ω, tj. može se neprekidno „deformisati" u tačku (homotopska).

Ponovimo, da je definicija pomoću granice navedena, na primer, u [Ša], a definicija pomoću komplementa u [Ah].

Da su gornje definicije ekvivalentne pokazuje se obično u poslediplomskim kursevima (videti npr. Glavu 7 i takođe [Ma 3]).

Podvucimo da $\partial\Pi_\alpha$ nije povezan skup u $\mathbb{C}$, ali da je povezan u $\overline{\mathbb{C}}$. Ovaj primer pokazuje da je u definiciji u tački 2. bitno da se povezanost razmatra u odnosu na $\overline{\mathbb{C}}$.

Oblasti U, $\mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{C}}$, H, Π^+, pojasevi Π_α, $C^\alpha = D_\alpha$ i Varšavski krug su prosto-povezane oblasti. Ako je γ prost (koji nije zatvoren) Žordanov put, oblast $\overline{\mathbb{C}} \setminus \gamma^*$ je prosto-povezana oblast; a ako je dodatno γ prost zatvoren put, $\mathrm{Int}(\gamma)$ je prosto-povezana oblast.

Oblasti U', $\mathbb{C}^*$ i prsten su dvostruko povezane oblasti.

Vežba 6.2.3 *Dokazati:*
(a) Oblasti U, H, Π^+, pojasevi Π_α, $\mathbb{C}_\alpha$ i Varšavski krug su prosto-povezane oblasti i konformno izomorfne.
(b) Oblasti $\mathbb{C}$ i $\overline{\mathbb{C}}$ nisu međusobno konformno izomorfne i nisu konformno izomorfne sa oblastima iz tačke (a).

Uputstvo: Konstruisati eksplicitno konformne izomorfizme koji pokazuju da su oblasti U, H, Π^+, pojasevi Π_α i $\mathbb{C}_\alpha$ konformno izomorfne. Da je Varšavski krug konformno izomorfan sa ovim oblastima sledi iz Rimanove teoreme. □

Vežba 6.2.4 *Neka je $D \subset \mathbb{C}$ prosto povezana oblast. Proveriti da granica oblasti D, u smislu topologije u $\mathbb{C}$, sadrži bar jednu tačku akko je $D \neq \mathbb{C}$.*

NAPOMENA: Neka je $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ prosto povezana oblast. Pretpostavimo da granica oblasti D, u smislu topologije u $\overline{\mathbb{C}}$, sadrži više od jedne tačke. Koristeći bilinearna preslikavanja možemo pretpostaviti da granica oblasti D sadrži bar dve tačke ∞ i $a \in \mathbb{C}$. Tada granica oblasti D seče svaku kružnicu sa središtem u tački a i granica ∂D je povezan skup. Obično u primerima koje razmatramo postoji put γ tako da je njegov trag jednak ∂D. Ipak, primer Varšavskog kruga pokazuje da to nije tačno u opštem slučaju.

U dokazu Rimanove teoreme koristi se Vežba 6.2.6, tj. činjenica da se u prosto povezanoj oblasti, koja ne sadrži nulu, može izdvojiti grana korena. Otuda, za dokaz Rimanove teoreme pogodno je koristiti poligonalnu ili homotopsku definiciju prosto povezane oblasti.

Teorema 6.22 (Rimanova teorema) *Proizvoljna prosto povezana oblast D u $\overline{\mathbb{C}}$, čija granica sadrži više od jedne tačke, konformno je ekvivalentna jediničnom disku U.*

Ideja dokaza Rimanove teoreme: Neka je $\mathcal{S}$ familija svih holomorfnih i jednolisnih funkcija u D, po modulu ograničenih sa 1. Fiksirajmo tačku $z_0 \in D$. Koristeći neprekidnost funkcionala $J(f) = f'(z_0)$ pokazujemo da postoji funkcija f_0 s maksimalnim istezanjem $|f_0'(z_0)|$ u z_0. Na kraju pokazujemo da f_0 preslikava D na U.
Dokaz Rimanove teoreme:**

(*a*) $\mathcal{S} \neq \emptyset$
Ovo je dokazano u sekciji Analitičko produženje. Sa pedagoške tačke gledišta interesantan je dokaz koji sledi i dokaz pomoću Vežbe 6.2.7.

Po pretpostavci teoreme, ∂D sadrži dve različite tačke α i β. Koren $\sqrt{\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}}$ ima analitičko produženje duž proizvoljnog puta u D i kako je D prosto povezana, to po teoremi o monodromiji ova analitička funkcija dopušta izdvajanje jednoznačnih regularnih grana φ_1 i φ_2, različitog znaka, $\varphi_2 = -\varphi_1$. Grane φ_1 i φ_2 su jednolisne u D, jer iz $\varphi_j(z_1) = \varphi_j(z_2)$ ($j = 1$ ili $j = 2$) sledi:

$$\frac{z_1-\alpha}{z_1-\beta} = \frac{z_2-\alpha}{z_2-\beta}, \tag{6.23}$$

a otuda, s obzirom na to da su bilinearne funkcije jednolisne, $z_1 = z_2$. Ove grane preslikavaju D na oblast $D_1^* = \varphi_1(D)$ i $D_2^* = \varphi_2(D)$, koje nemaju zajedničkih tačaka, jer u protivnom postoje $z_1, z_2 \in D$ tako da je

$$\varphi_1(z_1) = \varphi_2(z_2).$$

Iz poslednje jednakosti ponovo dobijamo (6.23), a iz (6.23) $z_1 = z_2 = a$, tj.

$$\varphi_1(a) = \varphi_2(a) = -\varphi_1(a).$$

Otuda je

$$\varphi_1(a) = -\varphi_1(a), \text{ tj. } \varphi_1(a) = 0.$$

Dakle, dobijamo protivrečnost, jer $\varphi_j \neq 0$ u D.
Oblast D_2^* sadrži neki krug $B_\rho = \{|w - w_0| < \rho\}$.

Kako φ_1 ne uzima u D vrednosti iz kruga B_ρ, funkcija

$$f_1(z) = \frac{\rho}{\varphi_1(z) - w_0} \tag{6.24}$$

pripada $\mathcal{S}$.

(b) Deo $\mathcal{S}_1$ familije $\mathcal{S}$, koji se sastoji iz svih funkcija $f \in \mathcal{S}$ za koje je

$$|f'(z_0)| \geq |f_1'(z_0)| > 0, \tag{6.25}$$

kompaktan je u sebi. Prema Teoremi Montela, $\mathcal{S}$ je kompaktna familija, pa je takva i $\mathcal{S}_1$. Prema posledici Teoreme Hurvica, granica niza funkcija $\{f_n\} \subseteq \mathcal{S}_1$, koji ravnomerno konvergira na svakom $K \Subset D$, je jednolisna (tada pripada $\mathcal{S}_1$) ili konstanta, što je nemoguće s obzirom na 6.25.
Razmotrimo funkcional $J(f) = |f'(z_0)|$. Prema dokazanom u prethodnom paragrafu, J je neprekidan i postoji $f_0 \in \mathcal{S}_1$, koji realizuje njegov maksimum, tj.

$$|f'(z_0)| \leq |f_0'(z_0)| \tag{6.26}$$

za svako $f \in \mathcal{S}_1$.

(c) $f_0(z_0) = 0$
Pretpostavimo suprotno,

$$w_0 = f_0(z_0) \neq 0, \qquad \varphi_{w_0}(w) = \frac{w - w_0}{1 - \overline{w}_0 w} \text{ i } g = \varphi_{w_0} \circ f_0.$$

Kako je $\varphi_{w_0}'(w_0) = \dfrac{1}{1 - |w_0|^2}$, to je

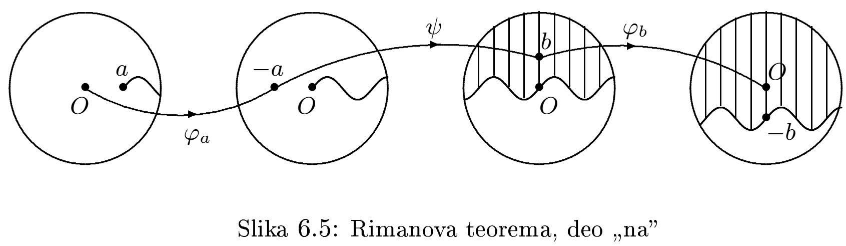
$$|g'(z_0)| = \frac{1}{1 - |w_0|^2}\, |f_0'(z_0)| > |f_0'(z_0)|,$$

što je suprotno relaciji (6.26), pa je pretpostavka pogrešna.

(d) Pokažimo, na kraju, da je $f_0(D) = U$. Ovo se dokazuje na dva načina (videti $(d1)$ i $(d2)$ koji slede).

Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $a \in U \backslash f(D)$. Kako je oblast $V = \varphi_a \circ f_0(D) \subseteq U$ prosto povezana u $0 \notin V$. Tada, po teoremi o monodromiji, postoji jednoznačna grana ψ funkcije $\sqrt{w}$ definisana za $w \in V$. Neka je $b = \psi(-a)$ i

$$h = \varphi_b \circ \psi \circ \varphi_a.$$



Slika 6.5: Rimanova teorema, deo „na”

$(d1)$ Funkcija h je holomorfna na $W = f_0(D) \subseteq U$ i $|h'(0)| > 1$. Iz $|h'(0)| = |\varphi_b'(b) \circ \psi'(-a) \circ \varphi_a'(0)|$, kako je

$$|\varphi_b'(b)| = \frac{1}{1-|b|^2} = \frac{1}{1-|a|}, \qquad |\psi'(-a)| = \frac{1}{2\sqrt{|a|}}, \qquad \varphi_a'(0) = 1-|a|^2,$$

dobijamo:

$$|h'(0)| = \frac{1}{1-|a|}\frac{1}{2\sqrt{|a|}}(1-|a|^2) = \frac{1+|a|}{2\sqrt{|a|}} > 1.$$

Sada koristeći d_1 dokazujemo d.

Neka je $\lambda = h \circ f_0$. Tada $\lambda \in \mathcal{S}$. Kako je $|\lambda'(z_0)| = |h'(0)||f_0'(z_0)| > |f_0'(z_0)|$ i $\lambda \in \mathcal{S}_1$ dobijamo da f_0 nije ekstremalna.

Interesantno je da se pomoću Švarcove leme može dokazati da je $|h'(0)| > 1$.
$(d2)$ Uvodeći notaciju $s(w) = w^2$ dobijamo da je h^{-1} jednako

$$F = \varphi_{-a} \circ s \circ \varphi_{-b} \quad \text{na} \quad h(U).$$

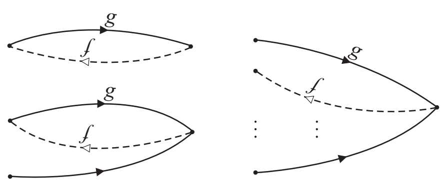
Kako je F holomorfna na U, $F(U) \subseteq U$, $F(0) = 0$ i F nije jednolisno, na osnovu Švarcove leme zaključujemo da je $|F'(0)| < 1$. S obzirom na to da je

$$h'(0) = \frac{1}{(h^{-1})'(0)} = \frac{1}{F'(0)},$$

otuda se dobija da je $|h'(0)| > 1$. □

Vežba 6.2.5 *Neka je kompleksna funkcija g definisana na nekoj oblasti Ω i $\Omega_1 = g(\Omega)$.*
Svaka grana všz funkcije $F = g^{-1}$ je $1-1$.
Ako je g holomorfna na oblasti Ω i ako na oblasti $\Omega_0 \subset \Omega_1$ postoje neprekidne grane f_1 i f_2 funkcije F tada su
funkcije f_1 i f_2 jednake na Ω_0 ili
su skupovi $f_1(\Omega_0)$ i $f_2(\Omega_0)$ disjunktni.

Uputstvo: Neka je $z = g(\zeta)$, $z_0 \in \Omega_0$ i $\zeta_0 = f_1(z_0)$. Tada je g jednolisna u nekoj okolini V_0 tačke ζ_0. Definišimo $W_0 = g(V_0)$. Tada je $f_1 = g^{-1}$ na W_0; i ako je $f_1(z_0) = f_2(z_0)$, sledi da su f_1 i f_2 jednake na W_0. Otuda na osnovu teoreme jedinosti, f_1 i f_2 jednake su na Ω_0.



Slika 6.6:

Ako skupovi $f_1(\Omega_0)$ i $f_2(\Omega_0)$ nisu disjunktni, postoje tačke z_1 i z_2 u Ω_0, tako da je $f_1(z_1) = f_2(z_2)$. Kako je g funkcija, iz $f_1(z_1) = f_2(z_2)$, sledi $z_1 = z_2$. Otuda funkcije f_1 i f_2 su jednake na Ω_0. □

Vežba 6.2.6 *(a) Neka je G prosto povezana oblast u $\mathbb{C}$ i $0 \in \partial G$. Tada postoji grana korena na G.*
(b) Ako je Υ grana korena na G, tada su $\Upsilon_1 = \Upsilon$ i $\Upsilon_2 = -\Upsilon$ jedine grane korena na G.
Funkcije $\Upsilon_1 = \Upsilon$ i $\Upsilon_2 = -\Upsilon$ su $1-1$ na G. Skupovi $\Upsilon_1(G)$ i $\Upsilon_2(G)$ su disjunktni.

Uputstvo: Neka je Λ prosta zatvorena specijalna poligonalna linija u G. Kako je G prosto povezana $\text{Int}(\Lambda) \subset G$ i stoga $0 \in \text{Ext}(\Lambda)$. Otuda je $\text{Ind}_\Lambda 0 = 0$, tj. $\Delta\text{Arg}\Lambda = 0$. Stoga, na osnovu Teoreme o postojanju grane korena i logaritma (sekcije 5.2 i 5.3), postoje regularne grane všz funkcija Ln i $\sqrt[n]{}$, $n \geq 1$, na oblasti G. □

Vežba 6.2.7 *Na osnovu prethodne dve vežbe dokazati da je $S \neq \emptyset$.*

Uputstvo: Neka je $\varphi(z) = \dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$ i $\varphi(D) = D^*$. Na osnovu prethodne vežbe, postoji grana s korena na oblasti D^*. Razmotriti funkciju $\psi = s \circ \varphi$. □

6.3 Korespondencija oblasti, granica i princip simetrije

6.3.1 Korespondencija granica

Kriva γ naziva se *analitičkom* ako je zadata putem $z = \gamma(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, gde je:

(1) γ analitička funkcija promenljive $t \in [\alpha, \beta]$;

(2) $\gamma'(t) \neq 0$, $t \in [\alpha, \beta]$.

(1) znači da se γ može predstaviti stepenim redom po stepenima $t - t_0$ u nekoj okolini svake tačke $t_0 \in [\alpha, \beta]$. Iz teoreme HB (Hajne-Borela) sledi da se γ produžava do holomorfne funkcije kompleksne promenljive t u nekoj okolini $V = [\alpha, \beta] \times (-\delta, \delta)$, $\delta > 0$, intervala $[\alpha, \beta]$. Dakle, analitička kriva je holomorfno glatko preslikavanje segmenta $[\alpha, \beta]$.

Zatvorena analitička kriva je holomorfno preslikavanje kružnice $T = \{|t| = 1\}$ u ravni parametra t, pri čemu je $\gamma'(t) \neq 0$ za $t \in T$. Ako je preslikavanje $z = \gamma(t)$ još i uzajamno jednoznačno $(1-1)$, kaže se da je γ *analitička Žordanova (zatvorena) kriva.*

Sledeću teoremu dokazaćemo u Glavi 7.

Teorema 6.23 (Karateodori, TKa) *Neka su oblasti D i D^* ograničene Žordanovim krivim ∂D i ∂D^*. Tada se konformno preslikavanje $f : D \to D^*$, koje je $1-1$ i na, može produžiti na granicu oblasti D do homeomorfizma $\overline{D}$ na $\overline{D^*}$.*

Ova teorema se naziva Princip Korespondencije Granica (kratko **PKG**).

Sledeću teoremu dokazaćemo u specijalnom slučaju ako je kodomem krug (videti Teoremu 6.27).

Teorema 6.24 (Švarc, TŠ) *Neka su ispunjene pretpostavke Karateodorijeve teoreme i neka su ∂D i ∂D^* analitičke Žordanove krive (u smislu Kompleksne analize). Tada se f produžava do holomorfne funkcije na $\overline{D}$.*

Princip korespondencije oblasti

Skiciraćemo jedan dokaz Principa korespondencije oblasti. Precizniji dokaz biće izložen u sekciji o Korespondenciji granica.

Ponovimo, M kompaktno pripada oblasti Ω ako $\overline{M} \subset \Omega$; kompaktnu pripadnost označavamo sa $M \Subset \Omega$. Za definiciju homotopije videti podsekciju 2.1.13 i glavu 7.

Teorema 6.25 (PKOb) *Neka oblasti D i D_* sa Žordanovim granicama γ i γ_* kompaktno pripadaju $\mathbb{C}$. Ako je funkcija f, koja je holomorfna u D, neprekidna u $\overline{D}$ i ustanovljava uzajamno jednoznačno preslikavanje γ na γ_*, tada je preslikavanje $f : D \to D_*$ konformni izomorfizam oblasti D na D_*.*

Napomena: Teorema važi ako je D proizvoljna Žordanova oblast u $\overline{\mathbb{C}}$, a D_* kompaktno pripada $\mathbb{C}$.

Dokaz: Neka je w_0-proizvoljna tačka u D_*. Kako je, na osnovu uslova teoreme, $f \circ \gamma = \gamma_*$, to je $f \neq w_0$ na γ i s obzirom na to da je f neprekidna u $\overline{D}$, postoji Žordanova kriva $\tilde{\gamma}$ u D, koja ograničava neku oblast $\tilde{D} \subseteq D$ tako da je $f \neq w_0$ u $G = \overline{D} \backslash \tilde{D}$. Veličina

$$N = \frac{1}{2\pi} \Delta_\gamma \mathrm{Arg}\left(f(z) - w_0\right) \tag{6.27}$$

(gde, grubo govoreći, Arg označava neprekidnu granu argumenta duž puta γ i Δ_γ priraštaj te grane duž γ) neprekidno se menja pri homotopskoj deformaciji puta u G (za preciznu definiciju homotopije videti Glavu 7). Kako veličina (6.27) dobija samo cele vrednosti, to ona ostaje konstantna pri takvim deformacijama. Po uslovu teoreme preslikavanje $f : \gamma \to \gamma_*$ je homeomorfno, i stoga,

$$N = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma_*} \mathrm{Arg}\,(w - w_0) = 1,$$

jer ako tačka z jednom obiđe krivu γ, vektor $w - w_0$ (gde je $w = f(z)$) napravi jednu rotaciju oko tačke w_0 (tačka w jedanput obiđe krivu γ_* u pozitivnom smeru). S obzirom na gornje razmatranje, zaključujemo da je

$$N = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\tilde{\gamma}} \mathrm{Arg}\left(f(z) - w_0\right) = 1.$$

Na oblast $\tilde{D} \Subset D$, koja je ograničena krivom $\tilde{\gamma}$, može se primeniti princip argumenta, po kome jednačina $f(z) = w_0$ ima u $\tilde{D}$ (a znači, i u D, jer u pojasu G nema w_0-tačaka) tačno jedan koren.

Na isti način, dokazujemo da je za proizvoljnu tačku $w_1 \notin \overline{D^*}$ broj nula funkcije $f(z) - w_1$ u oblasti D jednak

$$N_1 = \frac{1}{2\pi}\, \Delta_{\gamma_*} \mathrm{Arg}\,(w - w_1).$$

Kada tačka w obilazi krivu γ_*, vektor $w - w_1$ ne pravi nijedan ceo obrt oko tačke w_1 i otuda sledi da je $N_1 = 0$. Iz principa očuvanja oblasti sledi da $f(D)$ nema zajedničkih tačaka sa tragom puta γ_*, jer u suprotnom slučaju $f(D)$ ima neprazan presek sa komplementom skupa $\overline{D_*}$. □

6.3.2 Princip simetrije

Lema 6.8 (Neprekidnog Produženja, LNP) *Pretpostavimo da su oblasti D_1 i D_2 disjunktne, da je otvoren segment γ zajednički deo njihove granice i da je $D = D_1 \cup \gamma \cup D_2$ oblast. Neka su funkcije f_1 i f_2, respektivno, holomorfne u D_1 i D_2 i neprekidne na $D_1 \cup \gamma$ i $D_2 \cup \gamma$ (sl. 6.8). Tada, ako je $f_1(z) = f_2(z)$ za svako $z \in \gamma$, funkcija f definisana sa*

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in D_1 \cup \gamma \\ f_2(z), & z \in D_2 \end{cases}$$

je holomorfna u D.

Primer 40 (Varšavski krug 2) *Neka je*

$$D_1 = \Big\{(x, y) |\, 0 < y < \frac{1}{\pi},\ -1 < x < \big|\sin \frac{1}{y}\big|\Big\}.$$

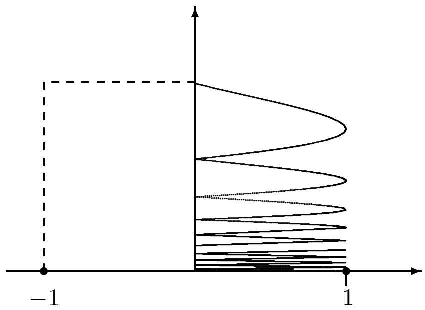
Ovu oblast nazivamo Varšavski krug *(videti sliku 6.7).*

Primer 41 (*) *Neka je $D_2 = \{\bar{z} | z \in D_1\}$ oblast simetrična sa D_1 u odnosu na realnu osu. Otvoreni interval $L = (0, 1)$ pripada zajedničkoj granici oblasti D_1 i D_2, ali $D_1 \cup L \cup D_2$ nije oblast. Ako je φ konformno (jednolisno) preslikavanje D_1 na jedinični disk, može se pokazati da se φ neprekidno proširuje na $D_1 \cup L$ tako da je $\varphi(z) = e^{i\alpha}$ za svako $z \in [0, 1]$, gde je α neki realan broj.*

Uputstvo: Koristiti Karateodorijevu teoremu. □

U klasičnoj literaturi LNP formuliše bez uslova da je $D = D_1 \cup \gamma \cup D_2$ oblast. Prethodni primer pokazuje da takav iskaz nije korektan.

Dokaz LNP zasniva se na $KIT\Delta 2$ i $KITn$-tougao, koje se dokazuju na kraju sekcije.



Slika 6.7: Varšavski krug 2

Dokaz LNP: Iz uslova za γ jasno je da je f neprekidna na D. Za dokaz holomorfnosti f na D prema Teoremi 2.17 (Morerina teorema) dovoljno je proveriti da je integral f po granici proizvoljnog trougla $\Delta \Subset D$ nula. Ako Δ kompaktno pripada D_1 ili D_2, to sledi iz $KIT\Delta$.

Ostaje da razmotrimo slučaj kada je $\Delta \cap \gamma \neq \emptyset$. Tada postoje dve mogućnosti:

(1) presek Δ i γ je samo teme ili ivica;

(2) γ deli Δ na dva dela: trougao Δ_1 i četvorougao Q.

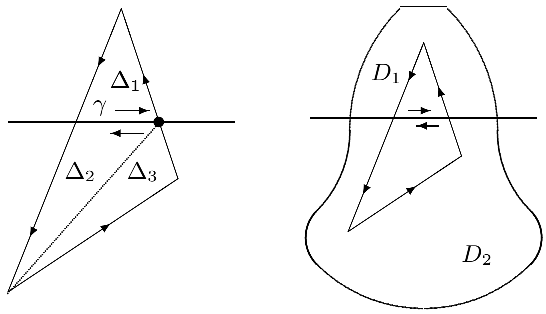
U slučaju (1) dokaz sledi iz $KIT\Delta_2$, a u slučaju (2) tvrđenje se dobija iz $KITn$-tougao (za $n = 3$ i $n = 4$). $\square$

Ostavljamo čitaocu da tačku (2) dokaže elementarnije, koristeći podelu četvorougla Q na trouglove. Tada se, kao na slici 6.8, četvorougao Q može podeliti na trouglove Δ_2 i Δ_3. Na osnovu svojstava integrala i KITΔ2 (videti Teoremu 6.28), dobijamo:

$$\int_{\partial Q} f dz = \int_{\partial \Delta_2} f dz + \int_{\partial \Delta_3} f dz = 0 \tag{6.28}$$

i, stoga,

$$\int_{\partial \Delta} f dz = \int_{\partial \Delta_1} f dz + \int_{\partial Q} f dz = 0. \tag{6.29}$$



Slika 6.8:

Lema 6.9 (Simetrična funkcija holomorfna, L*-holo)
Neka je funkcija f holomorfna na oblasti G, $G^* = \{z | \bar{z} \in G\}$. Ako je funkcija f^* definisana na G^* sa $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$, tada je f^* holomorfna na G^*.

Dokaz: Neka $z_0 \in G^*$ proizvoljna tačka. Pokažimo da postoji konačan izvod $(f^*)'(z_0)$. Imamo da je

$$(f^*)'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\overline{f(\overline{z_0} + \bar{h})} - \overline{f(\overline{z_0})}}{h} = \lim_{h \to 0} \overline{\Big(\frac{f(\overline{z_0} + \bar{h}) - f(\overline{z_0})}{\bar{h}} \Big)},$$

tj.

$$(f^*)'(z_0) = \overline{\Big(\lim_{h \to 0} \frac{f(\overline{z_0} + \bar{h}) - f(\overline{z_0})}{\bar{h}} \Big)} = \overline{f'(\overline{z_0})}.$$

Dokaz se može izvesti i koristeći Tejlorov razvoj funkcije f oko $\overline{z_0}$ ili pomoću formula za $\overline{\partial}$ (videti vežbu 6.3.1). $\square$

Teorema 6.26 (Švarcov Princip, Šv P) *Pretpostavimo da je*

(a) L segment na $\mathbb{R}$, G^+ oblast u H^+ i

(b) svako $t \in L$ je centar otvorenog kruga B_t takvog da $B_t \cap H^+$ pripada G^+.
Neka je G^- refleksija oblasti G^+ u odnosu na realnu osu, tj.

$$G^- = \{z | \bar{z} \in G^+\}. \tag{6.30}$$

Pretpostavimo da je f holomorfna na G^+, neprekidna na $G^+ \cup L$ i da je $f(x)$ realno za svako $x \in L$. Tada postoji funkcija F, holomorfna u $G = G^+ \cup L \cup G^-$, takva da je $F(z) = f(z)$ za $z \in G^+$. Ova funkcija zadovoljava relaciju:

$$F(z) = \overline{f(\bar{z})}, \qquad z \in G^-.$$

Dokaz: Definišimo $F(z) = \overline{f(\bar{z})}$ za $z \in G^-$ i $F(z) = f(z)$ za $z \in G^+ \cup L$. Kada tačka $z \in G^-$ teži ka $x \in L$, tada $\bar{z} \to x$ i $F(z) = \overline{f(\bar{z})} \to \overline{f(x)} = f(x)$. Otuda, F je neprekidna na G. Iz Leme 6.9 sledi da je F holomorfna na $G^+ \cup G^-$ i stoga, na osnovu LNP, zaključujemo da je F holomorfna na G. □

U Primeru 40 (Varšavski krug) segment $L = [0, 1]$ je deo granice oblasti $G = D_1$. Proveriti da oblast $D_1 = G$ ne ispunjava uslov (b) na L. S obzirom na to da uslov (b) „izgleda" apstraktno, s pedagoške tačke gledišta, može se zameniti ekvivalentnim uslovom

(b') Postoji oblast G simetrična u odnosu na $\mathbb{R}$ tako da $G \cap H^+ = G^+$ (tj. $G^+ \cup L \cup G^-$ je oblast).

Lema 6.10 (Lema Princip Simetrije, LPS) *Neka je G oblast simetrična u odnosu na realnu osu i neka otvoren segment $L = (\alpha, \beta)$ na realnoj osi pripada oblasti G. Ako je f holomorfna na G i realna na L, tada je $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$.*

Dokaz: Na osnovu Leme 6.9, funkcija $\tilde{f}$, definisana sa $\tilde{f}(z) = f(z) - \overline{f(\bar{z})}$, je holomorfna na G. Za $x \in L = (\alpha, \beta)$, prema pretpostavci, $f(x)$ je realno, pa je $\overline{f(x)} = f(x)$ i, stoga, $\tilde{f}(x) = f(x) - \overline{f(x)} = 0$. Otuda, na osnovu Teoreme Jedinosti, zaključujemo da je $\tilde{f} \equiv 0$ na G, tj. $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ za $z \in G$. □

Primer 42 *Funkcije $z^n, \sin, \cos, \exp, \mathrm{tg}, \mathrm{sh}$ su realne na realnoj osi i simetrične su u odnosu na realnu osu, tj. simetrične tačke u odnosu na realnu osu preslikavaju u simetrične tačke.*

Neka je $f(z) = e^{iz}$. Tada je $f(\mathbb{R}) = T$. Proveriti da ova funkcija zadovoljava relaciju $f(\overline{z}) = f(z)^*$.

Teorema 6.27 (Produženje kroz analitički luk) *Ako granica oblasti D sadrži analitički luk γ, konformno preslikavnje φ oblasti na jedinični krug U može se analitički produžiti kroz γ.*

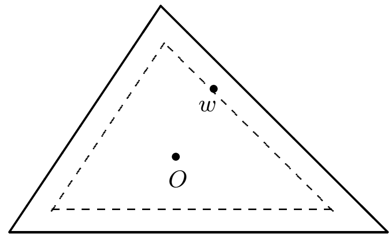
Dokaz: Za proizvoljno $t_0 \in [\alpha, \beta]$ postoji krug $B = B(t_0; r)$ u kome se γ produžava kao holomorfna funkcija. S obzirom na uslov $\gamma'(t_0) \neq 0$, može se pretpostaviti da je γ $1-1$ na B. Označimo sa Λ dijametar kruga B, koji se sastoji od tačaka realne ose, i sa B^+ onaj od polukrugova $B \setminus \Lambda$ koji γ preslikava u D. Funkcija $\hat{\varphi} = \varphi \circ \gamma$ ispunjava uslove Principa simetrije (preslikava Λ na kružni luk) i otuda se analitički produžava u B. Kako je $\hat{\varphi} \circ (\gamma)^{-1} = \varphi$, funkcija φ se analitički produžava kroz luk $\gamma_0 = \gamma(\Lambda)$, tj. u oblast $\gamma(B)$. □

Teorema 6.28 (KITΔ2) *Neka je funkcija f neprekidna na zatvorenom trouglu Δ i holomorfna na unutrašnjosti Δ. Tada je*

$$I = \int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0.$$

Dokaz: Bez umanjenja opštosti, možemo pretpostaviti da je 0 unutrašnja tačka trougla Δ. Neka je $0 < \rho < 1$ i $\Delta_\rho = \{\rho z | z \in \Delta\}$. Kako je f holomorfna na $\overline{\Delta_\rho}$, važi da je $\frac{1}{\rho}\int_{\partial\Delta_\rho} f(w)dw = 0$. Koristeći smenu $w = \varphi(z) = \rho z$, nalazimo da je $\int_{\partial\Delta} f(\rho z)dz = 0$ i, otuda,

$$I = \int_{\partial\Delta} (f(z) - f(\rho z))dz. \qquad (6.31)$$



Slika 6.9:

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan broj. Kako je f ravnomerno neprekidna na Δ, postoji ρ_0 takav da je $|f(z) - f(\rho z)| < \varepsilon$ za $z \in \partial\Delta$ i $\rho_0 < \rho < 1$. Otuda, na osnovu nejednakosti za apsolutnu vrednost integrala, dobijamo sledeću ocenu:

$$|I| \leq \int_{\partial\Delta} |f(z) - f(\rho z)| dz \leq \varepsilon |\partial\Delta|$$

i, kako za ε možemo izabrati proizvoljno mali pozitivan broj, zaključujemo da je $I = 0$. $\square$

Teorema 6.29 (KITn-tougao) *Neka je Λ zatvorena prosta poligonalna linija u kompleksnoj ravni $\mathbb{C}$ i $\mathcal{P} = \mathrm{Int}(\Lambda)$. Ako je funkcija f neprekidna na $\overline{\mathcal{P}}$ i holomorfna na $\mathcal{P}$, tada je:*

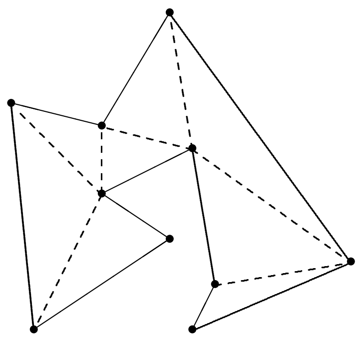
$$\int_\Lambda f dz = 0.$$

Dokaz: Ako je skup $\overline{\mathcal{P}}$ zvezdast u odnosu na neku tačku $z_0 \in \mathcal{P}$, bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je $z_0 = 0$ i postupiti kao u dokazu KITΔ2.

U opštem slučaju može se n-tougao $\mathcal{P}$ podeliti na trouglove kao na slici 6.10 i primeniti KITΔ2.

Uputstvo: Dokazati da postoje dva nesusedna temena A i B poligona Λ, takva da je $[A, B] \subseteq \overline{\mathcal{P}}$ i da duž $[A, B]$ deli $\mathcal{P}$ na dve oblasti, $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_2$, ograničene poligonima.

Nastavljajući ovaj postupak, pokazati da postoje trouglovi $\Delta_i \subseteq \overline{\mathcal{P}}$, $i = 1, \ldots, n$, takvi da važi:



Slika 6.10: KIT n-tougao

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{n} \partial\Delta_i,$$

pri čemu $\partial\Delta_i$, $i = 1, \ldots, n$ i Λ imaju, na primer, pozitivnu orijentaciju. $\square$

Vežba 6.3.1 *Dokazati Lemu 6.9 pomoću formule za* $\bar{\partial}$.

Dokaz: Neka je $g(z) = f(\bar{z}) = f(x, -y)$ i $h = \bar{g}$, gde je $\bar{g}(\zeta) = \overline{g(\zeta)}$. Kako je

$$g_x(z) = f_x(\bar{z}) \text{ i } g_y(z) = -f_y(\bar{z}),$$

$$\bar{g}_x(z) = \overline{g_x(z)} \text{ i } \bar{g}_y(z) = \overline{g_y(z)},$$

$\bar{\partial} f = 0$ na G (jer je f holomorfna na G), nalazimo da je:

$$\overline{\partial} h(z) = \overline{\partial}\bar{g}(z) = \frac{1}{2}(\bar{g}_x(z) + i\ \bar{g}_y(z)) = \frac{1}{2}(\overline{g_x(z)} + i\ \overline{g_y(z)})$$

$$= \frac{1}{2}(\overline{f_x(\bar{z})} - i\ \overline{f_y(\bar{z})}) = \frac{1}{2}\overline{(f_x(\bar{z}) + i\ f_y(\bar{z}))} = \overline{\bar{\partial} f(\bar{z})} = 0 \qquad (z \in G^*).$$

□

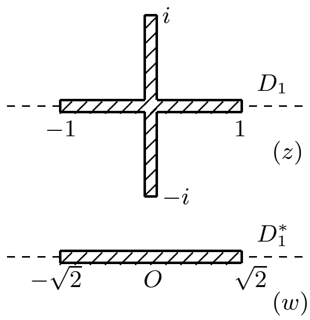
Vežba 6.3.2 *Formulisati i dokazati verziju LPS ako se interval zameni delom kružnog luka, a refleksija u odnosu na realnu osu simetrijom u odnosu na kružnicu.*

Uputstvo: $f(z^*) = f(z)^*$, gde je $z^* = \dfrac{1}{\bar{z}}$. □

Vežba 6.3.3 *Pomoću vežbe 6.3.2 pokazati da bilinearno preslikavanje „čuva" simetriju tačaka u odnosu na pravu i krug. (Videti odgovarajući rezultat u sekciji Bilinearna preslikavanja.)*

Vežba 6.3.4 *Neka je* $D = \mathbb{C}\backslash([-1,1] \cup [-i,i])$. *Naći konformno preslikavanje oblasti* D *na spoljašnost jediničnog diska.*

Rešenje: Neka je $D_1 = H \setminus [0, i]$. Funkcija z^2 preslikava oblast D_1 na $\mathbb{C}\backslash[-1, +\infty)$. Označimo sa f_0 granu korena definisanu na oblasti $\mathbb{C}_1 = \{0 < \varphi < 2\pi\}$. Funkcija ψ definisana sa $\psi(z) = z^2 + 1$ preslikava D_1 na $\mathbb{C}_1$ i otuda $f_1 = f_0 \circ \psi$ preslikava D_1 na H. Neka je $l = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ i $\tilde{l} = (-\infty, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$. f_1 se neprekidno produžuje na $D_1 \cup l$ i preslikava l na $\tilde{l}$. Otuda, na osnovu principa simetrije, sledi da se f_1 (zadržali smo istu oznaku za produženje) analitički produžuje na oblast $D_1 \cup l \cup D_1^*$, gde je D_1^* oblast simetrična oblasti D_1 u odnosu na realnu osu, i preslikava D na $D_2 = \overline{\mathbb{C}} \setminus [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Neka je $\Upsilon = (\sqrt{2})^{-1} Z^{-1}$, gde je Z^{-1} inverzna grana funkije Žukovskog određena sa $Z^{-1}(\infty) = \infty$. Funkcija $\Upsilon \circ f_1$ preslikava D na $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{U}$.



Slika 6.11:

□

Vežba 6.3.5 *Neka je* $G = \{|\mathrm{Re}\, z| < \pi/2\}\backslash[0, \pi/2]$. *Konstruisati konformno preslikavanje oblasti* G *na gornju poluravan.*

6.3.3 Razni zadaci

1. Princip maksimuma modula, PMM

Princip Maksimuma Modula 2 važi i za neograničene oblasti u sledećem smislu:

Neka je Ω oblast u $\overline{\mathbb{C}}$, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ neprekidno preslikavanje i f holomorfno na Ω. Tada $|f|$ dostiže maksimum na $\partial\Omega$.

Ovde se $\overline{\Omega}$ definiše u $\overline{\mathbb{C}}$. Dakle ako je Ω neograničena oblast, tada $\infty \in \overline{\Omega}$.

1. Neka je $\mathcal{B}(z) = \dfrac{i-z}{i+z}$. Dokazati:
a. $\mathcal{B}$ je neprekidna funkcija na $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{-i\}$.
b. $|\mathcal{B}| = 1$ na $\partial H = R \cup \{\infty\}$, tako da $|\mathcal{B}|$ dostiže maksimum na $\overline{H}$, u svakoj tački $\partial H = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

2. Neka je $f(z) = \exp(\exp z)$, $g(z) = \exp(-\exp z)$, $h(z) = g(z)\,\dfrac{1}{z - \pi i}$ i $D = \Big\{z : -\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}\Big\}$.
a. Dokazati da je cela funkcija f ograničena na granici oblasti D (ovde se granica definiše u odnosu na $\mathbb{C}$), ali neograničena na D;
b. $\sup\{\,|g(z)| : z \in D\} = 1$
c. h je neprekidna na $\overline{D}$ i $|h|$ dostiže maksimum na $\overline{D}$ u tački $\dfrac{\pi}{2}i$: $\max\{\,|h(z)| : z \in \overline{D}\} = 2/\pi$
Uputstvo: Na osnovu adicione formule, dobijamo $\exp\big(x \pm \frac{\pi}{2}\,i\big) = \pm\, i\, e^x$. Otuda, za $z \in \partial D$, sledi prvo $f(z) = \exp(\pm\, i\, e^x)$ i stoga $|f| = 1$ na ∂D. Ali, $f(x) \to \infty$ vrlo brzo kada $x \to +\infty$ duž pozitivnog dela $x-$ose.

U vezi sa primenom *Principa Maksimuma Modula* podvucimo:
d. f nije neprekidna na $\overline{D}$ ako se zatvorenje definiše u odnosu na $\overline{\mathbb{C}}$.
e. Oblast D ograniičena je paralenim linijama $l_1 = \{z : y = -\pi/2\}$ i $l_2 = \{z : y = \pi/2\}$.
Granica oblasti D u $\mathbb{C}$ je $l = l_1 \cup l_2$, unija ove dve linije, i f je neprekidna na l.
f. h je neprekidna na $\overline{D}$ ako se $\overline{D}$ razmatra kao okvirni prostor; $\infty \in \overline{D}$ (ovde se zatvorenje definiše u odnosu na $\overline{\mathbb{C}}$), ali h nije neprekidna u ∞.

3. Ako je f holomorfna funkcija u nekoj okolini tačke a, koja je stacionarna tačka funkcije $|f|$, tada je $f(a) = 0$ ili $f'(a) = 0$.
Uputstvo: $|f|^2 = f\,\overline{f}$, $\partial f = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\overline{f}}{|f|}\,f'$, $\overline{\partial} f = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{f}{|f|}\,\overline{f'}$.

2. Geometrijska teorija

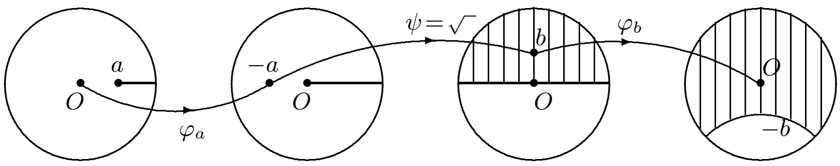
1. Neka je $D = H = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, $D_* = H = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ i $f(z) = z^3$
Dokazati
a. f uzajamno jednoznačno preslikava granicu $\partial D = \mathbb{R}$ oblasti D na $\partial D_* = \mathbb{R}$

b. f nije jednoznačno na H i $f(H) = \mathbb{C}^*$

2. Neka je $\mathcal{A}(z) = i\dfrac{1-z}{1+z}$, $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1}$, $f(z) = z^3$; $g = \mathcal{B} \circ f \circ \mathcal{A}$ i $D_* = \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$. Dokazati
a. $\mathcal{A}$ je konformni izomorfizam U na H.
b. $\mathcal{B}(w) = \dfrac{i-w}{i+w}$.
c. g preslikava jediničnu kružnicu uzajamno jednoznačno na sebe.
d. Odrediti singularitete funkcije g u $\mathbb{C}$; da li g ima singularitet na U?
e. $g(U) = D_*$
Uputstvo: B ima prost pol u $-i$; funkcija g ima prost pol u 0; dakle nisu ispunjene pretpostavke PKOb.

3. Neka je $0 < k < 1$, $p(\zeta) = (1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)$, $f(\zeta) = 1/\sqrt{p(\zeta)}$, i $I_1 = [1, 1/k]$, $L = I_1 \cup (-I_1)$ i $D = \mathbb{C} \setminus L$.
Dokazati
a. postoji regularna grana ψ višeznačne funkcije f na D, koja je pozitivna na $I = [0, 1)$.
b. ako je $\varphi(z) = \int\limits_0^z \psi d\zeta$, φ preslikava H na pravougaonik.
Uputstvo: Videti podsekciju 5.2 (Postojanje grana).

4. Neka je $0 < a < 1$, $L = [a, 1]$ i $D = U \setminus L$.
Dokazati
a. postoji regularna grana $\psi = \psi_n$ višeznačne funkcije $\sqrt[n]{}$ na $\varphi_a(D)$,
b. da li postoji konformni automorfizam φ kruga tako da je $|h'(0)| > 1$, gde je $h = \varphi \circ \psi \circ \varphi_a$.
c. Nacrtati oblasti $D_1 = \varphi_a(D)$, $D_2 = \psi(D_1)$, $D_3 = \varphi(D_2)$.
Uputstvo: Koristiti tačku (d) iz dokaza Rimanove teoreme; $\varphi = \varphi_b$, gde je $b = \psi(-a)$.



Slika 6.12: Spec. slučaj Rimanove teoreme

Primer 43 *Neka je* $U = |z| < 1$ *i* $f(z) = z\dfrac{2z-1}{2-z}$. *Dokazati da je*

$$n(\omega) = \begin{cases} 2, & |\omega| < 1, \\ 0, & |\omega| \geq 1, \end{cases}$$

gde je $n(\omega)$ *broj rešenja jednačine* $f(z) - \omega = 0$ *u oblasti* U.

O Schwarz-Christofel transformacijama videti npr. [Ch-Br].
Za vežbu videti npr. [Je-Ma]: KONFORMNA PRESLIKAVANJA zadaci 5.08, 5.11, 5.14, 5.21, 5.23-24, 5.27-28, 5.31-33, 5.36-38, 5.41, 5.44-45, 5.54-55; PRINCIP SIMETRIJE 5.56- 5.61; RAZNI ZADACI 10.01, 10.13-14, 10.18-21, 10.28-29, 10.43-48.

Podvucimo, Primer 43, 5.27 i 8.40 (iz [Je-Ma]) su isti zadatak, ali su rešenja različita.

3. Rušeov stav i Lema Mihajlova

Lema Mihajlova
Neka je $P = a_0 z^n + \cdots + a_n$, $a_0 \neq 0$, polinom stepena n, koji nema nule na imaginarnoj osi, i γ kontura definisana sa $\gamma(y) = P(iy)$, $-\infty < y < +\infty$.
Ako su n^+ i n^- respektivno broj nula u desnoj i u levoj poluravni, tada je

$$n^+ = \frac{n}{2} - \frac{1}{2\pi}\Delta \operatorname{Arg}\gamma\,, \tag{1}$$

$$\frac{n^- - n^+}{2} = \frac{1}{2\pi}\Delta \operatorname{Arg}\gamma. \tag{2}$$

Uputstvo: Neka je $B_R^+ = \{z : |z| < R, \operatorname{Re} z > 0\}$, $R > 0$; $l_R : z = it, -R \leq t \leq R$ i $\mathcal{K}_R = \mathcal{K}_R^+ : z = Re^{it}$, $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$. Neka je $p = a_0 z^n$ i $P = p\,h$.
Za dovoljno veliko R, primenom P Arg, nalazi se

$$n^+ = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\mathcal{K}_R} \operatorname{Arg} P - \frac{1}{2\pi}\Delta_{l_R} \operatorname{Arg} P\,. \tag{3}$$

Na osnovu Propozicije 6.4, dobija se $\Delta_{\mathcal{K}_R} \operatorname{Arg} P = \Delta_{\mathcal{K}_R} \operatorname{Arg} p + \Delta_{\mathcal{K}_R} \operatorname{Arg} h$. Otuda, kako je $\Delta_{\mathcal{K}_R} \operatorname{Arg} p = n\,\pi$ i kako h teži ka 1, kada R teži ka $+\infty$, sledi da $\Delta_{\mathcal{K}_R} \operatorname{Arg} P$ teži ka $n\,\pi$ kada R teži ka $+\infty$ (objasniti !). Stoga, primenom (3) (ponovimo P Arg), nalazi se (1).
Kako je $n = n^+ + n^-$, iz (1), sledi (2).

1. Odrediti broj rešenja jednacine $z^9 - 6z^4 + 3z - 1 = 0$ u jediničnom disku U.
Uputstvo: Neka je $f(z) = -6z^4$ i $g(z) = z^9 + 3z - 1$.

Kako je $|f| = 6$, $|g| \leq 5$ na T,
sledi $|g| < |f|$ za $z \in T$.
Na osnovu Rušeovog stava funkcije $h = f + g$ i f imaju jednak broj nula u U. Kako funkcija $f = -6z^4$ ima četiri nule u U, to i funkcuja $h = f + g$ ima četiri nule u U. Dakle, polinom $P(z) = z^9 - 6z^4 + 3z - 1$ ima četiri nule u U.

2. Dokazati da polinom $P(z) = z^{11} + 2z^5 + 1$ ima bar jednu nulu u jediničnom disku U.
Uputstvo: Kako je $P(1) = 4$ i $P(-1) = -2$, P ima bar jednu realnu nulu.
alternativno rešenje: neka je $f(z) = 2z^5$ i $g(z) = z^{11} + 1$; pokazati da postoji $r \in (0, 1)$ tako da je $2\rho^5 > 1 + \rho^{11}$ za $\rho \in (r, 1)$; Na osnovu Rušeovog stava, polinom P ima pet nula u $U_\rho = \{|z| < \rho\}$ za svako $\rho \in (r, 1)$ i otuda pet nula u U.
Proveriti da polinom P ima pet nula u $\overline{U}$.

3. Odrediti broj nula polinoma $P(z) = z^5 + 12z^3 + 3z^2 + 20z + 3$ u prstenu $A = A(1, 2) = \{z : 1 < |z| < 2\}$.
Uputstvo: Neka je $f(z) = 20z$ i $g(z) = z^5 + 12z^3 + 3z^2 + 3$.
Kako je $|f| = 20$, $|g| \leq 19$ na T, P ima jednu nulu u $\overline{U}$.
Neka je $U_2 = \{|z| \leq 2\}$, $T_2 = \partial U_2$, $f(z) = 12z^3$ i $g(z) = z^5 + 3z^2 + 20z + 3$. Kako je $|f| = 96$, $|g| \leq 87$ na T_2, P ima tri nule u U_2 i otuda dve nule u A.
Alternativno rešenje: Neka je $f(z) = 12z^3 + 20z$ i $P = f + g$. Tada je $|f| > |g|$ na ∂A i f ima dve nule u A. Otuda primenom Rušeovog stava na A, sledi da P ima dve nule u A.

4. Odrediti broj nula funkcije $h(z) = e^z - 1 + 2z^2$ u jediničnom disku U.
Uputstvo: $f(z) = 2\,z^2$, $g(z) = e^z - 1$.
$|g(z)| \leq e - 1 < 2$ za $z \in T$; dve nule u U.

5. Dokazati da jednačina $z + e^{-z} = k$, $k > 1$, ima jedan i samo jedan realan koren u desnoj poluravni Π^+.
Uputstvo: Neka je $f(z) = k - z$, $g(z) = -e^{-z}$, $B_R^+ = \{z : |z| < R, \operatorname{Re} z > 0\}$, $R > 0$; $l_R = \{z = it : -R \leq t \leq R\}$ i $K_R^+ = \{z : |z| = R, x \geq 0\}$.
Kako je
$|g| \leq 1$ za $\operatorname{Re} z \geq 0$,
$|f(z)| \geq k$ za $z \in l_R$; i
$|f(z)| \geq R - k > 1$ za $z \in K_R^+$ i $R > k + 1$,
sledi $|g| < |f|$ za $z \in \partial B_R^+$.
Na osnovu Rušeovog stava funkcije $h = f + g$ i f imaju jednak broj nula u B_R^+. Kako funkcija $f = k - z$ ima jednu nulu $z = k$ u B_R^+, to i funkcuja $h = f + g$ ima ima jednu nulu u B_R^+.
Proveriti da h ima jednu pozitivnu nulu.

6. Koliko rešenja ima jednačina $z^2 = ae^z$ u jediničnom disku U ako je
$0 < a < 1/e$.
Uputstvo: $f(z) = z^2$, $g(z) = -ae^z$.

$|g(z)| \leq |a|e^z < \dfrac{1}{e}\,e = 1$ za $z \in T$; dve nule u U.

7. Neka je $0 < r < \pi/2$. Pokazati da za dovoljno veliko n polinom $F_n(z) = 1 - \dfrac{z^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{z^{2n}}{(2n)!}$ nema nula u disku $\overline{B}$, gde je $B = B(0;r)$.

Uputstvo: $F_n(z)$ su parcijalne sume Tejlorovog reda funkcije cos. Kako Tejlorov red funkcije cos ravnomerno konvergira na $\overline{B}$, a cos nema nula na $\overline{B}$, sledi na osnovu Rušeovog stava (objasniti !), da za dovoljno veliko n polinom $F_n(z)$ nema nula u disku $\overline{B}$.

DETALJNIJE: Kako je $\cos z = 0$ akko $z = z_k = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, funkcija cos nema nula u $\overline{B}$. Otuda je $\mu = \min\{|\cos z| : z \in \overline{B}\} > 0$. Kako niz F_n ravnomerno konvrgira ka cos na $\overline{B}$, postoji n_0 tako da je za $n \geq n_0$ i $z \in \overline{B}$, važi $|\cos z - F_n(z)| < \mu/2$. Otuda, na osnovu Rušeovog stava, ako je $n \geq n_0$, sledi da funkcije cos i F_n imaju jednak broj nula u $\overline{B}$.

8. Neka je $P(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 3$ i γ kontura definisana sa $\gamma(y) = P(iy)$, $-\infty < y < +\infty$.
(a) Skicirati trag konture γ.
(b) Dokazati da je $\Delta\, Arg\, \gamma = -3\pi$.
(c) Dokazati da sve nule polinoma P pripadaju desnoj poluravni.

Uputstvo: Trag konture γ može se skicirati pomoću parametarskih jednačina ove konture: $u = 3(y^2 - 1)$, $v = y(4 - y^2)$.
Neka su γ_+, γ_0 i γ_- respektivno restrikcije γ na $(-\infty, -2]$, $[-2, 2]$ i $[2, \infty)$. γ_0 je zatvorena negativno orijentisana kontura oko 0 i otuda $\Delta\,\mathrm{Arg}\,\gamma_0 = -2\pi$.
Kako je

$$\lim_{y\to-\infty} \frac{v(y)}{u(y)} = +\infty\,, \quad \lim_{y\to\infty} \frac{v(y)}{u(y)} = -\infty\,,$$

dobija se (b).
(c) sledi, na osnovu Leme Mihajlova.

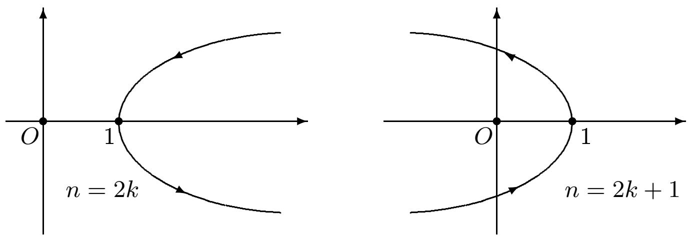
Za vežbu videti npr. [Je-Ma]: Princip Argumenta, 8.37 – 8.45, 10.01.
Zadatak 7 je sličan Zadatku 8.39, a Zadatak 8.38 (iz [Je-Ma]), koji sledi, može se rešiti pomoću Leme Mihajlova.

9. Odrediti broj nula polinoma $P(z) = z^{2n} + 4\,z^{2n-1} + 1$ u desnoj poluravni Π^+.

Uputstvo: Parametarska jednačina konture γ je: $u = (-1)^n\, y^{2n} + 1$, $v = 4(-1)^{n+1}\, y^{2n-1}$, $-\infty < y < +\infty$. Otuda ako je npr. n neparno, nalazi se $u = 1 - \left(\dfrac{v}{4}\right)^s$, $-\infty < v < +\infty$, gde je $s = \dfrac{2n}{2n-1} > 1$. Kako je

$$\lim_{y\to\pm\infty} \frac{v(y)}{u(y)} = 0\,,$$

sledi $\Delta\,\mathrm{Arg}\,\gamma = 2\pi$ i, na osnovu formule (1), $n^+ = n - 1$.



Slika 6.13: Nule polinoma

Slično, ako je n parno dobija se $\Delta \operatorname{Arg} \gamma = 0$ i, na osnovu formule (1), $n^+ = n$.
Rezultat: $n - 1$ ako je n neparno; n ako je n parno.

10. Neka je $\lambda > 2$, $P(z) = z^3 - z + \lambda$ i $g(z) = e^{-z}(z+2)$. Dokazati
a. $|g| < |P|$ na Π^+.
b. jednačina $P = g$ ima dva rešenja u desnoj poluravni Π^+
Uputstvo: Neka su z_k nule polinoma P. Kako je $P(0) = \lambda$ i $P(-\infty) = -\infty$, P ima negativanu nulu npr. z_1. Iz $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, kako je $z_2 = \overline{z_3}$, sledi $\operatorname{Re} z_3 = \operatorname{Re} z_2 = -z_1 > 0$.

11.* Neka su $P = z^n + \cdots + a_n$ i $Q = z^m + \cdots + b_m$, polinomi respektivno stepena n, $m \geq 1$ i $\Upsilon = P^{-1}(T)$. Dokazati da je $\max\{\, |Q(z)| : z \in \Upsilon\} \geq 1$.

12. Neka je f holomorfna na $\overline{U}$ i neprekidna na $\overline{U}$.
a. Ako je $f : \overline{U} \to \overline{U}$, tada f ima nepokretnu tačku u $\overline{U}$.
b. Navesti primer preslikavnja, čije sve nepokretne tačke, pripadaju granici kruga U.

Rešenje: a. Neka je $r_n = 1 - 1/n$, $f_n(z) = r_n f(r_n z)$ i označimo sa E identičko preslikavanje. Kako je $|f_n| < |E|$ na T, funkcije E i $F_n - E$ imaju jednak broj nula u U. Otuda, obzirom da E ima jednu prostu nulu u U, sledi da $F_n - E$ ima jednu nulu u U, tj. postoji $z_n \in U$ tako da je $f_n(z_n) = z_n$. Kako $z_n \in U$, postoji podniz koji konvergira ka nekoj tački $z_0 \in \overline{U}$ i, otuda, prelaskom na graničnu vrednost, sledi $f(z_0) = z_0$.
b. Neka su α i β realni brojevi i neka je $\varphi(z) = \dfrac{z - e^{i\alpha}}{z - e^{i\beta}}$. Traženo preslikavanje je definisano sa $\varphi(w) = k\varphi(z)$, gde je $k > 0$. Preciznije, $w = \varphi^{-1}(k\varphi(z))$.

GLAVA 7

Dodatak B (Holomorfne funkcije 2)**

7.1 Promena argumenta duž puta i Žordanove teoreme**

7.1.1 Definicije

Ako je realna funkcija φ neprekidna na oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{C}^*$ i ako je $z = |z|e^{i\varphi(z)}$ (tj. $\varphi(z) \in \operatorname{Arg} z$) za svako $z \in \Omega$, φ se naziva grana višeznačne funkcije Arg na Ω i obično se označava sa arg.

Za $\gamma \in \mathbb{R}$ označimo sa $\Lambda_\gamma = \{\rho e^{i\gamma} | 0 < \rho < +\infty\}$ poluprave sa početkom u koordinatnom početku koje „zaklapaju" ugao γ sa $x-$osom. Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$ i $O_\alpha = \mathbb{C}^* \setminus \Lambda_\alpha$.

Na osnovu Teoreme 1.10 (JPF), svako $z \in O_\alpha$ može sa jedinstveno predstaviti u obliku

$$z = |z|e^{i\varphi}, \varphi \in J_\alpha = (\alpha, \alpha + 2\pi).$$

Na ovaj način svakom $z \in O_\alpha$ jednoznačno je dodeljeno $\varphi = \varphi(z)$ u intervalu J_α, tj. definisana je funkcija $\varphi : O_\alpha \to J_\alpha$, koja je grana višeznačne funkcije Arg (grana argumenta) na O_α. Ako želimo da podvučemo da je φ grana Arg, onda umesto φ koristimo oznake arg ili $\arg_\alpha$.

Ako je

$$\mathcal{J}_k = \mathcal{J}_k(\alpha) = (\alpha + 2k\pi, \alpha + 2(k+1)\pi), k \in \mathbb{Z},$$

postoji grana argumenta $\varphi_k : O_\alpha \to \mathcal{J}_k$. Koristi se i oznaka $\arg_k$ umesto φ_k.

Sa arg označavamo neku granu argumenta, obično sa vrednostima u $(0, 2\pi)$ ili $(-\pi, \pi)$.

Ponovimo

Definicija A[Definicija 5.4]*Kažemo da je oblast Ω specijalnog $O-$tipa ako $\Omega \subseteq O_\alpha$ za neko $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Kažemo da je oblast Ω, $O-$ *tipa ako* $\Omega \subseteq D$, *gde je* D *prosto-povezana oblast koja ne sadrži tačke* $z = 0$ *i* $z = \infty$

Na oblastima $O-$tipa postoji grana argumenta. Ova činjenica ima važnu ulogu u našem pristupu: u definiciji promene argumenta duž puta, pomoću koje definišemo broj obilazaka (indeks) puta u odnosu na neku tačku.

Sledeći primer je važan za razumevanje definicije i osobina pojma promene argumenta duž puta.

Primer 44 *(a) Pokazati da nije tačno da je* $\arg(zw) = \arg z + \arg w$.
(b) Pokazati da je $\mathrm{Arg}\,(zw) = \mathrm{Arg}\, z + \mathrm{Arg}\, w$ $(z, w \in \mathbb{C}^*)$.
Objasniti razliku između tačaka (a) *i* (b).

7.1.2 Definicija promene argumenta

Neka je γ put u oblasti O - ravan bez zraka iz koordinatnog početka. Kako na O postoji grana arg možemo definisati promenu funkcije arg duž γ, u oznaci:

$$\Delta \mathrm{Arg}\, \gamma = \arg \gamma(1) - \arg \gamma(0).$$

Neka je γ put sa parametarskim intervalom $I = [0, 1]$ i $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = 1, z_k = \gamma(s_k)$ i neka je put γ_k restrikcija puta γ na $I_k = [s_k, s_{k+1}], 0 \leq k \leq n-1$. Kratko kažemo da je put γ podeljen tačkama $z_0, z_1, \ldots, z_n$ na puteve γ_k.

Ako je γ put u $\mathbb{C}^*$, postoji „podela" opisanog tipa, takva da svaki put γ_k pripada oblasti O^k - ravan bez zraka iz koordinatnog početka. Dakle, možemo definisati promenu argumenta duž puta γ, tj.

$$\Delta \mathrm{Arg}\, \gamma = \sum_{k=1}^{n} \Delta \mathrm{Arg}\, \gamma_k.$$

Neka je γ put i f neprekidna i različita od nule na γ^* i $\Gamma = f \circ \gamma$. Promena argumenta funkcije f duž puta γ definiše se kao

$$\Delta_\gamma \mathrm{Arg}\, f = \Delta \mathrm{Arg}\, \Gamma.$$

Za kompleksnu funkciju f i kompleksan broj $a \in \mathbb{C}$ definišemo funkciju f_a (translacija za vektor a) pomoću $f_a(z) = f(z) - a$.

Ako je γ zatvoren put i w ne pripada γ^*, definišemo broj obilazaka puta γ oko tačke w kao

$$n_\gamma w = n(\gamma, w) = \frac{1}{2\pi} \Delta \mathrm{Arg}\, \gamma_w = \frac{1}{2\pi} \Delta_{t \in I} \mathrm{Arg}\,(\gamma(t) - w).$$

U literaturi se za broj obilazaka puta γ oko tačke w često koristi i oznaka $\mathrm{Ind}_\gamma w$.

7.1.3 Polarna reprezentacija puta i teorema o indeksu

Ako je γ put u $\mathbb{C}^*$, ponovimo da postoji „podela" puta γ, $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = 1, z_k = \gamma(s_k)$ takva da svaki put γ_k pripada oblasti O^k - ravan bez zraka iz koordinatnog početka, gde je γ_k restrikcija puta γ na $I_k = [s_k, s_{k+1}], 0 \leq k \leq n-1$. Odaberimo grane $\varphi_k = \arg_k$ višeznačne funkcije Arg na O^k tako da je

$$\varphi_k(z_{k+1}) = \varphi_{k+1}(z_{k+1}), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Definišimo φ na I, tako da je φ jednako $\varphi_k \circ \gamma$ na $[s_k, s_{k+1}), 0 \leq k \leq n-1$. Jasno je da je funkcija φ neprekidna na I i da važi:

$$\gamma(t) = |\gamma(t)| e^{i\varphi(t)}, \quad t \in I. \tag{7.1}$$

Funkcija φ naziva se grana argumenta duž γ, a formula (7.1) polarna reprezentacija puta γ. Dakle, dokazali smo sledeći rezultat:

Propozicija 7.1 *Neka je $\gamma : I \to \mathbb{C}^*$ put. Tada postoji neprekidna funkcija $\varphi : I \to \mathbb{R}$ tako da je*

$$\frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|} = e^{i\varphi(t)}, \; t \in I$$

i da je

$$\Delta \mathrm{Arg}\, \gamma = \varphi(1) - \varphi(0).$$

Funkcija φ naziva se neprekidna grana argumenta duž puta γ.

Definicija 7.1 (Geometriiska definicija indeksa) *Neka je γ zatvoren put i neka w ne pripada γ^*. Ako je funkcija $\varphi = \varphi^w$ neprekidna grana argumenta duž puta γ_w (translacija za w), definišemo broj obilazaka puta γ oko tačke w kao* $\mathrm{Ind}_\gamma w = \dfrac{\varphi^w(1) - \varphi^w(0)}{2\pi}$.

Ako želimo da istaknemo je ovo geometrijska definicija onda koristimo oznaku $n_\gamma(w) = n(\gamma, w)$.

Propozicija 7.2 *Ako je γ pozitivno orijentisan zatvoren put, f funkcija neprekidna na γ^* i $\Gamma = f \circ \gamma$ pripada oblasti Ω, koja je $O-$tipa, tada je:*

$$\Delta_\gamma \mathrm{Arg}\, f = \Delta \mathrm{Arg}\, \Gamma = 0.$$

Dokaz: Na oblasti Ω postoji grana argumenta Arg. Odatle, s obzirom na to da je Γ zatvorena kontura, tj. $\Gamma(0) = \Gamma(1)$, važi:

$$\Delta_\gamma \mathrm{Arg}\, f = \Delta \mathrm{Arg}\, \Gamma = \mathrm{Arg}\, \Gamma(1) - \mathrm{Arg}\, \Gamma(0) = 0.$$

□

Podvucimo da sledeću propoziciju koristimo u dokazu Rušeovog stava pomoću Principa argumenta. U klasičnoj literaturi koristi se formula (7.2) bez obrazloženja. Ovde treba podvući da je $\mathrm{Arg}\,(zw) = \mathrm{Arg}\, z + \mathrm{Arg}\, w$, ali u smislu višeznačnih funkcija.

Propozicija 7.3 *Ako je γ put i $f, g : \gamma^* \to \mathbb{C}^*$ neprekidne funkcije i $\Gamma_1 = f \circ \gamma$, $\Gamma_2 = g \circ \gamma$, dokazati:*

$$\Delta_\gamma \mathrm{Arg}\,(fg) = \Delta_\gamma \mathrm{Arg}\, f + \Delta_\gamma \mathrm{Arg}\, g. \tag{7.2}$$

Dokaz: Neka su φ_1 i φ_2, respektivno, neprekidne grane argumenta duž Γ_1 i Γ_2. Funkcija $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ je neprekidna grana argumenta duž puta $\Gamma = h \circ \gamma$, gde je $h = fg$. □

Teorema 7.1 (O indeksu) *Neka je γ zatvoren put u $\mathbb{C}$ i $\Omega = \mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Tada je:*

(a) *n_γ celobrojna funkcija na Ω;*

(b) *n_γ konstanta na svakoj oblasti određenoj sa γ.*

Dokaz:

(a) Neka je $a \in \Omega$ i neka je $\varphi = \varphi_a$ grana argumenta duž γ_a. Tada $\varphi(0) \in \mathrm{Arg}\,\gamma_a(0)$ i $\varphi(1) \in \mathrm{Arg}\,\gamma_a(1)$. Odatle, s obzirom na to da je $\gamma_a(0) = \gamma_a(1)$ (put γ je zatvoren), sledi da je $\varphi(1) - \varphi(0) = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Dakle,

$$n_\gamma = \frac{\varphi(1) - \varphi(0)}{2\pi} = k.$$

(b) Neka je $a \in \Omega$ fiksirana tačka, $b \in \Omega$ i neka su φ_a i φ_b, respektivno, grane argumenta duž γ_a i γ_b. Neka je $r > 0$ izabrano tako da $\overline{B} = \overline{B}(a; r) \subset \Omega$. Kako je funkcija $\Phi(z,t) = \Big|\dfrac{\gamma_z(t)}{|\gamma_z(t)|} - \dfrac{\gamma_a(t)}{|\gamma_a(t)|}\Big|$ ravnomerno neprekidna na skupu $\overline{B} \times I$ i $\Phi(a,t) = 0$, za svako $\epsilon > 0$ postoji δ tako da iz $|a - b| < \delta$ sledi

$$\Big|\frac{\gamma_a(t)}{|\gamma_a(t)|} - \frac{\gamma_b(t)}{|\gamma_b(t)|}\Big| < \epsilon,\ t \in I. \tag{7.3}$$

Neka je, na primer, $\epsilon = \sqrt{2}$. Neka je arg grana argumenta na Π^+ sa vrednostima u $\big(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\big)$ i $R(t) = \arg \dfrac{\gamma_b(t)}{\gamma_a(t)}$. Odatle, s obzirom na to da je R neprekidna funkcija kao kompozicija neprekidnih funkcija, sledi $\varphi_b(t) - \varphi_a(t) = R(t) + 2k(t)\pi$, gde je $|R(t)| < \pi/2$ i k neprekidna celobrojna funkcija. Na uobičajen način dokazuje se da je $k \equiv k_0,\ k_0 \in \mathbb{Z}$ i stoga $\varphi_b(1) - \varphi_b(0) = \varphi_a(1) - \varphi_a(0) + R(1) - R(0)$. Odatle, na osnovu Teoreme 7.1 (a), kako je $|R(1) - R(0)| < \pi$, sledi $R(1) = R(0)$, pa je $n_\gamma(b) = n_\gamma(a)$. Dakle, n_γ je lokalno konstantna funkcija, pa je konstanta na svakoj oblasti određenoj sa γ (tj. na svakoj komponenti oblasti Ω).

Napomena: „Varijacijom" prethodnog dokaza može se izbeći pozivanje na celobrojnu funkciju k, koju smo koristili u dokazu.

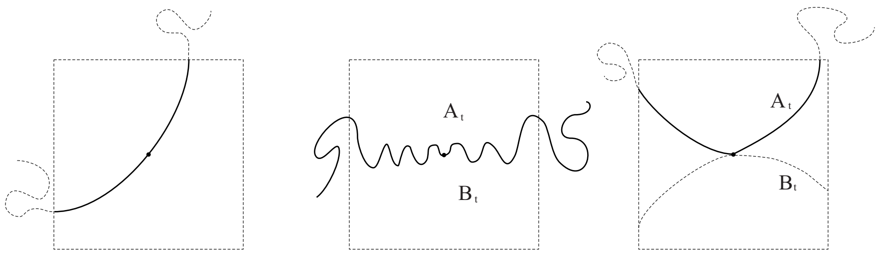
Ako je $a \in \Omega$ i φ_a grana argumenta duž γ_a i ako je $b \in \Omega$ izabrano tako da važi (7.3), gde je $\epsilon = \sqrt{2}$, može se pokazati da je funkcija $\varphi_a + R$ grana argumenta duž γ_b. □

7.1.4 Prosta zatvorena kontura deli ravan na dve oblasti

Za put (trag puta) kažemo da je specijalni elementarni grafik (u odnosu na koordinatne ose) ako je zadat pomoću jednačine $y = f(x)$ ili $x = g(y)$, gde su f i g neprekidno-diferencijabilne funkcije na odgovarajućem intervalu.

Kažemo da je tačka t (odnosno $\gamma(t)$) regularna za konturu (luk) γ, ako postoji izvod $\gamma'(t)$ i ako je različit od nule. Tačku u kojoj postoje levi i desni izvod ali su različiti nazivamo tačka preloma.

Teorema 7.2 (Žordan) *Svaka prosta zatvorena kontura γ deli ravan na tačno dve komponente i γ je granica svake od ovih komponenti.*



Slika 7.1: Lokalni kvadrati

Dokaz: Dokaz navodimo pomoću sledećih tačaka (ostavljamo čitaocu da dopuni neke detalje za vežbu):

Označimo sa $Q = Q(z;\epsilon)$ kvadrat sa središtem u z, čije su stranice dužine ϵ paralelne sa koordinatnim osama. Uvedimo notaciju $z = \gamma(t) = x(t) + iy(t)$.

1. Neka je tačka t regularna (tj. $\gamma'(t) \neq 0$) i $z = \gamma(t)$. Tada je $x'(t) \neq 0$ ili $y'(t) \neq 0$.
   Pogodno je prvo razmotriti slučaj $x'(t) \neq 0$ i $y'(t) \neq 0$. Ovaj slučaj je jednostavniji i ostavljamo ga za vežbu.

   Vežba 7.1.1 *Ako je $x'(t) \neq 0$ i $y'(t) \neq 0$ pokazati da je tada lokalno u okolini tačke $z = \gamma(t)$ kontura γ elementarni grafik u odnosu na obe koordinatne ose.*

   Razmotrimo preostala dva slučaja:

   (a) Neka je $x'(t) \neq 0$ i $y'(t) = 0$. Tada postoji δ i interval $I_\delta = [t-\delta, t+\delta]$ tako da je funkcija x ($x = x(t)$) $1-1$ na $I_1 = I_\delta$. Zato na odgovarajućem intervalu $I_2 = x(I_\delta)$ postoji inverzna funkcija $\varphi = x^{-1}$ (pišemo kratko $t = \varphi(x)$). Ako uvedemo oznaku $f = y \circ \varphi$, tada je sa $y = f(x)$, $x \in I_2$, zadat deo konture γ (elementarni grafik). Označimo sa γ^δ restrikciju γ na interval $[0,1] \backslash I_\delta$ i izaberimo ϵ dovoljno malo tako da kontura γ^δ nema zajedničkih tačaka sa kvadratom $Q(z;\epsilon)$ i da lokalni grafik prvo preseče vertikalnu ivicu kvadrata $Q(z;\epsilon)$. Podvucimo da je tada $\gamma^* \cap Q$ povezan skup. Neka je interval $J = J_\epsilon = \{\tau \in [0,1] : \gamma(\tau) \in Q(z;\epsilon)\}$. tj. inverzna slika kvadrata $Q(z;\epsilon)$ pri preslikavanju γ. Označimo sa γ_ϵ restrikciju konture γ na $J = J_\epsilon$; γ_ϵ nazivamo lokalni luk, a $J = J_\epsilon$ lokalni interval definisan tačkom t (odnosno, $z = \gamma(t)$, u odnosu na konturu γ). Neka je $I^\epsilon = x(J)$. Nije teško pokazati da skupovi $\{(x,y) : x \in I^\epsilon, y > f(x)\}$ i $\{(x,y) : x \in I^\epsilon, y < f(x)\}$ dele kvadrat na dve komponente, na primer A_t i B_t.

(b) Neka je $y'(t) \neq 0$ i $x'(t) = 0$. Slično kao u slučaju (a), pokazuje se da je deo konture γ zadat pomoću jednačine $x = g(y)$. Zato možemo izabrati ϵ dovoljno malo, tako da je presek konture γ i kvadrata $Q(z;\epsilon)$ zadat pomoću jednačine $x = g(y)$.

Dakle, u oba slučaja možemo izabrati ϵ dovoljno malo, tako da je presek konture γ i kvadrata $Q(z;\epsilon)$ zadat pomoću jednačine $y = f(x)$ ili $x = g(y)$ (kažemo: pomoću specijalnog elementarnog grafika) i da kontura deli kvadrat na dve komponente, na primer A_t i B_t.

2. Slično kao u tački 1, u tački „preloma" možemo izabrati ϵ dovoljno malo, tako da je presek konture γ i kvadrata $Q(z;\epsilon)$ zadat pomoću dva specijalna elementarna grafika, koji imaju samo jednu zajedničku tačku i da kontura deli kvadrat na dve komponente, na primer A_t i B_t.
U ovoj situaciji kažemo da su $A = A_t$ i $B = B_t$ lokalne komponente, a $Q = Q_t = Q(z;\epsilon)$ lokalni kvadrat definisan tačkom t (odnosno, $z = \gamma(t)$, u odnosu na konturu γ); slično se definiše lokalni pravougaonik.

Pridružimo svakoj tački lokalni kvadrat i odgovarajuće lokalne komponente. Dokažimo:

3. A_t i B_t pripadaju različitim komponentama skupa $\Omega = \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ za svako t.
Pretpostavimo suprotno: da za neko $t \in [0,1]$ 3. nije tačno. Tada postoje tačke a i b na ∂Q, tako da, na primer, $a \in A$, $b \in B$, $[a,b]$ ima samo jednu zajedničku tačku $c = \gamma(s)$ sa γ^* i postoji specijalna poligonalna linija Λ_0 u $\Omega \setminus Q$, koja spaja tačke a i b. Neka je Λ specijalna poligonalna linija koja se sastoji od Λ_0 i intervala $[a,b]$ i $P = \mathrm{Int}\,(\Lambda)$. Tada postoji dovoljno malo δ tako da, na primer, $\gamma(t) \in P$ za $s < t < s+\delta$ (slučaj $\gamma(t) \in P$ za $s-\delta < t < s$ razmatra se slično). Odatle, najpre sledi $\gamma(t) \in P$ za $s < t < 1$, pa stoga kontura γ nije zatvorena, što je kontradikcija.

4. Neka je t_0 proizvoljna tačka i A_{t_0} jedna od dve komponente koje pridružujemo tački t_0. Neka je E skup tačaka t takav da postoji poligonalna linija koja sa γ nema presečnih tačaka i koja spaja A_{t_0} sa jednom od dve lokalne komponente (označimo je sa A_t) koje su pridružene tački t.
Dokažimo da je skup E otvoreno-zatvoren i stoga da je $E = [0,1]$.
Neka je $t \in [0,1]$ proizvoljna tačka i neka τ pripada lokalnom intervalu I_t, tj. $\gamma(\tau)$ pripada lokalnom kvadratu Q_t pridruženom tački t.

(c) Dokažimo prvo da je skup E otvoren.
Dovoljno je dokazati da $I_t \subset E$ za svako $t \in E$.
Neka $t \in E$. Tada postoji poligonalna linija koja sa γ nema presečnih tačaka i koja spaja A_{t_0} sa jednom od dve lokalne komponente definisane tačkom t (ponovimo da tu komponentu označavamo sa A_t). Neka je τ proizvoljna tačka koja pripada lokalnom intervalu I_t. Kako je $Q_\tau \cap Q_t \neq \varnothing$, jedna lokalna komponenta definisana sa τ (označimo je trenutno sa C_τ) preseca A_t. Jednostavno je pokazati da postoji poligonalna linija koja sa γ nema presečnih tačaka i koja spaja A_t sa C_τ. Otuda, kako $t \in E$, sledi da postoji poligonalna linija koja sa γ nema presečnih tačaka i koja spaja A_{t_0} sa $C_\tau = A_\tau$, pa je $\tau \in E$ i stoga $I_t \subset E$. Dakle, E je otvoren.

(d) ako $t \notin E$, tada, slično kao u tački (c), sledi da je $\tau \notin E$; dakle, E^c je otvoren skup, tj. E zatvoren.

Iz 4. nalazimo:

5. Skup $V_0 = \bigcup_{0 \le t \le 1} A_t$ pripada jednoj komponenti skupa $\Omega = \mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

6. Neka je $V_1 = \bigcup_{0 \le t \le 1} B_t$ i neka je r dovoljno veliko tako da krug U_r sadrži konturu γ. Označimo sa T_r granicu kruga U_r i sa $\mathrm{Ext}\,(\gamma)$ komponentu skupa Ω koja sadrži kružnicu T_r. Granica skupa $\mathrm{Ext}\,(\gamma)$ pripada γ^* i zato skup $\mathrm{Ext}\,(\gamma)$ ima presek sa V_0 ili V_1. Neka skup $\mathrm{Ext}\,(\gamma)$ ima presek sa, na primer, V_1. Odatle je $V_1 \subset \mathrm{Ext}\,(\gamma)$. Označimo sa $\mathrm{Int}\,(\gamma)$ komponentu skupa Ω koja sadrži V_0.
Kako granica svake komponente skupa Ω pripada γ^*, sledi da se ta komponenta poklapa sa $\mathrm{Int}\,(\gamma)$ ili $\mathrm{Ext}\,(\gamma)$. Dakle, skupovi $\mathrm{Int}\,(\gamma)$ i $\mathrm{Ext}\,(\gamma)$ su jedine komponente skupa Ω. Kako je jasno da su skupovi $\mathrm{Int}\,(\gamma)$ i $\mathrm{Ext}\,(\gamma)$ disjunktni, odatle sledi Žordanova teorema. $\square$

Vežba 7.1.2 *Neka je $z = \gamma(t)$ regularna tačka i $Q = Q_t$ lokalni kvadrat. Ako je lokalni elementarni grafik zadat pomoću $y = f(x)$ i φ preslikavanje definisano sa $\varphi(x, y) = (x, y - f(x))$, dokazati da preslikavanje φ lokalno „ispravlja" konturu γ.*

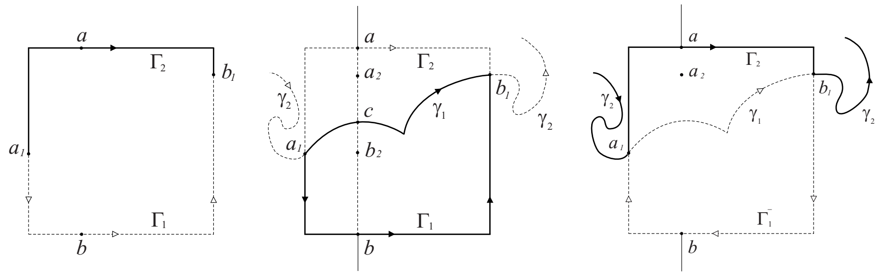
Vežba 7.1.3 *Dokazati da u okolini tačke preloma postoji glatko preslikavanje, koje lokalnu konturu preslikava u konturu koja se sastoji od horizontalnog i vertikalnog intervala.*

Za ovu vežbu videti [Be-G]. Preciznije, ako je γ kontura i $p \in \gamma^*$, tada važi:

(A) postoji okolina U_p i difeomorfizam $\varphi = \varphi_p$ koji preslikava U_p na $(-1,1) \times (-1,1)$, tako da je $\varphi(p) = 0$, $J(\varphi) > 0$ i važi jedan od sledećih:

(a) $\varphi(U_p \cap \overline{\Omega}) = (-1, 0] \times (-1, 1)$;
(b) $\varphi(U_p \cap \overline{\Omega}) = (-1, 0] \times (-1, 0]$;
(c) $\varphi(U_p \cap \overline{\Omega}) = (-1, 1) \times (-1, 1) \setminus (0, 1) \times (0, 1)$.

Na primer, u [Be-G] uvode definiciju: oblast Ω je deo po deo regularna ako za svaku tačku $p \in \partial\Omega$ važi (A).
Ako je p regularna tačka, tada važi (a), a ako je p singularna tačka, tada važi (b) ili (c). Koristimo preslikavanje φ iz Vežbe 7.1.2 i preslikavanje oblika $\psi(x, y) = (x - g(y), y)$.



Slika 7.2: Indeks pomoću lokalnih kvadrata

7. Ideja dokaza sledeće Teoreme o indeksu Žordanovog puta je da se dokaz svede na lokalni kvadrat. Pretpostavimo da važe sve do sad uvedene oznake. Označimo sa a_1 i b_1 presečne tačke $Q = Q_t$ sa γ^*, tako da restrikcija γ_1 konture γ koja pripada Q spaja a_1 i b_1. Neka je γ_2 kontura koja spaja b_1 i a_1 i ima sa Q samo krajnje tačke zajedničke, tj. $\gamma_2 = \gamma - \gamma_1$.
Neka, na primer, $b \in \mathrm{Ext}\,(\gamma)$ i neka $a_2 \in (a, c)$ i $b_2 \in (b, c)$. Tačke a_1 i b_1 dele konturu ∂Q na dve konture, Γ_1 i Γ_2, koje se mogu označiti tako da Γ_1 spaja a_1 i b_1 preko b, a Γ_2 spaja a_1 i b_1 preko a. Proverimo:

(1) broj obilazaka konture $\mathcal{C} = \gamma_1 + \Gamma_1^-$ oko tačke a_2 jednak je nuli;

(2) broj obilazaka konture $\mathcal{C}^e = \gamma_2 + \Gamma_2$ oko tačke a_2 jednak je nuli;

(3) broj obilazaka konture ∂Q oko tačke a_2 jednak je 1, gde ∂Q označava pozitivno orijentisanu granicu kvadrata Q.

Vežba 7.1.4 *Dokazati* (3).

Označimo $d = a_2$. Postoji poluprava Λ_d koje ne preseca $\mathcal{C}$ i otuda sledi (1).
Slično se dokazuje:
(4) broj obilazaka konture $\gamma_1 + \Gamma_2^-$ oko tačke b jednak je nuli.
Kako $[b, d]$ ne preseca $\mathcal{C}^e$, sledi
(5) $\Delta \mathrm{Arg}\, \mathcal{C}^e_b = \Delta \mathrm{Arg}\, \mathcal{C}^e_d$.
Kako je $b \in \mathrm{Ext}\,(\gamma)$, sledi
(6) $\Delta \mathrm{Arg}\, \gamma_b = 0$ (objasniti!).
Iz (4), (5) i (6), sledi (2).
Iz (1) i (2), „sabiranjem” (objasniti !) sledi broj obilazaka konture $\mathcal{C} + \mathcal{C}^e =$

$\gamma_1 + \Gamma_1^- + \gamma_2 + \Gamma_2$ oko tačke d jednak je 0, tj. brojevi obilazaka kontura $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ i $\Gamma_1 + \Gamma_2^- = \pm\partial Q$ oko tačke d su jednaki. Odatle, ako je na primer, Γ_1 orijentisana saglasno sa ∂Q, na osnovu (3), sledi $n(\gamma; a_2) = 1$. Dakle, u opštem slučaju, $n(\gamma; a_2) = \pm 1$, pa na osnovu Teoreme o indeksu, $n(\gamma; z) = \pm 1$ za $z \in \operatorname{Int}(\gamma)$.

Dakle, dokazali smo Teorema o indeksu Žordanovog puta, Teorema 1.13 u slučaju konture.

Teorema 7.3 (Indeks Žordanove konture) *Ako je γ zatvorena prosta kontura, tada je:*

1. $\operatorname{Ind}_\gamma w = 1$ *za svako* $w \in \operatorname{Int}(\gamma)$*;*

ili

2. $\operatorname{Ind}_\gamma w = -1$ *za svako* $w \in \operatorname{Int}(\gamma)$.

Ponovimo Definiciju 1.23 (u slučaju konture): Ako važi 1. *(respektivno* 2.*), kažemo da je kontura γ pozitivno (respektivno negativno) orijentisana.*

7.2 Analitičko produženje, primitivna funkcija, integracija duž puta i primene **

Kružni element je uređen par $\mathcal{F} = (f, B)$, gde je B otvoren krug i $f \in \mathcal{H}(B)$.

Dva elementa $\mathcal{F}_0$ i $\mathcal{F}_1$ su neposredno analitičko produženje jedan drugog ako dva uslova važe:

$B_0 \cap B_1 \neq \emptyset$, i $f_0(z) = f_1(z)$ za sve $z \in B_0 \cap B_1$. U ovom slučaju pišemo

$$\mathcal{F}_0 \sim \mathcal{F}_1 \tag{7.4}$$

Analitički lanac je konačan niz kružnih elemenata $C_a = \{\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n\}$ tako da je $\mathcal{F}_k \sim \mathcal{F}_{k+1}$ za $k = 0, \ldots, n-1$.

Lanac je konačan niz C krugova, na primer, $C = \{B_0, B_1, \ldots, B_n\}$, tako da je $B_k \cap B_{k+1} \neq \emptyset$ za $k = 0, \ldots, n-1$. Ako je dato $\mathcal{F}_0$ i ako postoji kružni element $\mathcal{F}_k$ tako da je $\mathcal{F}_{k-1} \sim \mathcal{F}_k$ za $k = 1, \ldots, n$, tada se element $\mathcal{F}_n$ naziva analitičko produženje elementa $\mathcal{F}_0$ duž lanca krugova C.

Ako je elment $\mathcal{F}_n$ analitičko produženje elementa $\mathcal{F}_0$ duž C i ako je $B_n \cap B_0 \neq \emptyset$, ne sledi da je $\mathcal{F}_n \sim \mathcal{F}_0$. Drugim rečima relacija $\sim$ nije tranzitivna.

Primer 45 *Neka su B_0, B_1, B_2 krugovi sa središtem u jedinici ω i ω^2, gde je $\omega = e^{2\pi i/3}$; izaberimo $f_k \in \mathcal{H}(B_k)$ tako da ${f_k}^2(z) = z$ i da je $(f_0, B_0) \sim (f_1, B_1)$, $(f_1, B_1) \sim (f_2, B_2)$. Tada je $f_2 = -f_0 \neq f_0$ na $B_0 \cap B_2$.*

Ipak restriktivna forma tranzitivnosti važi i na njoj se bazira dokaz Teoreme o jedinosti analitičkog produženja duž puta.

Propozicija 7.4 *Pretpostavimo da je* $B_0 \cap B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$, $(f_0, B_0) \sim (f_1, B_1)$ *i* $(f_1, B_1) \sim (f_2, B_2)$. *Tada je* $(f_0, B_0) \sim (f_2, B_2)$.

Dokaz: $f_0 = f_1$ na $B_0 \cap B_1$ i $f_1 = f_2$ na $B_1 \cap B_2$. Otuda $f_0 = f_2$ na nepraznom otvorenom skupu $B_0 \cap B_1 \cap B_2$. Kako su f_0 i f_2 holomorfne na $B_0 \cap B_2$ i $B_0 \cap B_2$ povezan, na osnovu Teoreme jedinosti, sledi $f_0 = f_2$ na $B_0 \cap B_2$. □

Kažemo da je put γ podeljen na puteve γ_k ako postoji podela $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = 1$ intervala I tako da je γ_k restrikcija γ na $I_k = [s_k, s_{k+1}]$, $k = 0, \ldots, n-1$. U ovoj situaciji kažemo da je podela $\{\gamma_k\}$ indukovana podelom intervala $\{I_k\}$, $k = 0, \ldots, n-1$.

Kažemo da je lanac krugova $C = \{B_0, B_1, \ldots, B_n\}$ pokrivač puta γ ako postoji podela puta γ na puteve $\{\gamma_k\}$, $k = 0, \ldots, n-1$, tako da

1. $\gamma\ (0)$ je centar B_0 i $\gamma\ (1)$ je centar B_n,

2. trag puta γ_k pripada B_k, $k = 0, \ldots, n-1$.

U ovoj situaciji kažemo da su lanac krugova C i podela puta γ, odnosno intervala I, saglasni.

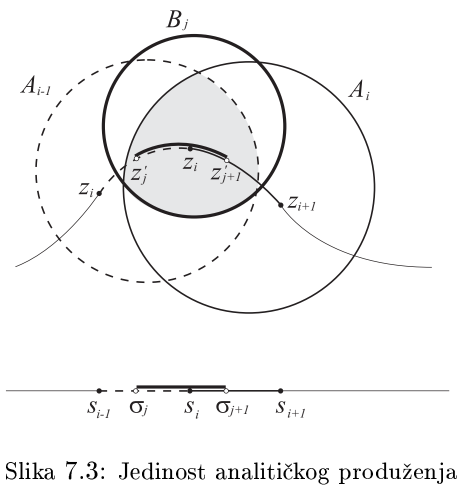
Neka je dat put γ. Ako za kružni element $\mathcal{F}_0$ postoji analitički lanac $C_a = \{\mathcal{F}_0, \ldots, \mathcal{F}_n\}$ tako da odgovarajući lanac krugova $C = \{B_0, \ldots, B_n\}$ pokriva put γ, onda kažemo da je kružni element $\mathcal{F}_n$ analitičko produženje kružnog elementa $\mathcal{F}_0$ duž γ. Takođe, kažemo da $\mathcal{F}_0$ dopušta analitičko produženje duž γ i da je C_a analitički lanac duž γ.

Teorema 7.4 (**Jedinstvenost produženja duž puta**) *Ako je* (f, B) *element i* γ *put sa početnom tačkom u centru* B, *tada* (f, B) *dopušta najviše jedno analitičko produženje duž* γ.

Preciznije, teorema tvrdi: Neka su $C_a^1 = \{(g_0, A_0), (g_1, A_1), (g_2, A_2), \ldots, (g_m, A_m)\}$ i $C_a^2 = \{(h_0, B_0), (h_1, B_1), (h_2, B_2), \ldots, (h_n, B_n)\}$ dva analitička lanca duž γ, gde je $(g_0, A_0) = (h_0, B_0) = (f, B)$. Tada je $g_m = h_n$ na $A_m \cap B_n$.

Dokaz: Neka su $C_1 = \{A_0, A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ i $C_2 = \{B_0, B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ odgovarajući kružni lanci saglasni sa podelama $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_m = 1 = s_{m+1}$ i $0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \ldots < \sigma_n = 1 = \sigma_{n+1}$, respektivno. Dokažimo da ako je $0 \leq i \leq m$, $0 \leq j \leq n$ i ako $[s_i, s_{i+1}]$ preseca $[\sigma_j, \sigma_{j+1}]$, tada $(g_i, A_i) \sim (h_j, B_j)$.

Pretpostavimo suprotno, da postoji par (i, j) za koji ovo nije tačno. Između ovih parova postoji jedan za koji je $i + j$ minimalno. Jasno je da je tada $i + j > 0$. Pretpostavimo da je $s_i \geq \sigma_j$. Tada je $i \geq 1$ i kako $[s_i, s_{i+1}]$ preseca $[\sigma_j, \sigma_{j+1}]$,



Slika 7.3: Jedinost analitičkog produženja

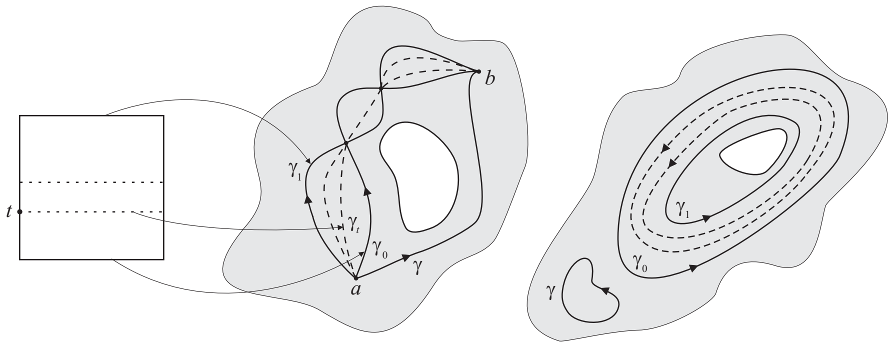
sledi
$\gamma(s_i) \in A_{i-1} \cap A_i \cap B_j$.
S obzirom na to da je $i + j$ minimalno,
nalazimo $(g_{i-1}, A_{i-1}) \sim (h_j, B_j)$ i kako
je $(g_{i-1}, A_{i-1}) \sim (g_i, A_i)$, iz Propozicije 7.4, nalazimo $(g_i, A_i) \sim (h_j, B_j)$. Ovo je kontradikcija. $\square$

Definicija 7.2 (jednoparametarska familija i homotopija) *Pretpostavimo da su tačke a i b u topološkom prostoru X i H neprekidno preslikavanje I^2 u X tako da je $H(0,t) = a$ i $H(1,t) = b$ za svako $t \in I$. Za puteve γ_t definisane sa*

$$\gamma_t(s) = H(s,t) \quad (s \in I,\, t \in I) \tag{7.5}$$

kaže se da formiraju jedno-parametarsku familiju puteva $\{\gamma_t\}$ iz a u b u X.

U ovoj situaciji kažemo da su γ_0 i γ_1 homotopni u X kao putevi sa zajedničkim krajevima a i b.
Dva zatvorena puta γ_0 i γ_1 nazivaju se homotopni u X ako postoji neprekidno preslikavanje H iz I^2 u X tako da $\gamma_0(s) = H(s,0)$ i $\gamma_1(s) = H(s,1)$, $s \in I$.



Slika 7.4:

U klasi zatvorenih puteva izdvaja se klasa homotopnih nuli. Ako je u prethodnoj definiciji $\gamma = \gamma_0$ i $\gamma_1 = \text{const}$ kaže se da je zatvoren put γ homotopan nuli (to znači da se γ neprekidno deformiše u X u tačku).
Npr. jedinična kružnica nije homotopna nuli u $\mathbb{C}^*$ i prstenu $A(r_1, R_1)$, gde je $1 < r_1 < R_1$; Svaki zatvoren put je homotopna nuli u konveksnoj oblasti (specijalno u $\mathbb{C}$, krugu, pojasu, itd.) i $\overline{\mathbb{C}}$.

Na slici 7.3.a putevi γ_0 i γ_1 su homotopni, a γ nije homotopan sa njima. Na slici 7.3.b putevi γ_0 i γ_1 su homotopni kao zatvoreni putevi, a γ nije homotopan sa njima.

Teorema 7.5 (**Nezavisnost produženja od puta**) *Neka je $\{\gamma_t\}$ jednoparametarska familija puteva iz a u b, B krug sa središtem u a i neka element (f, B) ima analitičko produženje (f_t, B_t) duž svakog puta γ_t. Tada je $f_0 = f_1$.*

Dokaz: Fiksirajmo $t \in I$. Tada postoji lanac $C = \{A_0, A_1, A_2, \ldots, A_m\}$, koji pokriva γ_t, tako da $A_0 = B$ i da je (f_t, B_t) analitičko produženje elementa (f, B) duž C. Neka je podela $0 < s_0 < s_1 < \ldots < s_m = 1 = s_{m+1}$ saglasna sa C i $E_i = \gamma_t([s_i, s_{i+1}]) \subset A_i$ $(i = 0, 1, \ldots, m-1)$. Tada postoji $\epsilon > 0$, koje je manje od rastojanja bilo kog kompakta E_i do komplementa odgovarajućeg kruga A_i. Neka je jednoparametarska familija puteva $\{\gamma_t\}$ definisana pomoću preslikavanja H. Kako je H ravnomerno neprekidno na I^2, postoji $\delta > 0$ tako da

$$|\gamma_t(s) - \gamma_u(s)| < \epsilon \text{ ako je } s \in I, u \in I, |u - t| < \delta. \tag{7.6}$$

Pretpostavimo da u zadovoljava ove uslove. Tada, iz (7.6), sledi prvo da je C pokrivač puta γ_u, i otuda, na osnovu Teoreme 7.4, zaključujemo da su f_t i f_u analitička produženja duž istog lanca C. Otuda $f_u = f_t$. Dakle, svako $t \in I$ je pokriveno intervalom J_t tako da je $f_u = f_t$ za sve $u \in I \cap J_t$. Kako je I kompakt, I je pokriven sa konačno mnogo intervala J_t; i kako je I povezan, sledi da je $f_1 = f_0$. □

Prostor X je homotopski prosto povezan ako je svaki zatvoren put u X homotopan tački u X.

Sledeće tvrđenje nije teško izvesti iz homotopske definicije prosto povezanog prostora.

Teorema 7.6 *Pretpostavimo da su Γ_0 i Γ_1 dva puta u topološkom prostoru X, sa zajedničkom početnom tačkom a i krajnjom tačkom b. Ako je X prosto povezan prostor tada postoji jednoparametarska familija $\{\gamma_t\}$ puteva iz a u b u X, tako da je $\gamma_0 = \Gamma_0$ i $\gamma_1 = \Gamma_1$.*

U ovom tekstu, pozivamo se samo na specijalni slučaj teoreme kada je topološki prostor X oblast u $\mathbb{C}$.

Iz prethodnih razmatranja, u suštini, sledi sledeća važna teorema:

Teorema 7.7 (Monodromija) *Pretpostavimo da je Ω prosto povezana oblast, (f, B) element, $B \subset \Omega$, i da (f, B) može biti produženo duž svakog puta γ u Ω sa početnom tačkom u centru B. Tada postoji $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tako da $g(z) = f(z)$ za svako $z \in B$.*

Definicija 7.3 *Neka su u oblasti Ω zadati funkcija f i put $\gamma : I \to \Omega$. Funkcija ϕ naziva se primitivna funkcija za funkciju f duž puta γ ako:*

1. *ϕ je neprekidna na I,*
2. *za svaku tačku $t_0 \in I$ postoji otvoren krug B, sa središtem u tački $z_0 = \gamma(t_0)$, na kome f ima primitivnu funkciju F_B, tako da $\phi(t) = F_B(\gamma(t))$ za svako t u nekoj okolini I_{t_0} tačke t_0.*

Definicija 7.4 *Neka su u oblasti Ω zadati funkcija f i put $\gamma : I \to \Omega$. Funkcija ϕ naziva se primitivna funkcija funkcije f duž puta γ ako:*

1. *postoji analitički lanac $\{\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n\}$, $\mathcal{F}_k = (F_k, B_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, tako da lanac krugova $C = \{B_0, B_1, \ldots, B_n\}$ pokriva put γ,*

2. $F'_k = f$ *na* B_k, $k = 0, 1, \dots, n$,
3. $\phi = F_k \circ \gamma$ *na* I_k, $k = 0, 1, \dots, n-1$, *gde je* $\{I_k\}$ *podela intervala* I *saglasna sa lancem krugova* C.

Lema 7.1 (Produženje primitivne funkcije) *Neka su* Ω_1 *i* Ω_2 *oblasti,* $\Omega_0 \equiv \Omega_1 \cap \Omega_2$ *oblast i neka su ispunjeni sledeći uslovi*

a) f_1 *i* f_2 *su respektivno holomorfne na* Ω_1 *i* Ω_2,

b) $f_1 = f_2$ *na* $\Omega_1 \cap \Omega_2$,

c) f_1 *ima primitivnu funkciju* F_1 *na* Ω_1,

d) f_2 *ima primitivnu funkciju* Φ_2 *na* Ω_2.

Tada, postoji holomorfna funkcija F_2 *na* Ω_2 *tako da*

1. $F_2 = F_1$ *na* $\Omega_0 \equiv \Omega_1 \cap \Omega_2$,
2. F_2 *je primitivna funkcija funkcije* f_2 *na* Ω_2.

Dokaz: Kako su Φ_2 i F_1 respektivno primitivne za f_2 i f_1 na $\Omega_0 \equiv \Omega_1 \cap \Omega_2$, s obzirom na *b)* postoji konstanta c tako da je $F_1 = \Phi_2 - c$ na $\Omega_0 \equiv \Omega_1 \cap \Omega_2$. Funkcija F_2 definisana sa $\Phi_2 - c$ ispunjava uslove 1. i 2. $\Box$

Posledica 7.1 (Produženje primitivne funkcije) *Neka je* $(f_1, B_1) \sim (f_2, B_2)$ *i neka je* F_1 *primitivna za* f_1 *na* B_1. *Tada postoji holomorfna funkcija* F_2 *na* B_2 *tako da je*

1. F_2 *primitivna za* f_2 *na* B_2,
2. $(F_1, B_1) \sim (F_2, B_2)$.

Lema 7.2 (Postoji primitivan lanac) *Neka je* $\{(f_0, B_0), \dots, (f_n, B_n)\}$ *analitički lanac. Tada postoji analitički lanac* $\{\mathcal{F}_0, \dots, \mathcal{F}_n\}$, $\mathcal{F}_k = (F_k, B_k)$, *tako da je* F_k *primitivna funkcija za* f_k *na* B_k, *tj.* $F'_k = f_k$ *na* B_k, $k = 0, 1, \dots, n$.

Dokaz: Neka je F_0 primitivna za f_0 na B_0 i $\mathcal{F}_0 = (f_0, B_0)$. Na osnovu Posledice 7.1, postoji primitivna funkcija F_1 za f_1 na B_1, tako da je $\mathcal{F}_1 = (f_1, B_1) \sim \mathcal{F}_0$. Uzastopnom primenom Posledice 7.1 konačno puta dokazuje se Lema. $\Box$

Posledica 7.2 *Neka je* f *holomorfna u oblasti* Ω *i neka je* $\gamma : I \to \Omega$ *put. Tada postoji analitički lanac* $C_a = \{\mathcal{F}_0, \dots, \mathcal{F}_n\}$, $\mathcal{F}_k = (f_k, B_k)$, $k = 0, 1, \dots, n$, *tako da*

1. Ω*-lanac krugova* $C = \{B_0, B_1, \dots, B_n\}$ *pokriva* γ,
2. $f'_k = f$ *na* B_k.

Dokaz: Postoji lanac krugova $C = \{B_0, B_1, \dots, B_n\}$ u Ω koji pokriva γ. Primeniti Lemu 7.2 na analitički lanac (f, B_k), $k = 0, 1, \dots, n$. $\Box$

Teorema 7.8 (Postoji primitivna funkcija duž puta) *Neka je f holomorfna u oblasti Ω i neka je $\gamma : I \to \Omega$ put. Tada postoji primitivna funkcija Φ za f duž γ i određena je do na konstantu.*

Dokaz: Na osnovu Posledice 7.2 (Leme o postojanju primitivnog lanca) postoji analitički lanac $C_a = \{F_0, F_1, \ldots, F_n\}$, $F_k = (f_k, B_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, duž γ tako da

1. Ω-lanac krugova C,
2. $F_k' = f$ na B_k.

Neka je $\{I_k\}$ podela intervala I saglasna sa C. Otuda, funkcija Φ definisana na I sa $\Phi = F_k \circ \gamma$ na I_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, je korektno definisana i, s obzirom na Definiciju 7.4, funkcija Φ je primitivna za funkciju f duž γ. □

Definicija 7.5 (Integral duž puta) *Neka je zadat put γ, funkcija f neprekidna na tragu γ^* i neka f ima primitivnu funkciju Φ duž γ. Definišimo integral funkcije f duž puta γ kao priraštaj primitivne funkcije duž γ, tj.*

(1) $I = \int\limits_\gamma f\,dz = \Phi(1) - \Phi(0).$

Neka je f holomorfna u oblasti Ω i $\gamma : I \to \Omega$ put, B_0 krug u Ω, sa središtem u $a = \gamma(0)$ i F_0 primitivna za f na B_0. Na osnovu Teoreme 7.8 (postoji primitivna funkcija duž puta), postoji primitivna funkcija Φ duž puta γ i postoji analitičko produženje (F, B) elementa (F_0, B_0) duž γ, tako da je $\Phi(0) = F_0(a)$ i $\Phi(1) = F(b)$, gde je $b = \gamma(1)$. Otuda, s obzirom na Definiciju 7.5,

(2) $I = \int\limits_\gamma f\,dz = \Phi(1) - \Phi(0) = F(b) - F_0(a).$

Teorema 7.9 (KIT homotopija) *Neka su ispunjeni sledeći uslovi*

(a) *f je holomorfna na oblasti Ω*

(b) *putevi γ_0 i γ_1 su homotopni u Ω kao putevi sa zajedničkim krajevima ili kao zatvoreni putevi.*

Tada je

(1) $\int\limits_{\gamma_0} f\,dz = \int\limits_{\gamma_1} f\,dz.$

Dokaz: Neka je $\{\gamma_s\}$, $0 \le s \le 1$, jednoparametarska familija puteva iz a u b, koja ostvaruje homotopiju između γ_0 i γ_1, neka je B krug u Ω sa središtem u a i F primitivna za f na B. Na osnovu Posledice 7.2 element (F, B) dopušta analitičko produženje duž svakog γ_s, $0 \le s \le 1$, ka elementu (F_s, B_s), gde je B_s krug sa središtem u tački b, i F_s primitivna za f na B_s. Otuda, iz Teoreme 7.5 (nezavisnost produženja od puta), dobija se

(2) $F_0 = F_1$.

S obzirom na Definiciju 7.5 integrala (preciznije formulu (2)), nalazimo

(3) $I_0 = \int\limits_{\gamma_0} f\,dz = F_0(b) - F(a)$

i

(4) $I_1 = \int\limits_{\gamma} f\,dz = F_1(b) - F(a)$.

Iz (2), (3) i (4) sledi (1). □

Vežba 7.2.1 *Izvesti Teoremu 7.9 primenjujući KIT lokalno na „krivolinijsku mrežu" u* Ω*.*

Uputstvo: Ponovimo $I^2 = [0,1] \times [0,1]$. Neka je homotopija definisana pomoću preslikavanja $H : I^2 \to \Omega$. Neka je Q_ν mreža kvadrata na I^2 tako da svako $H(Q_\nu)$ pripada nekom krugu u Ω. Označimo sa l_ν pozitivno orijentisanu granicu kvadrata Q_ν, a sa ℓ^0 i ℓ^1 respektivno orjentisane segmente $[0,1]$ i $[1+i, i]$ i neka je $\Gamma_\nu = H \circ l_\nu$. Tada je $\int\limits_{\Gamma_\nu} f dz = 0$; i kako je $\gamma_0 = H \circ \ell^0$ i $\gamma_1^- = H \circ \ell^1$, sledi $\sum \Gamma_\nu = \gamma_0 + \gamma_1^-$ i stoga
$0 = \sum \int\limits_{\Gamma_\nu} f dz = \int\limits_{\gamma_0} f dz + \int\limits_{\gamma_1^-} f dz.$ □

Teorema 7.10 (Saglasnost analitičke i geometrijske def. indeksa) *Neka je* $\Gamma : I \to \mathbb{C}$ *put i* $0 \notin \Gamma^*$*. Ako je* $g(w) = J(w) = \dfrac{1}{w}$*, tada*

(a) Funkcija $g = J$ *ima primitivnu funkciju* Φ *duž* Γ*.*

(b) $\varphi = \mathrm{Im}\Phi$ *je grana argumenta duž* Γ*.*

(c) Ako je Γ *zatvoren put tada je*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{dw}{w} = \frac{1}{2\pi} \triangle \,\mathrm{Arg}\Gamma. \tag{7.7}$$

Dokaz: Na osnovu Posledice 7.2, postoji analitički lanac $C_a = \{(h_k, A_k) : k = 0, \ldots, n\}$ duž γ tako da je $h_k'(w) = \dfrac{1}{w}$ na A_k, $k = 0, 1, \ldots, n$. Dakle $h_k = \ln_k$ i $\varphi_k = \mathrm{Im}\ln_k = \arg_k$ su respektivno grane logaritma i argumenta na A_k, $k = 0, 1, \ldots, n$. Otuda, kako je, $\Phi(t) = \ln_k \Gamma(t)$, $t \in I_k$, gde $\{I_k\}$ podela saglasna sa lancem krugova $C = \{A_0, \ldots, A_n\}$, dobija se $\varphi(t) = \mathrm{Im}\ln_k \Gamma(t) = \arg_k \Gamma(t)$, $t \in I_k$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Dakle φ je grana argumenta duž Γ. Na osnovu definicija integrala i promene argumenta, nalazimo

$$I = \int\limits_{\Gamma} \frac{dw}{w} = \Phi(1) - \Phi(0), \tag{7.8}$$

$$\triangle \mathrm{Arg}\Gamma = \varphi(1) - \varphi(0). \tag{7.9}$$

Ako je Γ zatvoren put, tada je $\Gamma(0) = \Gamma(1) = a$ i stoga

$$\begin{aligned} \Phi(1) - \Phi(0) &= \ln_n \Gamma(1) - \ln_0 \Gamma(0) \\ &= \ln_n |\Gamma(1)| + i \arg_n \Gamma(1) - \ln_0 |\Gamma(0)| - i \arg_0 \Gamma(0) \\ &= i(\arg_n \Gamma(1) - \arg_0 \Gamma(0)) = i(\varphi(1) - \varphi(0)) \end{aligned} \tag{7.10}$$

Kombinujući (7.8), (7.9) i (7.10) dobija se (7.7). □

Podvucimo da iz (c) sledi Princip Argumenta.

Vežba 7.2.2 *Izvesti Princip Argumenta iz* (c).

Uputstvo: Neka je G regularna oblast, γ pozitivno orijentisana granica oblasti G, $f \in \mathcal{H}(\overline{G})$ i $\Gamma = f \circ \gamma$. Tada je

$$\frac{1}{2\pi} \triangle \mathrm{Arg}\Gamma = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{dw}{w} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f'}{f} dz. \tag{7.11}$$

Teorema 7.11 (Postojanje neprekidnog logaritma) *Neka je D prosto povezana oblast i $f : D \to \mathbb{C}^*$ neprekidna (respektivno holomorfna) funkcija na D. Tada postoji neprekidna (respektivno holomorfna) funkcija g na D tako da je $e^g = f$ na D.*

Dokaz: Neka je a fiksirana tačka u oblasti D i z_0 proizvoljna tačka u D; γ_0 i γ_1 dva puta u D koji „spajaju" tačke a i z_0. Kako je D prosto povezana postoji jednoparametarska funkcija puteva γ_s, $0 \leq s \leq 1$, u D koja ostvaruje homotopiju između γ_0 i γ_1. Definišimo $\Gamma_s = f \circ \gamma_s$, $0 \leq s \leq 1$, i neka je $a_1 = f(a)$, $B_0 = B(a_1; r)$, gde je $r = |a_1|$ i označimo sa $h_0 = \ln_0$ granu logaritma na B_0 i sa $F_0 = (h_0, B_0)$. Kako funkcija $J(w) = 1/w$ ima primitivnu duž svakog puta Γ_s i kako je h_0 primitivna za J na B_0 element F_0 ima analitičko produženje (h_s, A_s) duž Γ_s, gde je A_s krug sa centrom u $w_0 = f(z_0)$. Otuda, na osnovu Teoreme 7.5, analitičko produženje elementa F_0 duž Γ_0 i Γ_1 daje isti element (h, A), gde su $A = A_{w_0}$ krug sa središtem u $w_0 = f(z_0)$ i $h = \ln$ grana logaritma na A. Otuda je definicija

$$g(z_0) = h(f(z_0))$$

korektna.
Neka je $B = B_{z_0} \subset D$ krug sa središtem u z_0 tako da je $f(B) \subset A$. Tada je

$$g(z) = h(f(z)),\ z \in B.$$

Otuda ako je f holomorfna na B sledi da je i g holomorfna na B i stoga holomorfna na D. Kako je $h = \ln$ grana logaritma zaključujemo prvo da je $e^g = f$ na B i stoga na D. $\square$

Skiciraćemo još dva načina za dokaz Teoreme 7.11 (o postojanju neprekidnog logaritma).

1. Teorema 7.11 (o postojanju neprekidnog logaritma) dokazana je na drugi način u sekciji 5.2 (*Postojanje grana*), u kojoj se ne pozivamo na Teoremu o monodromiji. Za vežbu izvesti dokaz ove teoreme pomoću homotopskog pristupa; uputstvo: neka je je Λ zatvorena prosta poligonalna linija u D, tada je Λ homotopna 0 u D i otuda $f \circ \Lambda$ homotopna 0 u $\mathbb{C}^*$ i stoga $\Delta_\Lambda \mathrm{Arg} f = 0$, tj. $f \circ \Lambda$ ne „obilazi" oko 0, tj. $\mathrm{Ind}_{f\circ\Lambda} 0 = 0$.

2. Na osnovu Teoreme o sumi indeksa, u članku [Ma 3], takođe sledi $\mathrm{Ind}_{f\circ\Lambda} 0 = 0$. Podvucimo da se Teorema o sumi indeksa dokazuje pomoću podele oblasti na mrežu i autoru to izgleda prihvatljivije od homotopije.

7.3 Integracija duž konture, Košijeva Integralna Teorema i Posledice**

U prvom čitanju čitalac može preskočiti dokaze nekih teoreme iz ove sekcije (Teoreme o Indeksu za proste puteve, Teoreme o Indeksu, Košijeva Formule za cikl). Radi pogodnosti za čitaoca i kompletnosti neki delovi se ponavljaju iz prethodnih glava, a neki rezultati dokazuju drugim metodama.

Obratiti pažnju:

1. Metod dokaza koji se bazira na gemetrijsko-topološkim razmatranjima kao što su: razne triangulacije, podele oblasti na jednostavnije delove, itd...; kratko nazivamo „metod podele-triangulacije"

U glavi 2, ovog teksta (videti takođe [Ma 2]), skiciran je dokaz Grinove teoreme za jednostavne oblasti pomoću „metoda podele-triangulacije".

2. Dokaz KIT-kont može se bazirati na neelementarnoj verziji „metoda podele-triangulacije"; činjenici da oblast G dopušta koherentnu triangulaciju (Lema Top 2) i na primeni KIT-konv -lokalna verzija.

Lema Top 2 [o podeli regularne oblasti]

Regularna oblast se može razložiti na končan broj koherentno orjentisanih regularnih oblasti proizvoljno malog dijametra.

U glavi 2, ovog teksta (videti takođe [Ma 2]), pomoću Lema Top 2 (koja se dokazuje u ovoj glavi, videti Sekciju 7.5), izveden je dokaz KIT za regularne oblasti.

3. U Sekciji 7.5, pomoću metoda podele, data je skica dokaza Leme Top i dokaz Grinove formule za regularne oblasti (videti takođe [Ma 3], gde se koristi i razbijanja jedinice).

* Npr. u [Be-G]) (videti takođe [Zo]), pomoću razbijanja jedinice, dokazuje se Grinova formula za deo po deo glatke mnogostrukosti sa krajem.

Podvucimo još jedanput da dokaz Grinove teoreme za regularne oblasti zahteva dodatna razmatranja (videti Sekciju 7.5).

4. Smatramo da je, dokaz KIT, koji navodimo u ovoj sekciji, „čisto analitički" u smislu da se bazira na pojmu i osobinama indeksa i ne bazira na „metod podele-triangulacije".
Interesantno je da se koristeći pojam i osobine indeksa (metod indeksa) može dokazati KIT za regularne oblasti (kao posledica KITcikl) i tako izbeći pozivanje na Lemu Top 2 ili na Grinov-e teoreme za regularne oblasti. Ovo je značajno jer dokazi Leme Top 2 i Grinove teoreme za regularne oblasti nisu jednostavani.

Pomoću metoda indeksa i primitivne funkcije duž puta može se dokazati da KIFcikl važi i za cikl koji se sastoji od puteva (dakle glatkost nije bitna); ovo je važno jer je glatkost bitna za metod podele.

U Sekciji 7.4.1* dat je dokaz Karateodorijeve (Caratheodory) teoreme.

7.3.1 Lokalna teorija

Prvo, ponovimo kratko pristup iz glave 2; pošto, smatramo da je korisno za čitaoca da ponovimo neke definicije i rezultate, onda ih nećemo ponovo numerisati na dosadašnji način. Čitalac može takođe paralelno razmotriti i pod sekciju Košijeva integralna Teorema o konturama 7.3.3.

Definicija 1. *Put* u $\mathbb{C}$ je neprekidno preslikavanje γ kompaktnog intervala $[\alpha,\beta]\subset \mathbb{R}$ $(\alpha<\beta)$ u $\mathbb{C}$. Mi nazivamo interval $[\alpha,\beta]$ parametarskim intervalom puta γ i sa γ^* oznacavamo sliku puta γ.

Luk je deo-po-deo neprekidno-diferencijabilan put u ravni. Kontura je deo-po-deo gladak put u ravni.

Pretpostavimo da je γ luk i da je f neprekidna funkcija na γ^*. Itegral funkcije f duž puta γ definiše se kao integral duž parametarskog intervala $[\alpha,\beta]$ puta γ:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt.$$

Ako je $a\in\mathbb{C}$, kompleksan broj, i $r>0$, put definisan sa

$$\gamma(t) = a + re^{it},\ 0\le t\le 2\pi,$$

naziva se pozitivno orijentisana kružnica sa centrom u a poluprečnika r.

Ako su a i b kompleksni brojevi, put definisan sa

$$\gamma(t) = a + (b-a)t,\ 0\le t\le 1,$$

naziva se orijentisan interval $[a,b]$.

Neka je $\{a,b,c\}$ uređena trojka kompleksnih brojeva i neka je Δ trougao sa temenima a,b i c (najmanji konveksan skup koji sadrži tačke a,b i c). Za neprekidnu funkciju f na granici $\partial\Delta$, trougla Δ, definišemo

$$\int_{\partial\Delta} f\,dz = \int_{[a,b]} f\,dz + \int_{[b,c]} f\,dz + \int_{[c,a]} f\,dz.$$

Lokalna Košijeva Teorema

Postoji nekoliko formi Košijeve teoreme. Mi ćemo prvo izvesti lokalnu verziju koja je dovoljna za većinu primena. Opšta verzija te teoreme će biti ustanovljena kasnije.

Od sada, pa na dalje, Ω će nam označavati otvoren skup u $\mathbb{C}$ a sa $\mathcal{H}(\Omega)$ ćemo označavati familiju holomorfnih funkcija u Ω.

Teorema 1. *Pretpostavimo da je $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ i da je F' neprekidna u Ω. Ako je γ zatvorena kontura u Ω, tada je*

$$\int_\gamma F'(z)\,dz = 0.$$

Dokaz. Ako je $[\alpha,\beta]$ parametarski interval krive γ, tada, koristeći Njutn-Lajbnic-ovu formulu i činenicu $\gamma(\alpha)=\gamma(\beta)$, dobijamo

$$\int_\gamma F'(z)\,dz = \int_\alpha^\beta F'(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(\alpha)) = 0.$$

Posledica 1. Kako je z^n izvod funkcije $\frac{z^{n+1}}{n+1}$ za $n \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\}$, zaključujemo

$$\int_\gamma z^n\,dz = 0,$$

za svaku zatvorenu konturu γ ako je $n = 0,1,2,...$, i za svaku zatvorenu konturu γ za koju $0 \notin \gamma^*$ ako je $n = -2,-3,-4,....$

Košijeva Teorema za trouglove. *Pretpostavimo da je Δ zatvoreni trougao u otvorenom skupu $\Omega \subset \mathbb{C}$ i $p \in \Omega$. Ako je f neprekidna u Ω i $f \in \mathcal{H}(\Omega - \{p\})$, tada je*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0.$$

Dokaz. Dokazaćemo kasnije da naše pretpostavke povlače da je $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, tj., da izuzeta tačka p nije stvarno izuzeta. Ipak, gornja formulacija teoreme biće korisna u dokazu Košijeve formule.

Ako $p \notin \Delta$ dokaz je standardan.

Pretpostavimo sada da je p vrh trougla Δ, na primer $p = a$. Ako su a, b i c kolinearne tačke tada je lako proveriti da je $\int_{\partial\Delta} f\,dz = 0$, za svaku neprekidnu funkciju f na granici $\partial\Delta$, trougla Δ.

Ako to nije ispunjeno izaberimo tačku $x \in [a, b]$ i $y \in [a, c]$, obe blizu tačke a, i primetimo da je integral funkcije f duž $\partial\Delta$, trougla Δ, suma integrala po granicama trouglova $\{a, x, y\}$, $\{x, b, y\}$ i $\{b, c, y\}$.

Druga dva od ovih integrala su nula, jer trougao ne sadrži tačku p. Otuda

$$I = \int_{\partial\Delta} f\,dz = \int_{[a,x]} f\,dz + \int_{[x,y]} f\,dz + \int_{[y,a]} f\,dz,$$

i kako je funkcija f ograničena ovi integrali mogu biti učinjeni proizvoljno mali, tako da ponovo dobijamo

$$\int_{\partial\Delta} f\,dz = 0.$$

Na kraju, ako je p proizvoljna tačka u trouglu Δ, primenom prethodnih rezultata na trouglove $\{a, b, p\}$, $\{b, c, p\}$ i $\{c, a, p\}$ dobijamo kompletan dokaz.

Košijeva Teorema za konveksne skupove. *Pretpostavimo da je Ω konveksan otvoren skup, $p \in \Omega$, f neprekidna u Ω i $f \in \mathcal{H}(\Omega - \{p\})$. Tada važi*

(a) f ima primitivnu funkciju $F \in \mathcal{H}(\Omega)$

(b) ako je γ zatvorena kontura u Ω tada je

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz \;=\; 0.$$

Dokaz. (a) Fiksirajmo $a \in \Omega$. Kako je Ω konveksan skup, Ω sadrži pravolinijski interval $[a, z]$ za svako $z \in \Omega$, tako da možemo definisati

$$F(z) = \int_{[a,z]} f(\zeta)\,d\zeta,\ \ z \in \Omega.$$

Za svako $z,\ z_0 \in \Omega$ trougao sa vrhovima u $a,\ z_0$ i z pripada Ω, pa na osnovu Košijeve teoreme za trouglove dobijamo

$$\int_{[a,z]} f + \int_{[z,z_0]} f + \int_{[z_0,a]} f = 0,$$

i otuda $F(z) - F(z_0) = \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\,d\zeta$.

Sada prerpostavimo da je z_0 fiksirano. Za $z \neq z_0$ dobijamo

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) = \frac{1}{z - z_0} \int_{[z_0,z]} [f(\zeta) - f(z_0)]\,d\zeta.$$

Za dato $\epsilon > 0$, kako je f neprekidna u tački z_0, zaključujemo da postoji $\delta > 0$ tako da je $|f(\zeta) - f(z_0)| < \epsilon$, $\zeta \in [z_0, z]$, ako je $|z - z_0| < \delta$. Otuda zaključujemo da ako je $|z - z_0| < \delta$, tada je apsolutna vrednost leve strane manja od ϵ. Ovo dokazuje da je $F' = f$. Specijalno $F \in \mathcal{H}(\Omega)$. Sada (b) sledi iz Teoreme 1.

Verzija teoreme o Indeksu za zatvorene puteve, koja sledi, ima osnovnu ulogu u raznim delovima matematike (Toplogiji, Kompleksnoj Analizi, diferencijalnoj geometriji,itd...). Dokaz ove teoreme, pomoću metoda argumenta (geometrijski pristup), dat je u Sekciji 7.1 (videti takođe [Ma 2]). Ovde navodimo analitički dokaz.

Teorema 2 (Teorema o Indeksu).* *Neka je γ zatvorena kontura u $\mathbb{C}$, Ω komplement od γ^* i definišimo*

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \ z \in \Omega. \tag{7.12}$$

Tada je Ind_γ celobrojna funkcija na Ω, neprekidna na svakoj komponenti od Ω i jednaka nuli na neograničenoj komponenti.
Definiciju indeksa pomću formule (7.12) nazivamo analitička definicija indeksa ili definicija indeksa pomoću integrala.
U [Ma 2] koristi se i oznaka $\mathcal{K}_\gamma$ umesto Ind_γ.
Dokaz: Neka je $[\alpha, \beta]$ parametarski interval konture γ. Za fiksirano $z \in \Omega$

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta \frac{\gamma'(\tau)}{\gamma(\tau) - z}\, d\tau. \tag{7.13}$$

Kako je $\frac{w}{2\pi i}$ ceo broj akko $e^w = 1$, to je prvo tvrđenje teoreme ekvivalentno tvrđenju da je $\varphi(\beta) = 1$, gde je

$$\varphi(t) = \exp\,(\int_\alpha^t \frac{\gamma'(\tau)}{\gamma(\tau) - z}\, d\tau\,), \ \alpha \le t \le \beta. \tag{7.14}$$

Diferencirajući relaciju (3) dobijamo

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}, \tag{7.15}$$

tj. $\varphi'(t)(\gamma(t) - z) = \gamma'(t)\varphi(t)$, izuzev možda na konačnom skupu tačaka S, na kome preslikavanje γ nije diferencijabilno. Otuda funkcija $\phi = \dfrac{\varphi}{\gamma - z}$ je neprekidna na $[\alpha, \beta]$, i kako je $\phi'(t) = \dfrac{\varphi'(t)(\gamma(t) - z) - \gamma'(t)\varphi(t)}{(\gamma(t) - z)^2}$ na $[\alpha, \beta] \setminus S$, izvod funkcije ϕ jednak nuli $[\alpha, \beta] \setminus S$. Kako je skup S konačan, funkcija $\phi = \dfrac{\varphi}{\gamma - z}$ je konstanta na $[\alpha, \beta]$ i kako je $\varphi(\alpha) = 1$, dobijamo

$$\varphi(t) = \frac{\gamma(t) - z}{\gamma(\alpha) - z}, \ \alpha \le t \le \beta. \tag{7.16}$$

Sada, koristeći pretpostavku da je kontura γ zatvorena, tj., da je $\gamma(\beta) = \gamma(\alpha)$, dobijamo, iz relacije 7.16, da je $\varphi(\beta) = 1$, i ovo, kako je primećeno gore, dokazuje da je $\operatorname{Ind}_\gamma(z)$ ceo broj.

Dalje se rutinski proverava da je $\operatorname{Ind}_\gamma$ neprekidna funkcija na Ω. Međutim, neprekidna funkcija preslikava povezane skupove na povezane skupove i kako je $\operatorname{Ind}_\gamma$ celobrojna funkcija, tada je ona konstanta na svakoj komponenti skupa Ω. Koristeći 7.13, sledi da je $|\operatorname{Ind}_\gamma(z)| < 1$ ako je $|z|$ dovoljno veliko. Ovo pokazuje da je $\operatorname{Ind}_\gamma(z) = 0$ na neograničenoj komponenti povezanosti skupa Ω. □

U kursevima diferencijalne geometrije dokazuje se Jordan-ova Teorema: Svaka prosta zatvorena kontura γ u $\mathbb{C}$, deli $\mathbb{C}$ na dve oblasti i γ^* je granica svake od ovih oblasti.

Ograničenu komponentu $\mathbb{C}\backslash\gamma^*$ označavamo sa $\operatorname{Int}(\gamma)$ a neograničenu sa $\operatorname{Ext}(\gamma)$.

Za konturu γ definišemo

$$\mu_\gamma(p) = \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - p}, \ p \notin \gamma^*.$$

Podvucimo da se u ovoj definiciji ne pretpostavlja da je kontura γ zatvorena. Ako je γ zatvorena kontura tada je

$$\mu_\gamma(p) = 2\pi i \operatorname{Ind}_\gamma(p), \ p \notin \gamma^*.$$

Teorema 7.10 pokazuje da je definicija indeksa pomoću integrala saglasna sa geometriiskom definicijom indeksa, Definicijom 7.1.

Ponovimo, put γ definisan sa $\gamma = \gamma(t) = a + re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$ naziva se pozitivno orijentisana kružnica sa centrom u tački $a \in \mathbb{C}$ poluprečnika r. Sledeća Propozicija pokazuje je ova definicija saglasna sa Definicijom 1.23.

Propozicija 7.5 *Ako je γ pozitivno orijentisana kružnica sa centrom u tački $a \in \mathbb{C}$ i poluprečnika r, tada*

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 1, & |z-a| < r \\ 0, & |z-a| > r \end{cases}$$

Dokaz: Neka je $\gamma = \gamma(t) = a + re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$. Na osnovu Teoreme 2 dovoljno je izračunati $\operatorname{Ind}_\gamma(a)$. Tada dobijamo

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = \frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi} (re^{it})^{-1} e^{it}\, dt = 1.$$

□

Vežba 7.3.1 *Proveriti da je put γ definisan sa $\gamma = \gamma(t) = a + re^{-it}$, $0 \le t \le 2\pi$, negativno orijentisana kružnica sa centrom u tački $a \in \mathbb{C}$ poluprečnika r; tj. da ova parametrizacija daje negativnu orijentaciju u smislu Definicije 1.23. Dokazati*

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases} -1, & |z-a| < r \\ 0, & |z-a| > r \end{cases}$$

Uputstvo: Iz $\gamma(t)-a = re^{-it}$, sledi da je funkcija $\varphi(t) = -t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, neprekidna grana argumenta duž γ; $\varphi(2\pi) - \varphi(0) = -2\,\pi$. $\square$

Teorema o Indeksu za Žordanove puteve.

Teorema o Indeksu za Žordanove puteve, koja sledi, ima osnovnu ulogu u Kompleksnoj Analizi. Dokaz za puteve koji su konture, pomoću metoda lokalnih kvadrata, dat je u Sekciji 7.1, kao i u [Ma 2].

Teorema o Indeksu. (za proste konture (opštije put)) **Neka je γ prosta zatvorena kontura (opštije put) i neka je $p \in \mathrm{Int}(\gamma)$. Tada je*

$$\mathrm{Ind}_\gamma(p) = \underline{+}1.$$

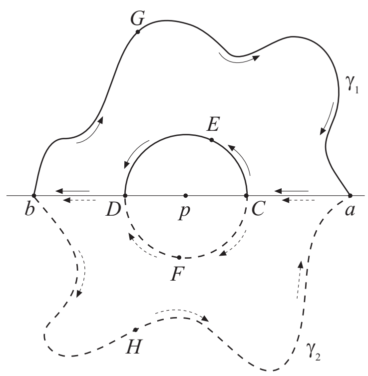
Dokaz: Neka je apb interval na horizontalnoj liniji kroz tačku p koja ima samo krajnje tačke zajedničke sa γ^* i neka je a desni kraj apb.

Neka je K kružnica sa centrom u tački p takva da $K^* \subset \mathrm{Int}(\gamma)$, $C = K^* \cap ap$, $D = K^* \cap bp$ i neka su E i F unutrašnje tačke respektivno na gornjoj i donjoj polukružnici kružnice K.

Neka su G i H tačke na lukovima krive γ koji spajaju tačke a i b tako da $p \in \mathrm{Ext}(\gamma_1)$, $\mathrm{Ext}(\gamma_2)$, gde su γ_1 i γ_2 proste zatvorene konture $\gamma_1 = aC + CED + Db + bGa$ i $\gamma_2 = aC + CFD + Db + bHa$ (videti Vežbu 7.3.2). Kako je $\mu_{\gamma_1}(p) = \mu_{\gamma_2}(p) = 0$, dobijamo

$$\mu_{aGb} = \mu_{aC} + \mu_{CED} + \mu_{Db},$$

$$\mu_{bHa} = \mu_{bD} + \mu_{DFC} + \mu_{Ca},$$



Slika 7.5:

gde se μ računa u odnosu na tačku p. Sabiranjem se dobija

$$\mu_{\gamma^+} = \mu_{K^+} = 2\pi i,$$

gde je $\gamma^+ = aGbHa$.

Slično dobijamo

$$\mu_{\gamma^-} = \mu_{K^-} = -2\pi i,$$

gde je $\gamma^- = aHbGa$. $\square$

Vežba 7.3.2 *Skicirati dokaz da postoje tačke G i H na lukovima krive γ koji spajaju tačke a i b tako da $p \in \mathrm{Ext}(\gamma_1)$, $\mathrm{Ext}(\gamma_2)$, gde su γ_1 i γ_2 proste zatvorene konture $\gamma_1 = aC + CED + Db + bGa$ i $\gamma_2 = aC + CFD + Db + bHa$.*

Definicija 2.[Definicija 1.23] Za prostu zatvorenu konturu γ u $\mathbb{C}$ kažemo da je pozitivno (respektivno negativno) orijentisana ako je $\mathrm{Ind}_\gamma(p) = 1$ (respektivno $\mathrm{Ind}_\gamma(p) = -1$) za $p \in \mathrm{Int}(\gamma)$.

Primetimo da iz prethodne definicije neposredno sledi da je za pozitivno orijentisanu prostu zatvorenu konturu $\gamma : I \mapsto \mathbb{C}$, gde je $I = [0,1]$, kontura γ^-, definisana sa $\gamma^-(t) = \gamma(1-t)$, $t \in [0,1]$, negativno orijentisana kontura.

Košijeva Formula za konveksne skupove, (lokalna verzija). *Pretpostavimo da je γ pozitivno orijentisana zatvorena prosta kontura u konveksnom otvorenom skupu Ω i $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Ako je $z \in \mathrm{Int}(\gamma)$, tada je*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta.$$

Dokaz: Fiksirajmo tačku $z \in \mathrm{Int}(\gamma)$. Funkcija g definisana sa

$$g(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}, & \zeta \in \Omega \setminus \{z\} \\ f'(z), & \zeta = z \end{cases},$$

ispunjava uslove Košijeve teoreme za konveksne skupove. Otuda imamo

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \, d\zeta = 0.$$

Koristeći da je $1 = \mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$ i poslednju jednakost dobijamo tvrđenje. □

Specijalno KIF važi za disk (lokalna verzija). Kao posledicu, dobijamo Tejlorovu teoremu o razvoju u stepeni red:

Teorema 3(Tejlorova Teorema). *Neka je $\Omega \subset \mathbb{C}$ otvoren skup i neka je $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Tada u svakom disku $B(a,R) \subset \Omega$ funkcija f se može predstaviti u obliku stepenog reda.*

Posledica 1. *Ako je $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tada je $f' \in \mathcal{H}(\Omega)$.*

7.3.2 Košijeva Integralna Teorema za cikl (KIFcikl)

Ako zatvoren put nije prost i ako „obilazi" oko tačke z više puta, onda se u KIF pojavljuje indeks (tj. broj obilazaka konture oko tačke z); o tome govori Teorema 7.12. Pre dokaza ove teoreme uvodimo definicije homologije i navodimo dva primera koji daje motivaciju za razmatranje Košijeva Formula za cikl. Podvucimo da je cikl definisan u glavi 2.

Definicija 7.6 *Pretpostavimo da je Γ cikl u otvorenom skupu Ω i $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Ako je*

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(\omega) = 0, \quad \text{za svako } \omega \text{ koje ne pripada } \Omega,$$

kažemo da je cikl Γ homologan nuli u Ω.

Ako su čitaocu pojmovi cikl i homologija apsraktni, onda može umesto cikla razmatrati zatvorene konture; kontura Γ je homologana nuli u Ω, ako ne „obilazi" nijednu tačku u Ω^c.

Primer 46 *Neka je* $B_0 = U_8$, $B_1 = B(3;1)$, $B_2 = B(-3;1)$, $F = \overline{B_1} \cup \overline{B_2}$ *i* $\Omega = U_8 \setminus F$; $\gamma_0(t) = 6e^{2\pi it}$, $\gamma_1(t) = 3 + 2e^{2\pi it}$ *i* $\gamma_2(t) = -3 + 2e^{2\pi it}$, $0 \le t \le 1$. *Putevi* γ_0, γ_1 *i* γ_2 *nisu homologni nuli u* Ω*; Cikl koji se sastoji od puteva* γ_0^-, γ_1 *i* γ_2 *jeste homologan nuli u* Ω.

Primer 47 *Neka* Γ *kontura definisana u Primeru 35 i* f *holomorfna funkcija u krugu* $\mathbb{U}_r$ *poluprečnika* $r > 9$.
Konturu Γ *podeliti na dve proste zatvorene konture i primenom KIF, za proste konture, proveriti da važi formula*

$$f(z) \cdot \mathrm{Ind}_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \text{ za svako } z \in \mathbb{U}_r \setminus \Gamma^*,$$

pri čemu $\mathrm{Ind}_\Gamma(z)$ *uzima vrednosti* $0, 1, 2$.

Analitički dokaz Košijeve Formule za cikl

Pretpostavimo da su Γ_0 i Γ_1 cikli u Ω. Kažemo da su cikli Γ_0 i Γ_1 homologni u Ω ako je

$$\mathrm{Ind}_{\Gamma_0}(\omega) = \mathrm{Ind}_{\Gamma_1}(\omega)$$

za svako ω koje ne pripada Ω.
Smatramo da je dokaz koji sledi „čisto analitički", u smislu da se ne bazira na gemetrijsko-topološkim razmatranjima, kao što su razne triangulacije, podele oblasti na jednostavnije delove, itd..., koje kratko nazivamo „metod podele-triangulacije".

Interesantno je da se koristeći pojam i osobine indeksa može dokazati KIT za regularne oblasti i tako izbeći pozivanje na Lemu Top 2. Ovo je značajno jer dokaz Leme Top 2 nije jednostavan.

Teorema 7.12 (Košijeva Formula za cikl) *Pretpostavimo da je* Γ *cikl u otvorenom skupu* Ω *i* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. *Ako je*

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(\omega) = 0, \text{ za svako } \omega \text{ koje ne pripada } \Omega, \tag{7.17}$$

tj. cikl Γ *homologan nuli u* Ω, *tada je*

$$f(z) \cdot \mathrm{Ind}_\Gamma(z) = K_\Gamma[f](z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \text{ za svako } z \in \Omega \setminus \Gamma^*, \tag{7.18}$$

i

$$\int_\Gamma f(\zeta) d\zeta = 0. \tag{7.19}$$

Ako su Γ_0 *i* Γ_1 *homologni cikli u* Ω *tada je*

$$\int_{\Gamma_0} f(\zeta) d\zeta = \int_{\Gamma_1} f(\zeta) d\zeta.$$

* dokaz koji sledi nazivamo „analitički”; iz (7.18) [KIFcikl, Košijeve integralne formule za cikl] izvodi se (7.19) [KITcikl, Košijeve integralne teorema za cikl], a otuda, pomoću Leme [ideks granice regularne oblasti], KIT za regularne oblasti. Prvo dokazujemo sledeću Lemu.

Lema 7.3 *Neka je $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Funkcija g definisana na $\Omega \times \Omega$ sa*

$$g(z,w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}, & w \neq z \\ f'(z), & w = z \end{cases}$$

je neprekidna na $\Omega \times \Omega$.

Uputsvo: Jasno je da je g neprekidna u tačkama $z \neq w$.

Fiksirajmo $a \in \Omega$. Fiksirajmo $\varepsilon > 0$. Tada postoji $B = B(a;r) \subset \Omega$ tako da je $|f'(\zeta) - f'(a)| < \varepsilon$ za svako $\zeta \in B$. Ako su z i w u B i ako je $\zeta(t) = (1-t)z + t\,w$, tada je

$$g(z,w) - g(a,a) = \int_o^1 [f'(\,\zeta(t)\,) - f'(a)]\,dt\,.$$

apsolutna vrednost integranda je manja od ε za $0 \leq t \leq 1$. Dakle $|g(z,w)-g(a,a)| < \varepsilon$. Ovo dokazuje da je g neprekidna u (a,a). □

Kako je funkcija g, na osnovu Leme 7.3, definisana na $\Omega \times \Omega$ i neprekidna na $\Omega \times \Omega$, može se definisati funkcija

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g(z,w)\,dw,\ z \in \Omega.$$

Za $z \in \Omega \setminus \Gamma^*$, Košijeva Formula za cikl (7.18) je jasno ekvivalentna tvrđenju da je $h(z) = 0$.

Neka je Ω_1 skup kompleksnih brojeva z za koje je $Ind_\Gamma z = 0$. Definišimo funkciju

$$h_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw,\ z \in \Omega_1.$$

Podvucimo da je h definisana i holomorfna na Ω i specijalno na Γ^*.
Na osnovu Morerine teoreme, može se dokazati

Lema 7.4 *Funkcije h i h_1 su respektivno analitičke u Ω i Ω_1.*

Dokaz: Na prvi pogled izgleda da se h_1 ne može holomorfno produžiti na Γ^*; ali iz pretpostavke (7.17), sledi da je $h(z) = h_1(z)$, $z \in \Omega \cap \Omega_1$, i da Ω_1 sadrži komplement oblasti Ω, tj. da je $\Omega \cup \Omega_1 = \mathbb{C}$; štaviše pokazuje se da je $h_1 \equiv 0$ na Ω_1. □

Dokaz Teoreme: Iz definicije oblasti Ω_1 zaključujemo da je $h(z) = h_1(z)$, $z \in \Omega \cap \Omega_1$. Otuda, na osnovu Leme 7.4, postoji funkcija $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega \cup\ \Omega_1)$ tako da je $\varphi = h$ na Ω i $\varphi = h_1$ na Ω_1. Iz definicije oblasti Ω_1 i pretpostavke (7.17), sledi da Ω_1 sadrži komplement oblasti Ω i specijalno da je $\Omega \cup\ \Omega_1 = \mathbb{C}$. Dakle, φ je cela funkcija.

Kako je

$$\lim_{|z|\to\infty} \varphi(z) = \lim_{|z|\to\infty} h_1(z) = 0,$$

na osnovu Liuvilove Teoreme zaključujemo da je $\varphi(z) = 0$, za svako $z \in \mathbb{C}$.
Da izvedemo (7.19) iz (7.18) izaberimo $a \in \Omega \setminus \Gamma^*$ i definišimo $F(z) = (z-a)f(z)$.
Tada je

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\zeta)\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{F(\zeta)}{\zeta - a}\,d\zeta = F(a)\cdot \mathrm{Ind}_\Gamma(a) = 0, \tag{7.20}$$

što je trebalo dokazati. □

NAPOMENA: KIFcikl važi i za cikl koji se sastoji od puteva (dakle glatkost nije bitna).
Ideja dokaza: Integral se definiše pomoću primitivne duž puta.
Fiksirajmo $z \notin \Gamma^*$. Funkcija g_z definisana sa $g_z(\zeta) = g(z,\zeta)$ ima primitivnu funkciju $\tilde{g}$ duž cikla Γ.
$I = \int_\Gamma g_z(\zeta)d\zeta$ se definiše kao priraštaj funkcije $\tilde{g}$ duž cikla Γ; npr. ako se Γ sastoji od jednog puta definisanog na $[0,1]$, tada je $I = \tilde{g}(1) - \tilde{g}(0)$.
Otuda, postoji specijalna poligonalna linija Λ „upisana" u Γ, koja pripada oblasti $\Omega \setminus \{z\}$, tako da je $I = \int_\Gamma g_z(\zeta)d\zeta = \int_\Lambda g_z(\zeta)d\zeta$.

Vežba 7.3.3 *Da li iz dokaza KIF za cikl sledi da je $h_1 \equiv 0$ na Ω_1;*
Funkcija h_1 je restrikcija fukcije $K_\Gamma[f]$, koja je je definisana na $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$; objasnisti zašto u opštem slučaju $K_\Gamma[f]$ nije analitičko produženje funkcije h_1 i specijalno nije identički jednako nuli.

Konvej (Conway) [Co] u vezi primene indeksa za dokaz Košieve tereme citira radove Artina (Artin) -a i Diksona (Dixon-a).
Ponovimo, iz prethodne teoreme (koja se dokazuje pomoću „analitičkog metoda") i Teoreme o ideksu granice regularne oblasti, sledi Košieva teorema za regularne oblasti.

Dokaz KIT cikl pomoću mreže pravougaonika

Umesto $\mathrm{Ind}_\gamma(a)$ pogodno je koristiti i oznaku $n = n(\gamma, a)$.
Ponovimo, za cikl Γ, koji pripada oblasti Ω, kažemo da je homologan nuli u Ω ako je $n(\Gamma, a) = 0$ za svako $a \in \mathbb{C}\setminus\Omega$.

Teorema 7.13 (KIT homološka verzija) *Neka je Ω oblast u $\mathbb{C}$, γ cikl homologan nuli u Ω i $f \in H(\Omega)$. Tada je*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

Dokaz: Na osnovu lokalne verzije KIT, postoji specijalna zatvorena poligonalna linija Λ homologna nuli u Ω, tako da

$$I = \int_\gamma f(z)dz = \int_\Lambda f(z)dz. \tag{7.21}$$

Neka je Λ formirana pomoću orijentisanih intervala I_k i neka su $\{\alpha_i\}$ i $\{\beta_j\}$ dva rastuća niza realnih brojeva gde $\{\alpha_i\}$ sadrži sve projekcije krajeva I_k na x-osu, a $\{\beta_j\}$ na y-osu. Označimo sa $R_{i,j}$ pravougaonike $[\alpha_i, \alpha_{i+1}] \times [\beta_j, \beta_{j+1}]$. Pogodno je prenumerisati pravougaonike tako da formiraju konačnu familiju R_k. Izaberimo tačke a_k u interioru R_k i definišimo

$$\Lambda_0 = \sum n_k \, \partial R_k,$$

gde je $n_k = n(\Lambda, a_k)$ i ∂R_k pozitivno orijentisana granica pravougaonika R_k.

Napomena: Ostavljamo čitaocu da proveri da važe sledeća svojstva (homološka verzija se detaljno izučava na posle diplomskim kursevima, videti npr. Ahlfors [Ah])

- *a.* Ako je $n(\Lambda, a_k) \neq 0$ tada $R_k \subset \Omega$
- *b.* $\Lambda = \Lambda_0$

Otuda je

$$\Lambda = \sum n_k \, \partial R_k \ , \tag{7.22}$$

gde je $n_k = n(\Lambda, a_k)$ i $\overline{R_k} \subset \Omega$.

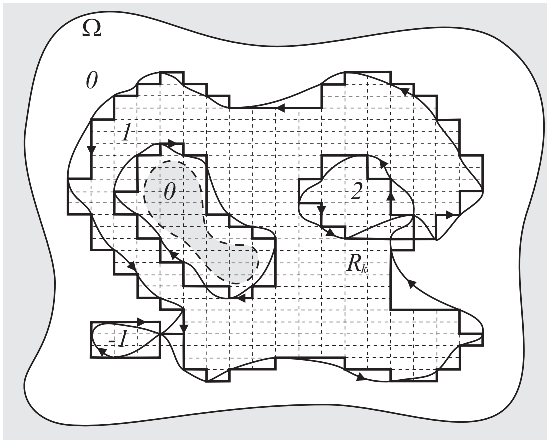
Iz (7.21) i (7.22) sledi

$$I = \int_\Lambda f(z)dz = \sum n_k \int_{\partial R_k} f(z)dz. \tag{7.23}$$

Na osnovu lokalne verzije KIT

$$\int_{\partial R_k} f(z)dz = 0,$$

i otuda s obzirom na (7.23), sledi da je $I = 0$. □



Slika 7.6: KIT cikl

Napomena: Na slici 7.6 $-1, 0, 1$ i 2 označavaju Ind_Λ (broj obilazaka puta Λ oko tačaka) u odgovarajućim komponentama.

Vežba 7.3.4 *Dokazati da se pri „transverzalnom" presecanju zatvorene konture γ indeks menja za 1.*

Uputstvo: Neka c prpada γ^* i neka je Q_c lokalni kvadrat (može se razmatrati i lokalni krug $B = B(a;r)$). Koristečemo oznake i pretpostaviti situaciju kao na slici 7.2. Broj obilazaka konture $\mathcal{C}^e$ oko tačaka a_2 i b_2 jednak je. Neka je $\mathcal{C}^1 = \gamma_1 + \Gamma_2^-$. Kako je broj obilazaka konture $\mathcal{C}^1$ oko tačake a_2 jednak 1, a oko tačake b_2 jednak 0, dobijamo da je $n_\gamma(a_2) = n_\gamma(b_2) + 1$.

7.3.3 Košijeva integralna Teorema o konturama

pristup iz glave 2

Prvo ponovimo kratko pristup iz glave 2; pošto, smatramo da je korisno za čitaoca da se ponovi pristup iz glave 2; samo nove rezultate i definicije ćemo numerisati u skaladu sa dosadašnjom numeracijom.

Ako želimo da damo kratak i pregledan uvod u CA (Complex Analysis) možemo postupiti na sledeći način. Smatramo da je prirodno i korisno, npr. bar iz pedagoško-metodoloških razloga, prvo razmotriti dokaze Košijeve integralne Teorema, pomoću „metoda-podele" i Grinove formule.

Definicija 3. Kažemo da je funkcija f *analitička* (*regularno-analitička*) u Ω ako ima konačan i neprekidan izvod u Ω. Klasu analitičkih funkcija u Ω označavamo sa $\mathcal{A}(\Omega)$.

Definicija 4. Konačna familija Γ zatvorenih kontura (d.p.d. glatkih krivih) $\{\gamma_1, .., \gamma_n\}$ naziva se cikl. Definišimo Ind_Γ sa

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = \sum_{\nu=1}^{n} \mathrm{Ind}_{\gamma_\nu}(z), \ \ z \notin \Gamma^*.$$

Definicija 5. Neka su γ_0, γ_1,..., γ_n proste zatvorene konture u $\mathbb{C}$ i neka je $G_\nu = Int(\gamma_\nu)$, $\nu = 0, 1, ..., n$. Pretpostavimo da važi

(a) $\overline{G_\nu} \subset G_0$, $\nu = 1, 2, ..., n$

(b) $\overline{G_i} \cap \overline{G_j} = \emptyset$ za $\underline{i \neq j}$, $i, j \geq 1$.

Neka je $G = G_0 - \cup_{\nu=1}^{n} \overline{G_\nu}$.

Oblast G definisana na ovaj način naziva se *regularna oblast* (n+1-struko povezana oblast). Konturu γ_0 nazivamo spoljašnjom konturom regularne oblasti G.

Pretpostavimo da su konture γ_0, γ_1,..., γ_n, koje se gore spominju, pozitivno orijentisane. Pozitivno orijentisana granica Γ oblasti G je cikl koji se sastoji od kontura γ_0, γ_1^-,..., γ_n^-.

Iz gore navedenih definicija i teoreme o indeksu za proste konture sledi

Lema o Indeksu. (za granicu regularne oblasti) *Neka je G regularna oblast i Γ pozitivno orijentisana granica oblasti G. Tada je*

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0, \ z \notin \overline{G}.$$

DOKAZ: $z \notin \overline{G}$ akko $z \in G_k = \mathrm{Int}(\gamma_k)$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ ili $z \in \mathrm{Ext}(\gamma_0)$. Npr. ako $z \in G_m$ za neko $1 \leq m \leq n$, tada

$$\mathrm{Ind}_{\gamma_k}(z) = \begin{cases} 1 & \text{ako } k \in \{0,\, m\} \\ 0 & \text{ako } k \notin \{0,\, m\} \end{cases} .$$

KOŠIJEVA TEOREMA O KONTURAMA. (KITKont) *Neka je G regularna oblast i Γ pozitivno orijentisana granica oblasti G. Ako je $f \in \mathcal{H}(\overline{G})$, tada je*

$$\int_\Gamma f(z)\, dz \,=\, 0.$$

Dokaz. Primenom Grinove teoreme dobijamo,

$$I \,=\, \int_\Gamma f(z)\, dz \,=\, 2i \int\int_G \bar{\partial} f(z)\, dxdy.$$

Kako je f analitička u G to je $\bar{\partial} f = 0$ na G i otuda $I = 0$.
U Glavi 2, skiciran je dokaz Grinove (Green-ove) teoreme za jednostavne oblasti.

U Sekciji 7.5, pomoću Teoreme o podeli na elementarne oblasti, dat je dokaz Grinove formule za regularne oblasti.

Na primer, u [Be-G]) (videti takođe [Zo]), pomoću razbijanja jedinice, dokazuje se Grinova formula za deo po deo glatke mnogostrukosti sa krajem.
Dokaz KITKont može se bazirati na činjenici da oblast G dopušta koherentnu triangulaciju (Lema Top 2) i na primeni KITKonv -lokalna verzija.

Lema Top 2 [o podeli regularne oblasti]
Regularna oblast se može razložiti na končan broj koherentno orijentisanih regularnih oblasti proizvoljno malog dijametra.

U Glavi 2, pomoću Lema Top 2 (koja nije dokazana), izveden je dokaz KIT za regularne oblasti.
Podvucimo još jedanput da dokaz Grinove teoreme za regularne oblasti zahteva dodatna razmatranja (videti Sekciju 7.5).

Ako je G regularna 1-struko povezana oblast u $\mathbb{C}$ tada se Košijeva Teorema o konturama svodi na teoremu Koši- Gursa (Cauchy -Goursat-a).

TEOREMA KOŠI-GURSA 2- VERZIJA ZA PROSTU ZATVORENU KONTURU. *Neka je γ prosta zatvorena kontura u $\mathbb{C}$ i neka je $G = \mathrm{Int}(\gamma)$. Ako je $f \in \mathcal{H}(\overline{G})$, tada je*

$$\int_\gamma f(z)\, dz \,=\, 0.$$

Ponovimo, u sekciji 7.3.2 dat je dokaz pomoću indeksa, bez pozivanja na Grinovu teoremu, opšte verzije KITKont (* u drugom delu kursa razmaraju se različite verzije KIT).

Koristeći KITKont možemo izvesti nekoliko važnih teorema.

Košijeva Formula za konturne oblasti. (KIFKont) *Neka je G regularna oblast u $\mathbb{C}$, Γ pozitivno orijentisana granica oblasti G i $f \in \mathcal{H}(\overline{G})$. Ako je $z \in G$, tada je*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{1}$$

Dokaz. Izaberimo $\rho > 0$ dovoljno malo tako da disk $B_\rho = B(z, \rho)$ kompaktno pripada oblasti G. Neka je $G_\rho = G - \overline{B}_\rho$ i $\gamma = \gamma_\rho$ pozitivno orijentisana kružnica definisana jednačinom:

$$\gamma(t) = z + \rho e^{it},\ 0 \le t \le 2\pi.$$

Definišimo funkciju g sa $g(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$, $\zeta \in G_\rho$.
Kako je g analitička u G_ρ, primenom KITKont dobijamo

$$\int_\Gamma g\, d\zeta = \int_\gamma g\, d\zeta. \tag{2}$$

Koristeći smenu promenljive $\zeta = \gamma(t)$, nalazimo da je

$$I = I(\rho) = \int_\gamma g(\zeta)\, d\zeta = i \int_0^{2\pi} f(z + \rho e^{it})\, dt.$$

Otuda, $I(\rho) \to 2\pi i f(z)$, kada $\rho \to 0$, što zajedno sa relacijom (2) daje (1). $\square$

Dokaz Košijeve integralne formule za regularne oblasti pomoću KIFcikl i Leme o Indeksu.

*Iz Košijeve integralne formule- teoreme za cikl (homološka verzija, koja je dokazana pomoću „analitičkog metoda”) i Leme o indeksu za granicu regularne oblasti, neposredno sledi Košieva teorema za regularne oblasti.
Kako je $f \in \mathcal{H}(\overline{G})$, postoji oblast Ω koja sadrži $\overline{G}$ tako da je $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Na osnovu Leme o indeksu za granicu regularne oblasti, Γ je homologan 0 u Ω. Otuda, sledi da su Košijeve integralna formula i teorema za regularne oblasti specijalni slučajevi KIFcikl i KITcikl.

Smatramo da je korisno, npr. iz pedagoških razloga, ponoviti deo razmatranja iz dokaza Košijeve integralne formule za cikl.
Kako je $f \in \mathcal{H}(\overline{G})$, postoji oblast Ω koja sadrži $\overline{G}$ tako da je $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Na osnovu Leme 7.3, funkcija g definisana na $\Omega \times \Omega$ sa

$$g(z, w) = \begin{cases} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}, & w \neq z \\ f'(z), & w = z \end{cases}$$

je neprekidna na $\Omega \times \Omega$.
Otuda možemo definisati funkciju

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma g(z,w)\, dw, \;\; z \in \Omega.$$

Neka je $G_1 = \mathbb{C} \setminus \overline{G}$. Definišimo funkciju

$$h_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw, \;\; z \in G_1.$$

Iz Leme 7.4, sledi da su funkcije h i h_1 analitičke respektivno u oblastima Ω i G_1. Na osnovu Leme o indeksu za granicu regularne oblasti, zaključujemo da je $h(z) = h_1(z)$, $z \in \Omega \cap G_1$. Otuda postoji funkcija $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega \cup G_1)$ tako da je $\varphi = h$ na Ω i $\varphi = h_1$ na G_1. Iz definicije oblasti G_1 sledi da G_1 sadrži komplement oblasti Ω. Dakle, φ je cela funkcija.

Kako je

$$\lim_{|z|\to\infty} \varphi(z) = \lim_{|z|\to\infty} h_1(z) = 0,$$

na osnovu Liuvilove Teoreme zaključujemo da je $\varphi(z) = 0$ za svako $z \in \mathbb{C}$.
Konvej [Co] u vezi primene indeksa za dokaz Koši tereme citira radove Artina i Diksona.

KIT o Rezidumima

Košijeva Teorema o Rezidumima. (KTRez) *Pretpostavimo*

(a) f je analitička u oblasti D izuzev izolovanog skupa singularnih tačaka

(b) G je regularna oblast koja kompaktno pripada D i ∂G ne sadrži singularne tačke funkcije f.

Ako su a_1, a_2,..., a_n singularne tačke funkcije f u G i Γ pozitivno orijentisana granica oblasti G, tada je

$$\int_\Gamma f(z)\, dz \,=\, 2\pi i \sum_{\nu=1}^{n} res_{a_\nu} f.$$

Dokaz. Konstruišimo kružnice $\gamma_\nu = \{z :| z - a_\nu |= r\}$ dovoljno malog poluprečnika

tako da su zatvoreni diskovi $\overline{B}_\nu$, koji su ograničeni kružnicama γ_ν, disjunktni i da pripadaju oblasti G.
Neka je $G_r = G - \cup_{\nu=1}^{n} \overline{B}_\nu$ i neka je Γ_r pozitivno orijentisana granica oblasti G_r. Kako je oblast G_r regularna i f analitička funkcija u $\overline{G}_r$, na osnovu KITKont, dobijamo da je

$$\int_{\Gamma_r} f\, dz \,=\, 0.$$

Otuda, kako se kontura G_r sastoji od pozitivno orijentisane granice Γ oblasti G i negativno orijentisanih kružnica γ_ν^-, $\nu = 1, 2, ..., n$, na osnovu svojstava integrala, dobijamo

$$\int_\Gamma f\,dz = \sum_{\nu=1}^{n} \int_{\gamma_\nu} f\,dz = 2\pi i \sum_{\nu=1}^{n} res_{a_\nu} f.$$

Dakle, izračunavanje integrala analitičke funkcije, duž orijentisane granice oblasti, svodi se na izračunavanje integrala po kružnicama, dovoljno malog poluprečnika, sa centrima u singularnim tačkama. □

Teorema o Sumi Reziduma. (TΣRez) *Neka je f analitička funkcija u $\mathbb{C} - A$, gde je $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\} \subset \mathbb{C}$. Tada je suma reziduma u svim konačnim singularnim tačkama i reziduma funkcije f u ∞ jednaka nuli, tj.,*

$$\sum_{\nu=1}^{n} res_{a_\nu} f + res_\infty f = 0.$$

7.3.4 Košijeva Integralna Teorema za prosto-povezane oblasti

Prtosto-povezane oblasti

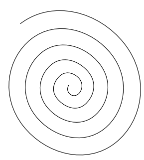
U vezi sa diskusijom u ovoj sekciji videti takođe [Ma 3].
Razne definicije prosto-povezanih oblasti naveli smo u glavi 6. Ponovimo jednu od definicija, kažemo da je oblast $G \subset \mathbb{C}$ prosto-povezana (definicija pomoću granice) ako je ∂G (u $\overline{\mathbb{C}}$) povezan skup u $\mathbb{C}$.

Primer 48 *Neka je put γ definisan sa*

$$\gamma(t) = t\,e^{it},\ 0 \le t < \infty,$$

i neka je $G = \mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Kako je granica, ∂G, oblasti G, trag $\gamma*$, krive γ, i kako je skup γ^* povezan (kao neprekidna slika povezanog skupa), zaključujemo da je G prosto-povezana oblast.

Koristeći Rimanovu teoremu može se pokazati da je oblast G prosto-povezana akko je homotopski prosto povezana, tj. akko je svaka zatvorena kontura u G homotopski ekvivalentna tački. Možemo primetiti da je teško u prethodnom primeru pokazati da je svaka zatvorena kontura u G homotopski trivijalna (homotopna tački).



Slika 7.7: Spirala

Definicija prosto-povezanosti, koju smo naveli u ovoj sekciji, nije opšte prihvaćena i ne može biti korišćena za dimenzije $n \ge 3$.

Izbor ove definicije ima prednost u odnosu na ostale jer daje veoma brzo rezultate vezane za kompleksnu integraciju.

Primer 49 *Jednostavno se proverava da su kružni disk, poluravan i paralelni pojas prosto-povezane oblasti. Na primer, paralelni pojas* $V = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Im} y < 1\}$ *je prosto-povezana oblast. Ovaj primer nam pokazuje da je bitno da se granica* ∂V *uzima u* $\overline{\mathbb{C}}$

$$\partial V = l_1 \cup l_2 \cup \{\infty\}, \text{ u } \overline{\mathbb{C}},$$

gde je $l_1 = \{x : x \in \mathbb{R}\}$ *i* $l_2 = \{x + i : x \in \mathbb{R}\}$. *Primetimo da granica* $l_1 \cup l_2$, *u* $\mathbb{C}$, *oblasti* V, *nije povezan skup.*

Prema definiciji, spoljašnost zatvorenog jediničnog kruga $\overline{U}^c = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ nije prosto-povezana oblast, jer se njena granica, u $\overline{\mathbb{C}}$, sastoji od kružnice i $\{\infty\}$.

Definicija se može primeniti i na oblasti u $\overline{\mathbb{C}}$. Uglavnom, izuzev ako to eksplicitno ne navedemo, razmatramo oblasti u $\mathbb{C}$.

Skicirajmo dokaz da ako je $G \subset \mathbb{C}$ prosto-povezana oblast (definicija pomoću granice), tada je G poligonalno prosto-povezana oblast, Lema 7.6. U prvom čitanju može se izostaviti dokaz, koji se bazira na sledećoj lemi.

Lema 7.5 *Ako je* V *povezan skup u* $\mathbb{C}$, $W \subset \mathbb{C}$ *skup takav da je* $V \cap W \neq \emptyset$ *i* $\partial W \cap V = \emptyset$, *tada je* $V \subset W$.

Uputstvo: ako $a \in V \cap W$ i ako svaki krug $B(a; \varepsilon)$ ima neprazan presek sa W^c, tada $a \in \partial W$ što je kontradikcija sa $\partial W \cap V = \emptyset$; otuda skup $V \cap W$ je otvoren u V. Ako je $V \cap W^c \neq \emptyset$, skupovi $V \cap W$ i $V \cap W^c$ su neprazni otvoreno-zatvoreni u V.

Sada dokažimo ako je $G \subset \mathbb{C}$ prosto-povezana oblast, tada je G poligonalno prosto-povezana oblast.

Lema 7.6 *Pretpostavimo da je* γ *prosta zatvorena poligonalna linija u prosto-povezanoj (definicija pomoću granice) oblasti* $G \subset \mathbb{C}$. *Tada* $\mathrm{Int}(\gamma) \subset G$.

Kako je $\partial G \cap \gamma^* = \emptyset$ i kako je skup ∂G povezan, ako ∂G ima neku tačku u $\mathrm{Int}(\gamma)$, tada, na osnovu Leme 7.5 (primenom na $V = \partial G$ i $W = \mathrm{Int}(\gamma)$), sledi da ∂G ne može da „izađe" iz $\mathrm{Int}(\gamma)$; tj.
a) ∂G ograničen;
U ovoj situaciji, slično se pokazuje da G^c pripada $\mathrm{Int}(\gamma)$; otuda G je neograničena oblast i stoga $\infty \in \partial G$, što dovodi do kontradikcije sa zaključkom *a*) da je ∂G ograničen.
Navedimo neke varijacije ovog razmatranja.

Dokaz: Kako je $\partial G \cap \gamma^* = \emptyset$ i kako je skup ∂G povezan, na osnovu Leme 7.5, postoje dve mogućnosti:

1° $\partial G \subset \mathrm{Int}(\gamma)$

U ovom slučaju $\partial G \cap \mathrm{Ext}(\gamma) = \emptyset$, primenom Leme 7.5 (na $V = \mathrm{Ext}(\gamma)$ i $W = G$) zaključujemo da je $\mathrm{Ext}(\gamma) \subset G$. Međutim, tada bi $\infty \in \partial G$, što dovodi do kontradikcije sa 1°.

2° $\partial G \subset \mathrm{Ext}(\gamma)$

Slično, dobijamo $\partial G \cap \mathrm{Int}(\gamma) = \emptyset$, odakle na osnovu Leme 7.5 nalazimo da je $\mathrm{Int}(\gamma) \subset G$, što je i trebalo pokazati.

Navodimo alternativni dokaz, koji se takođe bazira na uzastopnim primenama Leme 7.5, pomoću sledeće vežbe.

Vežba 7.3.5 *Pretpostavimo da postoji tačka $z \in G^c \cap \mathrm{Int}(\gamma)$. Neka je G_1 komponenta skupa G^c koja sadrži z; slično kao u prethodnom pasusu zaključujemo: kako je G_1 specialno povezan skup i „ne preseca" γ^*, G_1 ne može da „izađe" iz* $\mathrm{Int}(\gamma)$ *i stoga pripada* $\mathrm{Int}(\gamma)$. *Tada postoje dve mogućnosti*

1° ∂G_1 je neprazan.
Prvo proverimo da $\partial G_1 \subset \partial G$; suprotno, postoji $z_0 \in \partial G_1 \setminus \partial G$ i stoga krug $B = B(z_0)$ tako da $B \subset G^c \setminus \partial G$; dakle $G_1 \cup B$ je povezan i stoga G_1 nije maksimalan povezan u G^c; kotradikcija.
Kako je $\partial G_1 \subset \partial G$, sledi ∂G ima tačaka u $\mathrm{Int}(\gamma)$ *i otuda zaključujemo da $\partial G \subset$* $\mathrm{Int}(\gamma)$ *i $\partial G \cap \mathrm{Ext}(\gamma)$ je prazan. Otuda $\mathrm{Ext}(\gamma) \subset G$ i stoga $\infty \in \partial G$; što dovodi do kontradikcije.*

2° ∂G_1 je prazan. Tada $\mathrm{Int}(\gamma) \subset G_1 \subset G^c$. Međutim, kako svaka tačka $z \in \gamma^*$ ima okolinu koja je cela sadržana u G i u kojoj postoje tačke iz skupa $\mathrm{Int}(\gamma)$, *dolazi se do kontradikcije.*

Neka je Φ konačna kolekcija orijentisanih intervala u ravni. Za svako p, neka je $m_I(p)$ $[m_E(p)]$ broj članova Φ čija je početna [krajnja] tačka p. Ako je $m_I(p) = m_E(p)$ za svako p, kažemo da je Φ *uravnotežena.*

Vežba 7.3.6 *Uravnotežena familija Φ orijentisanih intervala formira cikl Γ.*

Lema 7.7 *Neka je K kompaktan podskup otvorenog skupa $\Omega \subset \mathbb{C}$. Tada postoji cikl Γ u $\Omega \setminus K$ tako da*

$$Ind_\Gamma(z) = \begin{cases} 1 & ako\ z \in K \\ 0 & ako\ z \notin \Omega \end{cases}$$

Uputstvo: Postoji $\eta > 0$ tako da je rastojanje između svake tačke u K i svake tačke izvan Ω bar 2η. Konstrusati mrežu horizontalnih i vertikalnih linija tako da je rastojanje između dve susedne horizontalne linije η i slično za vertikalne linije. Neka su $Q_1, \ldots Q_m$ zatvoreni kvadrati ove mreže koji seku K. Pozitivno orijentisana granica svakog kvadrata sastoji se od četri pozitivno orijentisana odsečka. Označimo sa Σ kolekciju svih orjentisanih intervala koji se dobijaju na ovaj način. Odstranimo intervale iz Σ za koje i suprotno orjentisani intervali pripadaju Σ. Neka je Φ kolekcija preostalih odsečaka. Familija Φ je uravnotežena i formira cikl Γ. Ako $z \in K$, tada $z \notin \Gamma^*$ i z pripada nekom Q_ν. Indeks je konstantna funkcija u svakoj komponenti komplementa Γ^*.

Neka je $p \in K$. Tada postoji specijalna prosta zatvorena orijentisana poligonalna linija Λ u $\Omega \setminus K$ tako da je $Ind_\Lambda(p) = 1$.

Lema 7.8 *Neka je Ω ograničena oblast u ravni. Ako je Ω je prosto povezano u smislu definicije pomoću granice, tada je Ω je prosto povezano u smislu definicije pomoću komplementa.*

Uputstvo: Tvrđenje je ekvivalentno sa: ako je $A = \partial\Omega$ nepovezan skup, tada Ω nije homotopski prosto povezano.
Neka je $p \in A$ i neka je K komponenta skupa A koja sadrži p i neka je $q \in B = A \backslash K$.

Tada postoji otvoren skup Ω_1, koji nema zajedničkih tačaka sa B tako da je $K \subset \Omega_1$ i stoga, na osnovu Leme , postoji specijalna prosta zatvorena orijentisana poligonalna linija Λ u $\Omega_1 \setminus K$ tako da je $Ind_\Lambda(p) = 1$. Otuda, kako je K povezan, sledi $K \subset Int(\Lambda)$. Kako u svakoj okolini p i q ima tačaka iz Ω, sledi obzirom da je Ω povezan da Ω i Λ imaju zajedničkih tačaka. Otuda obzirom da je Λ povezan i ne „seče" granicu od Ω, sledi da Λ pripada Ω i, stoga, Λ nije hopotopno 0 u Ω.

Vežba 7.3.7 *Ako Ω prosto povezana u smislu poligonalne definicije (ili u smislu definicije pomoću granice), tada je homotopski prosto povezana.*

Uputstvo: Primeniti Rimanovu teoremu.

Na osnovu prethodnog razmatranja može se dokazati sledeća teorema.

Teorema 7.14 (Karakterizacija prosto-povezanih oblasti) *Neka je Ω oblast u ravni. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*
(a) *Ω je homeomorfno otvorenom jediničnom krugu $\mathbb{U}$*
(b) *Ω je poligonalno prosto-povezano*
(c) *Ω je homotopski prosto-povezano*
(d) *Ω je prosto-povezano u smislu definicije pomoću granice*
(e) *Ω je prosto-povezano u smislu definicije pomoću komplementa*
(f) *Ako je $f : \Omega \to \mathbb{C}^*$ holomorfno, tada postoji $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tako da je $f = g^2$.*

Košijeva Teorema za prosto-povezane oblasti

Sledeća teorema dokazana je u Podsekciji 2.1.13, Torema D, pomoću homotopske definicije prosto povezanih oblasti.

Teorema 7.15 (Košijeva Teorema za prosto-povezane oblasti) *Neka je G prosto-povezana oblast, $f \in \mathcal{H}(G)$ i γ zatvorena kontura (opštije put) u G. Tada je*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

Za ovu teoremu koristi se i naziv teorema *Koši-Gursa* za prosto povezane oblasti.

Smatramo da je dokaz, koji sledi elementarniji nego dokaz skiciran u Napomeni, i da se bazira na poligonalnoj definiciji prosto-povezane oblasti.

Dokaz: Koristeći lokalnu verziju Košijeve integralne teoreme može se pokazati da postoji zatvorena specijalna poligonalna linija Λ, u oblasti G, takva da je

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_\Lambda f(z)\, dz.$$

U slučaju da je Λ prosta zatvorena specijalna poligonalna linija, $\mathrm{Int}(\Lambda)$ se može podeliti na konačan broj disjunktnih otvorenih pravougaonika R_k tako da je svaki zatvoren pravougaonik $\overline{R_k} \subset G$. Neka je γ_k pozitivno orjentisana granica pravougaonika R_k. Otuda je $\int_{\gamma_k} f(z)\,dz = 0$ i kako je $\Lambda = \sum \gamma_k$ (ako pretpostavimo da je Λ pozitivno orijentisana), nalazimo da je $\int_\Lambda f(z)\,dz = 0$.
Ovo se može dokazati i na osnovu Košijeve teoreme za regularne oblasti (Teorema Koši-Gursa 2- verzija za prostu zatvorenu konturu).
Ako poligonalna linija Λ ima tačke samopresecanja, tada se ona može „podeliti" na proste poligone. Međutim, sada se tvrđenje svodi na prethodni slučaj (proste zatvorene poligonalne linije).

Napomena: Ako je G prosto-povezana oblast i γ zatvorena kontura u G, tada je γ homologna 0 u G (dokazati !).

Ako je dodatno $f \in \mathcal{H}(G)$, tada je na osnovu KIT-cikl

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Jasne modifikacije dokaza pokazuju da Košijeva Teorema za prosto-povezane oblasti važi i ako je γ zatvoren put.

Teorema o postojanju primitivne u prosto-povezanoj oblasti

Teorema 7.16 (o postojanju primitivne u prosto-povezanoj oblasti) *Neka je $\Omega \subset \mathbb{C}$ prosto-povezana oblast i neka je $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, tada funkcija f ima primitivnu funkciju F u oblasti Ω.*

Dokaz: Pokažimo prvo da integral funkcije f ne zavisi od izbora puta i da je potpuno određen početnom i krajnjom tačkom toga puta.

Neka su γ_1 i γ_2 dva puta u oblasti Ω koji spajaju tačke a i b. Bez gubitka opštosti možemo pretpostaviti da je $[\alpha, \beta_1]$ parametarski interval za put γ_1 i da je $[\beta_1, \beta]$ parametarski interval za put γ_2 $(\alpha < \beta_1 < \beta)$.

Ako sa γ označimo „uniju" puteva γ_1 i γ_2, tada na osnovu teoreme Koši-Gursa dobijamo

$$\int_{\gamma_1} f\,dz - \int_{\gamma_2} f\,dz = \int_\gamma f\,dz = 0.$$

Fiksirajmo $a \in \Omega$ i neka je $z \in \Omega$ proizvoljna tačka. Ako sa $\widehat{a\,z}$ označimo put u Ω koji spaja tačke a i z, tada integral funkcije f po tom putu, tj.,

$$F(z) = \int_{\widehat{a\,z}} f(\zeta)\,d\zeta,$$

je funkcija tačke $z \in \Omega$.

Ponavljajući tačno razmatranje kao u dokazu Košijeve teoreme za konveksne skupove dokazujemo da je F holomorfna funkcija u Ω i da je $F' = f$ u Ω, tj., da je F primitivna funkcija od f. $\square$

Primer 50 *Primer funkcije f definisane sa $f(z) = \frac{1}{z}$ u oblasti $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 2\}$ pokazuje da je uslov, u prethodnoj teoremi, da je oblast prosto-povezana veoma bitan.*

Pokazaćemo da funkcija f u datoj oblasti Ω nema primitivnu funkciju, U suprotnom, ako sa γ označimo kružnicu u Ω, definisanu sa $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, tada, na osnovu Teoreme KIT' (da li se može primeniti Teorema 7.15?), dobijamo

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

Međutim, na osnovu definicije integrala lako nalazimo da je

$$I = \int_\gamma f(z)\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\, dt.$$

Kako je $\gamma'(t) = ie^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, dobijamo $I = 2\pi i$, što dovodi do kontradikcije.

Teorema o postojanju neprekidnog logaritma

U sekciji 5.2 dat je jedan dokaz pomoću promene agumenta; ovde se koristi drugi metod baziran na Teoremi o postojanju primitivne u prosto-povezanoj oblasti.

Teorema 7.17 (postojanje neprekidnog logaritma) *Pretpostavimo da je Ω prosto-povezana oblast i $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Ako je $f(z) \neq 0$, $z \in \Omega$, tada postoji funkcija $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tako da je $e^{g(z)} = f(z)$, $z \in \Omega$.*

Dokaz: Funkcija $h = \frac{f'}{f}$ je holomorfna u Ω pa na osnovu prethodne teoreme ima primitivnu funkciju g_1 u Ω. Kako je $g_1'(z) = h(z)$, $z \in \Omega$, tada jednostavnim računom nalazimo da je

$$\left(\frac{e^{g_1}}{f}\right)' = \frac{e^{g_1} g_1' f - e^{g_1} f'}{f^2} = 0,$$

tj. $f = c_1 e^{g_1}$ u Ω. Stavljajući $c_1 = e^c$ dobijamo da je $g(z) = c + g_1(z)$, $z \in \Omega$, tražena funkcija.

7.4 Korespondencija granica 2**

7.4.1 Karateodorijeva teorema

Kažemo da je skup A lokalno povezan u tački $z_0 \in A$ ako za svaku okolinu U tačke z_0 postoji okolina $V \subset U$ tačke z_0 tako da je $V \cap A$ povezan. Jednostavno se proverava da je skup A lokalno povezan u tački $z_0 \in A$ ako za svaki niz $\{z_n\} \subset A$ koji konvergira ka z_0 postoji, za dovoljno veliko n, povezan skup $L_n \subset A$ koji sadrži z_0 i z_n tako da $diam(L_n) \to 0$. Skup je lokalo povezan ako je lokalno povezan u svakoj tački.

Ponovimo da se sa U označava jedinični disk u $\mathbb{C}$.

Primer 51 *1. Prost put je lokalo povezan; „krst" $l = [-1,1] \cup [-i,i]$ je lokalo povezan*
2. Varšavski krug 1 je lokalo povezan, a Varšavski krug 2 nije lokalo povezan u kordinatnom početku.
3. Neka je A lokalno povezan u tački $z_0 \in A$ i $V_n = A \cap B(z_0; 1/n)$. Da li je V_n povezan skup za dovoljno veliko n ?
odgovor ne; razmotriti primere slične Varšavskom krugu 1.

Definicija 7.7 (Rimanovo presikavanje) *Ako je D prosto povezan domen u $\overline{\mathbb{C}}$ čija granica ima bar dve tačke, tada postoji konformno preslikavanje $\psi : U \to D$. Ovo preslikavanje se naziva Rimanovo presikavanje.*

Teorema 7.18 (Karateodori 1, Caratheodory 1) *Neka je D prosto povezan domen u $\overline{\mathbb{C}}$ čija granica ima bar dve tačke. Tada ∂D je lokalno povezan akko se Rimanovo preslikavanje $\psi : U \to D$ neprekidno proširuje na zatvoren krug $\overline{U}$.*

Dokaz: Prvo pretpostavimo da je ψ neprekidno na $\overline{U}$. Neka je $\{z_n\}$ niz u ∂D koji konvergira ka z i $\zeta_n \in \psi^{-1}(z_n)$. Izdvajajući podniz može se pretpostaviti da $\zeta_n \to \zeta$. Kako je ψ neprekidno u ζ sledi $\psi(\zeta) = z$. Luk $\gamma_n = \psi([\zeta_n, \zeta])$ je povezan podskup ∂D koji sadrži z_0 i z_n. Kako je ψ neprekidno u ζ, $diam(L_n) \to 0$. Otuda ∂D je lokalno povezan.
Za dokaz drugog smera, pretpostavimo da je ∂D lokalno povezan i da $\infty = \psi(0)$. Fiksirajmo ζ_0. Neka je γ_ρ deo kružnog luka čiji je trag $\{\zeta \in U : |\zeta - \zeta_o| = \rho\}$. Definišimo

$$L(\rho) = \int_{\gamma_\rho} |\psi'(\zeta)||d\zeta| \,.$$

Iz Koši-Švarcove nejednakosti, sledi

$$\int_0^\sigma \frac{L(\rho)^2}{\rho} d\rho < +\infty \,.$$

Otuda postoji niz $\rho_n \to 0$ tako da $L(\rho_n) \to 0$. Kriva $\Gamma_n = \psi \circ \gamma_{\rho_n}$ ima krajnje tačke $a_n, b_n \in \partial D$ i $|a_n - b_n| \to 0$. Izdvajajući podniz može se pretpostaviti da a_n, b_n teže ka $w_0 \in \partial D$.
Kako je ∂D lokalno povezan, postoje povezani podskupovi $L_n \subset \partial D$ tako da $w_0, a_n, b_n \in L_n$ i dijametar L_n teži nuli.
Definišimo $U_n = \{\zeta \in U : |\zeta - \zeta_o| < \rho_n\}$ i $D_n = \psi(U_n)$.
Neka je ω proizvoljna tačka u D_n. Tada
A) svaka poluprava Λ sa početkom u ω preseca skup $\Gamma_n \cup L_n$.
Suprotno, jednostavno se konstruiše prost luk iz ∞ u ω koji „preseca" Γ_n tačno u jednoj tački i formira sa Λ prostu zatvorenu krivu u $\overline{\mathbb{C}} \setminus L_n$ koja razdvaja a_n i b_n; što je u kontradikciji sa pretpostavkom da je L_n povezan.
Iz A) sledi da $diam(D_n) \to 0$ i otuda da je ψ neprekidna u ζ_0. □

Na osnovu prethodne teoreme, kako je Varšavski krug 1 lokalo povezan, a Varšavski krug 2 nije lokalo povezan u kordinatnom početku, sledi:

Rimanovo preslikavanje Δ na Varšavski krug 1 se neprekidno proširuje na zatvoren krug $\overline{\Delta}$;
Rimanovo preslikavanje Δ na Varšavski krug 2 nema neprekidno proširuje na zatvoren krug $\overline{\Delta}$.

Teorema 7.19 (Karateodori 2, Caratheodory 2) . *Neka je D Žordanova oblast u $\mathbb{C}$ i $\varphi : D \to U$ Rimanovo preslikavanje. Tada φ ima neprekidno proširenje na $\overline{D}$.*

Ideja: Pretpostavimo suprotno da postoji $w_0 \in D$ i nizovi $w_n^1, w_n^2 \in D$ tako da $w_n^1, w_n^2 \to w_0$, $\zeta_n^1 = \varphi(w_n^1) \to \zeta_1, \zeta_n^2 = \varphi(w_n^2) \to \zeta_2$ i $\zeta_1 \neq \zeta_2$.
Otuda postoji niz $\{w_n\}$ u D tako da $\zeta_n^1 = \varphi(w_{2n}) \to \zeta_1$, $\zeta_n^2 = \varphi(w_{2n+1}) \to \zeta_2$ i $\zeta_1 \neq \zeta_2$.
Neka je Γ put u D sa krajem u w_0 koja prolazi kroz tačke w_n, $\psi = \varphi^{-1}$ i $\gamma = \varphi(\Gamma)$.
Jedan od dva luka J čija je unija T $\{\zeta_1, \zeta_2\}$ ima osobinu da svaki radijus U, čiji kraj pripada J, „preseca" trag γ po skupu koji ima tačku nagomilavanja na T.
Otuda, kako je na osnovu Caratheodory 1, ψ neprekidna na $\overline{U}$, sledi da je ψ jednako w_0 na J .
Primenom Švarcovog principa refleksije u odnosu na J i Teoreme jedinosti dobija se $\psi \equiv w_0$ na U .
Na osnovu Caratheodory 1 i Cararatheodory 2, dokazuje se

Teorema 7.20 (Karateodori 3, Caratheodory 3) *Neka su D i D_* Žordanovi domeni u $\mathbb{C}$ i $f : D \to D_*$ konformno preslikavanje. Tada se f proširuje do homeomorfizma između $\overline{D}$ na $\overline{D_*}$.*

Ova verzija Karateodorijeve teoreme dokazana je u uglednom udžbeniku monografiji Barenstein-Gay [Be-G], koja se koristi u poslediplomskoj nastavi na uglednim univerzitetima.
U toku kursa na poslediplomskim studijima i Seminara u Beogradu (2000) dokaz naveden u [Be-G] je razmotren; ostalo je da se neki delovi dokaza razjasne i autor je predložio verziju dokaza koja je skicirana u gornjem tekstu.

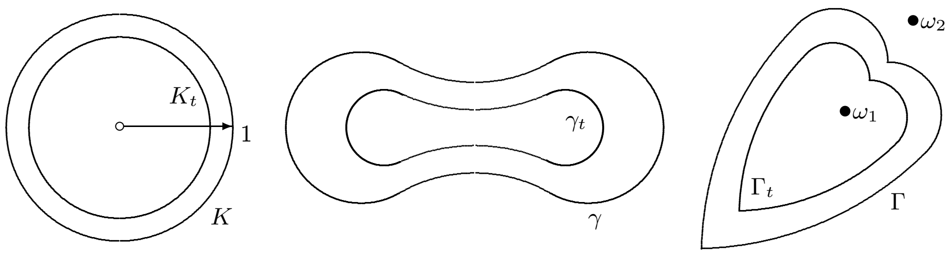
7.4.2 Princip Korespondencije Oblasti (Inverz PKG)

Iz Karateodorijeve i Rimanove teoreme sledi:

Lema 7.9 (L Ka-R) *Ako je D Žordanov domen, tada postoji homeomorfizam zatvorenog kruga $\overline{U}$ na $\overline{D}$.*

Ova lema se koristi u verziji strogog dokaza Principa korespondencije oblasti, PKOb, koju sada navodimo.

Princip Korespondencije Oblasti naziva se i inverz Principa Korespondencije Granica.



Slika 7.8: Princip korespondencije oblasti

Teorema 7.21 (Princip Korespondencije Oblasti, PKOb)** *Neka je γ zatvorena Žordanova kontura i $G = \mathrm{Int}(\gamma)$. Pretpostavimo da je funkcija $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ neprekidna, holomorfna u G i jednolisna na γ^*. Tada je f homeomorfizam $\overline{G}$ na $\overline{\mathrm{Int}(\Gamma)}$ i konformno (jednolisno) preslikavanje G na $\mathrm{Int}(\Gamma)$, gde je Γ kontura $f \circ \gamma$.*

Dokaz:** Ako je funkcija f holomorfna na $\overline{G}$, dokaz sledi iz Principa indeksa, PInd. Na osnovu Principa očuvanja oblasti, *POO*, zaključujemo da je $\Omega = f(G)$ oblast. Neka $w_1 \in \mathrm{Int}(\Gamma)$ i neka je n broj rešenja jednačine $f(z) = w_1$ u G. Na osnovu Principa indeksa, PInd,

$$n = \mathrm{Ind}_{\Gamma_t} w_1, \tag{7.24}$$

gde je Γ_t kontura konstruisana na sledeći način:

Na osnovu $LKa - R$ postoji homeomorfizam φ zatvorenog diska $\overline{B}(0,1)$ na $\overline{G}$. Definišimo

$$\gamma(\theta) = \varphi(e^{i2\pi\theta}), \qquad \gamma_t(\theta) = \varphi(te^{i2\pi\theta}), \qquad (0 \le \theta \le 1).$$

Kako je $f^{-1}(\{w_1\})$ kompaktan podskup oblasti G, postoji vrednost $t_0 \in (0,1)$ tako da za $t_0 < t < 1$ konture γ_t „ne seku" skup $f^{-1}(\{w_1\})$. Γ_t su konture $f \circ \gamma_t$ za svako $t_0 < t < 1$. Kako su Γ i Γ_t homotopne u $\mathbb{C}\backslash\{w_1\}$, na osnovu (7.24) dobijamo:

$$n = \mathrm{Ind}_{\Gamma}(w_1) = 1.$$

Otuda, za svako $w_1 \in \mathrm{Int}(\Gamma)$ postoji jedinstveno $z_1 \in G$ tako da je $f(z_1) = w_1$. Specijalno, $\Omega \supseteq \mathrm{Int}(\Gamma)$.

Neka je sada $w_2 \in \mathrm{Ext}(\Gamma)$. Kako je $\mathrm{Ind}_{\Gamma} w_2 = 0$, prethodno razmatranje pokazuje da je $\Omega \cap \mathrm{Ext}(\Gamma) = \emptyset$. Važi, takođe, $\Gamma^* \cap \Omega = \emptyset$. Ovo je posledica činjenice da je f otvoreno preslikavanje. Ako bi $w \in \Gamma^*$ bilo jednako $f(z)$ za neko $z \in G$, onda bi postojala okolina V tačke z takva da $V \subseteq \mathrm{Int}(\gamma)$ i da je $f(V) \subseteq \Omega$ okolina w. Otuda bismo zaključili da je $f(V) \cap \mathrm{Ext}(\Gamma) \neq \emptyset$, što je nemoguće, jer je $f(V) \subseteq \Omega$.

Dakle, $f(G) = \Omega = \mathrm{Int}(\Gamma)$, f je konformno (jednolisno) na G i homomorfizam $\overline{G}$ na $\overline{\mathrm{Int}(\Gamma)}$. □

7.5 Podela regularnih oblasti na $*$-elementarne oblasti i dokaz Grinove formule**

Lema Top 2 je navedena u glavi 2 bez dokaza (videti takođe [Ma 3]); u ovoj sekciji dokazuje se Teorema o podeli deo po deo glatke oblasti (Teorema 7.22) iz koje specijalno sledi Lema Top 2.

Postoje primeri koji pokazuje da Žordanove (i specijalno glatke) oblasti mogu imati komplikovanu strukturu i da Teorema 7.22 (o podeli) ima smisla.

Lema 7.10 (Lema Top 2, o podeli regularne oblasti) *Regularna oblast se može razložiti na končan broj koherentno orijentisanih regularnih oblasti proizvoljno malog dijametra.*

Ako se granica regularne oblasti sastoji od specijalnih poligonalnih linija nazivamo je poligonalna oblast.

* R je lokalni pravougaonik za put γ ako je presek pravougaonika i puta γ zadat pomoću elementarnog grafika .

Skica dokaza o podeli regularnih oblasti na $*$-elementarne oblasti i Leme Top:

a. Koristeći mrežu pravougaonika dokazati *Lemu Top* ako se granica regularne oblasti sastoji od specijalnih poligonalnih linija.

Neka je γ put i tačke a i b na tragu γ. Kažemo da lanac lokalnih pravougaonika (kvadrata) $\{Q_k\}$ spaja tačke a i b duž γ ako postoji podela $\{\gamma_k\}$, $k = 1, 2, \cdots n$ dela puta γ koji spaja tačke a i b, tako da pravougaonici (kvadrati) $\{Q_k\}$ nemaju zajedničkih unutrašnjih tačaka i da je $\overline{Q_k} \cap \gamma^* = \gamma_k^*$, $a \in \overline{Q_1}$ i $b \in \overline{Q_n}$. U ovoj situaciju koristimo naziv specijalni lanac pravougaonika (kvadrata). Ako su a i b krajnje tačke puta γ (i specijalno ako je put zatvoren) kažemo da specijalni lanac pravougaonika (kvadrata) „pokriva" γ.

b. Ako je γ kontura postoji specijalni lanac pravougaonika (kvadrata) koji „pokriva" γ.

Intuitivno je jasno da se specijalnom lancu pravougaonika (kvadrata) koji nije „pokrio" put može dodati još jedan specijalni pravougaonik (kvadrat) i da se proces nastavlja dok se ne „pokrije" put. Ova situacija sugerira sledeći dokaz:

Neka je E skup tačaka t za koji postoji specijalan lanac pravougaonika (kvadrata) koji spaja a i $\gamma(t)$.

c. Dokazati da je E otvoreno-zatvoren skup.

Dakle, na osnovu topološkog svojstva povezanosti, važi sledeća propozicija.

Propozicija 7.6 *Ako je γ kontura postoji specijalni lanac pravougaonika (kvadrata) koji „pokriva" γ.*

Specijalni lanac se može izabrati tako da svaka (eventualna) tačka preloma konture γ pripada granici nekog specijalnog praougaonika.

d. Neka je Q_k specijalni lanac pravougaonika (kvadrata) koji „pokriva" granicu Γ regularne oblasti G i neka svaki $\overline{Q_k}$ " preseca" samo jednu komponentu ∂G. Definišimo $A_k = Q_k \cap G$ i $\mathbf{\Lambda} = G \setminus \cup \overline{A_k}$. Specijalni lanac pravougaonika (kvadrata) može se izabrati tako da su proizvoljno malog dijametra. Otuda, kako je $\mathbf{\Lambda}$ poligonalna oblast, specijalno, sledi Lema Top.

Ponovimo da iz ove leme jednostavno sledi OKIT za regularne oblasti.

U savremenim udžbenicima dokaz Grinove formule za regularne oblasti (preciznije regularne mnogostrukosti sa krajem) izvodi se pomoću razbijanja jedinice (videti npr. [Zo], [Be-G]; komentari Zorich [Zo] str. 239 do 241, Zadatak 2, str. 249 su relevantni).

Ponovimo da Varšavski krug (videti i Primere 52, 53; M-krug 1 i 2) pokazuje da postoje regularne oblasti koje nisu jednostavne.

Skicirajmo pristup (dokaz Grinove formule za regularne oblasti) koji se ne poziva na „razbijanje jedinice".

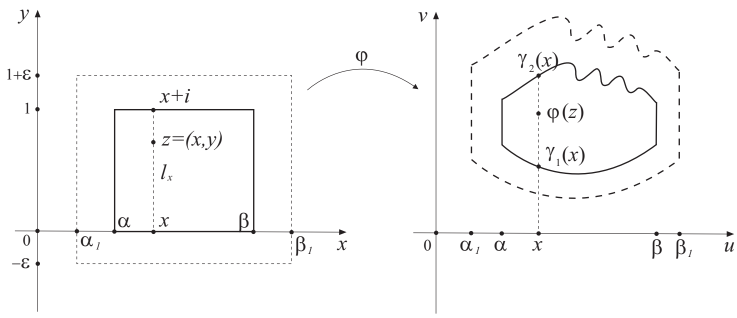
Definicija 7.8 *Kažemo da je oblast $*$-elementarna ako je elementarna u pravcu bar jedne ose (tj. tipa O_y ili O_x); oblast je elementarna ako je elementarna u pravcu obe kordinatne ose.*

Iz dokaza tačke d sledi:

Teorema 7.22 (o podeli na elementarne) *Regularna oblast se može razložiti na končan broj koherentno orijentisanih glatka $*$-elementarnih oblasti (regularnih oblasti) proizvoljno malog dijametra.*

Ponovimo da Varšavski krug pokazuje da postoje regularne oblasti koje nisu jednostavne; izgleda da se ovaj primer može modifikovati tako da ne postoji kordinatni sistem u odnosu na koji je M-krug (modifikovan Varšavski krug) jednostavna oblast. Dakle u opštem slučaju regularna oblast se ne može razložiti na končan broj koherentno orijentisanih glatkih elementarnih oblasti; ovu teškoću prevazilazimo pomoću $*$-elementarnih oblasti (Teoreme 7.22).

Ispravljanje elementarne oblasti: Neka je $D = \{(x,y) : \alpha < x < \beta,\, u_1(x) < y < u_1(x)\}$ elementarna O_y oblast i $\gamma_1(x) = (x, u_1(x)), \gamma_2(x) = (x, u_2(x))$; preslikavanje φ, definisano sa $\varphi(x,y) = (x, (1-y)u_1 + yu_2)$, preslikava pravougaonik $R = (\alpha, \beta) \times (0,1)$ na elementarnu oblast D (tipa O_y); specijalno, φ preslikava x i $x+i$ na $\gamma_1(x)$ i $\gamma_2(x)$, a segment $l_x = [x, x+i]$ linearno na segment $[\gamma_1(x), \gamma_2(x)]$. Preslikavanje $\psi = \varphi^{-1}$ preslikava D na pravougaonik.



Slika 7.9: Ispravljanje elementarne oblasti

Propozicija 7.7 (specijalne lokalne karte) *Ako je D glatka elementarna oblast u pravcu jedne ose, tada postoje $\varepsilon > 0$ i α_1, β_1 tako da je $\alpha_1 < \alpha < \beta < \beta_1$ i difeomorfizam φ_1 pravougaonika $R_1 = (\alpha_1, \beta_1) \times (-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ tako da je $\varphi_1 = \varphi$ na $R = (\alpha, \beta) \times (0, 1)$.*

Uputstvo : Grafike funkcija u_1 i u_2 glatko produžiti na $[\alpha_1,\ \beta_1]$ pomoću tangenti u krajnjim tačkama.
Karte $\psi = \varphi_1^{-1}$ nazivamo specijalne lokalne karte; za oblast D kažemo da je u oblasti specijalne lokalne karte $\psi = \varphi_1^{-1}$.

Kažemo da je f glatka (C^1) funkcije na $\overline{G}$, ako postoji otvoren skup $\Omega \supset \overline{G}$ tako da je f C^1-funkcije na Ω.

Teorema 7.23 (Grinova formula; prva verzija) *Neka je G regularna oblast, P i Q glatke funkcije na $\overline{G}$ i $\omega = Pdx + Qdy$; ω se naziva se 1-forma. Tada je*

$$\int_G d\omega = \int_\Gamma \omega,$$

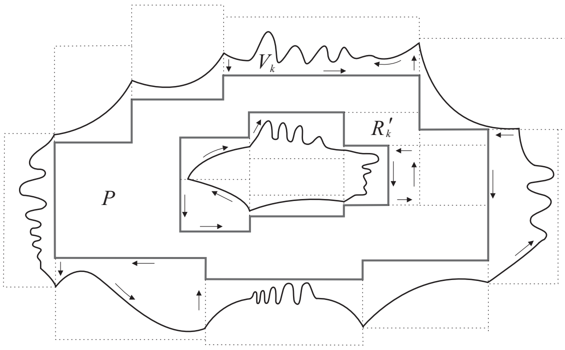
gde je Γ pozitivno orijentisana granica oblasti G i $d\omega = (Q_x - P_y)dx \wedge dy$.

Napomena: Ako čitalac nije upoznat sa notacijom $dx \wedge dy$ može pisati $d\omega = (Q_x - P_y)dxdy$.
Dokaz Grinove formule bazira se na sledećoj lemi.

Lema 7.11 *Prva verzija Grinove formule važi ako je G glatka $*$-elementarna oblast.*

Dokaz:Pretpostavimo oznake iz Propozicije 7.7. Kako na pravougaoniku R važi Grinova formula, na osnovu Propozicije 7.7, definicije krivolinijskog integrala i Teoreme o smeni promenljive, sledi da važi i na glatkoj $*$-elementarnoj G. □

Dokaz Grinove formule: Neka je $R_k,\ \ k = 1, \cdots, m$, specijalan lanac pravougaonik koji pokriva ∂G, $V_k = R_k \cap G$, $V = \cup_{k=1}^m V_k$ i $P = G \backslash V$; P je specijalna poligonalna oblast i stoga se može podeliti na konačan broj pravougaonika $R'_k,\ \ k = 1, \cdots, n$.



Slika 7.10: Podela regularnih oblasti

Ponovimo, $V_k = R_k \cap G$. Kako na glatkim $*$-elementarnih oblastima V_k (na osnovu Posledice 7.11) i pravougaonicima R'_k važi Grinova formula, otuda " sabiranjem" se dobija da važi na regularnoj oblasti G.

Sledeći primer pokazuje da Jordanove (i specijalno glatke) oblasti mogu imati komplikovanu strukturu i da Teorema 7.22 (o podeli) ima smisla.

Primer 52 (M-krug 1) *Neka je* $\mathcal{C}_n(t) = \dfrac{1}{n2^n}\,(t + i\pi \sin\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{n\pi})$, $1/n\pi \le t \le 1/\pi$ *i* $\ell_n = 1/2^n + \mathcal{C}_n$ *ako je* n *parno;* $\ell_n = 1/2^n + i\mathcal{C}_n$ *ako je* n *neparno. Putevi* ℓ_n, $n \ge 1$, *mogu se nadovezati pomoću glatkih puteva* l_n *tako da formiraju prost zatvoren (gladak izuzev u kordinatnom početku) put* ℓ, *koji nazivamo M-kružnica ili modifikovani varšavska kružnica; oblast* $\mathcal{B} = \mathrm{Int}(\ell)$ *nazivamo M-krug.*

Uputstvo: Skicirati grafik puta $\gamma_n(t) = t + i\pi \sin\frac{1}{t}$, $1/n\pi \le t \le 1/\pi$; i $\mathcal{C}_n$; put $\gamma = \gamma_n$ preseca x-osu u n tačaka; grafik puta $\mathcal{C}_n$ se nalazi u kvadratu $[0, \dfrac{1}{n2^n}] \times [0, \dfrac{1}{n2^n}]$. Neka je $\Lambda_n(\theta) = \{1/2^n + e^{i\theta}t : t > 0\}$ i $\theta(n)$ broj preseka poluprave $\Lambda_n(\theta)$ sa ℓ_n. Čitalac može proveriti da da $\theta(2\,n) \to \infty$ ako je $\theta \in [-\pi/4, \pi/4]$; i $\theta(2\,n+1) \to \infty$ ako je $\theta \in [-\pi/2, \pi/2] \setminus [-\pi/4, \pi/4]$; i otuda da ne postoji kordinatni sistem u odnosu na koji je M-krug jednostavna oblast.

Sledeći primer izgleda tehnički komplikovaniji.

Primer 53 (M-krug 2) *Neka je* $\mathcal{C}(t) = t + it^3 \sin 1/t$, $t > 0$ *i* $\mathcal{C}(0) = 0$*;* $B_n = B(1/2^n; 4^{-n-1})$ *i* r_n *niz svih racionalnih brojeva iz* $[0,1]$, $\mathcal{C}_n = 1/2^n + e^{\pi\, i r_n}\mathcal{C}$, ℓ_n *deo puta* $\mathcal{C}_n$ *koji je u krugu* B_n. *Putevi* ℓ_n, $n \ge 1$, *mogu se nadovezati pomoću glatkih puteva* l_n *tako da formiraju prost zatvoren (gladak izuzev u kordinatnom početku) put* ℓ, *koji nazivamo M-kružnica ili modifikovani varšavska kružnica; oblast* $\mathcal{B} = \mathrm{Int}(\ell)$ *nazivamo M-krug (npr. beogradski ?).*

Da li se glatkih puteva l_n mogu izabrati postoji tako da je ℓ gladak i u kordinatnom početku?

Čitalac može proveriti da polupravа $\Lambda_n = \{1/2^n + e^{\pi\, i r_n} t \,:\, t > 0\}$ preseca ℓ_n u prebrojivom skupu tačaka; $\Lambda_n(\theta) = \{1/2^n + e^{i\theta} t \,:\, t > 0\}$ i $n(\theta)$ broj preseka poluprave $\Lambda_n(\theta)$ sa ℓ_n. Ako je $\theta \in [0, \pi)$ postoji podniz r_{n_k} niza r_n tako da $r_{n_k}\pi \to \theta$.
Da li tada $n_k(\theta) \to \infty$ i da li otuda sledi da ne postoji kordinatni sistem u odnosu na koji je M-krug jednostavna oblast?

7.6 Razni problemi

7.6.1 Bergmanov prostor**

U vezi ove kratke podsekcije videti Teoremu 2.21 (*Parsevalova formula za holomorfne funkcije*) i podsekciju *Posledice Košijeve nejednakosti* u Glavi 2.

Lema 7.12 *Neka je f analitička funkcija u krugu* $\mathrm{B} = \mathrm{B}(a; r)$.
Dokazati da je

$$|f(a)|^2 \le \frac{1}{\pi\, r^2} \int_B |f(z)|^2 \, dx\, dy. \tag{1}$$

Uputstvo: Neka je $I_\rho = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(a + \rho e^{i\,\theta})\, d\theta$. Na osnovu Teoreme o srednjoj vrednosti, $\int\limits_B f(z)\, dx\, dy = \int\limits_0^r I_\rho\, \rho\, d\rho = \pi\, r^2 f(a)$. Otuda je $|f(a)| \le \dfrac{1}{\pi\, r^2} \displaystyle\int_B |f(z)|\, dx\, dy$ i na osnovu *Švarcove nejednakosti* sledi (1). $\square$

Teorema 7.24 *Neka je* B^2 *Bergmanov prostor analitičkih funkcija f u jediničnom krugu* U *za koje je*

$$\|f\|_2 = \Big(\int_U |f(z)|^2 \, dx\, dy \Big)^{1/2} < +\infty. \tag{2}$$

Tada je
a) $\{\varphi_k(z) = z^k,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ *kompletan ortogonalan sistem u* B^2.
b) Ako je $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k\, z^k$, *onda je*

$$\|f\|_2^2 = \pi \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|c_k|^2}{k+1} \tag{3}$$

c) B^2 *je Hilbertov prostor.*

Uputstvo: b) $\|f\|_2^2 = \int\limits_0^1 r\, J_r\, dr$, gde je $J_r = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(r\, e^{i\, t})|^2\, dt$; a na osnovu *Parsevalove* formule

$$J_r = 2\,\pi \sum_{k=0}^{+\infty} |c_k|^2\, r^{2\,k}.$$

c) Neka je K kompaktan podskup U. Tada postoji $r_0 < 1$ tako da $\mathrm{K} \subset \mathrm{U}_{r_0}$; neka je $s = 1 - r_0$ i neka je $\{f_k\}$ *Košijev niz* u B^2; primeniti nejednakost (1) na funkciju $f_m - f_n$, dobija se

$$\sqrt{\pi}\, s\, |f_m(z) - f_n(z)| \leq \|f_m - f_n\|_2$$

za svako $z \in \mathrm{K}$. □

7.6.2 Kulsonova [Coulson] formula

Pre nego što izvedemo Kulsonovu formulu podsetimo čitaoca na neke poznate činjenice; ponovimo da je definisano $K_a(z) = \dfrac{1}{z-a}$.
Neka je γ prosta, zatvorena, deo-po-deo neprekidno diferencijabilna kriva (kraće, prosta zatvorena kriva ili prosta zatvorena kontura) i $G = \mathrm{Int}(\gamma)$. Ako je f holomorfna funkcija na $\overline{G}$, tada je

$$f(z) = \frac{1}{2\,\pi\, i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,\ \ z \in G.$$

Specijalno, $\int_\gamma K_a(z)\, dz$ je jednak $2\pi i$, ako $a \in \mathrm{Int}(\gamma)$, odnosno, $\int_\gamma K_a(z)\, dz$ je jednak 0, ako $a \in \mathrm{Ext}(\gamma)$. Dakle,

$$C(a) = \int_\gamma K_a\, dz = \begin{cases} 2\pi i, & a \in \mathrm{Int}(\gamma) \\ 0, & a \in \mathrm{Ext}(\gamma) \end{cases}.$$

Lema 7.13 (Žordanova lema) a) *Ako je f neprekidna funkcija na Π^+ i ako $zf(z) \to A$, kada $\Pi^+ \ni z \to \infty$, tada je*

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{C_r} f(z)\, dz = i\,\pi\, A.$$

b) *Specijalno, ako je f holomorfna u nekoj okolini tačke ∞ i ako u toj tački ima nulu reda barem 2, tada*

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{C_r} f(z)\, dz = 0.$$

Primetimo da možemo koristiti tačku b) da bismo dokazali Kulsonovu (Coulson-ovu) formulu, ako je $s = 0$.
O interpretaciji Kulsonove (Coulson-ove) formule u hemijskoj teoriji grafova videti [GM].

Kulsonova (Coulson-ova) formula

Neka je P polinom stepena n, $\Phi(z) = z\dfrac{P'}{P} - n$, $\Pi^+ = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ i $\Pi^- = \{z : \operatorname{Re} z < 0\}$.

Neka je, dalje, $\{a_\nu\}$ skup nula polinoma P i $K_\nu(z) = \dfrac{1}{z - a_\nu}$. Ako su sve nule polinoma P proste, tada je

$$\Phi(z) = \sum \frac{a_\nu}{z - a_\nu} = \sum a_\nu \, K_\nu(z).$$

Označimo sa s, odnosno sa s^+ i s^-, sumu nula polinoma P u $\mathbb{C}$, odnosno u Π^+ i Π^-, respektivno, računajući višestrukost.

Ako je n_ν red nule a_ν, tada je $s = \sum n_\nu \, a_\nu$ i

$$\Phi(z) = \sum n_\nu \, \frac{a_\nu}{z - a_\nu} = \sum n_\nu \, K_\nu(z).$$

A. Neka je arg grana argumenta sa vrednostima u $(0,\, 2\pi)$ i neka je $\Upsilon(z) = \ln(z - a)$ odgovarajuća grana logaritma definisana sa $\ln(z - a) = \ln|z - a| + i \arg(z - a)$. Kako je, $\Upsilon(+\infty\, i) - \Upsilon(-\infty\, i) = i\pi/2 - i3\pi/2 = -i\pi$, nalazimo da je

1. Ako je $a = a_\nu \in \Pi^+$, tada je v.p. $\int_{-\infty}^{+\infty} K_\nu(y)\, dy = -\pi$.

Slično, koristeći granu arg sa vrednostima u $(-\pi,\, +\pi)$ i odgovarajuću granu logaritma, nalazimo da je

2. Ako je $a = a_\nu \in \Pi^-$, tada je v.p. $\int_{-\infty}^{+\infty} K_\nu(iy)\, dy = \pi$.

Primetimo da je v.p. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{y}\, dy = 0$. Analogno,

3. Ako je $a = a_\nu$ čisto imaginaran broj, tada je v.p. $\int_{-\infty}^{+\infty} K_\nu(iy)\, dy = 0$.

Definišimo $K_a(z) = \dfrac{1}{z - a}$ i $K(a) =$ v.p. $\int_{-\infty}^{+\infty} K_\nu(iy)\, i\, dy$.

Tada je

$$K(a) = \begin{cases} -i\pi, & a \in \Pi^+ \\ 0, & a \text{ je čisto imaginaran} \\ i\pi, & a \in \Pi^- \end{cases}.$$

Neka je s^+, respektivno s^-, suma nula polinoma P u Π^+, respektivno Π^-, računajući višestrukost, $J =$ v.p. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(iy)\, dy$, $I = i\, J$ i $I_0 = \dfrac{I}{2\pi i} = \dfrac{J}{2\pi}$.

Kako je $\Phi = \sum n_\nu \, a_\nu \, K_\nu$, koristeći 1., 2. i 3., dobijamo modifikovanu Kulsonovu formulu

$$I = -i\,\pi s^+ + i\,\pi s^- \quad \text{i}$$

$$\begin{aligned} J &= \pi s^- - \pi s^+ = (s^- - s^+)\pi, \quad \text{tj.} \\ J &= (s - 2s^+)\pi, \quad \text{i otuda} \\ I_0 &= \frac{1}{2\pi}\left(\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(iy)\, dy\right) = \frac{s}{2} - s^+ . \end{aligned}$$

B. Alternativni pristup
Definišimo krivu $C = C_r$ sa $C_r(\theta) = r\, e^{i\,\theta} \quad (-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2)$.
Kako je $z\Phi(z) \to s \quad$ kad $z \to \infty$, tada, na osnovu Žordanove leme, dobijamo da je

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{C_r} \Phi(z)\, dz = i\, \pi\, s.$$

Konačno, koristeći Košijevu teoremu o ostacima, nalazimo da je $I = i\,(s - 2s^+)\pi$.

Biografija

U knjizi „Spomenica 125 godina Matematičkog fakulteta” izd. Matematički fakultet, Beograd, 1998, štampana je biografija koju ovde prenosimo u celini. Ona se odnosi na aktivnosti do 1998:

Rođen je 1949. godine u Valjevu. Diplomirao je na Matematičkoj grupi PMF u Beogradu 1973. godine. Magistrirao je 1976. godine, a doktorirao 1979. godine na PMF u Beogradu sa temom „Ocene normi i ekstremalni problemi u H^1”. U zimskom semestru 1981. bio je počasni gost na univerzitetu Winsconsin-Madison. Za asistenta na PMF biran je 1973. godine, za docenta 1983, za vanrednog profesora 1989, a za redovnog profesora 1995. godine. U toku zimskog semestra 1988. godine bio je vanredni profesor na University of Pittsburgh, a u toku školske 1988/89. - vanredni profesor na Wayne State University, Detroit.

Do sada je objavio 32 naučna rada. Učestvovao je na 15 međunarodnih konferencija gde je držao i uvodna predavanja po pozivu (Poljska i Bugarska akademija nauka, na IWWA u SAD, na Nevannlina Colloquium u Švajcarskoj), kao i na brojnim domaćim konferencijama. Predavao je Matematiku I i II, Analizu I i II, Teoriju realnih i kompleksnih funkcija, a na poslediplomskim studijama držao je niz kurseva: Analiza na mnogostrukostima (SAD), Kompleksna analiza (SAD), Konformne invarijante, Kvazikonformna preslikavanja, Kompleksna dinamika, itd. Šef je katedre za Kompleksnu analizu od 1995. godine. Osnivač je i rukovodilac seminara za Kompleksnu analizu od 1991. Rukovodilac projekta „Matematika, Mehanika i Računarstvo” od 1995. i prodekan na Matematičkom fakultetu 1995. godine.

Dopuna biografije Miodraga Mateljevića za period od 1998.

A. Plenarna predavanja po pozivu na Međunarodnim Konferencijama održana od 1998 do 2003:

1. International Conference on Complex Analysis and Related Topics, The VIII th Romanian-Finish Seminar, Iassy, 23-27 Avg 1999.
2. Funktionetheorie, Mathematisches Forschungsinsitut Oberwolfach, 11-17 Feb 2001. organized by Astala, Kuhnau and Bergweiler
3. International Conference on Complex Analysis and Related Topics, The IX th Romanian-Finish Seminar, Brasov, 27-31 Avg 2001.
4. International Conference on Geometric Theory dedicated Herbet Grotzsch, Halle, May 27 - June 1, 2002.

5. 5th Congress of Romanian mathematicians, Pitesti, Romania 22-28 June, 2003.

6. The X-th Romanian-Finnish Seminar, avgusta 14-19, 2005, Cluj-Napoca, Rumunija

7. Third Workshop on Planar Harmonic Mappings, Technion University, Haifa, Izrael, January 8-12, 2006 (dva plenarna predavanja).

Do sada je objavio preko 50 naučnih radova i učestvovao na više od 20 Međunarodnih konferencija na kojima je držao plenarna predavanja po pozivu.

B. Po pozivu posetio je sledeće ustanove i održao nekoliko predavanja na njihovim Seminarima

1. The Chinese University of Hong Kong, Hong Kong, 3-16 Oct, 2001. (3 predavanja na Seminaru za Analizu)

2. Warwick, 30 Nov - 30 Dec, 2003. (2 predavanja na Seminaru Hiperbolička geometrija); Warwick, 5 Dec - 20 Dec, 2004. (2 predavanja na Seminaru za Analizu)

3. Na osnovu odluke Specijalnog komiteta (The SNBS Scientific Commetee, sbsb@imar.ro) održao je u toku školske 2004. specijalni kurs: M. Mateljević Quasiconformal mapping and Teichmuller spaces na Scola Normala Superioara, Buchurest

4. Helsinki,oktobra 2005; niz plenarnih predavanja na Helsinki-Turku Seminaru, oktobra 2005.

C. Udžbenici i monografije

1. M. Mateljević, Dirichlet's principle, uniqueness of harmonic maps and extremal qc mappings, Zbornik radova 10(18), Two topics in mathematics, p. 41-91, editor B. Stanković, Matematički institut SANU, 2004; ISBN 86-80593-36-2

2. Udžbenik - monografija Kompleksna Analiza, Posebna izdanja - 1(2004), redakcija agnus@blic.net, urednik Prof. Danijel A. Romano, PMF Banja Luka, ISSN 0354-6969

3. M. Mateljević, Dirichlet's principle, distortion and related problems for harmonic mappings, Publication l'Inst Math-Belgrade, nouvelle serie 75(89), p. 147-171, 2004, (special number Quasiconformal and Harmonic mappings, special guest editor M. Mateljević); ISSN 0350-1302

3. R. Dacić, M. Mateljević, DR MILOŠ RADOJČIĆ (1903-1975) životopis, Život i delo srpskih naučnika, knjiga 9, Srpska akademija nauka i umetnosti (SANU), Beograd, 2003.

D. M. Mateljević je editor specijalnog broja (special guest editor) Publication Inst Math-Belgrade: Kvazikonformna i Harmonijska preslikavanja (Quasiconformal and Harmonic mappings), Publications de l'Institut Mathématique, nouvele série 75(89), 2004, YU ISSN 0350-1302.

E. Rukovodilac projekta 1863, 2002-2004: Harmonijska preslikavanja, Funkcijski prostori i Operatori na njima

F. Bio je Mentor za doktorske disertacije: V. Marković, S. Stević, D. Kalaj,... i magistraturu: V. Marković, D.Kalaj, I. Anić, M. Laudanović, D. Sarić, N. Lakić, I. Strugar, M. Knežević.

G. Neka važnija citiranja:

1. E Reich, Extremal Quasiconformal Mappings of the Disk, Handbook of Complex Analysis: Geometric Function Theory, Volume 1, edited by Kuhnau, 2002

Elsevier Science B.V. U ovoj monografiji nalaze se rezultati (sa dokazima) E 2.3.1, E 5.3.1, T 2.3,T 3.1, T 4.1, iz zajedničlog rada [BLMM]: Božin, Lakić, Marković i Mateljević, citirana su 4 rada M. Mateljevića.

2. U monografiji Lakić - Gardiner [GaLa], Quasiconformal Teichmuller theory, AMS, Math Surveys and Monographes series, Vol 76, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, xix + 372 pp., ISBN 0-8218-1983-6, glava (Chapter 9) predstavlja zajednički rad [BLMM]: Božin, Lakić, Marković i Mateljević, J. Analyse Math. 75 (1988), 229-338; MR 2000a; 30045

3. R. P. Boas, Invitation to Complex Analysis, The Random House / Birkhauster Mathematicals Series, New York, skicirao je dokaz Izoperimetrijske nejednakosti iz rada Mateljević, Lec. Notes Math.798,1980,364-369, i zajedničkog rada Mateljević-Pavlović, J. Math. Anal. Appl. 98, 1984, 25-30.

4. P. Wojtaszyk, Banach Spaces for Analyst, Cambridges Series in Andvanced Math., 25, Cambridge U. Press, 1991, spominje da su druge baze konstruisane u zajedničkom radu Mateljević-Pavlović, Studia Math 1983, i u daljim radovima koristio je rezultate iz zajedničkog rada Mateljević-Pavlović.

5. I. Kra, BAMS 38(2), 255-265, April 2001 (review of the book [GaLa], citira [BLMM])

6. Na Nevanlina Colloquim 1997 Switzerland, K. Strebel je govorio o radu [BLMM]

7. M. Mateljević, Mat. Vesnik 12 (1975), 285-286, je rešio Gehring-ov problem postavljen na Konferenciji u Centenbery, England (videti takođe, Hayman, BLMS; preciznije Barth K.F., Branan D.A, Hayman W.K., Research problems in complex analysis, Bull. London Math. Soc. 16 (1984), 490-517).

H. Rukovodilac Seminara za Analizu (trenutno izlaže o temi: Teichmuller quasiconformal theory and harmonic mappings) M. Mateljević rukovodi seminarom za Analizu od 1980. Od 1980. do 1989. god. na seminaru se razmatraju pitanja uglavnom iz klasične analize. Od '92. godine seminar je uspeo da okupi mlade matematičare i počeo posredno da igra važnu ulogu (kroz dodatne aktivnosti) u obrazovanju naših matematičara i formiranju određenog pogleda na matematiku. Rad seminara, posredno ili neposredno, uticao je da se dobije niz interesantnih rezultata. Spomenimo samo da je rešeno nekoliko poznatih Teichmuller-ovih problema, na kojima su radili istaknuti matematičari. U raznim fazama seminara aktivno su učestvovali V. Marković, I. Anić, M. Knežević, M. Laudanović, M. Jevtić, M. Pavlović, N. Bokan, N. Blažić, M. Arsenović, V. Božin, D. Kaljaj, N. Lakić, A. Bulatović, I. Petrović, D. Šarić, N. Šešum, M. Blanuša, Đ. Milićević, ... i drugi naši matematičari.

Nekoliko otvorenih problema je rešeno (videti citiranja u tački G.). Marković, Lakić i Mateljević održali su preko 20 plenarnih predavanja u periodu 1996 - 2003 (Nevannlina Colloquim, Ahlfors -Bers Colloquim, Meetings AMS,...) U periodu 2000 - 2003 seminar je radio sa pauzama. Trenutno se na seminaru razmatra tema: kvazikonformna i harmonijska preslikavanja (veze sa kompleksnom dinamikom, Teicmuller kvazikonformna teorija i hiperboličke 3-mnogostrukosti). Poseta M. Mateljevića, Warwicku, 30. Nov - 30. Dec 2003., 5. Dec - 20. Dec 2004., i Helsinki, Oktobra 2005 (i specijalno komunikacija sa D. Epstein, C. Series, M. Micallef i V.

Marković, M. Vuorinen) uticala je da se predloži ova tema, na kojoj se susreću Kompleksna analiza, Hiperbolička geometrija i Topologija 3-mnogostrukosti.

Veliki broj citiranja:

Reich, Extremal Quasiconformal Mapping of the Disk, 75- ?

Handbook of Complex Analysis : Geometric function Theory, Volume 1, (2002), Edited by R. Kühnau (ISBN: 0-444-82845-1), Elsevier.

Handbook of Complex Analysis: Geometric function Theory, Volume 2, (2005), 99-129, Edited by R. Kühnau (ISBN: 0-444-51547-X), Elsevier.

Mišljenje o udžbeniku

Udžbenik „Kompleksne funkcije" dr Miodraga Mateljevića, profesora Beogradskog univerziteta, je nastao kao rezultat dugogodišnjih predavanja autora istoimenog predmeta na studijama matematike na Matemačkom fakultetu u Beogradu. Profesor Mateljević je jedan od naših najboljih naučnika u oblasti kompleksne analize a posebno je poznat po činjenici da nekoliko studenata profesora Mateljevića danas se nalazi u grupi najkvalitetnijih naučnika na najpoznatijim svetskim univerzitetima. Sve to govori da su predavanja pa zatim i način izlaganja u knjizi prof. Mateljevića veoma prilagođeni studentima koji žele da suštinski shvate pojmove kompleksne analize i holomorfnih funkcija. Originalni pristup određenim temama predstavlja i najveći kvalitet udžbenika.

Prof. dr Stevan Pilipović, Prof. dr Mirko Budinčević

Teme su obrađene tako da se udžbenik može koristiti na različitim nivoima izučavanja Kompleksne analize. Mogu ga koristiti studenti koji kompleksnu analizu izučavaju jedan ili dva semestra, ali se udžbenik može koristiti i kao uvod u kompleksnu analizu na poslediplomskim studijama.

Široki spektar obrađenih tema (udžbenik sadrži sedam glava i napisan je na 320 stranica), kao i originalan pristup nekima od njih su garancija da će knjiga biti od interesa za veliki broj čitalaca.

Prof. dr Miroljub Jevtić

Literatura

[Ka-Ad] D. Adnađević, Z. Kadelburg, *Matematička analiza II*, Beograd, 1991.

[Ah] L. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw-Hill Book Co, 1966.

[Al] S. Aljančić, *Uvod u realnu i funkcionalnu analizu*, Građevinska knjiga, Beograd, 1968.

[Be-G] A. Barenstein, R. Gay, *Complex variables*, Springer-Verlag, 1991.

[Co] J. Conway, *Functions of One Complex Variable*, Springer-Verlag, 1978.

[Ch-Br] R.Churchill, J.Brown, *Complex variables and applications*, McGraw-Hill Book Co, 1984.

[GM] Gutman, I., Mateljevic, M., *Note on the Coulson Integral Formula*, J. Math. Chem., File No. A2081

[Je-Ma] M. Jevtić, M. Mateljević, *Analitičke funkcije*, Beograd, 1986.

[LV] Lehto, O., Virtanen, K., I., *Quasiconformal Mappings in the Plane*, Springer-Verlag (1973).

[Ma] M. Mateljević, *O Kompleksnim brojevima i osnovnom stavu Algebre*, Nastava matematike, XLVII, 3-4, Beograd, 2002.

[Ma 1] M. Mateljević, *Promena argumenta duž puta i Jordanove teoreme*, Nastava matematike, XLIX, 1-2, Beograd, 2004.

[Ma 2] M. Mateljević, *Kompleksna analiza*, Banja Luka, 2004.

[Ma 3] M. Mateljević, *Kompleksna analiza 2*, rukopis

[Mi] D. Mitrinović, *Kompleksna analiza*, Beograd, 1973.

[Ni] M. Nikić, *Osnovi kompleksne analize*, Naučna knjiga, Beograd, 1992.

[Pi] D. Perišić, S. Pilipović, M. Stojanović, *Funkcije više promenljivih; diferencijalni i integralni račun*, Novi Sad, 1997.

[Ru] W.Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill Book Co, 1966.

[To] D. Đ. Tošić, *Zbirka rešenih ispitnih zadataka iz matematike III*, Akademska misao, Beograd, 2002.

[Zo] V. Zorič, *Analiza II*, 1984.

[Ša] Šabat, *Uvod u kompleksnu analizu*, 1976.

[Ša-La] Šabat, Lavrentijev, *Metodi teorija funkcija kompleksne promenljive*, Fizmatgiz, Moskva, 1973.

Indeks

Sadržaj