Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ИМО

20. мај 2023. године

Први дан

1. Пред битку у Термопилима се нашло 300 Спартанаца. Испоставило се да међу њима свака двојица која се познају имају различит број познаника међу преосталим Спартанцима. Одредити максималан број парова Спартанаца који се познају под овим условима. Претпоставља се да су познанства симетрична.

2. Дат је троугао ABC. Нека су тачке D, E и F на дужима BC, AC и AB, те да су тачке X и Y, $X \neq Y$, на описаној кружници троугла ABC, тако да се праве AD, BE и CF секу у једној тачки и да важи $AX = AF = AE = AY$. Нека се праве XE и YF секу у тачки P, а праве XF и YE у тачки Q. Означимо са H подножје нормале из тачке D на праву EF. Доказати да су тачке P, Q и H колинеарне.

3. Скуп природних бројева $\mathbb{N}$ је партиционисан на два подниза $a_1 < a_2 < \dots$ и $b_1 < b_2 < \dots$ тако да важи $b_n - a_n = n$, за свако $n \in \mathbb{N}$. Доказати да је $a_n + b_n = a_{b_n}$, за свако $n \in \mathbb{N}$.

Предвиђено време за израду задатака је 270 минута.
Сваки задатак вреди 7 бодова.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ИМО

21. мај 2023. године

Други дан

4. Дат је прост број p. Нека је $P \in \mathbb{R}[x]$ полином степена мањег од $p-1$ тако да је $|P(1)| = |P(2)| = |P(3)| = \cdots = |P(p)|$. Доказати да је P константан полином.

5. За природне бројеве a и b број $a!_b$ дефинишемо на следећи начин:

$$a!_b = \prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant a \\ i \equiv_b a}} i.$$

Нека је p прост број и $n > 3$ природан број. Доказати да постоје барем две различите вредности природног броја t, $1 < t < p^n$, такве да $p^n \mid t!_p - 1$.

6. У равни је дато n^2 по паровима непаралелних и дисјунктних дужи. Доказати да је у истој равни могуће наћи n тачака таквих да се никоје две међусобно не виде (унутрашњост дужи која спаја било које две од тих n тачака сече барем једну од датих дужи).

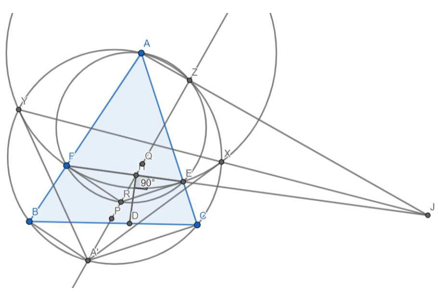
Предвиђено време за израду задатака је 270 минута.
Сваки задатак вреди 7 бодова.
Решења задатака детаљно образложити.

Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - ИЗБОРНО ЗА ИМО

Први дан

1. Одоговор: 42550.
Прво, приметимо да је $1+2+\ldots+24=300$. Иначе, решење ћемо спровести користећи језик теорије графова. Посмотрајмо граф са 300 чворова (Спартанци), где су гране познаства међу њима. Приметимо да не можемо да имамо више од k чворова са степеном $300-k$. Заиста, ако имамо преко k чворова са степеном $300-k$, онда ако посматрамо произвољан чвор степена $300-k$, он може бити повезан само са онима који нису степена $300-k$, а у овом случају је таквих највише $300-k-1$, што је контрадикција. Стога, највише један чвор има степен 299, највише 2 чвора степена 298, највише 3 чвора степена 297.... Лако се показује да је сума степена свих чворова највише $(300-1)+(300-2)+(300-2)+(300-3)+(300-3)+(300-3)+\ldots=\sum_{i=1}^{24} i\cdot(300-i)=85100$, па је број грана највише пола тога, тј. $\frac{85100}{2}=42550$.

Коначно, опишимо конструкцију у "максималном" случају. Поделимо чворове графа у дисјунктне групе $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_{24}$, где је $|A_i|=i$. Граном ће нам бити повезана два чвора графа акко нису у истом скупу. Тада сви чворови из скупа A_i имају степен $300-i$, а они су повезани само са елементима из A_j, за $i\neq j$, па је $300-i\neq 300-j$. У овом случају је број чворова $\frac{300\cdot 299}{2}-\sum_{i=1}^{24}\frac{i\cdot(i-1)}{2}=42550$.



2. (ПРВО РЕШЕЊЕ) Нека је J пресек правих EF и XY, а Z пресек кружница описаних око троуглова ABC и AFE. Ако посматрамо инверзију Ψ са центром у A са полупречником $AX=AF=AE=AY$, знамо да је $\Psi(E)=E$, $\Psi(F)=F$, $\Psi(X)=X$, $\Psi(Y)=Y$, те је $\Psi(XY)$ описана кружница око троугла AXY (без тачке A), а $\Psi(FE)$ описана кружница око троугла AEF (без тачке A). Како се XY и EF секу у J, а $\Psi(XY)$ и $\Psi(EF)$ се секу у Z, видимо да је $\Psi(J)=Z$. Како је PQ, на основу Брокарове теореме, полара тачке J у односу на кружницу инверзије, знамо да права PQ садржи Z и да је $PQ\perp AJ$.

Спроведимо, сада, кратак рачун углова. Имамо да је $\sphericalangle AZF=\sphericalangle AEF=\sphericalangle AFE=180^\circ-\sphericalangle AZE=\sphericalangle EZJ$, па је AJ спољна симетрала угла $\sphericalangle FZE$, па је PQ унутрашња симетрала угла $\sphericalangle EZF$. Сада, како је Z Микелова тачка четвороугла $BCEF$, закључујемо да је $\triangle ZEC\sim\triangle ZFB$, па је $\frac{ZF}{ZE}=\frac{BF}{CE}$. По теореми о симетрали угла, довољно је доказати да је $\frac{HF}{HE}=\frac{BF}{CE}$, што ће нам са претходним завршити задатак. По Чевиној теореми видимо да је $\frac{AE}{EC}\frac{DC}{DB}\frac{BF}{FA}=1$, тј. $\frac{BF}{CE}=\frac{DB}{DC}$. Нека је H' тачка на EF таква да је $\frac{H'F}{H'E}=\frac{BF}{CE}$. У векторском облику је $\vec{DH'}=\frac{DC}{BC}\vec{BF}+\frac{DB}{BC}\vec{CE}$. Међутим, видимо да су интензитети $||\frac{DC}{BC}\vec{BF}||=||\frac{DB}{BC}\vec{CE}||$ једнаки, па њихов збир има правац симетрале угла између ова два вектора. Ово је управо правац симетрала угла $\sphericalangle EAF$, а како је

$EA = FA$, знамо да је та симетрала нормална на EF, па је $DH' \perp EF$, те је $H' \equiv H$. Из овога нам следи тврђење. Такође, уколико су праве EF и XY паралелне, доказ се анологно спроводи.

(ДРУГО РЕШЕЊЕ) Нека је пресек нормала из E на AC и из F на AB, редом, тачка R и A' тачка дијаметрално супротна тачки A у односу на кружницу описану око ABC. Сада, ако је $\omega(A, AE)$, кружница, видимо да је $A'X \perp AX$ и $A'Y \perp AY$, онда су $A'X$ и $A'Y$ тангенте на ω, па по Паскаловој теореми на шестоугао $FEXXYY$ следи да A' лежи на PQ. Слично, $RE \perp AE$ и $RF \perp AF$, RE и RF су тангенте на ω, па по Паскаловој теореми, коју примењујемо на $EEFFXY$, видимо да и тачка R припада правој PQ. Сада треба да докажемо да H лежи на RA'. Нека су K и L подножја висина из H на AB и AC, редом. Познато је да су три тачке колинеарне акко за неке две непаралелне праве важи да њихове пројекције формирају исте односе на тим правима. Када пројектујемо тачке A', R и H на AB, добијамо тачке B, F и K. Са друге стране, када их пројектујемо на AC, добијамо C, E и L. Стога, да бисмо завршили доказ, потребно нам је да важи $\frac{BF}{FK} = \frac{CE}{EL} \iff \frac{BF}{CE} = \frac{FK}{EL}$. Међутим, видимо да је $\sphericalangle HEL = \sphericalangle HFK$ и $\sphericalangle HLE = \sphericalangle HKF = 90°$, па је $\triangle HEL \sim \triangle HFK \implies \frac{FK}{EL} = \frac{HF}{HE}$. Стога смо задатак свели на доказивање $\frac{BF}{CE} = \frac{HF}{HE}$, што можемо учинити на потпуно исти начин као и у првом решењу.

3. Докажимо да су низови a_n и b_n јединствено одређени. Знамо да је $a_n < b_n$, тако да је a_1 најмањи члан у оба низа, тј. $a_1 = 1$, те је $b_1 = 2$. Даље, пошто је a_2 мањи од свих осим од a_1 и можда b_1, добијамо да је $a_2 = 3$. Даље, нека су $a_1, a_2, \ldots, a_n$ јединствено одређени (самим тим су и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ такви). Тада је a_{n+1} најмањи од свих бројева $b_{n+1}, a_{n+2}, b_{n+2}, \ldots$, па, због услова задатка, a_{n+1} мора бити најмањи број у $\mathbb{N}$ који није међу $a_1, a_2, \cdots, a_n$ или $b_1, b_2, \cdots, b_n$. На основу тога одређујемо и b_{n+1} као $b_{n+1} = a_{n+1} + n + 1$.

Сада ћемо конструисати низове a_n и b_n који испуњавају услове задатка и како знамо да је јединствена подела, то ће нам дати комплетан опис ових низова. У том циљу ћемо дефинисати функцију $sh : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ на следећи начин. Ставимо да је $sh(0) = 0$. По Зекендорфовој теореми, сваки природан број се може јединствено представити као збир једног или више различитих Фибоначијевих бројева, тако да збир не укључује ниједна два узастопна Фибоначијева, тј. за $a = \mathbb{N}$ важи $a = \sum_{k=1}^{l} f_{i_k}$ $(i_k + 1 < i_{k+1})$. Ставимо да је $sh(a) = \sum_{k=1}^{l} f_{i_k+1}$, $a \in \mathbb{N}$. Овакав запис броја $a \in \mathbb{N}$ ћемо третирати као запис у "основи Фибоначија" и можемо га замислити, наравно, и као низ јединица и нула, где на i-тој позицији стоји 1, ако је f_i у запису (овде подразумевамо да је (f_i) познати Фибоначијев низ за који важи $f_{i+2} = f_{i+1} + f_i$, $f_1 = 1$, $f_2 = 2$, $i \in \mathbb{N}$), као и да у том запису сваки број има јединствен запис тако да не постоје два суседна кеца, а функција sh померa, односно, шифтује запис за једну позицију улево. Кључна ствар за sh функцију је да важи $a + sh(a) = sh(sh(a))$. Ово свакако важи, јер $a + sh(a) = \sum_{k=1}^{l} f_{i_k} + \sum_{k=1}^{l} f_{i_k+1} = \sum_{k=1}^{l} (f_{i_k} + f_{i_k+1}) = \sum_{k=1}^{l} f_{i_k+2} = sh(sh(a))$.

Сада ћемо узети $a_n = sh(n-1)+1$ и $b_n = sh(sh(n-1))+2$ и доказати да они испуњавају услове. Прво је $n + a_n = (n-1) + 1 + sh(n-1) + 1 = sh(sh(n-1)) + 2 = b_n$. Докажимо да се за сваки број $m \in \mathbb{N}_0$ број $m+1$ налази у тачно једном од низова a_n или b_n. Ако ће $m+1$ бити у a_n, онда треба да важи да је $m = sh(n-1)$ за неко n, а ако ће бити у b_n, онда треба да је $m = sh(sh(n-1)) + 1$. Приметимо да се $sh(sh(n-1))$ завршава са барем две нуле у "основи Фибоначија", па се $sh(sh(n-1)) + 1$ завршава са 01. Са друге стране, $sh(n-1)$ се увек завршава са 0 у овом запису. Стога, ако се m завршава са 0 у "основи Фибоначија", онда $m+1$ мора бити у низу (a_n), те је nједниствено одређено шифтовањем уназад за једну позицију (и додавањем 1), а ако се m завршава са 01 (са 11 не може) онда се $m+1$ мора налазити у низу (b_n) и јединствено је одређени шифтовањем броја две позиције удесно (и додавањем 1). Овиме смо доказали да ови низови испуњавају услове задатка.

Најзад, докажимо тврдњу, тј. да је $a_{b_n} = sh(b_n - 1) + 1 = sh(sh(sh(n-1)) + 1) + 1 = sh(sh(sh(n-1))) + 2 + 1 = sh(sh(n-1)) + sh(n-1) + 3 = a_n + b_n$, $n \in \mathbb{N}$. Јасно је да све једнакости у претходном низу тривијално важе, осим треће, те да је и трећа испуњена, јер се $sh(sh(n-1))$ завршава са две нуле, па кад додамо 1 и опет шифтујемо, све цифре ће се шифтовати још за 1, а та нова цифра ће се шифтовати у двојку. Овиме смо доказали тврђење задатка.

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - ИЗБОРНО ЗА ИМО

Други дан

4. Присетимо се коначних разлика полинома. Познато је да је $\binom{k}{0}P(x)-\binom{k}{1}P(x-1)+\binom{k}{2}P(x-2)-\cdots+(-1)^k\binom{k}{k}P(x-k)$ полином степена тачно $\deg P-k$, односно нула полином када је $k>\deg P$ (ово се лако доказује индукцијом, наравно). Приметимо да из тога следи да је $\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k\cdot\binom{p-1}{k}P(p-k)=0$. Ако су све наведене апсолутне вредности 0, онда је цео полином 0, што је крај доказа. Претпоставимо да није нула, него неко $c\neq 0$, те да је $P(p-i)=|P(p-i)|\cdot a_i=ca_i$, где је $a_i\in\{-1,+1\}$.

Стога, $c\cdot(\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k\cdot a_k\cdot\binom{p-1}{k})=0$ и с обзиром да је $c\neq 0$ закључујемо да израз у загради мора бити 0. Посматраћмо ово по модулу p. Знамо да је $\binom{p-1}{k}\equiv(-1)^k \pmod p$. Следи да израз у загради по модулу p постаје $\sum_{k=0}^{p-1}a_k\cdot(-1)^{2k}\equiv\sum_{k=0}^{p-1}a_k \pmod p$. Међутим, ова сума мора бити непарна и дељива са p. Ако је $p=2$, нема шта да се показује, те нека је $p\geqslant 3$. Одавде добијамо да је $\sum_{k=0}^{p-1}a_i$ број који је $\equiv p \pmod{2p}$, али је такође између бројева $-p$ и p, па је $a_0=a_1=\cdots=a_{p-1}\in\{1,-1\}$. У сваком случају следи да је $P(1)=P(2)=\cdots=P(p)$, те је полином P константан.

Напомена. Приметимо да тврђење није тачно када је у питању полином степена мањег од $n-1$, где је $n>3$ природан број дељив са 2 или 3, на пример.

5. Решимо најпре проблем за $p>2$. Докажимо да је $(p^n-p+1)!_p\equiv_{p^n}1$. Ако је a неки цео број који није дељив са p означимо са a^{-1} његов изверз по модулу p^n, при чему је $1\leqslant a^{-1}<p^n$. За сваки број облика $kp+1$, $k\in\mathbb{Z}$, важи да је $(kp+1)^{-1}=lp+1$, за неко l, $0\leqslant l<p^n$ (ако је $(kp+1)^{-1}=lp+s$, за неко $0\leqslant s<p$, онда би важило $p\mid p^n\mid(kp+1)(lp+s)-1$, те би $p\mid s-1$, одакле је $s=1$). Како различитим бројевима из скупа $\{1,p+1,2p+1,...,p^n-p+1\}$ одговарају различити инверзи, то важи

$$\{1^{-1},(p+1)^{-1},(2p+1)^{-1},...,(p^n-p+1)^{-1}\}=\{1,p+1,2p+1,...,p^n-p+1\}.$$

Отуда бројеве из скупа $S=\{1,p+1,2p+1,...,p^n-p+1\}$ можемо упарити тако да производ у сваком пару, по модулу p^n, буде једнак 1. Остаје нам да видимо који су бројеви из S сами себи пар. Ако за неко $c\in S$ важи $c=c^{-1}$, онда $p^n\mid(c-1)(c+1)$, те $p^n\mid c-1$ (пошто је $c+1\equiv_p 1+1\not\equiv_p 0$, због $p\neq 2$), односно $c=1$. Одавде је, због упаривања бројева, заиста $(p^n-p+1)!_p\equiv_{p^n}1$, па можемо узети да је $t=p^n-p+1$. Приметимо још да је

$$(p^n-p-1)!_p\equiv_{p^n}(p-1)\cdot(2p-1)\cdot\ldots\cdot(p^n-p-1)\equiv_{p^n}(-(p^n-p+1))\cdot(-(p^n-2p+1))\cdot\ldots\cdot(-(p+1))\equiv_{p^n}$$

$$\equiv_{p^n}(-1)^{p^{n-1}-1}(p^n-p+1)!_p\equiv_{p^n}(p^n-p+1)!_p\equiv_{p^n}1,$$

те можемо узети и $t=p^n-p-1$. Овим је комплетиран доказ за $p>2$.

Сада решавамо проблем за $p=2$. Докажимо индукцијом да за $n\geqslant 3$ важи $(2^n-1)!_2\equiv_{2^n}1$. За $n=3$ непосредном провером доказујемо да је $7!_2\equiv_8 1$. Нека је тврђење тачно за неко n, $n\geqslant 3$. Тада је $(2^n-1)!_2\equiv_{2^{n+1}}1$ или $(2^n-1)!_2\equiv_{2^{n+1}}2^n+1$, те је $((2^n-1)!_2)^2\equiv_{2^{n+1}}1$. Зато је

$$(2^{n+1}-1)!_2\equiv_{2^{n+1}}(2^n-1)!_2\cdot(-1)^{2^{n-1}}\cdot(2^n-1)!_2\equiv_{2^{n+1}}1,$$

чиме је тврђење $(2^n-1)!_2\equiv_{2^n}1$, за $n\geqslant 3$, доказано индукцијом. Зато можемо узети $t=2^n-1$. Други повољан избор за t зависи од тога да ли је $(2^{n-1}-1)!_2\equiv_{2^n}1$ или

$(2^{n-1}-1)!_2 \equiv_{2^n} 2^{n-1}+1$. При првој могућности можемо узети $t = 2^{n-1}-1$, а при другој $t = 2^{n-1}+1$, пошто је тада $(2^{n-1}+1)!_2 \equiv_{2^n} (2^{n-1}+1)^2 \equiv_{2^n} 1$.

6. Означимо дате дужи са $D_1, \ldots, D_{n^2}$ и поставимо координатни систем у равни тако да међу датим дужима нема вертикалних, тј. да праве које их садрже нису ортогоналне на $x-$осу. Фиксирајмо на свакој дужи D_i тачку T_i, $1 \leqslant i \leqslant n^2$, тако да све тачке T_i, $1 \leqslant i \leqslant n^2$, имају различите $x-$координате. Без умањења општости, претпоставимо да су $T_1, \ldots, T_{n^2}$ поређане у растућем поретку у односу на $x-$координату.

За свако i, $1 \leqslant i \leqslant n^2$, дуж D_i "скратимо" тако да и даље садржи тачку T_i и да су, притом, све дужи по паровима дисјунктне када се пројектују на $x-$осу. Означимо скраћене дужи са D_i', $1 \leqslant i \leqslant n^2$. Очигледно, довољно је доказати тврђење за скраћене дужи.

С обзиром да све дужи имају различит коефицијент правца, по Ердош-Секереш теореми, низ скраћних дужи има или растући или опадајући (по коефицијенту правца) подниз дужине n. Без умањења општости, нека је то растући подниз $D'_{a_1}, \ldots, D'_{a_n}$. За свако i, $1 \leqslant i \leqslant n$, поставимо тачку S_{a_i} на растојању $\varepsilon > 0$ испод тачке T_{a_i}. Тврдимо да за довољно мало ε дужи $D'_{a_1}, \ldots, D'_{a_n}$ блокирају видљивост сваке две тачке из скупа $\{S_{a_i} : 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Заиста, ако фиксирамо $1 \leqslant i < j \leqslant n$, не може истовремено тачка T_{a_i} бити испод праве на којој је дуж D'_{a_j} и тачка T_{a_j} бити испод праве на којој је дуж D'_{a_i}, јер је нагиб D'_{a_i} мањи од нагиба D'_{a_j}. Самим тим, јасно је да тачке S_{a_i} и S_{a_j}, које су довољно близу тачкама T_{a_i} и T_{a_j}, нису међусобно видљиве.