

МАТЕМАТИЧКА АНАЛИЗА 2

СКРИПТА

прелиминарна и експериментална верзија која

трпи сталне промене

НОВЕМБАР 2021.

Дарко Милинковић

Акнолићмент

Овај текст је писан уз курс који је аутор држао школске 2012/13 године. Велику помоћ су му, својим критикама и сугестијама, пружили студенти те и следећих генерација, а посебно Стеван Гајовић, Филип Живановић, Вукашин Стојисављевић, Филип Броћић, Лазар Корсић и други који су му у више наврата указивали на грешке и пропусте и давали сугестије у вези са њиховим отклањањем, као и са побољшањем текста уопште. Аутор им на томе захваљује. Аутор захваљује и Петру Стојчићу на сугестијама везаним за писање уводног поглавља.

Свакако, овај текст, који је прелиминарна и експериментална верзија, садржи још много пропуста и има још много недостатака, за које, наравно, одговорност сноси само аутор.

Идеје су као рибе.

Ако си задовољан малом рибом, можеш да останеш у плићаку.

Али ако хоћеш да уловиш велику рибу, мораш да одеш дубље.

(Дејвид Линч)

Предговор, или ти упозорење читаоцу

Мада можда не изгледа тако, овај текст је писан према програму за предмет *Анализа 2* на нашем факултету.

Писан према програму не значи обавезно исто што и *ограничен само на програм*, а још мање значи исто што и *садржи цео програм*. Тако нешто се, уосталом, од једног текста о математици (која се учи решавањем проблема и размишљањем о њима, а не гомилањем књишког знања) и не очекује. Циљ ових белешки је да се читаоцу понуди материјал који може да му буде мала помоћ у учењу и усвајању (и) онога што је у реченом програму наведено, а све остало је у његовим рукама.

После разјашњења ове финесе, пређимо на кратак опис текста. У филму Нормана Џусона *Ролербол** главни јунак Џонатан Е. каже: „Кроз целокупну историју људског рода води се борба између конформизма и слободе”. Имајући у виду ову поуку, одлучили смо да читаоцу не понудимо најлакши и најједноставнији приступ темама о којима говоримо, ризикујући да због тога будемо изложени оправданим и неоправданим критикама. Међутим, ми верујемо да је конформистички критеријум ефикасности и брзине у спремању испита, гледано на дуге стазе, губитак, а не добитак. Зато смо се трудили да у ово штиво унесемо што више оног материјала који ће његово читање отежати (а не олакшати, и тиме учинити више приступачним и мање узбудљивим), тако да оно не представља ни најједноставнији, а свакако ни једини, начин да се спреми испит. У јеку реформи школства које већ годинама пустоше наше универзитете, поједностављујући и осиромашујући програме и садржаје, ово је наш симболични покушај контрареволуционарног деловања (сматрамо да је у поменутој дистопији Џонатан Е. деловао касно, мада свакако ефикасно).

Пресликавање

$$(\boxtimes) \quad f : A \rightarrow Y, \quad \text{где је } A \subset X_1 \times \cdots \times X_k$$

назива се *пресликавањем k променљивих*. Честа, али не опште прихваћена, конвенција је да се термин *функција* користи за пресликавање са кодоменом у пољу скалара ($Y = \mathbb{R}$ или $Y = \mathbb{C}$); сем тога, за таква пресликавања се користи и термин *скаларно поље*. Ако је у (\boxtimes) Y векторски простор, онда пресликавање f називамо *векторским пољем* на скупу A . Из *Анализе 1* нам је познато да је реална функција f реалне променљиве непрекидна у тачки a свог домена ако важи

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Величина $d(a, b) := |a - b|$ је растојање између тачака a и b на реалној правој. Дакле, дефиниција непрекидности функције је изведена из појма *растојања*, или *метрике* d . Метрика има особине

- (M1) $d(a, b) \geq 0$
- (M2) $d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$
- (M3) $d(a, b) = d(b, a)$
- (M4) $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$.

*Реч је о оригиналном филму из 1975, а не о његовом осиромашеном и промашеном римејку из 2002.

Мотивисани Питагорином теоремом, у p -димензионом еуклидском простору \mathbb{R}^p можемо да дефинишемо растојање са

$$d(a, b) = \sqrt{\sum_{j=1}^p |a_j - b_j|^2}, \quad \text{где је } a = (a_1, \dots, a_p), b = (b_1, \dots, b_p).$$

Овако дефинисана функција $d : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ назива се *еуклидском метриком*; она такође задовољава (M1)–(M4). Ако је у (\boxtimes) $X_1 = \dots = X_k = \mathbb{R}$ и $Y = \mathbb{R}$, онда можемо да дефинишемо појам непрекидности функције f (реалне функције више реалних променљивих) у тачки $a \in A$ условом

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x \in A) d_A(x, a) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon,$$

где су d_A, d_Y еуклидске метрике на A и Y . Функција је непрекидна ако је непрекидна у свакој тачки свог домена, тј. ако важи

$$(\forall a \in A) (\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x \in A) d_A(x, a) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

При томе, различитим тачкама домена могу да одговарају различите константе δ у дефиницији непрекидности. Ако постоји δ које задовољава дефиницију непрекидности за све $a \in A$, односно ако важи

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x \in A) (\forall a \in A) d_A(x, a) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon,$$

кажемо да је функција f *равномерно непрекидна*.

Општије, ако на скупу M можемо да меримо растојање између тачака, тј. ако је дефинисана функција $d_M : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ која задовољава (M1)–(M4), онда пар (M, d_M) називамо *метричким простором*. Јасно је да појмове непрекидности и равномерне непрекидности реалних функција можемо да пренесемо на пресликавања произвољних метричких простора, јер су ови појмови изведени из појма метрике.

Из Анализе 1 нам је позната *Канторова теорема*: свака непрекидна функција на ограниченом и затвореном интервалу $[a, b]$ је равномерно непрекидна. Доказ ове теореме може да се изведе из Болцано–Вајерштрасовог својства реалне праве, тј. из чињенице да сваки низ у $[a, b]$ има конвергентан подниз. Метричке просторе у којима сваки низ има конвергентан подниз називамо *компактним просторима*; на такве просторе се Канторова теорема директно уопштава, са истим доказом као за $[a, b]$.

Слично као у случају реалних низова, можемо да дефинишемо и појам лимеса низа у метричком простору – кажемо да низ x_n у метричком простору са метриком d *конвергира ка* x_∞ ако

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_\infty) < \varepsilon.$$

У Глави 1 теорију непрекидности и лимеса излажемо преко нешто општијег појма филтера, који омогућава да се појмови као што су лимес низа, лимес функције, непрекидност, Риманов интеграл, обухвате једном дефиницијом. Такав начин излагања је конзистентно заступљен у Бурбакијевим и Диједонеовим књигама (видети [4, 6]), а код нас га је својевремено заступао проф. Д. Аранђеловић, у предавањима [2] која смо имали срећу и задовољство да слушамо и на којима смо се први пут срели са овим појмовима. Ова глава је поступни прелаз са Анализе 1 на Анализу 2; у њој излажемо и проширујемо неке појмове са којима се читалац срео и раније (понављајући повремено неке

познате теореме из Анализе 1 у општијим структурама), али и неке сасвим нове садржаје.

Извод функције једне реалне променљиве дефинише се са

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Нека је f функција више реалних променљивих, тј. нека је f као у (\boxtimes) , са $X_1 = \dots = X_k = \mathbb{R}$ и $Y = \mathbb{R}$. Тада је, за фиксирану тачку $a = (a_1, \dots, a_k) \in A$, са

$$x_j \mapsto f(a_1, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_k)$$

дефинисана функција једне променљиве x_j . Њен извод у тачки a_j (уколико постоји) се назива *парцијалним изводом* функције f по променљивој x_j у тачки a и означава са

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

Појам *диференцијабилности* функција више променљивих подразумева нешто више од постојања свих парцијалних извода, а скаларном пољу f' које је извод функције једне променљиве одговара, у случају функција више променљивих, векторско поље

$$\nabla f := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k} \right).$$

О томе ће бити речи у Глави 2. У њој излажемо диференцијални рачун у далеко општијем случају: најпре у Банаховим просторима над пољем \mathbb{K} , где је $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или \mathbb{C} , а затим и на глатким многострукостима. Учење диференцијалног рачуна у овој општости захтева на неким местима мало већи труд него у специјалном случају еуклидских простора, али сматрамо да се тај труд исплати.

Посматрајмо следећи специјални случај (\boxtimes) : нека је

$$f : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}$$

непрекидна функција. Из Канторове теореме следи да је она и равномерно непрекидна, а одатле се лако доказује да је

$$x \mapsto \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy$$

непрекидна функција. Специјално, та функција је и интегралбилна[†], па има смисла говорити о њеном интегралу

$$\int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy \right) dx.$$

Овај израз назива се *поновљеним интегралом*. Ако променимо редослед, па прво израчунамо интеграл по x , па затим по y , добијамо

$$\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dx \right) dy.$$

У Глави 3, ћемо видети да оба поступка дају исти резултат. То је садржај *Фубинијеве теореме*, која важи и под нешто слабијим условима и у нешто

[†]Сетимо се *Лебегове теореме о интегралбилности* из Анализе 1: функција интегралбилна по Риману ако и само ако скуп њених прекида има Лебегову меру нула.

општијој ситуацији. Сем тога, посматраћемо уопштења следеће конструкције: нека је у (\mathfrak{X}) домен и кодомен \mathbb{R}^k , тј. нека је

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$$

непрекидно векторско поље, и нека је крива γ задата параметризацијом

$$\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad \mathbf{r}(t) = (x_1(t), \dots, x_k(t))$$

која је глатка, тј. таква да су x_j функције класе C^1 (непрекидно диференцијабилне реалне функције једне реалне променљиве). Дефинишимо

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} := \int_a^b \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt,$$

где је множење на десној страни скаларни производ вектора \mathbf{F} и

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_k}{dt} \right).$$

Овај објекат се назива *криволинијским интегралом* векторског поља \mathbf{F} дуж криве γ . Приметимо да је израз на десној страни обичан Риманов интеграл функције једне променљиве. Из Анализе 1 нам је познато да је

$$\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a),$$

тј. да интеграл диференцијала df зависи само од вредности функције на рубу интервала $\partial[a, b] := \{a, b\}$. Природно је поставити питање да ли нешто слично важи и за криволинијске интеграле, ако је

$$\mathbf{F} = \nabla f$$

за неку функцију k променљивих f . Видећемо да је веза између руба скупа ∂ и диференцијала d у вишедимензионом случају знатно сложенија, и дубље повезана са топологијом домена интеграције.

У Глави 4 говоримо о фамилијама функција и појмовима везаним за граничне прелазе (интегрални са параметром, функционални низови). Разматраћемо ситуације сличне оној о којој смо говорили у Фубинијевој теореме – ако у (\mathfrak{X}) извршимо једну операцију по једној променљивој, а другу по другој, да ли добијени резултат зависи од редоследа којим су вршене те операције.

Специјално, ако је у (\mathfrak{X}) један од скупова на левој страни пребројив, тј. ако посматрамо пресликавање $f : \mathbb{N} \times X \rightarrow Y$, уместо о пресликавању f можемо да говоримо о низу пресликавања

$$f_n : X \rightarrow Y, \quad f_n(x) := f(n, x).$$

Видећемо, на пример, да за $X = [a, b]$, $Y = \mathbb{R}$ *није увек*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

Ако је $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ низ комплексних функција, можемо да говоримо о реду

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Најједноставнији пример је *степенни ред*

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

Овако дефинисана функција h назива се *аналитичком функцијом*, а ред на десној страни њеним *Тејлоровим редом*. Ширу класу представљају *Лоранови редови*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n;$$

Специјално, за $z = e^{it}$ добијамо редове облика

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int},$$

које, имајући у виду Ојлеров идентитет $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, можемо да напишемо у облику

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

Ови редови су познати као *тригонометријски редови*, њих ћемо разматрати у склопу сложенијег концепта *Фуријеових редова*. Одређеној класи функција можемо да придружимо Фуријеов ред на начин који је бесконачно димензиона аналогична приказивања вектора као линеарне комбинације вектора ортонормиране базе у еуклидском простору. За разлику од аналитичких функција, које *развијамо у степенни ред*, тј. чија је вредност у свакој тачки *једнака збиру* степеног реда у тој тачки, Фуријеов ред који придружујемо функцији не мора уопште да конвергира у датој тачки ка вредности коју у тој тачки има функција којој је придружен. Ипак, из Фуријеовог реда функције можемо много да закључимо о самој функцији.

Са Фуријеовим редовима у вези је интеграл облика

$$\widehat{f}(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-itx} dt$$

који називамо *Фуријеовим интегралом* функције f . Ове појмове сусрећемо на више места у тексту, а у Глави 5 их излажемо са тачке гледишта која обједињује те раније погледе на њих.

Саставни део текста су задаци, постављени тамо где читалац треба да застане и размисли. Читалац који жели да чита текст, а заобиђе задатке, најбоље ће поступити ако уместо тога одустане од читања већ на овом месту.

Као што смо већ напоменули, могуће је спремити и успешно положити испит из Анализе 2 на једноставнији начин^{**}; зато овај текст ни у ком случају не спада у лектуру која је *обавезна* за тај подухват. Чему онда он служи? Уместо одговора, парафразираћемо Мумонкана: „Ако је читалац довољно храбар, пробиће се кроз све препреке и никакве опасности неће га у томе спречити. Индијски и кинески патријарси дрхтаће у његовом присуству. Али ако само на тренутак буде оклевао, он је као човек који на прозору чека да види коња у галопу. Управо када трепне, коњ прође – и он ништа не види” (Мумонкан, *Непролазни пролаз*).

^{**}Као што је могуће и гледати *Ролербол* из 2002. уместо оног из 1975.

Садржај

ГЛАВА 0. Увод	13
ГЛАВА 1. Неке тополошке и алгебарске структуре у анализи	47
ГЛАВА 2. Диференцирање	185
1. Диференцирање у нормираним просторима	185
2. Диференцирање на многострукостима	245
ГЛАВА 3. Интеграција	267
1. Интеграција у еуклидском простору	267
2. Интеграција на многострукостима	288
ГЛАВА 4. Низови и фамилије функција	313
ГЛАВА 5. Увод у Фуријеову анализу	355
Литература	383
Индекс	385

ГЛАВА 0

Увод

0.1. Функције једне променљиве. Предмет овог курса је анализа у вишедимензионим просторима, односно функције више променљивих. У првом курсу анализе смо изучавали особине функција једне реалне променљиве. Подсетимо се на почетку неких од тих особина. Многе од њих изведене су из чињенице да је $(\mathbb{R}, +, \leq)$ комплетна тотално уређена Абелова група:

Дефиниција 1. Тројка $(A, +, \leq)$ је *тотално уређена Абелова група* ако је

- $(A, +)$ Абелова група;
- \leq релација тоталног поретка на скупу A ;
- операција $+$ и релација \leq су сагласне, тј. важи

$$x \leq y \implies x + a \leq y + a.$$

Ако уз то важи и *Аксиома супремума*

- сваки непразан одозго ограничени подскуп $A_0 \subset A$ има супремум, кажемо да је $(A, +, \leq)$ *комплетна тотално уређена Абелова група* \diamond

Свака комплетна тотално уређена Абелова група $(A, +, \leq)$ је *архимедска*, односно у њој важи *Архимедова аксиома*:

- $(\forall a > 0) (\forall b \in A) (\exists n \in \mathbb{N}) n \cdot a \geq b$,

где је

$$n \cdot a := \underbrace{a + \cdots + a}_n$$

за $a \in A$ и $n \in \mathbb{N}$.

Из првог курса анализе познато нам је да је $(\mathbb{R}, +, \leq)$ комплетна тотално уређена Абелова група.

Задатак 1. Које од следећих тотално уређених подгрупа групе $(\mathbb{R}, +, \leq)$ су комплетне:

- (а) $(\mathbb{Z}, +, \leq)$;
- (б) $(\mathbb{Q}, +, \leq)$;
- (в) група *дијадских разломака* $(\{m/2^n \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}, +, \leq)$? \checkmark

Ако је $(A, +, \leq)$ тотално уређена Абелова група, на њој је добро дефинисана *апсолутна вредност*

$$|a| := \max\{a, -a\}.$$

Заиста, пошто је поредак \leq тоталан, тј. свака два елемента су упоредива, двочлани скуп $\{a, -a\}$ (заправо, сваки двочлани скуп) има максимум.

Користећи овај појам, можемо да дефинишемо следеће појмове, познате из првог курса анализе.

Дефиниција 2. Нека је $(A, +, \leq)$ тотално уређена Абелова група. Низ $a_n \in A$ *конвергира* ка $a_\infty \in A$ ако за свако $\varepsilon \in A$, $\varepsilon > 0$, постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ са својством

$$n \geq n_0 \implies |a_n - a_\infty| < \varepsilon.$$

Елемент $a_\infty \in A$ назива се *лимесом* или *граничном вредношћу* низа. Чињеница да a_n конвергира ка a_∞ записује се

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_\infty \quad \text{или} \quad a_n \rightarrow a_\infty.$$

Ред у A је пар низова (a_n, s_n) у A , таквих да је $s_n - s_{n-1} = a_n$, односно

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k. \quad (1)$$

Низ a_n називамо *општим чланом* реда. Ред (a_n, s_n) *конвергира* ако конвергира низ s_n ; његову граничну вредност означавамо са

$$s_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

и називамо *сумом* или *збиром реда*. ◇

Из (1) следи да општи члан конвергентног реда тежи нули.

Задатак 2. Описати конвергентне низове и редове у $(\mathbb{Z}, +, \leq)$. ✓

Дефиниција 3. Нека су $(A_1, +_1, \leq_1)$ и $(A_2, +_2, \leq_2)$ две тотално уређене Абелове групе и $S \subset A_1$. Пресликавање

$$f : S \rightarrow A_2$$

је непрекидно у тачки $s \in S$ ако за сваки низ s_n у S који конвергира ка s низ $f(s_n)$ у A_2 конвергира ка $f(s)$. ◇

Еквивалентно, пресликавање f је непрекидно у тачки s ако важи

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) |x - s|_1 < \delta \implies |f(x) - f(s)|_2 < \varepsilon, \quad (2)$$

где су $|\cdot|_1$ и $|\cdot|_2$ апсолутне вредности у A_1 и A_2 . Приметимо да ова дефиниција каже да у *посматраној тачки* s , за дато $\varepsilon \in A_2$, постоји $\delta \in A_1$, такво да важи наведена импликација. За неко друго $s_1 \neq s$, такво да је f непрекидно у s_1 , постоји одговарајуће δ_1 које се, у општем случају, разликује од δ . Другим речима, и ако је функција $f : S \rightarrow A_2$ непрекидна у свим тачкама скупа S , у општем случају не можемо, за дато ε , да изаберемо *једно* δ тако да импликација (2) важи за све $s \in S$. Функције за које то можемо да урадимо називају се *равномерно* или *униформно непрекидним* на S :

Дефиниција 4. Ако

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x, y \in S) |x - y|_1 < \delta \implies |f(x) - f(y)|_2 < \varepsilon,$$

кажемо да је функција $f : S \rightarrow A_2$ *равномерно непрекидна* на S . ◇

Нека од важних својстава непрекидних функција у случају $A_1 = A_2 = \mathbb{R}$ даје следеће тврђење, познато из првог курса анализе.

Теорема 1. Нека је

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

ограничен и затворен интервал у \mathbb{R} и $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна функција. Тада важи:

- (а) f је ограничена;
- (б) f је равномерно непрекидна;
- (в) ако је $f(a)f(b) < 0$ онда је $f(c) = 0$ за неко $c \in]a, b[$;
- (г) f има минимум и максимум.

Приметимо да интервале можемо да дефинишемо и у тотално уређеној Абеловој групи $(A, +, \leq)$. Нпр,

$$[a, \rightarrow]_A := \{x \in A \mid a \leq x\}$$

уопштава дефиницију интервала $[a, +\infty[$ у \mathbb{R} , а

$$] \leftarrow, a]_A := \{x \in A \mid x \leq a\}$$

интервала $] -\infty, a]$. Ако су $a, b \in A$ такви да је $a \leq b$, дефинишемо затворен интервал

$$[a, b]_A :=] \leftarrow, b]_A \cap [a, \rightarrow]_A.$$

Слично дефинишемо отворене и полуотворене интервале.

Задатак 3. Нека је $(A_1, +_1, \leq_1) = (\mathbb{Q}, +, \leq)$, $(A_2, +_2, \leq_2) = (\mathbb{R}, +, \leq)$ и

$$[a, b]_{\mathbb{Q}} = \{x \in \mathbb{Q} \mid a \leq x \leq b\}.$$

Да ли за сваку непрекидну функцију

$$f : [a, b]_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{R}$$

важи неко од својстава (а)–(г) из претходне теореме? Да ли својство (г) важи ако је f равномерно непрекидна? ✓

Задатак 4. Нека су a, b и $[a, b]_{\mathbb{Q}}$ као у претходном задатку. Функција

$$f : [a, b]_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{C}$$

је диференцијабилна у тачки $q_0 \in]a, b[\cap \mathbb{Q}$ ако постоји број $z'_0 \in \mathbb{C}$ за који важи $f(q_0 + h) - f(q_0) = z'_0 \cdot h + o(h)$ кад $\mathbb{Q} \ni h \rightarrow 0$. Да ли за такву функцију важи неко од следећих тврђења:

- (а) ако је $f'(x) \equiv 0$ онда је $f \equiv \text{const}$;
- (б) ако је $f([a, b]_{\mathbb{Q}}) \subset \mathbb{R}$ и $f(a) = f(b)$ онда је $f'(c) = 0$ за неко $c \in]a, b[$? ✓

Подсетимо се да је $a \in A$ тачка нагомилавања скупа $S \subset A_1$ ако постоји низ $s_n \in S \setminus \{a\}$ који конвергира ка a . Приметимо да тачка нагомилавања скупа S не мора да припада скупу S . У тачкама нагомилавања дефинишемо лимес функције:

Дефиниција 5. Нека су $(A_1, +_1, \leq_1)$ и $(A_2, +_2, \leq_2)$ две комплетне тотално уређене Абелове групе, $S \subset A_1$ и $a \in A_1$ тачка нагомилавања скупа S . Елемент $\lambda \in A_2$ је лимес пресликавања

$$f : S \rightarrow A_2,$$

што означавамо са

$$\lim_{s \rightarrow a} f(s) = \lambda,$$

ако је пресликавање

$$F : S \rightarrow A_2, \quad F(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq a \\ \lambda, & x = a \end{cases}$$

непрекидно у тачки a . ◇

Еквивалентна претходној дефиницији је дефиниција

$$\lim_{s \rightarrow a} f(s) = \lambda \iff (\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) 0 < |x - a|_1 < \delta \implies |f(x) - \lambda|_2 < \varepsilon.$$

Као што знамо из почетног курса анализе, важно је уочити сличности и разлике између ове дефиниције и (2).

До претходно дефинисаних појмова могли смо да дођемо и на следећи начин.

Дефиниција 6. Нека је $(A, +, \leq)$ комплетна тотално уређена Абелова група. *Горњи и доњи лимес* низа a_n у A дефинишу се са

$$\overline{\lim} a_n := \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup \{a_k \mid k \geq n\} \quad \underline{\lim} a_n := \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf \{a_k \mid k \geq n\}.$$

Низ a_n конвергира ка a_∞ ако и само ако је

$$\overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n = a_\infty.$$

Ако су $(A_1, +_1, \leq_1)$ и $(A_2, +_2, \leq_2)$ две комплетне тотално уређене Абелове групе и $V \subset A_1$, *горњи лимес пресликавања*

$$f : V \rightarrow A_2$$

у тачки нагомилавања a скупа V дефинишу се са

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) := \inf_{\delta \geq 1} \sup \{f(x) \mid x \in]a - \delta, a + \delta[\cap V\};$$

дуално се дефинише и *доњи лимес*. Пресликавање има лимес $\lambda \in A_2$ у тачки $a \in A_1$ ако су његов горњи и доњи лимес у a једнаки λ . ◇

Наравно, из почетног курса анализе већ знамо да је Дефиниција 6 еквивалентна дефиницијама лимеса датим у Дефиницијама 2 и 5.

Приметимо да ни у једној од претходних дефиниција сем Дефиниције 6 нисмо експлицитно користили релацију поретка \leq , него само из ње изведен појам апсолутне вредности. Апсолутна вредност има следећа својства, из којих смо изводили многе особине функција реалне променљиве:

- $|a| \geq 0$;
- $|a| = 0 \iff a = 0$;
- $|-a| = |a|$;
- $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Ова својства можемо да узмемо као полазну тачку уопштења теорије функција једне реалне променљиве на случај више променљивих.

0.2. Еуклидски простор \mathbb{R}^k . Важна разлика између еуклидског простора \mathbb{R}^k за $k \geq 2$ и реалне праве је одсуство структуре комплетног тоталног поретка сагласне са структуром Абелове групе $(\mathbb{R}^k, +)$.

Пример 1. Помоћу лексикографског поретка \leq_L на \mathbb{R}^k ,

$$(x_1, \dots, x_k) <_L (y_1, \dots, y_k) \iff x_m < y_m \text{ за } m = \min \{j \mid x_j \neq y_j\}$$

дефинисана је структура тотално уређене Абелове групе $(\mathbb{R}^k, +, \leq_L)$, али ова група није архимедска (па самим тим ни комплетна) ако је $k \geq 2$. Заиста, елементи ове групе $a = (0, 1, 0, \dots, 0)$ и $b = (1, 0, \dots, 0)$ су позитивни, али за све $n \in \mathbb{N}$ важи $n \cdot a = (0, n, 0, \dots, 0) <_L b$. $\#$

Претходни пример, наравно, показује само да постоји неархимедски поредак на групи $(\mathbb{R}^k, +)$, за $k \geq 2$. Много теже је доказати тврђење да је *сваки* тотални поредак који је сагласан са структуром групе $(\mathbb{R}^k, +)$ за $k \geq 2$ неархимедски. Ову алгебарску теорему нећемо доказивати, али ћемо приметити да нам она, другим речима, каже да не можемо да се надамо да у вишедимензионом простору примењујемо методе из курса анализе функција једне реалне променљиве, засноване на структури комплетне тотално уређене групе $(\mathbb{R}, +, \leq)$.

Међутим, на \mathbb{R}^k можемо да дефинишемо функцију

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|x\| := \sqrt{\sum_{j=1}^k (x^j)^2}, \quad (3)$$

где је $x = (x^1, \dots, x^k)$. Приметимо да се, за $k = 1$, $\|\cdot\|$ своди на апсолутну вредност $|\cdot|$ у \mathbb{R} . Ово уопштење апсолутне вредности има својства апсолутне вредности која смо навели:

- (1) $\|a\| \geq 0$;
- (2) $\|a\| = 0 \iff a = 0$;
- (3) $\|-a\| = \|a\|$;
- (4) $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$.

Дефиниција 7. Структура $(A, +, \|\cdot\|)$, где је $(A, +)$ Абеова група и

$$\|\cdot\| : A \rightarrow \mathbb{R}$$

функција која задовољава својства (1)–(4), назива се *нормираном Абеловом групом*. Функција $\|\cdot\|$ назива се *нормом*.

Задатак 5. Доказати да је за свако $p \geq 1$ са

$$\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^k |x^j|^p \right)^{1/p}$$

дефинисана норма на групи $(\mathbb{R}^k, +)$. У овим ознакама, норма (3) је норма $\|\cdot\|_2$.

Доказати и да је са

$$\|x\|_\infty := \max_{1 \leq j \leq k} |x^j|$$

дефинисана норма на $(\mathbb{R}^k, +)$. Приметити да се све норме $\|\cdot\|_p$, за $1 \leq p \leq \infty$ у случају $k = 1$ свде на апсолутну вредност. \checkmark

Обратимо пажњу на то да је норма у нормираној групи $(A, +, \|\cdot\|)$ функција са доменом A и вредностима у $[0, +\infty[\subset \mathbb{R}$, док је апсолутна вредност у *тотално уређеној* групи $(A, +, \leq)$ функција са доменом и вредностима у A . Дакле, само за подгрупе тотално уређене групе $(\mathbb{R}, +, \leq)$ апсолутна вредност је норма.

Задатак 6. Јединични круг

$$U(1) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

је Абелова група у односу на множење комплексних бројева. Доказати да је са

$$\|\cdot\| : U(1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|z\| := \arccos(\operatorname{Re} z)$$

дефинисана норма на $U(1)$. Да ли стандардна апсолутна вредност комплексног броја дефинише норму на групи $(U(1), \cdot)$? ✓

0.3. Конвергенција, непрекидност и лимеси. Читалац ће лако да замисли још једну вертикалну црту са обе стране апсолутне вредности (која ту апсолутну вредност претвара у норму) у дефиницијама које смо до сада навели. Тако модификоване дефиниције дају нам дефиницију конвергенције низа и реда у $(\mathbb{R}^k, +, \|\cdot\|)$ (Дефиниција 2 са $\|\cdot\|$ уместо $|\cdot|$) и из ње изведене појмове непрекидности пресликавања

$$f : S \rightarrow \mathbb{R}^{k_2} \tag{4}$$

за $S \subset \mathbb{R}^{k_1}$ (Дефиниција 3), равномерне непрекидности (Дефиниција 4), тачке нагомилавања скупа $S \subset \mathbb{R}^{k_1}$ (пре Дефиниције 5) и лимеса пресликавања (4) (Дефиниција 5). Ми (наравно) нећемо преписивати те дефиниције са још једном вертикалном цртом и сматраћемо да смо ове појмове дефинисали у \mathbb{R}^k .

Напомена 1. Приметимо да смо навели више начина да дефинише норма на $(\mathbb{R}^k, +)$: дефинисали смо бесконачно много норми $\|\cdot\|_p$. Оправдано је поставити питање – коју од ових норми користимо у дефиницијама конвергенције, непрекидности и граничне вредности? Одговор је: било коју – све оне дају еквивалентне дефиниције ових појмова. Доказ за то, у нешто општијем облику, извешћемо у Глави 1. ◇

Задатак 7. Испитати конвергенцију низова

$$a_n = (n^{-1} \sin n, e^{1/n} \sin n), \quad b_n = (\sqrt[n]{n}, e^{-n})$$

у \mathbb{R}^2 . Доказати да низ у \mathbb{R}^k конвергира ако и само ако конвергира по координатама. ✓

У изучавању функција и на реалној правој (и низова са реалним вредностима), видели смо значај Аксиоме супремума и њој еквивалентних тврђења. У \mathbb{R}^k за $k \geq 2$, наравно, нема смисла ни говорити о супремуму, јер немамо поредак. Међутим, можемо да докажемо уопштење многих тврђења еквивалентних Аксиоми супремума (видети [15]). Једно од њих је Болцано–Вајерштрасова теорема. Напоменимо да је низ $x_n := (x_n^1, \dots, x_n^k)$ у \mathbb{R}^k *ограничен* ако постоји позитиван реалан број ρ такав да је

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| \leq \rho.$$

Опет, као и у претходној напомени, $\|\cdot\|$ је једна од норми $\|\cdot\|_p$, за $1 \leq p \leq +\infty$ и није тешко показати да је низ ограничен у једној од тих норми ако и само ако је ограничен у свакој.

Теорема 2. (Болцано–Вајерштрас) *Сваки ограничен низ у \mathbb{R}^k има конвергентан подниз.*

\triangle Из дефиниције норме $\|\cdot\|_p$ за било које p , $1 \leq p \leq +\infty$ лако следи да је низ x_k ограничен ако и само ако је ограничен по координатама, тј. ако и само ако је ограничен сваки од n реалних низова $x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^k$. Из Болцано–Вајерштрасовог става за реалне функције следи да x_n^1 има конвергентан подниз $x_{\sigma_1(n)}^1$ (где $\sigma_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ растуће пресликавање). Посматрајмо сада подниз

$$x_{\sigma_1(n)} = (x_{\sigma_1(n)}^1, x_{\sigma_1(n)}^2, \dots, x_{\sigma_1(n)}^k)$$

низа x_n . Низ на првој координати $x_{\sigma_1(n)}^1$ конвергира. Посматрајмо низ $x_{\sigma_1(n)}^2$ на другој координати. По Болцано–Вајерштрасовом ставу он има конвергентан подниз $x_{\sigma_2(n)}^2$. Подниз

$$x_{\sigma_2(n)} = (x_{\sigma_2(n)}^1, x_{\sigma_2(n)}^2, x_{\sigma_2(n)}^3, \dots, x_{\sigma_2(n)}^k)$$

сада има на прве две координате конвергентне низове (прва координата је подниз конвергентног низа). Пређимо на низ $x_{\sigma_2(n)}^3$ и поновимо поступак – добијени низ

$$x_{\sigma_3(n)} = (x_{\sigma_3(n)}^1, x_{\sigma_3(n)}^2, x_{\sigma_3(n)}^3, \dots, x_{\sigma_3(n)}^k)$$

имаће на прве три координате конвергентне низове. После k корака добијамо конвергентан подниз $x_{\sigma_k(n)}$ низа x_n . ∇

Напомена 2. Приметимо да нисмо могли да докажемо претходну теорему само констатацијом да свака координата низа x_n има конвергентан подниз. Нпр. у низу

$$x_n = (n + (-1)^n n, n - (-1)^n n)$$

у \mathbb{R}^k обе координате имају конвергентан подниз, али подниз првих координата који конвергира је подниз непарних индекса n , а за друге координате је то подниз парних.

Цео низ x_n нема конвергентан подниз: било како да издвојимо подниз $x_{\sigma(n)}$, где је $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ растуће пресликавање (то је дефиниција подниза), добијамо

$$x_{\sigma(n)} = (\sigma(n) + (-1)^n \sigma(n), \sigma(n) - (-1)^n \sigma(n)).$$

Бар једна координата овог уређеног пара је већа од n , јер $\sigma(n)$ мора буде или паран или непаран број, па је или прва или друга координата $2\sigma(n)$, што је веће од n (јер σ расте). То значи да је произвољан подниз $x_{\sigma(n)}$ неограничен, па не може да буде конвергентан.

Зато смо у доказу претходне теореме у сваком кораку морали да користимо не цео низ, него подниз добијен у претходном кораку. Овај метод се назива *дијагонализацијом* и њега ћемо у овом курсу сусрести поново, у нешто сложенијој ситуацији.

Наравно, низ који смо разматрали у овој напомени не задовољава услове Болцано–Вајерштрасове теореме, јер није ограничен. \diamond

Болцано–Вајерштрасову теорему можемо да формулишемо и на следећи, еквивалентан, начин (овде га наводимо као последицу):

Последица 1. Сваки бесконачан ограничен подскуп¹ у \mathbb{R}^k има тачку нагомиланања.

¹Подскуп $B \subset \mathbb{R}^k$ је ограничен ако је $\sup\{\|b\| \mid b \in B\} < +\infty$.

Наравно, као што смо већ рекли, тачка нагомилавања скупа $B \subset \mathbb{R}^k$ не мора да припада самом скупу B . Дакле, ако је B ограничен скуп и b_n низ у B , онда b_n има конвергентан подниз, али његов лимес b_∞ не мора да припада скупу B . Нпр. низ b_n из претходног задатка припада скупу $B = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}$, али његов лимес $b_\infty = (1, 0)$ не припада. Другим речима, подскуп S није „затворен за операцију лимеса”. Скупове који то јесу, називамо *затвореним*. Прецизирајмо то следећом дефиницијом.

Дефиниција 8. За низ $b_n \in B$ кажемо да *конвергира у B* , ако:

- b_n конвергира (ка неком b_∞)
- $b_\infty \in B$.

Скуп $B \subset \mathbb{R}^k$ је *затворен* ако за сваки низ $b_n \in B$ који конвергира (као низ у \mathbb{R}^k) ка b_∞ , важи $b_\infty \in B$. \diamond

Сада можемо да приметимо да из Последице 1 следи

Последица 2. *Ако је $B \subset \mathbb{R}^n$ ограничен и затворен подскуп, онда сваки низ $b_n \in B$ има подниз који конвергира ка неком $b \in B$.*

Овакве скупове издвајамо следећом дефиницијом.

Дефиниција 9. Подскуп $K \subset \mathbb{R}^k$ је *компактан* ако сваки низ $x_n \in K$ има подниз који конвергира ка неком $x \in K$.

Последица 2 може, помоћу новоуведених појмова, да се формулише на следећи начин:

Последица 3. *Подскуп $K \subset \mathbb{R}^k$ је компактан ако и само ако је ограничен и затворен.*

Напомена 3. Може да се постави питање зашто смо компактност дефинисали као у Дефиницији 9, а нисмо узели исказ Последице 3 као дефиницију. Разлог је у томе што је, као што ћемо видети у Глави 1, компактност својство које можемо да дефинишемо у категорији метричких простора. Последица 3 даје карактеризацију компактности у еуклидским просторима, али не и у општим метричким просторима – видећемо да многи метрички простори имају ограничене и затворене подскупове који нису компактни. \diamond

Следеће две теореме уопштавају познате теореме из теорије функција једне реалне променљиве и обе се лако изводе из Болцано–Вајерштрасове.

Теорема 3. (Канторова) *Нека је $K \subset \mathbb{R}^{k_1}$ компактан скуп и $f : K \rightarrow \mathbb{R}^{k_2}$ непрекидно пресликавање. Тада је f равномерно непрекидна.*

Δ Ако претпоставимо да је f непрекидна, али није равномерно непрекидна, онда постоји $\varepsilon > 0$ и низови x_n и y_n такви да је

$$\|x_n - y_n\| < \frac{1}{n} \quad \text{и} \quad \|f(x_n) - f(y_n)\| \geq \varepsilon. \quad (5)$$

Заиста, то је контрапозиција дефиниције равномерно непрекидности, са $\delta = 1/n$. Низ x_n има конвергентан подниз $x_{\sigma(n)}$, а низ $y_{\sigma(n)}$ конвергентан подниз $y_{\varphi(n)}$ (опет, једна варијанта метода дијагонализације), па низови $x_{\varphi(n)}$ и $y_{\varphi(n)}$ конвергирају. Из прве неједнакости из (5) следи да ова два низа конвергирају ка истој вредности. Због непрекидности функције f , низови $f(x_{\varphi(n)})$ и $f(y_{\varphi(n)})$ конвергирају истој вредности, што је у супротности са другом неједнакошћу у (5). ∇

Теорема 4. (Вајерштрасова) *Непрекидна функција $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ на компактном скупу K је ограничена и достиже максимум и минимум.*

\triangle Ако претпоставимо да f није ограничена одозго, онда постоји низ $x_n \in K$ такав да је $f(x_n) > n$. Међутим, због компактности скупа K , низ x_n има подниз $x_{\sigma(n)}$ који конвергира ка x_∞ . Због непрекидности функције f , и низ $f(x_{\sigma(n)})$ конвергира ка $f(x_\infty)$, што је у супротности са $f(x_{\sigma(n)}) > \sigma(n) \geq n$. Ова контрадикција показује да је f ограничена одозго. Пошто је и функција $-f$ непрекидна, и она је ограничена одоздо, а то значи да је f ограничена и одоздо.

Докажимо да f достиже максимум. Нека је

$$s := \sup\{f(x) \mid x \in K\}.$$

Приметимо да овај супремум постоји, због управо доказане чињенице да је функција f ограничена и Аксиоме супремума у \mathbb{R} . Из дефиниције супремума следи да за свако $n \in \mathbb{N}$ постоји $x_n \in K$ такав да је

$$s - \frac{1}{n} \leq f(x_n) \leq s.$$

Преласком на лимес и применом Теореме о три лимеса (ради се о реалним низовима!) добијамо $f(x_\infty) = s$ (овде смо искористили непрекидност функције f). Тиме је показано да се супремум s достиже, тј. функција достиже максимум.

Применом доказаног тврђења на непрекидну функцију $-f$ закључујемо да она достиже максимум, па f достиже и минимум. ∇

Напомена 4. Претходна теорема може да се изведе из општијег тврђења које гласи: *Непрекидна слика компактног скупа је компактан скуп.* Ово тврђење се лако доказује: нека је $K \subset \mathbb{R}^{k_1}$ компактан скуп и

$$f : K \rightarrow \mathbb{R}^{k_2}$$

непрекидно пресликавање. Тада за сваки низ $y_n \in f(K)$ постоји низ $x_n \in K$ такав да је $y_n = f(x_n)$. Због компактности скупа K , низ x_n има конвергентан подниз x_{k_n} . Из непрекидности пресликавања f следи да је низ $y_{k_n} = f(x_{k_n})$ конвергентан. Тиме смо доказали да сваки низ $y_n \in f(K)$ има конвергентан подниз, што значи да је скуп $f(K)$ компактан.

Специјално, ако је $k_2 = 1$, $f(K)$ је компактан подскуп реалне праве. Читаоцу остављамо као задатак да докаже да компактан подскуп реалне праве садржи свој супремум и инфимум (упутство: у супротном би постојао низ који конвергира ка супремуму или инфимуму, а нема конвергентан подниз) и да одатле изведе Вајерштрасову теорему. \diamond

Наведимо још једну дефиницију, познату читаоцу из првог курса анализе.

Дефиниција 10. Низ $x_n \in \mathbb{R}^k$ је *Кошијев* ако

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) m, n \geq n_0 \implies \|x_m - x_n\| < \varepsilon.$$

Подскуп у коме сваки Кошијев низ конвергира (у смислу конвергенције у скупу дате у Дефиницији 8) назива се *комплетним*. \diamond

Пример 2. Отворени интервал $]0, 1[$ није комплетан подскуп у \mathbb{R} , јер је низ $x_n = 1/n$ Кошијев, али не конвергира ка некој тачки тог интервала, већ ка нули која му не припада. \ddagger

Задатак 8. Доказати да је сваки конвергентан низ Кошијев. ✓

Читалац који је пажљиво проучио доказ Болцано–Вајерштрасове теореме, приметитиће да важи следећа теорема, која се доказује још лакше (није потребан метод дијагонализације), имајући у виду да је \mathbb{R} комплетан скуп (у првом курсу анализе смо доказали да сваки Кошијев низ реалних бројева конвергира).

Теорема 5. *Скуп \mathbb{R}^k је комплетан.*

Сем тога, из дефиниције затвореног скупа и претходне теореме следи:

Теорема 6. *Подскуп $B \subset \mathbb{R}^k$ је комплетан ако и само ако је затворен.*

Напомена 5. За разлику од компактних скупова, који се сликају у компактне, као што је показано у Напомени 4, непрекидна слика комплетног скупа не мора да буде комплетан скуп. На пример, пресликавање

$$f : \mathbb{R} \rightarrow] - \pi/2, \pi/2[, \quad f(t) = \operatorname{arctg} t$$

је непрекидно, његов домен \mathbb{R} је комплетан, а скуп вредности $f(\mathbb{R})$ није. ◇

Напоменимо да, захваљујући комплетности скупа \mathbb{R}^k , некад можемо конвергенцију редова у \mathbb{R}^k да испитујемо помоћу конвергенције реалних редова са позитивним члановима.

Дефиниција 11. Нека је $(A, +, \| \cdot \|)$ нормирана Абелова група и a_n низ у A . Ред $\sum a_n$ *апсолутно конвергира* ако конвергира ред $\sum \|a_n\|$.

Следећа теорема уопштава познато тврђење о редовима реалних бројева.

Теорема 7. *Апсолутно конвергентан ред у \mathbb{R}^k је конвергентан.*

△ Нека је

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k, \quad \sigma_n = \sum_{k=0}^n \|a_k\|.$$

Ако је $\sum \|a_n\|$ конвергентан ред (тј. ако $\sum a_n$ апсолутно конвергира), онда је низ σ_n Кошијев (видети претходни задатак).

Из особина норме следи да је, за $m > n$

$$\|s_m - s_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^m a_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^m \|a_k\| = |\sigma_m - \sigma_n|,$$

па је и низ s_n Кошијев. Из комплетности скупа \mathbb{R}^k сада следи да низ s_n , а тиме и ред $\sum a_n$, конвергира. ▽

0.4. Диференцирање. Извод функције

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

једне реалне променљиве у *унутрашњој* тачки x интервала $]a, b[$ дефинисан је познатом формулом

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad (6)$$

Еквивалентна дефиниција првог извода је

$$|f(y) - f(x) - f'(x)(y-x)| = o(|y-x|), \quad \text{кад } y \rightarrow x. \quad (7)$$

У граничним тачкама a и b се дефинишу само једностранни изводи и они су специфичност једнодимензионог случаја.

Појам унутрашње тачке се уопштава на следећи начин.

Дефиниција 12. Тачка $u \in U$ је *унутрашња тачка* подскупа $U \subset \mathbb{R}^k$ ако је за неко $\delta > 0$

$$\{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x - u\| < \delta\} \subset U.$$

Скуп на левој страни је *отворена лопта* са центром u и полупречником δ .

Ако је u унутрашња тачка скупа U , кажемо да је U *околина тачке u* . Скуп U је *отворен* ако је он околина сваке своје тачке. \diamond

Нека је $f(x^1, \dots, x^k)$ функција k променљивих, дефинисана на отвореном скупу. Ако фиксирамо све променљиве сем прве и посматрамо рестрикцију функције f на праву

$$x^2 = c^2, \dots, x^k = c^k,$$

(где су c^j константе) добијамо функцију једне променљиве $f(x^1, c^2, \dots, c^k)$, која зависи само од x^1 . Њен извод (као извод функције једне променљиве, дефинисан изразом (6)) у тачки c^1 назива се *парцијалним изводом* функције f по првој променљивој и означава са

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}(c^1, \dots, c^k).$$

Слично се дефинишу и парцијални изводи по осталим променљивим.

Пример 3. Посматрајмо функцију две променљиве

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^2y - y^3.$$

Њен парцијални извод по x је

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy.$$

Чему је једнако $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$? $\#$

Другим речима, парцијални извод је

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(c^1, \dots, c^k) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c^1, \dots, c^{j-1}, c^j + h, c^{j+1}, \dots, c^k) - f(c^1, \dots, c^k)}{h}. \quad (8)$$

Ова дефиниција се природно уопштава на следећи начин:

Дефиниција 13. Нека је $c \in V$ унутрашња тачка подскупа $V \subset \mathbb{R}^k$ и

$$f : V \rightarrow \mathbb{R}$$

функција на V . Њен *извод у правцу вектора* $\xi \in \mathbb{R}^k$ у тачки c је

$$D_\xi f(c) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c + h\xi) - f(c)}{h}. \quad (9)$$

Специјално, извод у правцу вектора $\mathbf{e}_1 := (1, 0, \dots, 0)$ је парцијални извод по првој променљивој, у правцу вектора $\mathbf{e}_2 := (0, 1, 0, \dots, 0)$ по другој итд, дакле

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(c) = D_{\mathbf{e}_j} f(c),$$

јер се у тим случајевима израз (8) своди на (9). \diamond

Приметимо да нам за претходну дефиницију није била довољна структура нормиране групе на \mathbb{R}^k , јер смо сем сабирања (и одузимања) користили и множење скаларом $1/h \in \mathbb{R}$, дакле структуру векторског простора. Општије, дефиниција (9) има смисла у структури коју издвајамо следећом дефиницијом:

Дефиниција 14. *Нормирани векторски простор* над пољем $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ је структура $(X, +, \cdot, \|\cdot\|)$, где је $(X, +, \cdot)$ векторски простор и

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$$

пресликавање које има својства:

- $(X, +, \|\cdot\|)$ је нормирана Абелова група;
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ за сваки скалар $\alpha \in \mathbb{K}$ и вектор $x \in X$.

Као и обично, ради краћег изражавања, често и сам скуп X , а не четворку $(X, +, \cdot, \|\cdot\|)$, зовемо нормираним векторским простором. \diamond

Лако је видети да је $(\mathbb{R}^k, +, \cdot, \|\cdot\|_p)$ нормирани векторски простор за свако p , $1 \leq p \leq \infty$.

Извод у правцу вектора може да се дефинише и за пресликавања са вредностима у нормираном векторском простору, нпр. за пресликавања

$$f : V \rightarrow \mathbb{R}^{k_2},$$

где је $V \subset \mathbb{R}^{k_1}$. Заиста, очигледно је да (9) има смисла и тада.

Следећа дефиниција уопштава дефиницију (7).

Дефиниција 15. Нека је

$$f : V \rightarrow \mathbb{R}^{k_2}$$

пресликавање дефинисано на скупу $V \subset \mathbb{R}^{k_1}$. Кажемо да је f *диференцијабилно* у унутрашњој тачки $x \in V$ ако постоји линеарно пресликавање

$$L : \mathbb{R}^{k_1} \rightarrow \mathbb{R}^{k_2}$$

такво да је

$$\|f(y) - f(x) - L(y - x)\| = o(\|y - x\|), \quad \text{кад } y \rightarrow x.$$

Пресликавање L називамо *првим изводом пресликавања f* у тачки x и означавамо са $f'(x)$ или $Df(x)$. \diamond

Захваљујући присуству норме, у нормираном векторском простору је дефинисан лимес, а тиме и Ландауов симбол „ $o(\|x\|)$ кад $x \rightarrow 0$ ” који смо користили у претходној дефиницији. Више детаља ћемо видети у Глави 2, где ћемо доказати и следеће чињенице, у нешто општијој ситуацији:

Тврђење 1. *Ако је пресликавање диференцијабилно у некој тачки, оно је у тој тачки и непрекидно. Обрнуто, у општем случају, не важи.*

Тврђење 2. *Ако је пресликавање f диференцијабилно у тачки x , онда оно има у тој тачки и извод у правцу сваког вектора ξ ; при томе је*

$$D_\xi f(x) = f'(x)(\xi),$$

где је израз на десној страни линеарно пресликавање $f'(x)$ из Дефиниције 15 примењено на вектор ξ .

Обрнуто није тачно: пресликавање може у унутрашњој тачки $x \in V$ да има извод у правцу сваког вектора ξ (и, специјално, све парцијалне изводе), али да не буде диференцијабилно у тој тачки. Међутим, важи следеће:

Тврђење 3. *Ако пресликавање f у тачки x има непрекидне парцијалне изводе, онда је оно диференцијабилно.*

Тврђење 4. Нека је $V \subset \mathbb{R}^{k_1}$. Ако је пресликавање

$$f := (f_1, \dots, f_{k_2}) : V \rightarrow \mathbb{R}^{k_2}$$

диференцијабилно у унутрашњој тачки $c \in V$, онда је

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{k_1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{k_2}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_{k_2}}{\partial x_{k_1}} \end{pmatrix}$$

матрица линеарног пресликавања $f'(c)$ у стандардним базама еуклидских простора \mathbb{R}^{k_1} и \mathbb{R}^{k_2} .

Приметимо да ћемо у случајну функција једне реалне променљиве, тј. у случају $k_1 = k_2 = 1$, у претходној теорему имати 1×1 матрицу, дакле само један реални број $f'(x)$. Зато извод диференцијабилне функције једне променљиве

$$f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$$

можемо да посматрамо као функцију

$$f' :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}. \quad (10)$$

Само у том случају извод функције можемо да посматрамо као пресликавање са истим доменом и кодоменом као и сама функција. У случају функција више променљивих, као у Тврђењу 4, први извод је пресликавање

$$f' : V \rightarrow \mathbb{R}^{k_1 \times k_2},$$

где је кодомен скуп $k_1 \times k_2$ матрица или, еквивалентно, скуп линеарних пресликавања из \mathbb{R}^{k_1} у \mathbb{R}^{k_2} .

Следеће тврђење уопштава познато правило диференцирања сложене функције једне променљиве.

Тврђење 5. (Извод композиције пресликавања) Нека је $V \subset \mathbb{R}^{k_1}$,

$$f : V \rightarrow \mathbb{R}^{k_2}$$

пресликавање диференцијабилно у унутрашњој тачки $a \in V$, $W \subset \mathbb{R}^{k_2}$ скуп који садржи $f(V)$ и коме је $f(a)$ унутрашња тачка и

$$g : W \rightarrow \mathbb{R}^{k_3}$$

пресликавање које је диференцијабилно у тачки $f(a)$. Тада је пресликавање

$$g \circ f : V \rightarrow \mathbb{R}^{k_3}$$

диференцијабилно у тачки a и важи

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a),$$

где је множење на десној страни множење матрица или, еквивалентно, композиција линеарних пресликавања.

Доказ овог тврђења је скоро исти као доказ одговарајућег тврђења за функције једне променљиве, што ћемо, у нешто општијој форми, видети у Глави 2. Помоћу њега и Тврђења 4 није тешко урадити следећи задатак, јер се он своди на множење матрица.

Задатак 9. Нека је $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ диференцијабилна функција три променљиве.

(а) Ако су $x, y, z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ диференцијабилне функције једне променљиве, доказати да је

$$\frac{d}{dt}f(x(t), y(t), z(t)) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

(б) Ако су $x, y, z : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ диференцијабилне функције две променљиве, доказати да је

$$\frac{\partial}{\partial t}f(x(t, s), y(t, s), z(t, s)) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t}.$$

Чему је једнако $\frac{\partial}{\partial s}f(x(t, s), y(t, s), z(t, s))$? ✓

Теорема 8. (Извод инверзног пресликавања) Нека су V и W отворени подскупови у \mathbb{R}^k и $f : V \rightarrow W$ бијекција. Ако су испуњени следећи услови

- пресликавање f је диференцијабилно у тачки a ;
- $f'(a)$ је инвертибилна матрица;
- пресликавање $f^{-1} : W \rightarrow V$ је непрекидно у тачки $f(a)$,

тада је пресликавање f^{-1} диференцијабилно у тачки $f(a)$ и важи

$$Df^{-1}(f(a)) = (Df(a))^{-1} \tag{11}$$

где је на десној страни матрица инверзна матрици $Df(a)$ (или, еквивалентно, линеарно пресликавање инверзно пресликавању $Df(a)$).

Напоменимо да последњи услов у овој теорему, о непрекидности инверзног пресликавања у тачки $f(a)$ не може да се изостави: постоји пример бијекције $f : V \rightarrow W$ која је диференцијабилна, али нема диференцијабилан извод (видети поглавље о изводу инверзне функције у [15] за пример такве функције једне променљиве). Међутим, ако претпоставимо да је пресликавање f непрекидно диференцијабилно² онда је тај услов сувишан. Важи и више од тога, о чему говори следећа теорема.

Теорема 9. (Теорема о инверзној функцији) Нека је $U \subset \mathbb{R}^k$ отворен скуп, $a \in U$ и $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ пресликавање за које важи:

- f је непрекидно диференцијабилно;
- матрица $Df(a)$ је инвертибилна.

Тада постоје околина $V \subset U$ тачке a и околина W тачке $f(a)$ такве да је $f : V \rightarrow W$ хомеоморфизам³ са непрекидно диференцијабилним инверзним пресликавањем $f^{-1} : W \rightarrow V$ и важи (11).

Приметимо да у овој теорему не претпостављамо да је f бијекција, него, из непрекидне диференцијабилности и инвертибилности извода $Df(a)$ закључујемо да је f локално, тј. после рестрикције на можда мању околину, бијекција. Ову важну теорему ћемо, у општијем облику, да докажемо у Глави 2.

²За пресликавања у коначно димензионим просторима \mathbb{R}^k ово је еквивалентно са тиме да су им парцијални изводи непрекидни; општију дефиницију даћемо у Глави 2.

³Пресликавање $f : V \rightarrow W$ је хомеоморфизам ако је оно бијекција и ако су и f и $f^{-1} : W \rightarrow V$ непрекидна пресликавања.

0.5. Имплицитно задате функције. Теорему о инверзној функцији можемо да посматрамо и на следећи начин. Претпоставимо да нам је задата функција $f : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ дефинисана на отвореном подскупу $V \subset \mathbb{R}^k$ и да хоћемо да решимо једначину $f(x) = c$. За свако $c \in f(V)$, ова једначина има решења, док за $c \notin f(V)$ нема. Остаје још да размотримо кад је решење, ако постоји, јединствено. Ово може да буде веома тешко питање, јер функција f (па тиме и једначина $f(x) = c$) може да буде веома компликована. Међутим, ако су парцијални изводи функције f непрекидни, онда ће, по Теорему о инверзној функцији, решење бити, бар локално⁴ јединствено ако је први извод инвертибилна матрица. Заиста, тада је f бијекција и $x = f^{-1}(c)$ је једино решење. Из Линеарне алгебре знамо да је квадратна матрица L инвертибилна ако и само ако је решење хомогеног линеарног система $Lx = 0$ јединствено. Тиме смо решење компликоване једначине $f(x) = c$ у околини тачке $x = a$ свели на питање решавања најједноставније могуће једначине – линеарне једначине $Lx = 0$, где је $L = Df(a)$.

Сем квадратних система, у Линеарној алгебри смо решавали и правоугаоне. На пример, систем две линеарне једначине са три непознате

$$-2x + y + z = 1, \quad x - 2y + z = 4 \quad (12)$$

може некад да се реши тако што се две непознате изразе преко треће. У случају система (12) решење је

$$z = x + 2, \quad y = x - 1. \quad (13)$$

Овоме можемо да дамо и геометријску интерпретацију. Једначина (12) је једначина праве у тродимензионом простору. Једначина (13) је, наравно, једначина те исте праве, али приказана као график пресликавања

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x) = (x + 2, x - 1).$$

Посматрајмо сада једначину

$$F(x, y) = 0$$

Када њу можемо да решимо по x или, геометријски гледано, када скуп

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid F(x, y) = 0\}$$

можемо да представимо као график функције $y(x)$? Узмимо нпр. функцију $F(x, y) = y^2 - x$. Тада имамо посла са параболом

$$\Pi := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y^2 - x = 0\}.$$

Она није график функције $x \mapsto y(x)$, али има следеће својство по коме личи на график:

свака тачка $(a, b) \in \Pi$ сем координатног почетка има околину $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, такву да је $U \cap \Pi$ график.

⁴Локално значи у некој околини тачке о којој је реч; у овом случају реч је о тачки у којој је први извод инвертибилан.

Приметимо да смо координатни почетак морали да избацимо из овог тврђења, јер ни у једној његовој околини параболола није график. На језику геометрије, ту тачку препознајемо као тачку парабололе у којој је *тангента вертикална*, а на језику диференцијалног рачуна као тачку у којој је

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0. \quad (14)$$

Заиста, парцијални извод функције $F(x, y) = y^2 - x$ по другој променљивој је $2y$ и он је једнак нули за $y = 0$, одакле, убацивањем у једначину парабололе добијамо и $x = 0$, тј. координатни почетак. Чињеница да криву не можемо да представимо као график функције тамо где она има вертикалну тангенту је разумљива: график не сме да сече вертикалну праву више од једном, а тангента је управо права која додирује криву „са вишеструкошћу 2 или више”, односно ако је ма колико мало паралелно померимо на десну страну, добићемо праву која сече параболу двапут.

Приметимо да смо опет питање решивости једначине $F(x, y) = 0$ по x свели на решавање једноставније, линеарне једначине (14). За разлику од ситуације у Теорему о инверзној функцији, када смо посматрали пресликавање између простора исте димензије, овде је F пресликавање из \mathbb{R}^2 у \mathbb{R} .

Одговор на питање о решивости и јединствености решења правоугаоних система даје Кронекер–Капелијева теорема из Линеарне алгебре. Њено уопштење на произвољне, не обавезно линеарне, једначине је следећа теорема, која се односи на решавање (не обавезно линеарних) једначина

$$F_1(x_1, \dots, x_{k_1}, y_1, \dots, y_{k_2}) = 0, \quad \dots \quad F_{k_2}(x_1, \dots, x_{k_1}, y_1, \dots, y_{k_2}) = 0.$$

Означимо тачке $(x_1, \dots, x_{k_1}, y_1, \dots, y_{k_2})$ скраћено са (x, y) и (F_1, \dots, F_{k_2}) са F .

Теорема 10. (Теорема о имплицитној функцији) *Нека је $U \subset \mathbb{R}^{k_1+k_2}$ отворен скуп $(a, b) \in U$ и $F : U \rightarrow \mathbb{R}^{k_2}$ пресликавање које испуњава следеће услове:*

- F је непрекидно диференцијабилно пресликавање;
- $F(a, b) = 0$;
- квадратна матрица

$$F'_y(a, b) := \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(a, b) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{k_2}}(a, b) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_{k_2}}{\partial y_1}(a, b) & \cdots & \frac{\partial F_{k_2}}{\partial y_{k_2}}(a, b) \end{pmatrix}$$

је инвертибилна. Тада постоје отворена околина $V \subset \mathbb{R}^{k_1}$ тачке a и $W \subset \mathbb{R}^{k_2}$ тачке b и непрекидно диференцијабилно пресликавање

$$f : V \rightarrow W$$

такво да је за све $(x, y) \in V \times W$

$$F(x, y) = 0 \iff y = f(x).$$

При томе је

$$f'(x) = -(F'_y(x, f(x)))^{-1} \cdot F'_x(x, f(x)).$$

Геометријски гледано, ова теорема нам каже под којим условима вишед-имензиону површ $F(x, y) = 0$ у еуклидском простору можемо да представимо као график пресликавања $y = f(x)$.

Приметимо да је график функције $z = u(x, y)$ дводимензиона површ у \mathbb{R}^3 . Општије, из Теореме о имплицитној функцији следи

Теорема 11. *Ако је $F : \mathbb{R}^{k_1+k_2} \rightarrow \mathbb{R}^{k_2}$ непрекидно диференцијабилно пресликавање, такво да матрица DF у свакој тачки скупа $F^{-1}(c)$ има максималан ранг⁵. Тада је*

$$S = \{x \in \mathbb{R}^{k_1+k_2} \mid F(x) = c\}$$

површ димензије k_1 .

Напомена 6. Појам димензије површи прецизно ћемо да дефинишемо у Глави 2. У овом тренутку, задовољићемо се следећим описом и задацима који следе. Нека је γ крива у \mathbb{R}^3 , задата параметарским једначинама

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad z = z(t).$$

Ако су x, y, z диференцијабилне функције, вектор

$$T := (x'(t), y'(t), z'(t))$$

називамо *вектором брзине*, а сваки њему колинеаран вектор *тангентним вектором* на криву у тачки $(x(t), y(t), z(t))$. Тангентна равна на површ $S \subset \mathbb{R}^3$ у тачки $p \in S$ је скуп свих тангентних вектора у тачки p на све криве у које леже у површи и пролазе кроз ту тачку.

Претпоставимо да је површ задата једначином $F(x, y, z) = c$ и да F задовољава услове претходне теореме, тј. $\text{rang } DF(x, y, z) = 1$ за све $(x, y, z) \in S$. За сваку криву $(x(t), y(t), z(t))$ на S важи $F(x(t), y(t), z(t)) = c$. Диференцирањем ове једнакости по t , уз примену правила за извод сложене функције (видети један од претходних задатака), добијамо

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0, \quad (15)$$

јер је извод константе нула. Израз на левој страни у (15) је вредност линеарног пресликавања $DF(x)(T)$. Другим речима, тангентна равна је језгро линеарног пресликавања $DF(x) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ранга 1, дакле дводимензиони простор.

Ако уведемо ознаку $\nabla F = (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z})$, једначину (15) која описује тангентну равна можемо да напишемо у облику

$$\nabla F \perp T,$$

што значи да је ∇F вектор тангентне равни. Сада лако можемо да нађемо и једначину тангентне равни на површ дату једначином $F(x, y, z) = c$.

Све речено у овој напомени се праволинијски уопштава на m -димензионе површи у \mathbb{R}^k задате системом од $k - m$ једначина, више детаља биће дато у Глави 2. \diamond

Задатак 10. Скуп

$$S := \{x^2 + 2y^2 + 3z^2 = c\}$$

⁵Другим речима, $(\forall x \in F^{-1}(c)) \text{rang } DF(x) = k_2$.

за $c > 0$ је дводимензиона површ (елипсоид), али не и за $c \leq 0$: за $c = 0$ S је тачка, а за $c < 0$ празан скуп. Проверити зашто за $c > 0$ претходна теорема може, а за $c \leq 0$ не може да се примени. ✓

Задатак 11. Доказати да је

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^3 + z^3 - xy + y^2z = 2\}$$

у околини тачке $(1, 1, 1)$ график функције $z = u(x, y)$ и наћи $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$. Наћи једначину тангентне равни на S у тачки $(1, 1, 1)$. Упутство: видети Напомену 6.

Да ли постоји тачка скупа S у чијој околини S није график функције променљивих $z = u(x, y)$? Да ли постоји тачка скупа S у чијој околини S није график функције $x = v(y, z)$? ✓

Задатак 12. Доказати да је једначином

$$\sin(x + y) + \sin(y + z) + \sin(z + x) = 0$$

у некој околини тачке (π, π, π) дефинисана функција $z = u(x, y)$ и наћи њене парцијалне изводе. ✓

0.6. Локални екстремуми. Ако је $f(x^1, \dots, x^k)$ диференцијабилна функција k променљивих која има локални екстремум у тачки $a = (a^1, \dots, a^k)$, онда и њена рестрикција на хиперраван

$$x^2 = a^2, \dots, x^k = a^k,$$

која је функција једне променљиве x^1 , има локални екстремум у тачки c^1 . По познатом ставу за функције једне променљиве, њен извод у тој тачки је једнак нули, тј.

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}(a) = 0.$$

Исто важи и за остале променљиве, па тако добијамо неопходан услов под којим је тачка c локални екстремум:

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}(a) = \frac{\partial f}{\partial x^2}(a) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x^k}(a) = 0. \quad (16)$$

Као и у случају функција једне променљиве, довољан услов се добија из Тејлорове формуле, о чему ће бити речи у Глави 2. Напоменимо да вишедимензиони случај има специфичности којих нема у једнодимензионом. На пример, ако из другог извода не закључимо да се ради о екстремној вредности, не можемо само на основу њега да закључимо да имамо посла са превојном тачком, него морамо да тразимо следећи извод⁶. У вишедимензионом случају, постоје ситуације у којима већ из другог извода можемо да закључимо да се не ради о екстремној вредности, без тражења трећег.

Задатак 13. Наћи апсолутне екстремуме функције

$$f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 4\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x + 3y.$$

Упутство: ове вредности се свакако достижу (видети Вајерштрасову теорему на стр. 21). Довољан услов (16) издваја само *унутрашње тачке* домена, јер су изводи дефинисани само у унутрашњим тачкама; неопходно је сем њих додатно испитати и границу домена. ✓

⁶Функције $f(x) = x^3$ и $g(x) = x^4$ имају исти други извод у нули, међутим прва нема у тој тачки екстремум, док друга има. То видимо тек кад израчунамо трећи извод за f и четврти за g .

0.7. Условни екстремуми. Ако функција $F : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ задовољава услове Теореме о имплицитној функцији, онда је

$$S = \{x \in \mathbb{R}^k \mid F(x) = c\}$$

хиперповрш у \mathbb{R}^k . Нека је $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ диференцијабилна функција. Екстремуми њене рестрикције на хиперповрш S називају се *условним екстремумима* или *екстремумима везаним условом* $F(x) = c$.

Ако рестрикција функције g на S има локални екстремум у тачки $p \in S$, онда и њена рестрикција на сваку криву

$$x_1 = x_1(t), \dots, x_k = x_k(t)$$

која лежи на S и пролази кроз тачку p има локални екстремум у тачки p . Другим речима, функција једне променљиве

$$t \mapsto g(x_1(t), \dots, x_k(t))$$

има локални екстремум у тачки $t = t_0$ у којој крива пролази кроз p , па њен извод у тој тачки мора да буде нула. Применом правила о изводу сложене функције одатле закључујемо

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial g}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} = 0.$$

Другачије записано: $\nabla g(p) \perp T$ за сваки вектор T који је тангентан на S у тачки p . У Напомени 6 смо видели да је и $\nabla F(p)$ ортогоналан на тангентни простор. Пошто је S хиперповрш, простор ортогоналних вектора на тангентни простор је димензије један, па вектори $\nabla F(p)$ и $\nabla g(p)$ морају да буду пропорционални. Тако смо извели неопходан услов да тачка p буде локални екстремум:

$$\nabla g(p) = \lambda \nabla F(p) \tag{17}$$

Приметимо да је (17) систем од k једначина (свака од k координата вектора на левој једнака је одговарајућој координати вектора на десној страни) са $k + 1$ непознатих: k координата тачке p и скалар λ . Ако том систему додамо и једначину

$$F(p) = c, \tag{18}$$

(јер тражимо условни екстремум $p \in S = F^{-1}(c)$), добијамо систем од $k + 1$ једначина (17) и (18) са $k + 1$ непознатих.

Задатак 14. Наћи *апсолутне* екстремне вредности функције

$$g : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x, y) = xy.$$

Упутство: Приметимо да функција g свакако има апсолутни максимум и минимум: непрекидна је, а домен јој је компактан, па за њу важи раније поменути Вајерштрасова теорема. У унутрашњости диска кандидати су тачке обичних локалних екстремума, а на граничном кругу треба наћи условне екстремуме везане условом $F(x, y) = 1$, где је $F(x, y) = x^2 + y^2$. ✓

0.8. Интеграција. Нека је $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна⁷ функција једне реалне променљиве. У првом курсу анализе смо дефинисали њен интеграл (нпр. на интервалу $[a, x] \subset [a, b]$) са

$$\int_a^x f(t) dt := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} f(c_j) \Delta_n, \quad \text{где је} \quad c_j = a + \frac{j(x-a)}{n}, \quad \Delta_n = \frac{x-a}{n} \quad (19)$$

и доказали да је

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x). \quad (20)$$

Из Лагранжеве теореме о средњој вредности следи да је функција

$$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

једнозначно одређена условима

$$F'(x) = f(x) \quad \text{и} \quad F(a) = 0,$$

па формула (20), уместо (19), може да се узме као дефиниција интеграла. Другим речима, можемо да кажемо да је, по дефиницији⁸,

$$\int_a^b f(t) dt = \Phi(b) - \Phi(a)$$

за *било коју* примитивну функцију Φ функције f .

Ова два приступа дефиницији интеграла су еквивалентна у једнодимензионом случају, тј. код функција једне реалне променљиве. Њихово уопштење на вишедимензиони случај природно нас води ка два различита концепта. Ради једноставности, размотрићемо у овом уводу само дводимензиони случај са више детаља, и указаћемо на вишедимензионе генерализације које ћемо детаљније разматрати у Глави 3.

Природно уопштење дефиниције (19) је интеграл по правоугаонику: нека је

$$f : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}$$

непрекидна функција. Ако поделимо сваки од интервала $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$ на подинтервале једнаке дужине, као што смо у (19) урадили са интервалом $[a, x]$, добићемо поделу правоугаоника $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ на n мањих правоугаоника J_0, \dots, J_{n-1} . Сваки од њих има површину

$$\Delta_n := \frac{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)}{n^2}.$$

Изаберимо за свако i произвољну тачку $c_i \in J_i$ и дефинишимо

$$\iint_{[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]} f(x, y) dx dy := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} f(c_j) \Delta_n. \quad (21)$$

⁷Због једноставности овог уводног излагања, у овом поглављу ћемо говорити само о интегралима непрекидних функција; ширу класу интеграбилних функција разматраћемо у Глави 1 и Глави 3.

⁸Овакав приступ дефиницији интеграла је изабран у [6].

Видећемо у Глави 3 да ова дефиниција не зависи од избора тачака c_i . Јасно је да она уопштава дефиницију (19) са димензије 1 на димензију 2. Ова дефиниција се на очигледан начин преноси и на сваку димензију $k > 2$, с тим што је Δ_n у том случају запремина k -димензионог квадра.

Као и у случају интеграла функције једне променљиве, неке особине коначних сума са десне стране у (21) се преносе на интеграл на левој. Тако је, на пример, интеграл позитивне функције позитиван број, а интеграл линеарне комбинације две функције линеарна комбинација интеграла сваке функције појединачно. Наведимо и две особине специфичне за вишедимензиони случај.

Теорема 12. (Фубинијева теорема, специјални случај) *Нека је*

$$f : J \rightarrow \mathbb{R}$$

непрекидна функција на правоугаонику $J = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$. Тада је

$$\iint_J f(x, y) dx dy = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy \right) dx = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dx \right) dy.$$

Задатак 15. Израчунати

$$\iint_{[0,4] \times [-1,1]} (5y^4 - 18x^2y) dx dy$$

применом Фубинијеве теореме. ✓

Фубинијева теорема се на очигледан начин уопштава са двоструких на вишеструке интеграле, али и са правоугаоника (и њихових вишедимензионих генерализација, k -димензионих квадрата) на општије области. Тако ћемо у Глави 3 видети да важе једнакости као што је

$$\int_0^1 \int_0^x f(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_y^1 f(x, y) dx dy. \quad (22)$$

Задатак 16. Скицирати област $D \subset \mathbb{R}^2$ ограничену кривама $x = y^2$, $x = 1$ и $y = 2$ и израчунати

$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$$

на два начина: интеграцијом прво по x , па затим по y и обрнуто, прво по y , па затим по x . ✓

Теорема 13. (Теорема о смени променљиве, специјални случај)

Нека је

$$f : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}$$

непрекидна функција и

$$\varphi : [\alpha_1, \beta_1] \times [\alpha_2, \beta_2] \rightarrow [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$$

хомеоморфизам, такав да су пресликавања φ и φ^{-1} непрекидно диференцијабилна у унутрашњим тачкама својих домена. Тада је

$$\iint_{[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]} f(x, y) dx dy = \iint_{[\alpha_1, \beta_1] \times [\alpha_2, \beta_2]} f \circ \varphi(s, t) |\det \varphi'(s, t)| ds dt,$$

где је последњи члан под интегралом на десној страни апсолутна вредност детерминанте првог извода пресликавања φ .

И ова теорема се на очигледан начин уопштава на димензије веће од два, а уз мало труда и на општије области од правоугаоника. О томе ће бити речи у Глави 3. Тамо ћемо и да објаснимо појаву апсолутне вредности детерминанте првог извода (која није била присутна у теорему о смени променљиве у случају функција једне променљиве).

Задатак 17. Нека је D област ограничена кривама $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, $x = 0$, $y = 0$. Израчунати интеграл

$$\iint_D xy \, dx \, dy$$

преласком на поларне координате. Упутство: применити Теорему о смени променљиве на пресликавање

$$\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Доказати да је $\det \varphi'(r, \theta) = r$ и наћи $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$, тако да је φ хомеоморфизам квадра $[\alpha_1, \beta_1] \times [\alpha_2, \beta_2]$ на D . ✓

Вратимо се сада формули (20) која, као што смо рекли, води ка могућој дефиницији интеграла помоћу примитивне функције. Сетимо се да је, за функцију једне променљиве $f(x)$, њена примитивна функција она која задовољава

$$\Phi'(x) = f(x). \quad (23)$$

За функције више променљивих, ова дефиниција мора да се модификује, јер функција и њен извод нису објекти истог типа (видети дискусију испод (10) на стр. 25), па (23) нема смисла. Видели смо да изводу функције $f(x_1, \dots, x_k)$ више променљивих придружимо вектор

$$\nabla f := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k} \right).$$

Проблем налажења примитивне функције из теорије функција једне променљиве се уопштава на функције више променљивих на следећи проблем. Ако је $D \subset \mathbb{R}^k$ и ако је дато *векторско поље* \mathbf{F} на D , тј. пресликавање

$$\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^k,$$

наћи функцију $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, такву да је

$$\nabla f(x) = \mathbf{F}(x), \quad \text{за све } x = (x_1, \dots, x_k) \in D. \quad (24)$$

Функција f из (24) назива се *потенцијалом векторског поља* \mathbf{F} . У случају $k = 1$, једином у коме можемо да идентификујемо скаларе и векторе, примитивна функција скаларне функције је потенцијал са њом идентификованог векторског поља.

Задатак 18. (а) Нека су

$$f, g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$$

непрекидно диференцијабилне функције, такве да је $\nabla f(x) = \nabla g(x)$ за све $x \in \mathbb{R}^k$. Доказати да је $f - g \equiv \text{const}$. Упутство: функција $h = f - g$ задовољава $\nabla h \equiv 0$. Фиксирајмо тачку $y \in \mathbb{R}^k$. Произвољну тачку $x \in \mathbb{R}^k$ можемо да спојимо са y сегментом

$$[x, y] := \{x + t(y - x) \mid 0 \leq t \leq 1\}.$$

Диференцирањем функције једне променљиве

$$\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi(t) := h(x + t(y - x))$$

и применом правила за извод сложене функције закључити да је

$$\psi' = \frac{\partial h}{\partial x_1}(y_1 - x_1) + \dots + \frac{\partial h}{\partial x_k}(y_k - x_k) = \nabla h \cdot (y - x) = 0$$

Одатле, на основу Лагранжеве теореме, закључити да је $\psi \equiv \text{const}$. Специјално $h(x) = \psi(0) = \psi(1) = h(y)$ за произвољно y , дакле h је константна функција.

(б) Доказати да је потенцијал векторског поља

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$$

јединствен до на константу. ✓

Да бисмо покушали да решимо једначину (24) по f , уводимо следећи појам.

Дефиниција 16. Нека је $D \subset \mathbb{R}^k$ отворен скуп и γ крива у D задата глатком параметризацијом

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad a \leq t \leq b,$$

или, у координатама,

$$x_1 = x_1(t), \dots, x_k = x_k(t), \quad a \leq t \leq b$$

и нека је $\mathbf{F} := (F_1, \dots, F_k) : D \rightarrow \mathbb{R}^k$ непрекидно векторско поље. *Криволинијски интеграл* поља \mathbf{F} дуж криве γ је

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} := \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt. \quad (25)$$

Подинтегрална функција на десној страни је скаларни производ векторских функција \mathbf{F} и \mathbf{r}' , тако да се ради о обичном интегралу реалне функције једне реалне променљиве, дефинисане на интервалу $[a, b]$. ◇

Из дефиниције следи да дефиниција криволинијског интеграла зависи од оријентације криве γ , а не само њене геометријске слике (тзв. *носача криве*). Нпр, ако је

$$\mathbf{r}_1 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^k$$

параметризација криве $\gamma \subset \mathbb{R}^k$, онда је и

$$\mathbf{r}_2 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad \mathbf{r}_2(t) := \mathbf{r}_1(-t)$$

параметризација исте криве, са другом оријентацијом – \mathbf{r}_2 почиње у тачки у којој се \mathbf{r}_1 завршава и обрнуто. Замена параметризације \mathbf{r}_1 параметризацијом \mathbf{r}_2 доводи до промене знака криволинијског интеграла.

Израз

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} := \int_a^b (F_1(x_1(t), \dots, x_k(t))x_1'(t) + \dots + F_k(x_1(t), \dots, x_k(t))x_k'(t)) dt$$

је други запис дефиниције (25), у координатама. Некада исти израз записујемо и са

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} := \int_{\gamma} F_1 dx_1 + \dots + F_k dx_k,$$

сугеришући да се овај интеграл израчунава тако што се у израз на десној страни убаци параметризација криве, при чему се dx_1, \dots, dx_k понашају као диференцијали, тј.

$$dx_1 = \frac{dx_1}{dt} dt, \quad \dots \quad dx_k = \frac{dx_k}{dt} dt.$$

Задатак 19. Израчунати

$$\int_{\gamma} (x^2 - y) dx + (x + y^2) dy$$

ако је γ

- (а) дуж која почиње у тачки $(0, 1)$ и завршава се у тачки $(1, 2)$;
 (б) део параболе $y = x^2 + 1$ који почиње у тачки $(0, 1)$ и завршава се у тачки $(1, 2)$. ✓

Вратимо се сада решавању једначине (24) по f , за задато векторско поље \mathbf{F} . Размотрићемо овде само случај $k = 2$, а општи случај у Глави 2 и Глави 3. Нека је $D \subset \mathbb{R}^2$ отворен скуп и

$$\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$$

дато векторско поље и нека су његове координатне функције P и Q непрекидно диференцијабилне. Претпоставимо да је $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ решење једначине (24), тј. да је

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Q.$$

Пошто су функције P и Q непрекидно диференцијабилне, можемо да диференцирамо претходне једнакости. Диференцирањем прве по y , а друге по x добијамо

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (26)$$

У Глави 2 доказаћемо следеће тврђење:

Тврђење 6. *Ако су други парцијални изводи непрекидне функције, онда они комутирају, тј. важи*

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}. \quad (27)$$

Пошто су P и Q по дефиницији непрекидно диференцијабилне функције, њихови парцијални изводи су непрекидни, па из (26) следи да су испуњени услови Тврђења 6. Зато важи (27). Одатле и из (26) следи да је *неопходан услов* за постојање решења једначине (24)

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (28)$$

Да ли је он и довољан, зависи од тополошких својстава области D . Објаснимо то детаљније. Идеја нам је да потенцијал дефинишемо помоћу интеграла, као примитивну функцију у случају функција једне променљиве. Прецизније, желимо да фиксирамо тачку $(a_1, a_2) \in D$ и дефинишемо функцију

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) := \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (29)$$

Уколико је овако дефинисана функција добро дефинисана (тј. уколико претходна дефиниција не зависи од избора криве γ) лако је проверити, коришћењем Њутн–Лајбницевог формуле и мало рачуна, да смо њом добили решење једначине (24). Међутим, читалац који је урадио Задатак 19 видео је да се интеграл векторског поља дуж две различите криве (дужи и дела параболе) које спајају исте крајње тачке – разликују.

Ако је крива γ *затворена*, тј. ако је $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$ онда за криволинијски интеграл дуж ње користимо ознаку

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Следеће тврђење је очигледно, ако имамо у виду да се променом оријентације мења знак криволинијског интеграла. Предлажемо читаоцу да га докаже, као тест разумевања те чињенице:

Тврђење 7. Нека је $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^k$ непрекидно векторско поље у \mathbb{R}^k . Криволинијски интеграл

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

не зависи од избора криве γ која спаја две дате тачке, него само од тих тачака, ако и само ако је

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

за сваку затворену криву γ .

Следећа важна теорема уопштава Њутн–Лајбницову формулу за интеграле функција једне променљиве (детаљније о томе, и о вишедимензионим уопштењима, биће речено у Глави 3).

Теорема 14. (Гринова теорема) Нека је $D \subset \mathbb{R}^2$ отворен подскуп равни са глатком границом ∂D и

$$P, Q : V \rightarrow \mathbb{R}$$

непрекидно диференцијабилне функције дефинисане на отвореном скупу V који садржи D . Тада је

$$\oint_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

где је глатка крива ∂D на левој страни оријентисана тако да при обилажењу у смеру оријентације област D остаје са њене леве стране.

На пример, ако је $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$, онда је ∂D унија два круга, од којих је мањи оријентисан у смеру кретања казаљке на сату, а већи у супротном.

Задатак 20. Дато је векторско поље

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{F}(x, y) = (6xy^2 - y^3, 6x^2y - 3xy^2).$$

(а) Доказати да

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

не зависи од избора криве γ која спаја две дате тачке, него само од тих тачака.

(б) Израчунати овај интеграл дуж произвољне криве γ која спаја тачке $(0, -1)$ и $(2, 1)$. Упутство: пошто из (а) следи да интеграл не зависи од избора криве γ , можемо да изаберемо што једноставнију криву; нпр. дуж са крајевима $(0, -1)$ и $(2, 1)$. ✓

Да бисмо завршили дискусију о решавању једначине (24), тј. о налажењу потенцијала датог векторског поља, потребна нам је следећа дефиниција.

Дефиниција 17. Отворен подскуп $D \subset \mathbb{R}^k$ је *путно повезан* ако за сваке две тачке $p, q \in D$ постоји непрекидно пресликавање $h : [0, 1] \rightarrow D$ (*пут у D*) такво да је $h(0) = p$, $h(1) = q$. Ако је уз то свака затворена крива у D граница неке области $V \subset D$, онда кажемо да је скуп D *просто повезан*. ◇

На пример, скуп $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ је путно повезан, али није пуросто повезан, јер затворена крива $x^2 + y^2 = 1$ није граница области која је цела садржана у њему (смита координатни почетак који је избачен). Али, скуп $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ јесте просто повезан.

Приметимо да је интеграл у Гриновој теорему једнак нули ако је испуњен услов (28). Сада можемо да формулишемо следеће тврђење.

Теорема 15. Нека је $D \subset \mathbb{R}^2$ отворен скуп и

$$\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$$

дато векторско поље, при чему су P и Q непрекидно диференцијабилне функције. Услов

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

је неопходан за постојање потенцијала f поља \mathbf{F} , тј. за постојање решења једначине $\nabla f = \mathbf{F}$. Ако је област D просто повезана, овај услов је и довољан.

△ Заиста, ако је D просто повезан скуп, свака затворена крива ограничава област, па применом Грине теореме закључујемо да је интеграл поља \mathbf{F} дуж ње једнак нули. Из Тврђења 7 онда следи да је са (29) добро дефинисан потенцијал f . ▽

Задатак 21. Наћи потенцијал векторског поља

$$\mathbf{F}(x, y) = (6xy^2 - y^3, 6x^2y - 3xy^2)$$

и помоћу њега урадити Задатак 20 под (б). Упутство: тражимо функцију $f(x, y)$ за коју је

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy^2 - y^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 6x^2y - 3xy^2.$$

Из прве једначине следи

$$f(x, y) = 3x^2y^2 - xy^3 + \phi(y).$$

Убацавањем овог израза у другу једначину, наћи ϕ , а тиме и f . Из јединствености потенцијала (видети Задатак 18 на стр. 34) и (29) следи да је тражени интеграл у (б) једнак разлици $f(2, 1) - f(0, -1)$. ✓

Криволинијски интеграл се даље природно уопштавају на интеграле векторских поља дуж вишедимензионих објеката. На пример, ако је $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ површ параметризована непрекидно диференцијабилним пресликавањем

$$\mathbf{S} : D \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{S}(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t)),$$

односно, задата параметарски у координатама

$$x = x(s, t), \quad y = y(s, t), \quad z = z(s, t), \quad (s, t) \in D,$$

непрекидно диференцијабилним функцијама две променљиве, и ако је

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

непрекидно векторско поље, она је са

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} := \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{S}(s, t)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} \right) ds dt$$

дефинисан *површински интеграл* векторског поља \mathbf{F} дуж површи $\Sigma = \mathbf{S}(D)$. Под интегралом на десној страни је скаларна функција, добијена као скаларни производ вектора \mathbf{F} и векторског производа

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{vmatrix}$$

па је десна страна већ раније дефинисани двоструки интеграл реалне функције две променљиве.

Пошто векторски производ мења знак кад се промени поредак множења вектора, површински интеграл векторског поља зависи од оријентације, исто као и криволинијски. Веза површинских интеграла са диференцијалним рачуном открива нам дубље везе анализе са геометријом (или топологијом) од оних које смо видели код криволинијских интеграла. Тиме ћемо се бавити у Глави 3.

0.9. Низови и редови функција. Нека је за свако $n \in \mathbb{N}$ дата функција

$$f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$$

дефинисана на интервалу $I \subset \mathbb{R}$. Претпоставимо да за свако $x \in I$ низ реалних бројева $f_n(x)$ конвергира, тако да у лимесу добијамо функцију

$$f_{\infty}(x) : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_{\infty}(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x). \quad (30)$$

Функције f_{∞} може да изгуби неке од особина које су имале све функције f_n . Илуструјмо то следећим примером.

Пример 4. Функције

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n$$

су непрекидне, али њихов лимес

$$f_{\infty}(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

није. ‡

Ако за свако x низ $f_n(x)$ конвергира и као у (30) дефинише функцију f_{∞} , кажемо да f_n *конвергира по тачкама* ка f_{∞} или, можда неформалније, да *обично конвергира*. Јачу врсту конвергенције издвајамо у следећој дефиницији.

Дефиниција 18. Низ $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ *равномерно* или *униформно конвергира* ка функцији $f_\infty : I \rightarrow \mathbb{R}$ ако важи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f_\infty(x)| = 0,$$

или, еквивалентно: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0) n \geq n_0 \Rightarrow (\forall x) |f_n(x) - f_\infty(x)| < \varepsilon.$ \diamond

Следеће тврђење даје важан потребан и довољан услов за конвергенцију низова *реалних* функција. У Глави 1 ћемо видети да је он везан са комплетношћу *кодомена*.

Теорема 16. (Кошијев услов равномерне конвергенције) *Низ функција*

$$f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$$

равномерно конвергира ако и само ако

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) m, n \geq n_0 \implies \sup_{x \in I} |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon,$$

или, еквивалентно,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) m, n \geq n_0 \implies (\forall x \in I) |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon,$$

Разлика између равномерне и обичне конвергенције је у томе што код обичне квантификатор $(\forall x)$ уместо као последњој формули у Дефиницији 18 (и у последњој формули у Теорему 16), стоји на почетку. Одатле следи да ако низ функција f_n равномерно конвергира ка функцији f_∞ , онда он конвергира ка њој и обично. Обрнуто није тачно, што показује следећи задатак:

Задатак 22. Доказати да низ функција из Примера 4 не конвергира равномерно. \checkmark

Тврђење претходног задатка је очекивано, ако се има у виду закључак Примера 4 и следећа теорема, коју ћемо да докажемо, у нешто општијем облику, у Глави 4

Теорема 17. *Ако је $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ низ функција које су непрекидне у тачки $x_0 \in I$ и ако он равномерно конвергира ка функцији f_∞ , онда је и f_∞ непрекидна у x_0 . Еквивалентно, ако низ f_n равномерно конвергира и ако за свако n постоји*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x),$$

онда и функција f_∞ има лимес у тачки x_0 и важи

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_\infty(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x).$$

Претходна теорема може да се формулише речима *обичан и равномеран лимес комутирају*, јер њен последњи закључак може да се запише у виду

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x).$$

Пример 4 нам показује да два обична лимеса не комутирају, јер је у њему

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \neq 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 1^-} f_n(x).$$

Задатак 23. Дати пример низа непрекидних функција који неравномерно конвергира ка непрекидној функцији. Упутство: најлакше је конструисати низ непрекидних функција f_n који конвергира ка нули у свакој тачки, али за свако n постоји x_n тако да је $f_n(x_n) = 1$. Ако ово упутство не помаже, нацртати график функције $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ која је једнака нули за $x \geq 2/n$ и $f_n(1/n) = 1$. Испитати обичну и равномерну конвергенцију овог низа. ✓

Равномерни лимес комутира и са интегралом. Формулирамо ту теорему у једноставнијем облику; општи случај ћемо да докажемо у Глави 4.

Теорема 18. *Ако низ $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидних⁹ функција равномерно конвергира, онда је*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

△ Из претходне теореме следи да је гранична функција f_∞ непрекидна, па самим тим и интегрална. Пошто је

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f_\infty(x) dx \right| \leq \int_a^b \sup_{x \in I} |f_n(x) - f_\infty(x)| < \varepsilon(b-a)$$

за довољно велико n , одатле следи закључак теореме. ▽

Задатак 24. Доказати да низ функција

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = nx(1-x^2)^n$$

обично конвергира ка функцији $f_\infty \equiv 0$, али да не важи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

Закључити да претходна теорема не важи за неравномерне лимесе у општем случају. ✓

Задатак 25. Дати пример неравномерног лимеса који комутира са интегралом. ✓

Комутативност лимеса и извода је нешто сложенија. Извод *не комутира* ни са равномерним лимесом.

Задатак 26. (а) Доказати да низ диференцијабилних функција

$$f_n : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$$

равномерно конвергира ка диференцијабилној функцији $f_\infty \equiv 0$ и да низ извода

$$f'_n(x) = \sqrt{n} \cos(nx)$$

не конвергира ка $f'_\infty \equiv 0$.

(б) Доказати су све функције низа

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1}{n} \sqrt{1+n^2x^2}$$

диференцијабилне и да тај низ равномерно конвергира, али ка функцији која није диференцијабилна. ✓

⁹Довољно је претпоставити само интегралност

Следећа теорема даје услове под којима лимес и извод комутирају.

Теорема 19. Нека је $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ низ диференцијабилних функција, таквих да

- низ извода f'_n равномерно конвергира ка функцији $g : I \rightarrow \mathbb{R}$;
- за неко $x_0 \in I$ низ реалних бројева $f_n(x_0)$ конвергира.

Тада и низ f_n равномерно конвергира ка некој функцији $f_\infty : I \rightarrow \mathbb{R}$ и важи $f'_\infty(x) = g(x)$, односно

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x).$$

\triangle Доказ следи из

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t) dt$$

и теореме о комутативности равномерног лимеса и интеграла. ∇

Наравно, специјалан али и специфичан случај низова функција су редови функција

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x).$$

Задатак 27. Доказати да општи члан равномерно конвергентног реда равномерно тежи нули. Упутство: применити Кошијев став (Теорема 16). \checkmark

Помоћу следеће теореме некад можемо да сведемо питање о равномерној конвергенцији реда функција на обичну конвергенцију реда реалних бројева.

Теорема 20. (Вајерштрас) Ако је a_n низ позитивних реалних бројева, такав да ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

конвергира, и ако је $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ низ функција за који је

$$\sup_{x \in I} |f_n(x)| \leq a_n,$$

онда ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

равномерно конвергира на I .

\triangle Пошто ред $\sum a_n$ конвергира, низ његових парцијалних сума је Кошијев. Из

$$\left| \sum_{k=n}^m f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n}^m a_k$$

следи да низ парцијалних сума реда $\sum f_n(x)$ задовољава Кошијев услов за равномерно конвергенцију. ∇

Нарочито важни су *степенни редови*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n.$$

Број

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}}$$

назива се *полупречником конвергенције*. Степени ред конвергира у скупу

$$D = \{x \mid |x - x_0| < R\}.$$

Овај скуп је диск у случају комплексних, односно интервал у случају реалних редова. Касније ћемо да покажемо да степени ред равномерно конвергира на компактним подскуповима скупа D , а дивергира ван њега. Важно је знати да степени ред не конвергира равномерно на целом диску D , него само на његовим компактним подскуповима. Нпр. степени ред

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

конвергира на целој реалној правој (или комплексној равни, ако се ради о комплексној променљивој), па равномерно конвергира на њеним *компактним* подскуповима. Међутим,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^n/n!| = +\infty,$$

па општи члан не тежи нули равномерно на \mathbb{R} (или \mathbb{C}). На основу Задатка 27 закључујемо да ред не конвергира равномерно на свом домену. Приметимо да, ако је K компактан скуп, важи

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^n/n!| \leq C^n/n!$$

за неку константу C , а последњи члан тежи нули. Следећи задатак показује да ни равномерна конвергенција општег члана нули није довољна да се закључи да степени ред равномерно конвергира на целом домену.

Задатак 28. Доказати да ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

конвергира на интервалу $] - 1, 1[$, и да његов општи члан равномерно конвергира ка нули, али да постоји $\delta > 0$ тако да је за x довољно близу десној граници интервала

$$\frac{x^n}{n} + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots + \frac{x^{2n}}{2n} > \delta$$

па низ парцијалних сума не задовољава Кошијев услов равномерне конвергенције. ✓

Наравно, може да се деси и да степени ред равномерно конвергира на целом домену.

Задатак 29. Доказати да ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

равномерно конвергира на интервалу $[-1, 1]$ и дивергира на $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$. Упутство: применити Вајерштрасов став (Теорема 20). ✓

0.10. Фуријеови редови. Нека је

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

периодична функција са основним периодом $2L > 0$. Њене вредности на целој реалној оси одређене су њеном рестрикцијом на интервал $[-L, L]$. Претпоставимо да је та рестрикција интеграбилна. *Тригонометријски Фуријеов ред* функције f је ред

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right),$$

где је

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Низови a_n и b_n се називају *Фуријеовим коефицијентима* функције f .

У комплексном запису, Фуријеови редови и Фуријеови коефицијенти изгледају једноставније. Фуријеов ред функције f је

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\pi n x/L},$$

где је

$$c_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i\pi n x/L} dx.$$

Интегрални којима су они дефинисани могу, због периодичности подинтегралних функција, да буду израчунати на било ком интервалу дужине $2L$, не обавезно $[-L, L]$.

Под одређеним условима, Фуријеов ред функције f може да пружи неке информације о самој функцији, а некад је његов збир управо једнак функцији f . На пример, ако је функција f непрекидно диференцијабилна свуда сем у коначно много тачака прекида, а у тачкама прекида има леви и десни лимес $f(x-0)$ и $f(x+0)$, онда њен Фуријеов ред конвергира у свакој тачки x и важи

$$\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right). \quad (31)$$

Специјално, у тачкама у којима је f непрекидна, Фуријеов ред конвергира ка вредности функције.

Пример 5. Нека је $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функција дефинисана са

$$f(x) = x^2 \quad \text{за} \quad 0 \leq x < 2\pi, \quad f(x+2\pi) = f(x).$$

Фуријеови коефицијенти ове функције се лако израчунавају парцијалном интеграцијом, па после краћег рачуна добијамо

$$a_0 = \frac{8\pi^2}{3}, \quad a_n = \frac{4}{n^2}, \quad b_n = -\frac{4\pi}{n}, \quad \text{за} \quad n > 0.$$

па је, за $0 < x < \pi$,

$$x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n^2} \cos nx - \frac{4\pi}{n} \sin nx \right).$$

У тачкама 0 и 2π функција f има прекиде и њен Фуријеов ред конвергира ка $2\pi^2$, у складу са формулом (31). $\#$

Задатак 30. Доказати да је

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Упутство: искористити Фуријеов ред из претходног примера и формулу (31) за $x = 0$. \checkmark

Задатак 31. Наћи Фуријеов ред функције

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x \leq 0 \\ 0, & 0 < x \leq \pi, \end{cases} \quad f(x + 2\pi) = f(x).$$

Доказати формулу

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

применом формуле (31) за погодно изабрану тачку. \checkmark

Треба напоменути да формула (31) коју смо користили у претходном примеру и задацима, важи под веома строгим условима. Може да се деси да Фуријеов ред функције и сама функција нису у тако лепој вези. Нпр, Колмогоров је конструисао пример функције чији су Фуријеови коефицијенти добро дефинисани, али њен Фуријеов ред дивергира у свакој тачки. У извесним ситуацијама Фуријеов ред функције конвергира ка функцији у слабијем смислу од конвергенције по тачкама, који може да се схвати као бесконачно димензионо уопштење разлагања вектора по ортонормираној бази. О томе ће бити речи у Глави 1. А под извесним условима, супротно, помоћу њих добијамо и јачу конвергенцију тригонометријских полинома од конвергенције по тачкама – равномерно. О томе ћемо говорити у Глави 5.

Ми ћемо у овом тексту проучавати још неколико приступа Фуријеовим редовима, као и сродном концепту Фуријеових интеграла, изложених на разним местима у Главама 1, 4 и 5.

Неке тополошке и алгебарске структуре у анализи

- (1) Низ реалних бројева x_n конвергира ка реалном броју x_∞ ако се у свакој околини броја x_∞ налазе сви чланови низа x_n осим њих коначно много. Прецизније, $x_n \rightarrow x_\infty$ ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да важи

$$n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x_\infty| < \varepsilon.$$

На пример, $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} = 0$ јер за свако $\varepsilon > 0$ можемо да изаберемо број $n_0 > \varepsilon^{-1}$ (Архимедово својство реалне праве), а за њега важи претходна импликација.

Функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ је непрекидна у тачки x_0 ако

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Број A је лимес функције f кад $x \rightarrow a$ ако

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

На пример, функција $(\operatorname{sgn} x)^2$ није непрекидна у 0 и $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{sgn} x)^2 = 1$.

Ове појмове можемо да објединимо и уопштимо на пресликавања $f : S \rightarrow M$, ако на S и M имамо додатне структуре које ћемо сада да дефинишемо.

- (2) *Филтер* на скупу S је скуп $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(S)$ са особинама¹

$$(\Phi 1) S \in \mathcal{F}$$

$$(\Phi 2) X \cap Y \in \mathcal{F} \Leftrightarrow X \in \mathcal{F} \wedge Y \in \mathcal{F}$$

$$(\Phi 3) \emptyset \notin \mathcal{F}.$$

Својство **($\Phi 2$)** је еквивалентно са следећа два својства:

$$\bullet X \in \mathcal{F} \wedge Y \in \mathcal{F} \Rightarrow X \cap Y \in \mathcal{F}$$

$$\bullet X \in \mathcal{F} \wedge Y \supset X \Rightarrow Y \in \mathcal{F}.$$

- (3) Нека је α релација на скупу B и \mathcal{F} филтер на скупу S . Тада је на скупу B^S свих пресликавања $f : S \rightarrow B$ дефинисана релација

$$f \alpha_{\mathcal{F}} g \Leftrightarrow \{s \in S \mid f(s) \alpha g(s)\} \in \mathcal{F}.$$

Специјално, $=_{\mathcal{F}}$ је релација еквиваленције на B^S .

- (4) *Метрички простор* је пар (M, d) где је M скуп а $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ пресликавање са особинама

$$(M1) d(x, y) \geq 0 \text{ (позитивност)}$$

$$(M2) d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \text{ (недегенерисаност)}$$

$$(M3) d(x, y) = d(y, x) \text{ (симетричност)}$$

$$(M4) d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \text{ (неједнакост троугла)}.$$

¹ $\mathcal{P}(S)$ означава партитивни скуп (тј. скуп свих подскупова) скупа S .

Пресликавање d назива се *метриком* или *растојањем*. Ако се **(M2)** замени слабијим условом $d(x, x) = 0$ добијамо *псеудометрику* и *псеудометрички простор*. Елементе метричког простора називамо и његовим *тачкама*.

(5) Из дефиниције следи

$$d(x_1, x_n) \leq \sum_{k=1}^{n-1} d(x_k, x_{k+1}) \quad \text{и} \quad |d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z).$$

(6) Различите дефиниције лимеса (функције, низа...), од којих су нам неке познате из првог курса анализе, обједињује дефиниција *лимеса пресликавања скупа са филтером у метрички простор* (видети слику).



Прецизније, нека је \mathcal{F} филтер на скупу S , (M, d) метрички простор и $f : S \rightarrow M$ пресликавање. Тачка $\zeta \in M$ је лимес пресликавања f по филтеру \mathcal{F} , у ознаци

$$\zeta = \lim_{\mathcal{F}} f$$

ако за свако $\varepsilon > 0$ важи² $d(f(s), \zeta) <_{\mathcal{F}} \varepsilon$, односно, на основу (3),

$$\{s \in S \mid d(f(s), \zeta) < \varepsilon\} \in \mathcal{F}.$$

(7) Лимес је добро дефинисан, тј. ζ је, ако постоји, јединствено. Заиста, претпоставимо супротно, да је за $\zeta_1 \neq \zeta_2$

$$\lim_{\mathcal{F}} f = \zeta_1 \quad \text{и} \quad \lim_{\mathcal{F}} f = \zeta_2.$$

Нека је $\rho = d(\zeta_1, \zeta_2)$. Из неједнакости троугла следи да су скупови

$$B_1 = \{y \in M \mid d(\zeta_1, y) < \rho/3\} \quad \text{и} \quad B_2 = \{y \in M \mid d(\zeta_2, y) < \rho/3\}$$

дисјунктни, па је $f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \cap B_2) = \emptyset$. Међутим, по дефиницији лимеса, важи $f^{-1}(B_1) \in \mathcal{F}$ и $f^{-1}(B_2) \in \mathcal{F}$, па је и $f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \in \mathcal{F}$. То је контрадикција, пошто по дефиницији филтера празан скуп не припада филтеру.

(8) За лимесе важи *принцип локализације*:

$$f =_{\mathcal{F}} g \Rightarrow \lim_{\mathcal{F}} f = \lim_{\mathcal{F}} g.$$

²Овде користимо исту ознаку за тачку $\zeta \in M$ и константну функцију $S \rightarrow M$ која има вредност ζ на целом S ; слично за реалан број ε и константну функцију која има вредност ε .

Заиста, $f =_{\mathcal{F}} g$ значи да скуп $T := \{s \in S \mid f(s) = g(s)\}$ припада филтеру \mathcal{F} . Ако је

$$\lim_{\mathcal{F}} f = \zeta,$$

онда за свако $\varepsilon > 0$ и скуп $P := \{s \in S \mid d(f(s), \zeta) < \varepsilon\}$ припада филтеру \mathcal{F} , па је и $P \cap T \in \mathcal{F}$. Пошто је

$$\{s \in S \mid d(g(s), \zeta) < \varepsilon\} \supset P \cap T,$$

из дефиниције филтера следи $\{s \in S \mid d(g(s), \zeta) < \varepsilon\} \in \mathcal{F}$, што по дефиницији лимеса значи да је

$$\lim_{\mathcal{F}} g = \zeta.$$

(9) Пример: *Фрешеов филтер* на \mathbb{N} је скуп

$$\mathcal{F}_{\mathbb{N}} := \{X \subset \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \setminus X \text{ је коначан}\}.$$

(На исти начин се дефинише Фрешеов филтер на произвољном бесконачном скупу.) **Дефиниција:** низ $a : \mathbb{N} \rightarrow M$ конвергира ако и само ако постоји $\lim_{\mathcal{F}_{\mathbb{N}}} a$. Уместо $\lim_{\mathcal{F}_{\mathbb{N}}} a$ пишемо и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ Еквивалентно: низ a_n у M конвергира ка a_{∞} ако и само ако низ $d(a_n, a_{\infty})$ у \mathbb{R} конвергира ка 0. Још једна еквивалентна формулација је

$$a_n \rightarrow a_{\infty} \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (n \geq n_0 \Rightarrow d(a_n, a_{\infty}) < \varepsilon).$$

Задатак: Доказати ове еквиваленције. Доказати да се ова дефиниција лимеса низа своди на дефиницију из (1) када је $M = \mathbb{R}$ са стандардном метриком $d(x, y) = |y - x|$.

Из задатка (7) следи да је лимес низа јединствен, а из (8) да не зависи од коначно много чланова низа.

(10) Низ $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ је *растући* ако је $x_{n+1} \geq x_n$, а *опадајући* ако је $x_{n+1} \leq x_n$. Низ је *монотон* ако је растући или опадајући. Из Аксиоме супремума (и дефиниције супремума) следи да је растући низ конвергентан ако и само ако је ограничен одозго. Заиста, ако је x_n растући и ограничен одозго, онда постоји

$$a_{\infty} := \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Тада $a_n \rightarrow a_{\infty}$ јер, за свако $\varepsilon > 0$, постоји $a_{n_0} \in]a_{\infty} - \varepsilon, a_{\infty}]$ (у противном би $a_{\infty} - \varepsilon$ било горње ограничење мање од супремума), а онда је, због монотоности, $a_n \in]a_{\infty} - \varepsilon, a_{\infty}]$ за све $n \geq n_0$. Слично, опадајући низ је конвергентан ако и само ако је ограничен одоздо.

(11) Тачка $a \in M$ је тачка нагомилавања низа a_n у M ако постоји подниз $a_{\varphi(n)}$ који конвергира ка a .

Болцано – Вајерштрасова теорема. Сваки ограничен низ у \mathbb{R} има тачку нагомилавања. Један од начина да се докаже ова теорема је следећи. Нека је

$$A = \{t \in \mathbb{R} \mid \text{скуп } \{n \mid t \leq a_n\} \text{ је бесконачан}\}.$$

Из ограничености низа a_n следи ограниченост скупа A , па постоји $s = \sup A$. У сваком интервалу $]s - n^{-1}, s + n^{-1}[$ налази се бесконачно много чланова низа (у противном s не би било најмање горње ограничење скупа A); бирањем по једног члана низа у сваком од тих интервала конструишемо подниз $a_{\varphi(n)}$.

- (12) *Затворена лопта* са центром a и полупречником ρ у метричком простору (M, d) је скуп

$$B[a; \rho] = \{x \in M \mid d(a, x) \leq \rho\}.$$

Отворена лопта са центром a и полупречником ρ у метричком простору (M, d) је скуп

$$B]a; \rho[= \{x \in M \mid d(a, x) < \rho\}.$$

Сфера са центром a и полупречником ρ у метричком простору (M, d) је скуп

$$S(a; \rho) = \{x \in M \mid d(a, x) = \rho\}.$$

Пример: У метричком простору $M = \mathbb{R}$ са метриком $d(x, y) = |y - x|$ затворена лопта $B[a; \rho]$ је затворени интервал $[a - \rho, a + \rho]$, отворена лопта $B]a; \rho[$ је отворени интервал $]a - \rho, a + \rho[$, сфера $S(a; \rho)$ је скуп $\{a - \rho, a + \rho\}$.

- (13) Подскуп $A \subset M$ је *ограничен* ако је $A \subset B[a; \rho]$ за неко $a \in M$ и неко $\rho > 0$. Пресликавање $f : T \rightarrow M$ је *ограничено* ако је скуп $f(T)$ ограничен. Скуп свих ограничених пресликавања $f : T \rightarrow M$ означавамо са $B_M(T)$.

- (14) Примери метричких простора:

- \mathbb{R} и \mathbb{C} са метриком $d(x, y) = |y - x|$;
- *Дискретан метрички простор:* $M \neq \emptyset$ са метриком

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{за } x \neq y \\ 0 & \text{за } x = y; \end{cases}$$

Задатак: Описати сфере, затворене и отворене лопте у дискретном простору.

- *Потпростор* метричког простора (M, d) је сваки подскуп $M_0 \subset M$ са метриком дефинисаном као рестрикција метрике d на $M_0 \times M_0$.
- *Производ метричких простора.* Нека су (M_j, d_{M_j}) , $1 \leq j \leq n$, $n \in \mathbb{N}$ метрички простори

$$M = M_1 \times \cdots \times M_n$$

и $\pi_j : M \rightarrow M_j$ пројекције. Ово су неки од начина да се на M зада метрика:

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{j=1}^n d_{M_j}(\pi_j x, \pi_j y)^p \right)^{1/p}, \quad (1 \leq p < +\infty);$$

$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq j \leq n} d_{M_j}(\pi_j x, \pi_j y).$$

Неједнакост троугла за $1 \leq p < +\infty$ следи из неједнакости Минковског.³

Задатак: Доказати да је $\lim_{p \rightarrow \infty} d_p(x, y) = d_\infty(x, y)$.

Специјално, за $M_1 = \cdots = M_n = \mathbb{R}$ са стандардном метриком $d(x, y) = |y - x|$ и $p = 2$ добијамо стандардни еуклидски простор.

Задатак: Нацртати лопте $B[0; 1]$ у (\mathbb{R}^2, d_p) за $1 \leq p \leq +\infty$.

³Зато смо се ограничили на случај $p \geq 1$.

- Уопштење претходног примера: Нека је (Y, d) метрички простор и $B_Y(T)$ скуп свих ограничених пресликавања $f : T \rightarrow Y$. Тада је са

$$d_\infty(f, g) = \sup_{t \in T} d(f(t), g(t))$$

дефинисана тзв. *униформна метрика* на $B_Y(T)$. За низ функција које конвергирају у тој метрици кажемо да је *униформно* (или *равномерно*) *конвергентан*. Нпр. низ $f_n(x) = x^n$ је униформно конвергентан у простору $B_{\mathbb{R}}([0, 1/2])$ а није униформно конвергентан у простору $B_{\mathbb{R}}([0, 1])$ (иако низ x^n конвергира за свако $x \in [0, 1]$). Ако је f_n униформно конвергентан низ у $B_Y(T)$, онда је за свако $t_0 \in T$ $f_n(t_0)$ конвергентан низ у Y , што следи из очигледне неједнакости

$$d_Y(f_n(t_0), f_\infty(t_0)) \leq \sup_t d_Y(f_n(t), f_\infty(t)).$$

- Ако је (M, d) метрички простор и $f : A \rightarrow M$ 1-1 пресликавање, онда је на A дефинисана метрика f^*d са

$$f^*d(x, y) = d(f(x), f(y)).$$

Бијекција $f : M \rightarrow N$ метричких простора (M, d_M) и (N, d_N) назива се *изометријом* ако је $f^*d_N = d_M$.

- Специјални случај претходног примера је метрички потпростор простора (M, d) : пар (N, j^*d) где је $N \subset M$, а $j : N \rightarrow M$ инклузија $j(x) = x$.
- *Проширена реална права*: Нека је $d(x, y) = |y - x|$ стандардна метрика на \mathbb{R} и $\overline{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Бијекција

$$f : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow [-1, 1], \quad f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

дефинише метрику $d_f(x, y) = f(d(x, y))$ на $\overline{\mathbb{R}}$, која претвара $\overline{\mathbb{R}}$ у *ограничен метрички простор*; $d_f(x, y) \leq 1$ за све $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$. Специјално, $d_f(+\infty, a) = 1$ за све $a \neq +\infty$, $d_f(-\infty, b) = 1$ за све $b \neq -\infty$, и $d_f(x, y) < 1$ за $a, b \in \mathbb{R}$. Други начин да се помоћу функције f дефинише метрика на $\overline{\mathbb{R}}$ је $d' = f^*d$. Ове две метрике се разликују.

Задатак: Израчунати $d'(a, +\infty)$ за $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Са $x \leq_f y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$ је дефинисана релација поретка која је еквивалентна стандардној.

Задатак: Да ли су стандардни интервали лопте и у метрикама d_f и (ли) d' (као што су у стандардној метрици на реалној правој)?

- **Задатак:** Нека је (M, d) метрички простор и $f : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ непрекидно строго конкавно пресликавање са особином $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Доказати да је $d_f = f \circ d$ метрика на M .

- *p*-адска метрика. Нека је $p \in \mathbb{N}$ прост број. За свако $n \in \mathbb{N}$ дефинишимо $v_p(n)$ као степен броја p у факторизацији броја n на производ простих; другим речима,

$$v_p(n) := \max\{k \mid p^k \mid n\}.$$

Из дефиниције следи $v_p(mn) = v_p(m) + v_p(n)$. За $q = \pm n/m \in \mathbb{Q}$ дефинишимо $v_p(q) = v_p(n) - v_p(m)$. И за рационалне бројеве важи $v_p(qr) = v_p(q) + v_p(r)$. Са

$$d_p : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow [0, +\infty[, \quad d_p(x, y) = p^{-v_p(x-y)}$$

је дефинисана метрика на \mathbb{Q} , називамо је *p*-адском метриком. Ова метрика задовољава строжију неједнакост троугла

$$d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\}$$

(доказати!), која се назива *ултраметричком неједнакошћу*.

Задатак: Доказати да сваки метрички простор у коме важи ултраметричка неједнакост има својство да, ако је $d(x, y) \neq d(y, z)$, онда је $d(x, z) = \max\{d(x, y), d(y, z)\}$. Доказати да ако две лопте у таквом простору имају заједничку тачку, онда је једна од тих лопти садржана у другој, и да је свака тачка лопте њен центар.

- (15) **Задатак:** Дати пример метричког простора (M, d) у коме постоје две лопте $B]x_1; r_1[$ и $B]x_2; r_2[$ такве да је $r_1 < r_2$, а $B]x_2; r_2[\subset B]x_1; r_1[$ (строг подскуп).
- (16) **Задатак:** (а) Доказати да је са $d(x, y) = |x^2 - y^2|$ дефинисана псеудометрика на реалној правој \mathbb{R} .
 (б) Доказати да је са $d(x, y) = |x^2 - y^2|$ дефинисана метрика на полуправој $[0, +\infty[$.
 (в) Нека је d псеудометрика на скупу M . Доказати да је са

$$x \sim y \Leftrightarrow d(x, y) = 0$$

дефинисана релација еквиваленције на M и да је на количничком простору M/\sim са

$$d_\sim([x], [y]) := d(x, y)$$

дефинисана метрика. Доказати да за псеудометрику d из (а) простор \mathbb{R}/\sim може да се идентификује са полуправом из (б).

- (17) **Растојање између два скупа.** Нека је (M, d) метрички простор и A, B његови подскупови. Растојање између A и B је

$$d(A, B) := \inf d(A \times B) = \inf_{(a,b) \in A \times B} d(a, b).$$

Задатак: Доказати да у *p*-адској метрици, дефинисаној у (14), постоје лопте $B]x_1; \rho[, B]x_2; \rho[, B[a; \rho]$ полупречника $\rho > 0$ такве да је

$$B]x_1; \rho[\cap B]x_2; \rho[= \emptyset \quad \text{и} \quad B]x_1; \rho[\cup B]x_2; \rho[\subset B[a; \rho]$$

и да је тада $d(B]x_1; \rho[, B]x_2; \rho[) = \rho$.

Специјално, ако је $A = \{a\}$ једночлан скуп, $d(\{a\}, B)$ је растојање тачке од скупа; уместо $d(\{a\}, B)$ пишемо $d(a, B)$. Из неједнакости троугла следи неједнакост

$$|d(x, B) - d(y, B)| \leq d(x, y).$$

Задатак: Нацртати график функције $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = d(x, \mathbb{Z})$, где је d стандардна метрика на реалној оси.

Задатак: Доказати да за тачку x која не припада затвореној лопти $B[x_0; \rho]$ важи $d(x, B[x_0; \rho]) \geq d(x, x_0) - \rho$. Како гласи одговарајућа неједнакост за отворену лопту?

(18) Дијаметар подскупа A у метричком простору (M, d) је

$$\text{diam}(A) := \sup d(A \times A).$$

Задатак: Доказати неједнакост

$$\text{diam}(A \cup B) \leq \text{diam}(A) + \text{diam}(B) + d(A, B).$$

Задатак: Доказати да је за сваку затворену лопту $B[x_0; \rho]$

$$\text{diam} B[x_0; \rho] \leq 2\rho.$$

Да ли може да важи строга неједнакост?

(19) *Осцилација* пресликавања $f : T \rightarrow M$ на скупу $T_0 \subset T$ је дијаметар скупа $f(T_0)$; ову величину означавамо са $\omega(T_0; f)$. Величину

$$\omega(a; f) := \inf_{\delta > 0} \omega(B[a; \delta]; f) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega(B[a; \delta]; f)$$

називамо *осцилацијом функције f у тачки a* .

(20) Скуп $V \subset M$ је *околина тачке $a \in V$* ако за неко $\varepsilon > 0$ важи $B[a; \varepsilon] \subset V$. Ако је V околина тачке a , онда се $V \setminus \{a\}$ назива *пробушеном околином тачке a* . Скуп U је *отворен* ако је U околина сваке своје тачке $x \in U$.

Задатак: Доказати да је отворена лопта отворен скуп.

Отворен скуп који је околина тачке a назива се *отвореном околином* те тачке. Нпр, интервал $]-\varepsilon, \varepsilon[$ је околина нуле у \mathbb{R} , а $]-\varepsilon, \varepsilon[$ је отворена околина нуле.

Задатак: Нека је U отворен подскуп метричког простора и

$$\{x_1, \dots, x_n\} \subset U$$

његов коначан подскуп. Доказати да је скуп $U \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ отворен. Да ли исто важи ако се уместо коначног узме пребројив скуп

$$\{x_1, x_2, x_3, \dots\} \subset U?$$

(21) Скуп свих околина тачке $a \in M$ је филтер; означимо га за \mathcal{F}_a . Нека је $f : M \rightarrow N$ пресликавање метричког простора (M, d_M) у (N, d_N) .

Дефиниција: Пресликавање је непрекидно у тачки a ако постоји $\lim_{\mathcal{F}_a} f$. Еквивалентно: пресликавање је непрекидно ако за све $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ тако да важи $d_M(x, a) < \delta \Rightarrow d_N(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

Задатак: Доказати ову еквиваленцију. Доказати да се претходна дефиниција своди на дефиницију из (1) када је $M = \mathbb{R}$ са стандардном метриком $d(x, y) = |y - x|$.

Пресликавање метричких простора је непрекидно у тачки a ако и само ако за сваки низ a_n који конвергира ка a низ $f(a_n)$ конвергира ка $f(a)$ (доказати!).

- (22) Тачка $a \in M$ метричког простора M је *тачка нагомилавања* скупа $B \subset M$ ако се у свакој њеној околини налази бар једна тачка $b \in B \setminus \{a\}$.

Задатак: Доказати да је $a \in M$ тачка нагомилавања скупа $B \subset M$ ако и само ако се у свакој њеној околини налази бесконачно много тачака скупа B . Доказати да је $a \in M$ тачка нагомилавања скупа B ако и само ако постоји низ $b_n \in B \setminus \{a\}$ који конвергира ка a .

Приметимо да тачка нагомилавања скупа B не мора да припада скупу B .

Специјално, тачка $a \in M$ је тачка нагомилавања метричког простора M ако је у свакој њеној околини садржано бесконачно много тачака (ово је специјални случај претходне дефиниције за $B = M$).

- (23) Нека је M метрички простор и $a \in M$ тачка нагомилавања. Скуп $\mathcal{F}_a^0 := \{X \subset M \mid X \cup \{a\} \in \mathcal{F}_a\}$ је филтер; називамо га *филтером пробушених околينا*. Лимес пресликавања $f : M \setminus \{a\} \rightarrow N$ метричког простора M у метрички простор N по овом филтеру означавамо са $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ и зовемо *граничном вредношћу* или *лимесом* пресликавања f у тачки a .

Задатак: Дати еквивалентну дефиницију на $\varepsilon - \delta$ језику. Доказати да се ова дефиниција своди на дефиницију из (1) када је $M = \mathbb{R}$ са стандардном метриком $d(x, y) = |y - x|$.

Задатак: Доказати да је $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ако и само ако је функција

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{за } x \neq a \\ A, & \text{за } x = a \end{cases}$$

непрекидна у тачки a . Извести одатле и из карактеризације непрекидности преко низова у (21) карактеризацију лимеса пресликавања преко лимеса низа.

- (24) **Задатак:** Наћи домен функције $f(x, y) = \frac{\sin^2(x-y)}{|x|+|y|}$ у равни $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ и испитати да ли се она може непрекидно (у стандардној еуклидској метрици) продужити на целу раван.
- (25) **Задатак:** Доказати да је пресликавање метричких простора $f : T \rightarrow M$ непрекидно у тачки $a \in T$ ако и само ако је $\omega(a; f) = 0$, где је $\omega(a; f)$ осцилација пресликавања f у тачки a (видети (19)).
- (26) *Лимеси у бесконачности и бесконачни лимеси.* Фамилија $\mathcal{F}_{+\infty}$ подскупова у \mathbb{R} који садрже $\{t \in \mathbb{R} \mid t > c\}$ за неко $c \in \mathbb{R}$ је *филтер пробушених околينا тачке $+\infty$* ; лимес функције $f : \mathbb{R} \rightarrow M$ по овом филтеру назива се *лимесом функције у $+\infty$* и означава са

$$\lim_{\mathcal{F}_{+\infty}} f = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

Слично, $\mathcal{F}_{-\infty} := \{X \subset \mathbb{R} \mid (\exists c) -\infty, c \subset X\}$ је филтер пробушених околينا тачке $-\infty$, а $\mathcal{F}_{\infty} := \{X \subset \mathbb{C} \mid (\exists c)\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > c \subset X\}$ филтер пробушених околине тачке ∞ у \mathbb{C} .

Ако је $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ реална функција на скупу S са филтером \mathcal{F} , онда је

$$\lim_{\mathcal{F}} f = +\infty \Leftrightarrow (\forall C > 0) f >_{\mathcal{F}} C, \quad \lim_{\mathcal{F}} f = -\infty \Leftrightarrow (\forall C > 0) f <_{\mathcal{F}} -C.$$

За комплексну функцију $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ на скупу S са филтером \mathcal{F} је

$$\lim_{\mathcal{F}} f = \infty \Leftrightarrow (\forall C > 0) |f| >_{\mathcal{F}} C.$$

(27) Лимес по филтеру околина зависи само од понашања функције у некој околини тачке a (другим речима, непрекидност је локално својство). И лимес по филтеру пробушених околина је локало својство, с тим што он не зависи од вредности функције у тачки a . Ово су специјални случајеви импликације из (8).

(28) База филтера на скупу S је фамилија $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(S)$ са својствима

$$(B1) \mathcal{B} \neq \emptyset$$

$$(B2) U \in \mathcal{B} \wedge V \in \mathcal{B} \Rightarrow (\exists W \in \mathcal{B}) W \subset U \cap V.$$

$$(B3) \emptyset \notin \mathcal{B}.$$

Ако је \mathcal{B} база филтера на S , онда је

$$\mathcal{F} = \{X \in \mathcal{P}(S) \mid (\exists V \in \mathcal{B}) V \subset X\}$$

филтер на S ; за овај филтер кажемо да је *генерисан базом* \mathcal{B} , а за базу \mathcal{B} да је *база филтера* \mathcal{F} . Обрнуто, ако фамилија скупова \mathcal{B} генерише неки филтер \mathcal{F} на овај начин, из дефиниције филтера следи да она мора да има својства (B1)–(B3).

На пример, фамилија отворених околина тачке a је база филтера околина тачке a ; фамилија пробушених отворених околина је база филтера пробушених околина; фамилија

$$\{\{n, n+1, \dots\} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

је база Фрешеовог филтера на \mathbb{N} .

Дефиниција лimesа се може дати и само у терминима базе филтера.

Дефиниција: Нека је $f : S \rightarrow M$ пресликавање скупа S у метрички простор (M, d) и \mathcal{B} база филтера на S . Тада је

$$\zeta = \lim_{\mathcal{B}} f$$

ако

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists U \in \mathcal{B}) s \in U \Rightarrow d(f(s), \zeta) < \varepsilon.$$

Ако је \mathcal{B} база филтера \mathcal{F} онда је $\lim_{\mathcal{F}} f = \lim_{\mathcal{B}} f$ (задатак!).

(29) *Смена променљиве у лимесу.* Ако је \mathcal{B}_S база филтера на скупу S и $\varphi : T \rightarrow S$ пресликавање које задовољава услов $(\forall V \in \mathcal{B}_S) \varphi^{-1}(V) \neq \emptyset$, онда је

$$\mathcal{B}_T := \varphi^{-1}(\mathcal{B}_S) = \{\varphi^{-1}(V) \mid V \in \mathcal{B}_S\}$$

база филтера на T (доказати!). Ако је $f : V \rightarrow M$ пресликавање скупа $V \in \mathcal{B}_S$ у метрички простор M , а \mathcal{F}_S и \mathcal{F}_T филтери генерисани базама \mathcal{B}_S и \mathcal{B}_T , онда важи

$$\lim_{\mathcal{F}_S} f = \lim_{\mathcal{F}_T} f \circ \varphi.$$

Ово тврђење је скоро таутологија.

Задатак: Нека је $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, $f(x) = (\operatorname{sgn} x)^2$ и $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) \equiv 0$. Ако је $s = \varphi(t)$ онда $t \rightarrow 0 \Rightarrow s \rightarrow 0$. Израчунати $\lim_{s \rightarrow 0} f(s)$

и $\lim_{t \rightarrow 0} f \circ \varphi(t)$ и објаснити зашто се добијају различити резултати (тј. зашто није оправдана смена променљиве у лимесу).

Задатак: Нека је $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ и нека низ $f(n)$ конвергира ка $\zeta \in \mathbb{C}$. Доказати да је $\lim_{x \rightarrow +\infty} f([x]) = \zeta$, где је $[\cdot]$ цео део реалног броја (тј. доказати да је овде оправдана примена теореме о смени променљиве). Полазећи од

$$\lim_{\mathbb{N} \ni n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

применом тврђења овог задатка и Теореме о три лимеса доказати да је

$$\lim_{\mathbb{R} \ni x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

- (30) Нека је \mathcal{F} филтер на S и $f : S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Захваљујући релацији поретка на реалној правој, можемо да дефинишемо *горњи лимес* функције f по филтеру \mathcal{F} са

$$\overline{\lim}_{\mathcal{F}} f := \inf_{X \in \mathcal{F}} \sup f(X).$$

Користи се и ознака $\limsup_{\mathcal{F}}$. Дуално (заменом улога супремума и инфимума) се дефинише доњи лимес. Специјални случајеви су горњи и доњи лимес низа и горњи и доњи лимес функције реалне (или комплексне) променљиве.

Задатак: Нека је

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(z) = -i|z|^{-2}(z^2 - \bar{z}^2).$$

Доказати да је $\limsup_{z \rightarrow 0} f(z) = 2$, $\liminf_{z \rightarrow 0} f(z) = -2$.

- (31) *Простор подела и Риманов интеграл.* Ако је $[a, b]$ интервал на реалној правој, његовом *поделом* се назива сваки коначан скуп тачака x_0, \dots, x_k таквих да је

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b.$$

Интервали $[x_j, x_{j+1}]$ називају се *интервалима поделе*. *Подела са уоченим тачкама* интервала $I = [a, b]$ је пар (P, \vec{c}) , где је $P = \{x_0, \dots, x_k\}$ подела, а $\vec{c} = (c_1, \dots, c_k)$ k -торка тачака таквих да је $c_j \in [x_{j-1}, x_j]$. *Параметар поделе* P је број

$$\lambda(P) := \max\{|x_j - x_{j-1}| \mid j > 0, x_j \in P\}.$$

Скуп свих подела интервала I са уоченим тачкама означимо са \mathcal{P}_I . На њему дефинишемо филтер \mathcal{F}_I на следећи начин: $X \in \mathcal{F}_I$ ако и само ако за неко $d > 0$ важи

$$\lambda(P) < d \Rightarrow P \in X.$$

Нека је дата функција $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Помоћу ње дефинишемо функцију

$$\Phi_f : \mathcal{P}_I \rightarrow \mathbb{C}, \quad \Phi_f(P, \vec{c}) := \sum_{j=1}^n f(c_j)(x_j - x_{j-1}),$$

која свакој подели $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ са уоченим тачкама (c_1, \dots, c_n) придружује комплексан број.

Кажемо да је функција f *интеграбилна по Риману* ако постоји лимес функције Φ_f по филтеру \mathcal{F}_I . Комплексан број

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\mathcal{F}_I} \Phi_f$$

називамо *Римановим интегралом* функције f по интервалу $[a, b]$.

(32) Нека је S скуп са филтером \mathcal{F} и (M, d) метрички простор. Пресликавање $f : S \rightarrow M$ задовољава *Кошијев услов* ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $T \in \mathcal{F}$ са својством

$$x, y \in T \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Из неједнакости троугла следи да је Кошијев услов *неопходан* за постојање лимеса по филтеру. Овај услов није довољан у општем случају.

За реалне функције $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ Кошијев услов је и довољан услов егзистенције лимеса по филтеру.

Доказ: Нека је $\varepsilon > 0$. Ако $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ задовољава Кошијев услов, онда је за неко $T \in \mathcal{F}$

$$x, y \in T \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из принципа локализације (8) следи да постојање лимеса по филтеру зависи само од понашања функције на T , па можемо да претпоставимо да је f дефинисана само на T . Нека је

$$A = \{s \in \mathbb{R} \mid s <_{\mathcal{F}} f\}.$$

Фиксирајмо $y_0 \in T$. За свако $x \in T$ важи

$$f(y_0) - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < f(y_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Одатле следи да је скуп A непразан (јер је $f(y_0) - \varepsilon/2 \in A$) и ограничен одозго (бројем $f(y_0) + \varepsilon/2 \in \mathbb{R}$). Из Аксиоме супремума следи да постоји

$$a = \sup A.$$

Из дефиниције супремума следи да за неко $y_1 \in T$ важи

$$a - \frac{\varepsilon}{2} < f(y_1) < a + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{односно} \quad |f(y_1) - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Одатле, на основу неједнакости троугла

$$|f(x) - a| \leq |f(x) - f(y_1)| + |f(y_1) - a| = |f(x) - f(y_1)| + \varepsilon/2,$$

следи да је, за $x \in T$,

$$|f(x) - a| < \varepsilon.$$

Пошто је $T \in \mathcal{F}$, то значи да је

$$a = \lim_{\mathcal{F}} f,$$

чиме смо доказали да је Кошијев услов *реалне* функције довољан услов егзистенције лимеса⁴.

⁴Приметимо да смо овај доказ извели употребом Аксиоме супремума, која важи у \mathbb{R} , али нема смисла у општијим структурама. На ово ћемо се још вратити касније; видети (129).

- (33) Специјално, низ a_n који задовољава Кошијев услов у односу на Фрешеов филтер, тј. такав да за свако $\varepsilon > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да важи

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

назива се *Кошијевим низом*. Сваки конвергентан низ је Кошијев (неједнакост троугла). Метрички простор у коме важи и обрнуто, тј. у коме је сваки Кошијев низ конвергентан назива се *комплетним простором*.

У (21) и (23) смо видели да појмови непрекидности и лимеса пресликавања могу да се сведу на конвергенцију низа, што можемо да искористимо да докажемо следеће тврђење.

Задатак: Нека је (M, d_M) произвољан, а (N, d_N) комплетан метрички простор. Доказати да је пресликавање $f : M \rightarrow N$ непрекидно у тачки $a \in M$ ако и само ако задовољава Кошијев услов (32) у односу на филтер околина тачке a , тј. ако и само ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ са својством

$$x, y \in B]a; \delta[\Rightarrow d_N(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Доказати да пресликавање f има лимес у тачки $b \in M$ ако и само ако задовољава Кошијев услов у филтеру пробушених околина тачке b , тј. ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ са својством

$$x, y \in B]b; \delta[\setminus \{b\} \Rightarrow d_N(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

- (34) Дискретан метрички простор је комплетан.
- (35) Из неједнакости троугла следи ово тврђење: Ако Кошијев низ има конвергентан подниз, онда је он конвергентан.
- (36) Пошто је сваки Кошијев низ ограничен (што следи из неједнакости троугла), из (35) и Болцано–Вајерштрасовог става следи још један доказ (поред оног садржаног у (32)) да су простори \mathbb{R} и \mathbb{C} комплетни. Отворени интервал $]0, 1[$ није комплетан (низ $1/n$ је Кошијев, али нема лимес у $]0, 1[$).
- (37) Комплетност *није* својство које се чува при непрекидним пресликавањима: $x \mapsto \arctan x$ слика непрекидно и бијективно комплетан простор \mathbb{R} на отворен (дакле некомплетан) интервал $] -\pi/2, \pi/2[$.
- (38) Производ комплетних метричких простора је комплетан у било којој од метрика d_p , $1 \leq p \leq \infty$.
- (39) Нека су M, N метрички простори, N комплетан, $f : M \rightarrow N$ и $a \in M$. Тада постоји $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ако и само ако је $\omega(a; f|_{M \setminus \{a\}}) = 0$ (где је $\omega(a; f|_{M \setminus \{a\}})$ осцилација рестрикције пресликавања f на $M \setminus \{a\}$). Ово је реформулација Кошијевог услова за филтер пробушених околина и последица карактеризације непрекидности преко низова и комплетности простора N .
- (40) **Задатак:** Нека је M скуп људи исте генерације, и $d(x, y) =$ број генерација до заједничког претка x и y по мушкој линији (нпр. растојање између брата и сестре је 1, између два брата од стрица 2 итд).

Доказати да је d метрика. Да ли је метрички простор (M, d) комплетан? Доказати да метрика d у овом простору задовољава ултраметричку неједнакост дефинисану у (14) и дати интерпретацију особина лопти у задатку о ултраметричкој неједнакости у (14) у овом случају.

- (41) Пресликавање $f : M \rightarrow N$ је *равномерно* (или *униформно*) *непрекидно* ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ тако да за све $x, y \in M$ за које је $d_M(x, y) < \delta$ важи $d_N(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Равномерно непрекидна пресликавања су непрекидна.

Задатак: Доказати да је пресликавање $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$ непрекидно, али не и равномерно непрекидно.

Задатак: Доказати да су функције $g(x) = x$ и $h(x) = \sin x$ равномерно непрекидне на \mathbb{R} , али да њихов производ $(gh)(x) = x \sin x$ није.

- (42) Равномерно непрекидна слика Кошијевог низа је Кошијев низ.
 (43) Пресликавање $f : M \rightarrow N$ је *Липшицово* ако је

$$\text{Lip}(f) := \sup_{x \neq y} \frac{d_N(f(x), f(y))}{d_M(x, y)} < +\infty.$$

Број $\text{Lip}(f)$ назива се *Липшицовом константом* пресликавања f . **Задатак:** Доказати да је

$$\text{Lip}(f) = \min\{C \in [0, +\infty] \mid (\forall x, y \in M) d_N(f(x), f(y)) \leq C d_M(x, y)\}.$$

Липшицова константа изометрије је 1. Пресликавања чија је Липшицова константа строго мања од 1 називају се *контракцијама*. Липшицова пресликавања су униформно непрекидна.

Задатак: Доказати да је пресликавање $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{|x|}$ униформно непрекидно, али не и Липшицово.

Задатак: Нека је A непразан подскуп метричког простора (M, d) . Доказати да је пресликавање $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = d(x, A)$ Липшицово и да је $\text{Lip}(f) \leq 1$. Специјално, за $A = \{a\}$ пресликавање $x \mapsto d(a, x)$ је Липшицово (па је и равномерно непрекидно).

- (44) **Задатак:** Доказати да је сваки метрички простор (M, d) изометричан неком потпростору простора $(B_{\mathbb{R}}(M) \cap C_{\mathbb{R}}(M), d_{\infty})$, где је $B_{\mathbb{R}}(M)$ скуп свих ограничених, а $C_{\mathbb{R}}(M)$ скуп свих непрекидних функција $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ и d_{∞} равномерна метрика

$$d_{\infty}(f, g) := \sup_{x \in M} |f(x) - g(x)|.$$

Упутство: Нека је $p \in M$ произвољна фиксирана тачка. Користећи неједнакост троугла, доказати да је за свако $a \in M$ пресликавање

$$f_a(x) = d(x, a) - d(x, p)$$

непрекидно и ограничено. Доказати затим, користећи неједнакост троугла да је $d_{\infty}(f_a, f_b) \leq d(a, b)$. Пошто је

$$|f_a(a) - f_b(a)| = d(a, b),$$

извести одатле закључак да је $d_\infty(f_a, f_b) = d(a, b)$. Одатле следи да је

$$\Psi : M \rightarrow \mathbb{R}^M, \quad \Psi(a) = f_a,$$

где је \mathbb{R}^M скуп свих пресликавања $M \rightarrow \mathbb{R}$, изометрија.

- (45) Ако је I интервал у \mathbb{R} и $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ диференцијабилно пресликавање са ограниченим првим изводом, из Лагранжеве теореме о средњој вредности следи да је f Липшицово пресликавање.

- (46) Нека је

$$f_\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad \lambda \in \Lambda$$

фамилија Липшицових функција са Липшицовом константом L . Тада су и функције

$$S(x) = \sup_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(x) \quad \text{и} \quad I(x) = \inf_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(x)$$

Липшицове, ако су коначне бар у једној тачки. Докажимо ово тврђење за функцију S . Претпоставимо да је фамилија f_λ ограничена у тачки x , тј. да је $S(x) < +\infty$. Из

$$f_\lambda(y) \leq f_\lambda(x) + Ld(x, y),$$

добивамо

$$f_\lambda(y) \leq S(x) + Ld(x, y).$$

Преласком на супремум добијамо

$$S(y) - S(x) \leq Ld(x, y).$$

Специјално, закључујемо и да је $S(y) < +\infty$. Променом улога x и y добијамо

$$S(x) - S(y) \leq Ld(x, y),$$

што заједно даје $|S(x) - S(y)| \leq Ld(x, y)$.

- (47) Композиција непрекидних (у одговарајућим тачкама) пресликавања је непрекидно пресликавање, композиција равномерно непрекидних пресликавања је равномерно непрекидно пресликавање, композиција Липшицових пресликавања је Липшицово пресликавање. Липшицова константа композиције задовољава неједнакост $\text{Lip}(f \circ g) \leq \text{Lip}(f) \cdot \text{Lip}(g)$.

- (48) *Банахов став о непокретној тачки.* Нека је M комплетан метрички простор и $f : M \rightarrow M$ Липшицово пресликавање са Липшицовом константом $0 < q = \text{Lip}(f) < 1$. Тада f има тачно једну непокретну тачку⁵. Она је гранична вредност низа *сукцесивних апроксимација*: $a_0 \in M$ произвољно, $a_{n+1} = f(a_n)$.

Доказ: Пошто је f контракција,

$$d(a_{n+1}, a_n) \leq qd(a_n, a_{n-1}) \leq \cdots \leq q^n d(a_0, a_1).$$

Одатле и из неједнакости троугла следи, за $m > n$,

$$d(a_m, a_n) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(a_k, a_{k+1}) \leq d(a_0, a_1)q^n(1-q)^{-1}$$

(сума чланова геометријског низа), па је, због $0 < q < 1$, низ a_n Кошијев. Због комплетности $a_n \rightarrow a_\infty$. Из непрекидности функције

⁵Непокретна, или фиксна, тачка пресликавања f је решење једначине $f(x) = x$.

f следи $f(a_\infty) = a_\infty$. Јединственост: ако је $f(a) = a$ и $f(b) = b$, онда је $d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq qd(a, b) < d(a, b)$.

- (49) **Задатак:** Доказати да пресликавање $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \pi/2 + x - \arctan x$ задовољава $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$, али да нема фиксну тачку.
- (50) **Задатак:** Нека је M комплетан метрички простор и $f : M \rightarrow M$ пресликавање такво да је за неко $n \in \mathbb{N}$ пресликавање $f^n := f \circ \dots \circ f$ контракција. Доказати да f има фиксну тачку.
- (51) **Задатак:** Нека је $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ комплексна $n \times n$ матрица, таква да важи

$$\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij} + \delta_{ij}| < 1,$$

где су δ_{ij} Кронекерови симболи ($\delta_{ij} = 0$ за $i \neq j$ и $\delta_{ii} = 1$). Применом Банахове теореме о непокретној тачки показати да систем линеарних једначина

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{a}$$

има јединствено решење по $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ за свако $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$.

- (52) Подскуп $U \subset M$ метричког простора (M, d) је отворен ако за свако $a \in U$ постоји отворена лопта $B[a; \varepsilon] \subset U$. Еквивалентно: отворен скуп је унија отворених лопти. Фамилија τ_M свих отворених скупова метричког простора (M, d) има следеће особине:
- (T1) $M \in \tau_M$, $\emptyset \in \tau_M$
- (T2) ако је $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ фамилија скупова из τ_M , онда је $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \tau_M$
- (T3) $U_1, U_2 \in \tau_M \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \tau_M$.
- (53) Пар (X, τ) где је X скуп, а τ фамилија његових подскупова која задовољава **(T1)**–**(T3)** назива се *тополошким простором*, а фамилија τ *топологијом*.
- (54) **Задатак:** Нека је X бесконачан скуп и τ фамилија његових подскупова која се састоји од \emptyset и свих скупова чији је комплемент коначан. Доказати да је (X, τ) тополошки простор.
- (55) Ако је (X, τ) тополошки простор и $X_0 \subset X$ његов подскуп, на њему је дефинисана топологија $\tau_0 := \{U \cap X_0 \mid U \in \tau\}$. Ова топологија се назива *релативном топологијом* на подскупу X_0 . Кад говоримо о *тополошком потпростору*, подразумевамо да се ради о релативној топологији на њему.
- (56) Пресликавање $f : X \rightarrow Y$ тополошког простора (X, τ_X) у тополошки простор (Y, τ_Y) је *непрекидно у тачки* $a \in X$ ако за сваки скуп $V \in \tau_Y$ који садржи тачку $f(a)$ постоји скуп $U \in \tau_X$ који садржи тачку a , такав да је $f(U) \subset V$. Ова дефиниција уопштава непрекидност пресликавања метричких простора (доказати!).
- (57) Бијекција $f : X \rightarrow Y$ тополошких простора (X, τ_X) и (Y, τ_Y) се назива *хомеоморфизмом* ако су f и f^{-1} непрекидна пресликавања. Хомеоморфизам је изоморфизам структура (X, τ_X) и (Y, τ_Y) .
- Задатак:** Нека је (X, τ) тополошки простор, (M, d) метрички простор и $\varphi : X \rightarrow M$ хомеоморфизам. Доказати да је се топологија метричког простора (X, φ^*d) подудара са топологијом τ .
- (58) **Задатак:** Нека је $\varphi : M_2 \rightarrow M_1$ хомеоморфизам метричких простора и $f : M_1 \rightarrow N$ пресликавање. Доказати да је смена променљиве у

лимесу

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{y \rightarrow \varphi^{-1}(a)} f \circ \varphi(y)$$

оправдана, у складу са (29).

- (59) Подскуп $A \subset X$ тополошког простора (X, τ) је *околина* тачке $a \in A$ ако постоји $U \in \tau$ са својствима $a \in U$ и $U \subset A$. *Отворена околина* тачке је сваки отворен скуп који је садржи.
- (60) Тачка $x_0 \in X$ се назива *тачком нагомиланања* скупа $A \subset X$ ако свака отворена околина $U \ni x_0$ садржи бесконачно много тачака скупа A . Скуп свих тачака нагомиланања означавамо са A' . Скуп $\bar{A} := A \cup A'$ назива се *затворењем* скупа A .

Ако је $B \subset A$ и $\bar{B} = A$ кажемо да је скуп B *густ* у A .

Задатак: Доказати да је скуп B густ у метричком простору M ако и само ако сваки отворен подскуп у M садржи бар једну тачку скупа B .

Тачка $a_0 \in A$ која није тачка нагомиланања назива се *изолованом тачком* скупа A . Скуп $\partial A := \bar{A} \cap \overline{M \setminus A}$ назива се *рубом скупа* A . Примери у \mathbb{R} : $\partial[0, 1[= \{0, 1\}$, $\partial]1, +\infty[= \{1\}$, $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

Задатак: Доказати да је $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$. Примером показати да слична једнакост не важи ако се унија замени пресеком.

- (61) Ако је $A \subset X$, *филтер пробушених околина* тачке $a \in \bar{A}$ је скуп свих подскупова $V \cap A \setminus \{a\}$, где је V околина тачке a у X . Дефиниција (23) лимеса пресликавања $f : A \rightarrow Y$ се овиме преноси на све тачке из затворења домена. Специјално, ако је $f : [a, b] \rightarrow Y$ функција реалне променљиве, лимес њене рестрикције $f|_{[c, b]}$ у тачки c назива се *њеним десним лимесом* у тој тачки и означава са $\lim_{x \rightarrow c+} f(x)$ или $f(c+0)$. На сличан начин се дефинише леви лимес $f(c-0)$ као лимес рестрикције на $[a, c]$ у тачки c .
- (62) **Задатак:** Нека је $A = \{mn^{-1} + im^{-1}n \mid m, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{C}$. Наћи A' , \bar{A} и ∂A у односу на еуклидску метрику $d(z, w) = |w - z|$ у комплексној равни. Наћи B' , \bar{B} и ∂B за подскуп $B = \{\sqrt{m} - \sqrt{n} \mid m, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ и метрику $d(x, y) = |y - x|$ на реалној правој.
- (63) *Унутрашњост подскупа* A метричког простора M је унија свих отворених скупова који су садржани у A ; ознака: $\text{Int } A$. Другим речима, унутрашњост скупа A је највећи отворен скуп садржан у A . Тачке скупа $\text{Int } A$ називају се *унутрашњим тачкама* скупа A .

Задатак: Доказати да је a унутрашња тачка скупа A ако и само ако за неко $\delta > 0$ важи $B]a; \delta[\subset A$.

Задатак: Наћи унутрашњост скупова A и B из (62).

Задатак: Доказати да за сваки подскуп $B \subset M$ важи

$$\text{Int}(M \setminus B) = M \setminus \bar{B} \quad \text{и} \quad M \setminus \text{Int } B = \overline{M \setminus B}.$$

- (64) Подскуп $F \subset M$ називамо *затвореним* ако је његов комплемент $M \setminus F$ отворен.

Задатак: Доказати да је затворена лопта у метричком простору затворен скуп.

У метричком простору важи следећа еквиваленција: Подскуп $F \subset M$ је затворен ако и само ако за сваки низ $x_n \in F$ важи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_\infty \Rightarrow x_\infty \in F.$$

Задатак: Доказати ову еквиваленцију.

- (65) Једна последица карактеризације затворености помоћу низова је следеће тврђење: Потпростор комплетног метричког простора је комплетан ако и само ако је затворен.
- (66) **Задатак:** Нека је A подскуп метричког простора (M, d) . Доказати да је $\bar{A} = \{x \in M \mid d(x, A) = 0\}$. Доказати да је \bar{A} најмањи затворен скуп који садржи A . Другим речима, доказати да је затворење скупа пресек свих затворених скупова који га садрже.

Последица: $\overline{B[a; \rho]} \subset B[a; \rho]$. Ова инклузија може да буде и строга (нпр. у дискретном метричком простору).

- (67) Нека су M_1, M_2 метрички простори. За пресликавање $f : M_1 \rightarrow M_2$ следећа тврђења су еквивалентна:
- (а) f је непрекидно пресликавање
 - (б) за сваки отворен скуп $V \subset M_2$ скуп $f^{-1}(V)$ је отворен
 - (в) за сваки затворен скуп $F \subset M_2$ скуп $f^{-1}(F)$ је затворен
 - (г) за сваки скуп $A \subset M_1$ важи $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Доказ: Претпоставимо да важи (а). Нека је $V \subset M_2$ отворен подскуп, $a \in f^{-1}(V)$. Докажимо да је нека кула са центром у a садржана у $f^{-1}(V)$, чиме ћемо доказати да је скуп $f^{-1}(V)$ отворен. Нека је $b = f(a)$. Пошто је скуп V отворен, за неко $\varepsilon > 0$ је $B(b, \varepsilon) \subset V$. Из непрекидности пресликавања f у тачки a следи да постоји $\delta > 0$ такво да важи $d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), b) < \varepsilon$, тј. $f(B(a, \delta)) \subset B(b, \varepsilon) \subset V$. Одатле следи $B(a, \delta) \subset f^{-1}(V)$. Тиме је доказано (а) \Rightarrow (б).

Претпоставимо да важи (б). Нека је $F \subset M_2$ затворен скуп. Тада је $M_2 \setminus F$ отворен. Из (б) и

$$f^{-1}(M_2 \setminus F) = M_1 \setminus f^{-1}(F)$$

следи да је скуп $M_1 \setminus f^{-1}(F)$ отворен, што значи да је скуп $f^{-1}(F)$ затворен. Тиме је доказана импликација (б) \Rightarrow (в).

Претпоставимо да важи (в). Нека је $A \subset M_1$. Скуп $\overline{f(A)}$ је затворен, па из (в) следи да је скуп $f^{-1}(\overline{f(A)})$ затворен и важи

$$A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\overline{f(A)}).$$

Пошто је \bar{A} најмањи затворен скуп који садржи A , следи да је $\bar{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$, тј. $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$. Тиме је доказана импликација (в) \Rightarrow (г).

Претпоставимо да важи (г). Нека је $x_0 \in M_1$, $y_0 = f(x_0)$ и $\varepsilon > 0$. Докажимо да постоји $\delta > 0$ такво да је $f(B(x_0, \delta)) \subset B(y_0, \varepsilon)$, чиме ћемо доказати непрекидност пресликавања f у тачки x_0 . Нека је

$$A = f^{-1}(M_2 \setminus B(y_0, \varepsilon)) = M_1 \setminus f^{-1}(B(y_0, \varepsilon)).$$

Тада важи $x_0 \notin \bar{A}$. Заиста, када би било $x_0 \in \bar{A}$, из (г) би следило $y_0 = f(x_0) \in f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)} = \overline{f(f^{-1}(M_2 \setminus B(y_0, \varepsilon)))} \subset \overline{M_2 \setminus B(y_0, \varepsilon)}$,

тј. $y_0 \notin B(y_0, \varepsilon)$, што је контрадикција. Дакле, x_0 припада отвореном скупу $M_1 \setminus \bar{A}$, па постоји $\delta > 0$ такво да је $B(x_0, \delta) \subset M_1 \setminus \bar{A}$. Одатле и из дефиниције скупа A следи да је $f(B(x_0, \delta)) \subset B(y_0, \varepsilon)$, што значи да је пресликавање f непрекидно у x_0 . Тиме је доказано (г) \Rightarrow (а).

- (68) **Задатак:** Нека је (M, d) метрички простор. Доказати да је карактеристична функција подскупа $A \subset M$

$$\chi : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

прекидна у тачкама руба ∂A и непрекидна у осталим тачкама.

Специјално, Дирихлеова функција

$$\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

је прекидна у свим тачкама, пошто је $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

- (69) **Задатак:** Нека су A и B затворени дисјунктни подскупови метричког простора (M, d) . Доказати да је пресликавање

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$$

непрекидно.

Из овог задатка следи *Урисонова лема*: Ако су A и B непразни, затворени и дисјунктни подскупови метричког простора M , онда постоји непрекидна функција $f : M \rightarrow [0, 1]$ таква да је $f(A) = \{0\}$, $f(B) = \{1\}$.

- (70) Нека су $d, d_0 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ пресликавања дефинисана са

$$d(m, n) = |n - m|, \quad d_0(m, n) = \frac{|n - m|}{nm}$$

за природне бројеве m, n .

Задатак: Доказати да су (\mathbb{N}, d) и (\mathbb{N}, d_0) метрички простори који имају исте топологије. Доказати да је $x_n = n$ Кошијев низ у простору (\mathbb{N}, d_0) који није конвергентан, тако да овај простор није комплетан. Доказати да је (\mathbb{N}, d) комплетан. Ово показује да комплетност није тополошко својство.

Топологија у којој је свака тачка отворен скуп назива се *дискретном топологијом*. Претходни задатак даје пример некомплетног дискретног тополошког простора (упоредити са (34)).

- (71) Метрички простор M је комплетан ако и само ако има следеће својство⁶: сваки опадајући низ F_n непразних затворених скупова чији низ дијаметара тежи нули има непразан пресек.

Доказ: (\Rightarrow) Нека је $a_k \in F_k$. Тада из $F_k \supset F_{k+1}$ следи да је за $n \geq m$ $a_n \in F_m$, па је, због $\text{diam}(F_n) \rightarrow 0$, низ a_n Кошијев, па

⁶То је тзв. *Канторово својство*.

постоји његов лимес a_∞ . Из $F_m = \overline{F_m}$ следи $a_\infty \in F_m$ за свако m , тј. $a_\infty \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} F_m$.

(\Leftarrow) Нека је a_n Кошијев низ у M . Тада је $F_n := \overline{\{a_n, a_{n+1}, \dots\}}$ низ затворених скупова који задовољава Канторово својство, па постоји $a_\infty \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Из $\text{diam}(F_n) \rightarrow 0$ следи $d(a_n, a_\infty) \rightarrow 0$, тј. $a_n \rightarrow a_\infty$.

- (72) Приметимо да без услова $\text{diam}(F_n) \rightarrow 0$ теорема (71) не важи: опадајући низ $F_n = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq n\}$ затворених подскупова комплетног простора \mathbb{R} има празан пресек.

Задатак: Нека (\mathbb{R}, d) метрички простор са метриком

$$d(x, y) = \frac{|y - x|}{1 + |y - x|}$$

и нека је $F_n = [n, +\infty[$, $n \in \mathbb{N}$. Доказати да су скупови F_n ограничени и затворени и $F_{n+1} \subset F_n$. Доказати да је $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \emptyset$. Да ли је ово у противречности са (71)? Да ли је ово у противречности са Канторовом аксиомом у \mathbb{R} ? Доказати да у еуклидском простору са стандардном еуклидском метриком сваки опадајући низ непразних, ограничених и затворених подскупова има непразан пресек.

Задатак: Доказати да је на скупу \mathbb{N} природних бројева са

$$d(m, n) = \begin{cases} 1 + 2^{-\min\{m, n\}} & \text{за } m \neq n \\ 0 & \text{за } m = n \end{cases}$$

дефинисана метрика и да је \mathbb{N} са том метриком комплетан метрички простор. Доказати да затворене лопте $B[n; 1 + 2^{-n}]$ образују опадајући низ затворених подскупова који има празан пресек.

- (73) Ако је S затворен подскуп комплетног метричког простора са својством да је свака његова тачка тачка нагомилавања⁷, онда је S непребројив.

Доказ: Претпоставимо да је S пребројив; поређајмо његове тачке у низ $S = \{s_1, s_2, \dots\}$. Конструиримо индуктивно низ лопти B_n полупречника $r_n < 1/n$ на следећи начин. Нека је B_1 отворена лопта са центром s_1 и полупречником 1. Пошто је s_1 тачка нагомилавања скупа S , скуп $B_1 \cap S$ је бесконачан. Нека је B_2 лопта са центром у некој од тачака скупа $B_1 \cap S$ и полупречником $r_2 < 1/2$, таква да је $\overline{B_2} \subset B_1$ и $s_1 \notin \overline{B_2}$.

Претпоставимо да смо конструисали лопту B_n тако да је скуп $B_n \cap S$ бесконачан. Нека је B_{n+1} отворена лопта чији је центар нека од тачака скупа $B_n \cap S$, а полупречник r_{n+1} мањи од $1/(n+1)$, таква да је $\overline{B_{n+1}} \subset B_n$ и $s_n \notin \overline{B_{n+1}}$. Пошто је B_{n+1} околина тачке из S , скуп $B_{n+1} \cap S$ је бесконачан, па можемо да поновимо конструкцију за свако n , чиме добијамо бесконачан низ скупова $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Нека је $F_n = \overline{B_n} \cap S$; из затворености $\overline{B_n}$ и S следи да је F_n затворен. Из конструкције скупова B_n следи да F_n задовољава услове из (71), па

⁷Затворен скуп чија је свака тачка тачка нагомилавања назива се *савршеним скупом*.

је

$$F_\infty := \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$$

непразан и затворен скуп. Из $F_n \subset S$ за све n следи $F_\infty \subset S$, па постоји $s \in S \cap F_\infty$, што је у супротности са конструкцијом низа F_n по којој свака тачка $s_n \in S$ задовољава $s_n \notin F_{n+1}$.

(74) За подскуп $A \subset M$ метричког простора следећи услови су еквивалентни:

(а) Унутрашњост његовог затворења \bar{A} празан скуп: $\text{Int } \bar{A} = \emptyset$.

(б) Отворен скуп $M \setminus \bar{A}$ је густ у M .

(в) За сваки непразан отворен скуп $V \subset M$ постоји непразан отворен подскуп $U \subset V$ такав да је $U \cap A = \emptyset$.

(г) Ни за један отворен подскуп $V \subset M$ скуп $A \cap V$ није густ у V .

Доказ: (а) \Leftrightarrow (б) следи из $\text{Int } \bar{A} = M \setminus \overline{M \setminus \bar{A}}$ (видети (63)).

(б) \Leftrightarrow (в): Из дефиниције густог скупа следи да је $M \setminus \bar{A}$ густ у M ако и само ако сваки отворени скуп V садржи тачку $x_0 \in M \setminus \bar{A}$ (видети (60)). Пошто је $M \setminus \bar{A}$ отворен, то је еквивалентно (в).

(в) \Leftrightarrow (г): Нека је V отворен скуп. Из дефиниције густог скупа следи да $A \cap V$ није густ у V ако и само ако постоји тачка $v \in V$ таква да нека њена околина $U \subset V$ не садржи тачке скупа $A \cap V$. То показује да су тврђења (в) и (г) еквивалентна.

Скуп је *нигде густ* ако задовољава неки (дакле сваки) од услова (а)–(г).

На пример, скуп \mathbb{Z} је никде густ у \mathbb{R} , а \mathbb{Q} није никде густ. Ако је скуп F затворен, онда је његов руб ∂F никде густ (доказати!); пример $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$ показује да ово не важи ако скуп F није затворен.

Задатак: Нека је U отворен густ скуп у метричком простору M . Доказати да је $M \setminus U$ никде густ. Показати примером да ово тврђење не важи ако U није отворен.

Задатак: Нека је x изолована тачка метричког простора M . Да ли је скуп $\{x\}$ никде густ?

Скуп је *прве категорије* ако се може представити као пребројива унија никде густих скупова. Скуп је *друге категорије* ако није прве категорије. Скуп $S \subset M$ је *резидуалан* у M ако је његов комплемент $M \setminus S$ скуп прве категорије. На пример, скупови \mathbb{Z} и \mathbb{Q} су скупови прве категорије у \mathbb{R} .

(75) *Берова теорема о категоријама.* Ако је (M, d) комплетан метрички простор и $A \subset M$ скуп прве категорије, онда је $M \setminus A$ густ у M .

Доказ: Треба доказати да произвољна лопта $B_0 = B(x_0; \varepsilon]$ сече $M \setminus A$. Пошто је A скуп прве категорије, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, где су A_n никде густе скупови. Пошто је A_1 никде густ, постоји отворена лопта $B_1 = B(x_1; r_1[$ таква да је

$$\bar{B}_1 \subset B_0, \quad \bar{B}_1 \cap A_1 = \emptyset, \quad r_1 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Даље конструишемо низ лопти B_n индуктивно; ако је $B_n = B]x_n; r_n[$ конструисана, дефинишемо $B_{n+1} = B]x_{n+1}; r_{n+1}[$ тако да важи

$$\overline{B_{n+1}} \subset B_n, \quad \overline{B_{n+1}} \cap A_{n+1} = \emptyset, \quad r_{n+1} < \frac{r_n}{2} < \frac{\varepsilon}{2^n};$$

оправданост ове дефиниције следи из чињенице да је A_{n+1} нигде густ. Низ $F_n = \overline{B_n}$ има Канторово својство (71), па постоји $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Из конструкције лопти B_n следи да $x \notin A_n$ за све n и $x \in B_0$, па је скуп $(M \setminus A) \cap B_0$ непразан.

- (76) Други начин да се формулише Берова теорема о категоријама је: пресек пребројиве фамилије отворених густих подскупова комплетног метричког простора M је густ у M .
- (77) Из Берове теореме може да се изведе следећа последица: ако комплетан простор нема изолованих тачака, онда је он непретројив (упоредити са (73)). Заиста, ако x није изолована тачка, онда је скуп $\{x\}$ нигде густ, па свака унија пребројиво много тачака има непразан комплемент.
- (78) **Задатак:** Доказати да скуп \mathbb{Q} не може да се представи као пресек пребројиве фамилије отворених скупова у \mathbb{R} .
- (79) **Задатак:** Доказати да \mathbb{R}^n није унија пребројиве фамилије потпростора димензије мање од n .
- (80) Ако је $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ функција класе C^∞ са својством да постоји n такво да је за све $x \in [0, 1]$ n -ти извод $f^{(n)}(x) = 0$, онда је f полином. Ово тврђење је елементарно и лако се доказује. Следеће тврђење, које се добија из овог заменом поретка квантификатора, је сложеније:

Нека је $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ функција класе C^∞ која има својство да за свако $x \in [0, 1]$ постоји $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ тако да је n -ти извод $f^{(n)}(x) = 0$. Тада је f полином.

Доказ: Претпоставимо супротно – да f није полином. Тада је скуп

$$C := \{x \in \mathbb{R} \mid \text{не постоји околина тачке } x \text{ на којој је } f \text{ полином}\}$$

непразан. Ако $t_0 \notin C$, онда је за неко $\eta > 0$ функција f полином на интервалу $]t_0 - \eta, t_0 + \eta[$, па $]t_0 - \eta, t_0 + \eta[\subset [0, 1] \setminus C$, одакле следи да је $[0, 1] \setminus C$ отворен, тј. да је C затворен. Пошто је скуп $[0, 1]$ комплетан, и његов затворен подскуп C је комплетан. Применићемо на њега Берову теорему (75). Нека је

$$A_n = \{x \in [0, 1] \mid f^{(n)}(x) = 0\} \cap C.$$

По претпоставци, $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = C \cap [0, 1]$. Из непрекидности следи да су сви скупови A_n затворени. По Беровој теореме, бар један од њих није нигде густ, тј. због затворености, бар један од њих има непразну унутрашњост. То значи да постоји $x_0 \in C$ и $\delta > 0$ тако да је

$$\emptyset \neq C \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset A_n.$$

Претпоставимо да је $f^{(k)}(x_0) \neq 0$ за неко $k > n$. Из Тејлорове формуле (примењене на функцију $f^{(n)}$) и из непрекидности тада следи да постоји интервал $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ на коме је $f^{(n)}(x) \neq 0$ за $x \neq x_0$. После преласка на подинтервал ако је неопходно, можемо да претпоставимо

да је $\varepsilon < \delta$. Одатле би следило да је

$$C \cap]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[= \{x_0\},$$

јер је скуп на левој страни садржан у A_n . Али онда је, по дефиницији скупа C , f полином на $]x_0 - \varepsilon, x_0[$ и $]x_0, x_0 + \varepsilon[$, што је (због непрекидности) могуће само ако је f полином на $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$, што је контрадикција са $x_0 \in C$. Дакле, закључујемо да је $f^{(k)}(x_0) = 0$ за све $k \geq n$. Исто важи за све тачке скупа $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap C$.

Нека је $t \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus C$. Тада је f полином на неком интервалу који садржи тачку t ; нека је $[a, b]$ највећи такав интервал. Тада један крај тог интервала (рецимо a) припада скупу C (иначе би функција f била полином на неком већем интервалу), тј. $a \in C \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, па је, према доказаном, $f^{(k)}(a) = 0$ за све $k \geq n$. То значи да је f полином степена мањег од n на $[a, b]$, па је $f^{(k)}(t) = 0$ за $k > n$.

Дакле, доказали смо да за свако $k \geq n$ и свако $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ важи $f^{(k)}(x) = 0$. То значи да је f полином на $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ што је контрадикција због $C \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\neq \emptyset$.

- (81) Ако је $f : S \rightarrow M$ пресликавање скупа S на коме је дат филтер \mathcal{F} у метрички простор (M, d) , лимес по филтеру зависи само од топологије индуковане метриком d (доказати!). Две метрике које индукују исту топологију називају се *тополошки еквивалентним метрикама*. Другим речима, метрички простори (M, d_1) и (M, d_2) су тополошки еквивалентни ако и само ако је идентичко пресликавање $\text{id} : (M, d_1) \rightarrow (M, d_2)$ хомеоморфизам. **Задатак:** Нека су (M, d_1) и (M, d_2) метрички простори и $\varphi : (M, d_1) \rightarrow (M, d_2)$ хомеоморфизам. Доказати да су простори (M, d_1) и $(M, \varphi^* d_2)$ тополошки еквивалентни.

- (82) **Задатак:** Доказати да су метрике d_1 и d_2 на скупу M тополошки еквивалентне ако и само ако су испуњена следећа два услова:

- за свако $x_0 \in M$ свака отворена лопта $\{x \in M \mid d_1(x_0, x) < r_1\}$ у метрици d_1 садржи неку отворену лопту $\{x \in M \mid d_2(x_0, x) < r_2\}$ у метрици d_2 ;
- за свако $x_0 \in M$ свака отворена лопта $\{x \in M \mid d_2(x_0, x) < r_2\}$ у метрици d_2 садржи неку отворену лопту $\{x \in M \mid d_1(x_0, x) < r_1\}$ у метрици d_1 .

Извести одатле да је сваки метрички простор (M, d) тополошки еквивалентан метричком простору (M, d_0) , где је

$$d_0(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}.$$

Пошто је $d_0 \leq 1$, одавде следи да је сваки метрички простор тополошки еквивалентан неком ограниченем метричком простору.

- (83) **Задатак:** Доказати да су метрике d_1 и d_2 на скупу M које за неке $\alpha, \beta \in]0, +\infty[$ задовољавају неједнакости

$$\alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y)$$

за све $x, y \in M$ тополошки еквивалентне. Из (82) извести закључак да овај довољан услов за тополошку еквиваленцију метрика није и неопходан.

- (84) **Задатак:** Нека су d_1 и d_2 две метрике на M такве да за сваки подскуп $A \subset M$ важи $d_1(x, A) = 0 \Leftrightarrow d_2(x, A) = 0$. Доказати да су d_1 и d_2 тополошки еквивалентне.
- (85) У тополошком простору лимес није јединствен (тј. није добро дефинисан). Разлог лежи у томе што за две тачке x, y тополошког простора не морају да постоје отворене околине $U \ni x$ и $V \ni y$ такве да је $U \cap V = \emptyset$. Пример: $X = \{0, 1\}$, $\tau = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$. Хаусдорфов простор је тополошки простор у коме сваке две тачке имају дисјунктне отворене околине. Ако је X Хаусдорфов простор, а S скуп са филтером \mathcal{F} , онда је $\lim_{\mathcal{F}}$ једнозначно дефинисан (доказати!). Хаусдорфов простор у коме важи Урисонова лема (69) назива се *нормалним простором*. Сваки метрички простор је нормалан.

Топологија $\tau = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$ на скупу $X = \{0, 1\}$ није Хаусдорфова. Важан пример топологије која није Хаусдорфова је *топологија Зариског* на простору \mathbb{K}^n , где је \mathbb{K} поље реалних или комплексних бројева. Затворен скуп у топологији Зариског је сваку подскуп $F \subset \mathbb{K}^n$ који је скуп нула коначне фамилије полинома n променљивих, са коефицијентима у \mathbb{K} . Отворени скупови у топологији Зариског су компленти затворених.⁸ Ова топологија има значајно место у Алгебарској геометрији, где се дефинише, на исти начин, за произвољно алгебарски затворено поље.

Задатак: Доказати да је на овај начин дефинисана топологија. Доказати да топологија Зариског није Хаусдорфова.

- (86) **Задатак:** Доказати да тврђење (67) важи и у тополошким просторима (са незнатном модификацијом доказа).
- (87) Нека је (X, τ) тополошки простор. Његова база топологије је подскуп $\beta \subset \tau$ са особином да је сваки скуп $U \in \tau$ унија фамилије скупова из β . База топологије задовољава следећа својства:

$$(B1) \quad X = \bigcup_{V \in \beta} V$$

(B2) За свака два скупа $U, V \in \beta$ таква да је $a \in U \cap V$ постоји скуп $W \in \beta$ такав да је $a \in W \subset U \cap V$.

- (88) Ако је β фамилија подскупова скупа X која задовољава (B1) и (B2), онда на X постоји јединствена топологија τ таква да јој је β база. Доказ се изводи директном конструкцијом фамилије τ као фамилије свих скупова који су уније скупова из β . На пример, отворене лопте су база топологије сваког метричког простора.

Ако је β база топологије τ , кажемо да је топологија τ *генерисана базом* β .

- (89) *Производ тополошких простора.* Нека су (X_1, τ_1) и (X_2, τ_2) тополошки простори. Њихов производ је тополошки простор $(X_1 \times X_2, \tau)$ где је τ топологија чија је база $\beta = \{U_1 \times U_2 \mid U_j \in \tau_j, j \in \{1, 2\}\}$.

Задатак: Доказати да било која од метрика d_p , $1 \leq p \leq \infty$, у еуклидском простору \mathbb{R}^n индукује исту топологију и да је та топологија управо топологија производа реалних правих, у смислу претходне дефиниције.

⁸У случају $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ и $n = 1$ топологија Зариског је иста топологија која је дефинисана у (54).

- (90) **Задатак:** Нека су $A \subset X$, $B \subset Y$ затворени подскупови тополошких простора X и Y . Доказати „Лајбницову формулу”

$$\partial(A \times B) = (\partial A \times B) \cup (A \times \partial B).$$

На примеру $X = Y = [0, 1]$, $A = B =]0, 1]$ показати да ова једнакост не важи ако A и B нису затворени скупови.

- (91) **Задатак:** Доказати да је тополошки простор X Хаусдорфов ако и само ако је дијагонала $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$ затворен подскуп у $X \times X$.
- (92) Топологија производа је дефинисана тако да су пројекције

$$\pi_j : X_1 \times \cdots \times X_k \rightarrow X_j$$

непрекидна пресликавања. Та конструкција може да се уопшти на следећи начин.

Задатак: Нека је X произвољан скуп, (Y, τ_Y) тополошки простор и $f : X \rightarrow Y$ пресликавање. Доказати да је

$$\tau_X := \{f^{-1}(V) \mid V \in \tau_Y\}$$

топологија на X у којој је f непрекидно пресликавање. Специјално, ако је $X \subset Y$ и $f : X \hookrightarrow Y$ инклузија $x \mapsto x$, τ_X је релативна топологија на X .

Задатак: Нека је X скуп, $\{Y_\lambda, \tau_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ фамилија тополошких простора и

$$f_\lambda : X \rightarrow Y_\lambda, \quad \lambda \in \Lambda$$

фамилија пресликавања. Доказати да је

$$\beta_X := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \{f_\lambda^{-1}(V) \mid V \in \tau_\lambda\}$$

база најмање топологије τ_X у односу на коју су сва пресликавања f_λ непрекидна. Доказати да у општем случају β_X није топологија, него само база топологије.

Задатак: Нека је (X, τ_X) тополошки простор, Y произвољан скуп и $f : X \rightarrow Y$ пресликавање. Доказати да је

$$\tau_Y := \{V \subset Y \mid f^{-1}(V) \in \tau_X\}$$

топологија на Y у којој је f непрекидно пресликавање.

Ако је f сурјекција, ова топологија се назива *количничком топологијом*. Специјално, ако је на подскупу $A \subset X$ задата релација еквиваленције \sim , на овај начин топологија на X дефинише топологију на количничком простору X/\sim који се добија идентификацијом тачака подскупа A које су у истој класи еквиваленције, у односу на коју је пројекција

$$p : X \rightarrow X/\sim$$

непрекидно пресликавање.

На пример, релација $(0, t) \sim (1, 1 - t)$ дефинише релацију еквиваленције на рубу квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$; њен количнички простор је *Мебијусова трака*. Топологија на квадрату дефинише количничку топологију на Мебијусовој траци.

Ако релацију еквиваленције дефинишемо са $(0, t) \sim (1, t)$, количнички простор биће цилиндар.

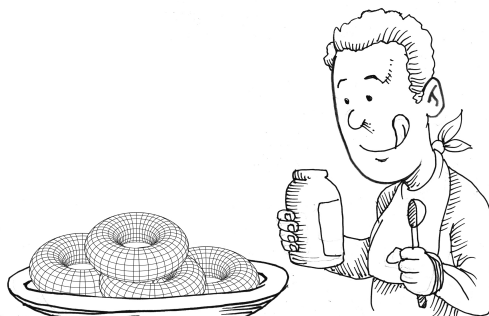
Другим речима, и Мебијусову траку и цилиндар добијамо тако што залепимо хоризонталне странице квадрата, али на два различита начина - у случају цилиндра лепимо их у истом, а у случају Мебијусове траке у супротном смеру.

Задатак: Доказати да је цилиндар, дефинисан на претходни начин, хомеоморфан простору $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ са топологијом наслеђеном из \mathbb{R}^3 .

Задатак: Доказати да ако цилиндар „пресечемо на пола”, тј. уклонимо дуж $[0, 1] \times \{1/2\}$ из квадрата од кога је, претходно описаном идентификацијом вертикалних страница добијен цилиндар, добијамо две одвојене површи, а да пресецањем Мебијусове на пола траке добијамо једну. Шта се добија ако се добијени простор још једном пресеће на пола? (Упутство: направити Мебијусову траку од папира и пресећи је маказама једном, па затим још једном).

Релација еквиваленције на рубу квадрата дефинисана са $(0, t) \sim (1, t) \wedge (t, 0) \sim (t, 1)$ даје торус. Другим речима, торус добијамо кад једну вертикалну страницу квадрата залепимо са другом (у истом смеру) и исто урадимо и са хоризонталним страницама. Или, еквивалентно, кад базе цилиндра залепимо једну за другу.

Задатак: Доказати да је торус хомеоморфан производу $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ са топологијом наслеђеном из \mathbb{R}^4 (видети слику).



Задатак: Доказати да је торус хомеоморфан ротационој површи у \mathbb{R}^3 добијеној ротацијом круга $\{(0, y, z) \mid (y - 3)^2 + z^2 = 1\}$ око z -осе. Наћи једначину ове површи.

Релација $(0, t) \sim (1, 1 - t) \wedge (t, 0) \sim (t, 1)$ на рубу квадрата даје количнички простор који се зове *Клајновом флашом* и не може да се замисли у тродимензионом простору. Њу добијамо кад хоризонталне странице квадрата залепимо једну за другу у истом, а вертикалне у супротном смеру.

На крају, ако и хоризонталне и вертикалне стране квадрата залепимо у супротном смеру, добијамо простор који се зове *пројективна раван*; означава се са $\mathbb{R}P^2$

- (93) Нека су X, Y тополошки простори, $A \subset X$ и $f : A \rightarrow Y$ непрекидно пресликавање и нека је $X \sqcup Y$ (дисјунктна унија). На $A \sqcup f(A)$ дефинисана релација $a \sim f(a)$; количнички простор $X \sqcup Y / \sim$ је тополошки простор са количничком топологијом који се назива *лепљењем простора* X и Y помоћу пресликавања f . Ако је $f : A \rightarrow f(A)$ хомеоморфизам, говоримо о лепљењу дуж скупа A . На пример, ако се из сфере \mathbb{S}^2 уклони део хомеоморфан диску, добије се тополошки простор чији је руб хомеоморфан кругу \mathbb{S}^1 . Пошто и Мебијусова трака има руб хомеоморфан \mathbb{S}^1 , можемо да залепимо ова два простора дуж руба. Добијени тополошки простор је *пројективна раван*. Још један начин да се конструише пројективна раван је следећи: на граници \mathbb{S}^1 диска $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ дефинисана је релација $z \sim -z$ за $|z| = 1$. Количнички простор D / \sim је хомеоморфан простору $\mathbb{R}P^2$.

Задатак: Доказати да се лепљењем границе \mathbb{S}^1 диска и тачке (помоћу константног пресликавања $c : \mathbb{S}^1 \rightarrow \star$, где је \star једночлан скуп) добија димензиона сфера \mathbb{S}^2 .

- (94) Хаусдорфов тополошки простор X је n -димензиона *тополошка многострукост* ако има пребројиву базу топологије и ако свака тачка $x \in X$ има отворену околину $U \ni x$ која је хомеоморфна лопти $\mathbb{B}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1\}$. Сфера, торус, пројективна раван су примери димензионих многострукости. Круг \mathbb{S}^1 и права \mathbb{R} су једнодимензионе многострукости, а крива чија је поларна једначина $r^2 = \sin 2\theta$ није. Ако је M m -димензиона, а N n -димензиона тополошка многострукост, онда је $M \times N$ $(m+n)$ -димензиона тополошка многострукост. Отворен подскуп тополошке многострукости је тополошка многострукост исте димензије.
- (95) Нека су Y_1, \dots, Y_k Хаусдорфови простори, S скуп са филтером \mathcal{F} , $f : S \rightarrow Y_1 \times \dots \times Y_k$ и $f_j = \pi_j \circ f : S \rightarrow Y_j$, $1 \leq j \leq k$, где су π_j пројекције на Y_j . Тада је

$$\lim_{\mathcal{F}} f = \zeta \Leftrightarrow (\forall j \in \{1, \dots, k\}) \lim_{\mathcal{F}} f_j = \pi_j \zeta.$$

Специјално, пресликавање је непрекидно ако и само ако су непрекидна његова координатна пресликавања.

Ако је домен (а не кодомен) пресликавања производ, ствар је сложенија. На пример, функција $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$ на $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ има дуж x и y осе лимес у тачки $(0, 0)$ (једнак нули), али нема лимес у тој тачки (нпр, лимес дуж праве $y = x$ је $1/2$, а дуж праве $y = -x$ је $-1/2$).

- (96) *Принцип продужења једнакости.* Нека су (M, d_M) и (N, d_N) метрички простори, $f, g : M \rightarrow N$ непрекидна пресликавања и $A \subset M$. Тада важе следећа тврђења:

- Скуп $X = \{x \in M \mid f(x) = g(x)\}$ је затворен.
- Ако је $f|_A = g|_A$ (рестрикције на A се подударaju) онда је $f|_{\bar{A}} = g|_{\bar{A}}$.

Доказ следи из чињенице да је $x \mapsto d_N(f(x), g(x))$ непрекидно пресликавање, као композиција непрекидних пресликавања⁹, па је X инверзна слика нуле (затвореног скупа). Друго тврђење следи из првог.

- (97) **Задатак:** Ако су $f, g : X \rightarrow Y$ непрекидна пресликавања тополошких простора и Y Хаусдорфов простор, доказати да $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ затворен подскуп у X .
- (98) *Продужење Липшицове функције.* Нека је (M, d) метрички простор, $A \subset M$ и $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ Липшицова функција са Липшицовом константом L , тј.

$$|f(a_1) - f(a_2)| \leq Ld(a_1, a_2)$$

за све $a_1, a_2 \in A$. Тада постоји Липшицова функција $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ са истом Липшицовом константом L , таква да је $F|_A = f$. Ово тврђење, које је познато и као Мекшејнова теорема, доказује се тако што се F директно дефинише као

$$F(x) := \inf_{a \in A} (f(a) + Ld(x, a)).$$

За свако $a \in A$ функција $x \mapsto f(a) + Ld(x, a)$ је Липшицова, па је F Липшицова на основу 46. Закључак да је $F|_A = f$ следи из чињенице да је за $x \in A$

$$f(x) \leq f(a) + Ld(x, a), \quad \text{за } a \in A,$$

(пошто је f Липшицова) и $f(x) = f(x) + dL(x, x)$.

- (99) *Принцип продужења неједнакости.* Нека је (M, d) метрички простор, $f, g : M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ непрекидна пресликавања и $A \subset M$. Тада важе следећа тврђења:

- Скуп $\{x \in M \mid f(x) < g(x)\}$ је отворен.
- Скуп $\{x \in M \mid f(x) \leq g(x)\}$ је затворен.
- Ако је $f|_A \leq g|_A$, онда је $f|_{\overline{A}} \leq g|_{\overline{A}}$.
- $\sup f(A) = \sup f(\overline{A})$, $\inf f(A) = \inf f(\overline{A})$.

Доказ прва два тврђења је сличан доказу претходног тврђења – инверзна слика при непрекидном пресликавању $f - g$ отвореног скупа $] -\infty, 0[$ је отворен скуп, а затвореног скупа $] -\infty, 0]$ затворен скуп. Треће тврђење следи из другог и чињенице да је \overline{A} најмањи затворен скуп који садржи A . Применом трећег тврђења на константну функцију $g \equiv c$ видимо да се скуп горњих ограничења функције f на A подударе са скупом њених горњих ограничења на \overline{A} . Одатле следи четврто тврђење за супремуме; слично се доказује за инфимуме.

- (100) Нека је $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ограничена функција на метричком простору M и $\omega(\cdot; f)$ њена осцилација (19). За свако $\lambda > 0$ скуп

$$S := \{x \in M \mid \omega(x; f) \geq \lambda\}$$

је затворен у M .

Доказ: Нека је $x_0 \in M \setminus S$, тј. нека је $\omega(x_0; f) < \lambda$. Тада постоји лопта $B]x_0; \delta[$ таква да је $\omega(B]x_0; \delta[; f) < \lambda$. Ако је $x_1 \in B]x_0; \delta[$, онда је $B]x_1; \delta_1[\subset B]x_0; \delta[$ за неко $\delta_1 > 0$, па је $\omega(B]x_1; \delta_1[; f) < \lambda$, одакле следи $B]x_1; \delta_1[\subset M \setminus S$. Одатле закључујемо да је $M \setminus S$ отворен.

⁹Метрика је непрекидно пресликавање на производу: ово је скоро таутологија када се правилно одговори на питање – у којој метрици на том производу?

- (101) **Задатак:** Нека је (M, d) метрички простор. Доказати да је функција $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна ако и само ако су за све $t \in \mathbb{R}$ скупови

$$\{x \in M \mid f(x) < t\} \quad \text{и} \quad \{x \in M \mid f(x) > t\}$$

отворени у M . Да ли исто важи ако је M тополошки простор?

- (102) Функција $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана на тополошком простору X је
- *полунепрекидна одозго* ако је скуп $\{x \in M \mid f(x) < t\}$ отворен за свако $t \in \mathbb{R}$;
 - *полунепрекидна одоздо* ако је скуп $\{x \in M \mid f(x) > t\}$ отворен за свако $t \in \mathbb{R}$

Из (101) следи да је функција непрекидна ако и само ако је полунепрекидна и одозго и одоздо.

Задатак: Доказати да је карактеристична функција отвореног скупа полунепрекидна одоздо, а карактеристична функција затвореног скупа полунепрекидна одозго.

Задатак: Нека је $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ фамилија функција полунепрекидних одоздо и $\{g_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ фамилија функција полунепрекидних одозго. Доказати да је функција

$$f(x) := \sup_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(x)$$

полунепрекидна одоздо и да је функција

$$g(x) := \inf_{\lambda \in \Lambda} g_\lambda(x)$$

полунепрекидна одозго.

- (103) *Продужење непрекидних пресликавања.* Нека су M и N метрички простори, $T \subset M$ густ подскуп ($\overline{T} = M$) и $f : T \rightarrow N$ непрекидно пресликавање.

- Постоји непрекидно пресликавање $g : M \rightarrow N$ са особином $g|_T = f$ ако и само ако постоји $\lim_{t \rightarrow x} f(t)$ за све $x \in M$. При томе је пресликавање g јединствено.¹⁰
- Ако је f равномерно непрекидно и N комплетан, онда постоји равномерно непрекидно пресликавање $g : M \rightarrow N$ тако да је $g|_T = f$.

Доказ лакшег смера у првом тврђењу следи из чињенице да непрекидна функција комутира са лимесом; за доказ другог смера дефинишемо $g(x) := \lim_{t \rightarrow x} f(t)$. Из непрекидности f следи $f|_T = g|_T$, за доказ непрекидности g треба искористити и чињеницу да је T густ у M .

Друго тврђење следи из првог, уз помоћ карактеризације непрекидности помоћу низова и чињенице да униформно непрекидно пресликавање слика Кошијев низ у Кошијев низ.

¹⁰Пажљивом анализом доказа читалац ће видети да ово тврђење важи и ако је M произвољан тополошки простор, а N *регуларан простор*, тј. Хаусдорфов простор у коме за сваку тачку x и сваку њену отворену околину $W \ni x$ постоји затворена околина F тачке x таква да је $F \subset W$. Еквивалентно, Хаусдорфов простор је регуларан ако за сваку тачку x и сваки затворен подскуп F који не садржи x постоје *дисјунктни* отворени подскупови U и V , такви да је $x \in U$ и $F \subset V$.

Пример непрекидне функције $f(x) = 1/x$ која не може да се продужи на $[0, 1]$ са густог подскупа $]0, 1]$ показује да се услов униформне непрекидности у другом, као ни постојања лимеса у првом делу тврђења, не може изоставити.

(104) *Комплектирање метричког простора* (N, d_N) је комплетан метрички простор (M, d_M) такав да постоји пресликавање $\iota : N \rightarrow M$ такво да је $\iota^* d_M = d_N$ (тј. ι чува растојање) и $\overline{\iota(N)} = M$ (тј. $\iota(N)$ је густ у M). Из услова да ι чува растојање следи да је ι инјективно, па можемо да идентификујемо N и $\iota(N)$ и говоримо о N као подскупу у M . На пример, \mathbb{R} је комплектирање скупа \mathbb{Q} , $]0, 1]$ је комплектирање простора $]0, 1[$ са стандардним метрикама на реалној правој.

(105) Сваки метрички простор има комплектирање. Свака два комплектирања истог метричког простора су изоморфна (тј. комплектирање је јединствено до на изоморфизам). Прецизније, ако су $\iota_1 : N \rightarrow M_1$ и $\iota_2 : N \rightarrow M_2$ два комплектирања, онда постоји бијекција $f : M_1 \rightarrow M_2$ која чува метрику, таква да је $f \circ \iota_1 = \iota_2$.

Доказ ове теореме се заснива на следећој конструкцији. Нека је C скуп свих Кошијевих низова у N . На скупу C дефинишемо релацију

$$x_n \sim y_n \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0.$$

Релација \sim је релација еквиваленције на C . Простор M дефинишемо као количнички простор C/\sim . Метрику на M дефинишемо са

$$d_M([x_n], [y_n]) := \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n),$$

где су $[x_n], [y_n]$ класе еквиваленције низова x_n, y_n из C . Пресликавање ι дефинишемо са $\iota(x) = [x]$ (константан низ $x_n \equiv x$). Остатак доказа постојања комплектирања је провера да овако дефинисани објекти задовољавају услове теореме. Доказ јединствености комплектирања заснива се на идеји из (103): пошто је N густ у M_1 , а M_1 комплетан, пресликавање $\iota_2 : N \rightarrow M_2$ се продужује до $f : M_1 \rightarrow M_2$. Слично, $\iota_1 : N \rightarrow M_1$ се продужује до $g : M_2 \rightarrow M_1$. Ова пресликавања задовољавају $f \circ g = \text{id}_{M_2}$ и $g \circ f = \text{id}_{M_1}$, одакле следи да су она бијекције. Пошто ι_1, ι_2 чувају метрику, а N је густ, из непрекидности следи да и f, g чувају метрику.

(106) **Задатак:** Доказати да је са $d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$ дефинисана метрика на \mathbb{R} и да метрички простор (\mathbb{R}, d) није комплетан у односу на ту метрику. Шта је његово комплектирање? Да ли је $d'(x, y) = |e^x - e^y|$ комплетна метрика на \mathbb{R} ? Ако није, шта је комплектирање у овом случају?

(107) Нека је тополошки простор X унија два непразна отворена дисјунктна скупа: $X = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$. Такав простор називамо *неповезаним*. Приметимо да је сваки од скупова U, V и отворен и затворен (јер је један комплемент другог), па је простор неповезан ако и само ако је унија два непразна дисјунктна отворена и затворена скупа. Ако говоримо о повезаном подскупу $A \subset X$, подразумевамо релативну топологију на A , тј. A је повезан ако није унија два непразна дисјунктна скупа која су отворена у релативној топологији. Другим речима,

- $A \subset X$ је повезан ако не постоје отворени скупови $U, V \subset X$ такви да је $A = (A \cap V) \cup (A \cap U)$, $A \cap V \neq \emptyset$, $A \cap U \neq \emptyset$ и $(A \cap V) \cap (A \cap U) = \emptyset$.
- (108) Тополошки простор X је неповезан ако и само ако постоји непрекидно пресликавање $\psi : X \rightarrow \{0, 1\}$ које је *на*¹¹. Доказ једне импликације следи из чињенице да је инверзна слика отвореног (затвореног) скупа при непрекидном пресликавању отворен (затворен) скуп, а доказ друге из чињенице да је, ако су X, U, V као у (107), карактеристична функција χ_V скупа V непрекидна на X и $\chi_V(X) = \{0, 1\}$.

Задатак: Нека је (X, τ) тополошки простор и $C_{\mathbb{Z}_2}(X)$ скуп свих непрекидних пресликавања $f : X \rightarrow \mathbb{Z}_2$ у скуп $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ са дискретном топологијом. Доказати да је $C_{\mathbb{Z}_2}(X)$ Абелова група у односу на сабирање

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \pmod{2}.$$

Доказати да је простор (X, τ) повезан ако и само ако је $C_{\mathbb{Z}_2}(X)$ циклична група реда 2. Шта је $C_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_k)$, где је $\mathbb{Z}_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$ са дискретном метриком?

- (109) Једини подскупови повезаног простора X који су и отворени и затворени су X и \emptyset (доказати!). **Задатак:** Доказати да је у p -адској метрици дефинисаној у (14) свака отворена лопта $B[x; \rho[$ и отворен и затворен скуп и да за свако $y \in B[x; \rho[$ важи $B[x; \rho[= B[y; \rho[$. Доказати и да је у том простору свака затворена лопта $B[x; \rho]$ и отворен и затворен скуп и да за свако $y \in B[x; \rho]$ важи $B[x; \rho] = B[y; \rho]$.
- (110) **Задатак:** Нека је $A \subset X$ повезан подскуп тополошког простора X и нека је $A \subset B \subset \bar{A}$. Доказати да је B повезан.
- (111) Ако је $f : X \rightarrow Y$ непрекидно пресликавање тополошких простора и $A \subset X$ повезан скуп, онда је и $f(A)$ повезан. Доказ следи из чињенице да, када би постојала непрекидна сурјекција $\psi : f(A) \rightarrow \{0, 1\}$, онда би и $\psi \circ f : A \rightarrow \{0, 1\}$ била непрекидна сурјекција, што је немогуће пошто је A повезан.
- (112) **Задатак:** Нека су X и Y тополошки простори, и нека је X повезан. Ако је $f : X \rightarrow Y$ непрекидно пресликавање, доказати да је график

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$$

повезан скуп. На примеру функције $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{за } x > 0 \\ 0, & \text{за } x = 0 \end{cases}$$

која има повезан график (ово следи из (110) – доказати!) показати да не важи обрнута импликација.

- (113) Подскуп $A \subset \mathbb{R}$ је повезан ако и само ако је интервал.

Доказ: (\Rightarrow) Нека A није интервал. Тада постоје $t_1, t_2 \in A$ и $c \in \mathbb{R}$ такви да је $t_1 < c < t_2$ и $c \notin A$. Тада су скупови

$$U = A \cap]-\infty, c[= A \cap]-\infty, c], \quad V = A \cap]c, +\infty[= A \cap [c, +\infty[$$

¹¹Једина метрика на $\{0, 1\}$ је дискретна метрика (до на мултипликативну константу); реч је о непрекидности у односу на ту метрику на кодомену, и задату топологију на домену.

и отворени и затворени у релативној топологији скупа A , па скуп A није повезан.

(\Leftarrow) Претпоставимо супротно: нека A није повезан, а јесте интервал. Тада постоји непрекидна сурјекција $\psi : A \rightarrow \{0, 1\}$. Изаберимо тачке $a_0, a_1 \in A$ такве да је $\psi(a_0) = 0$, $\psi(a_1) = 1$. Не умањујући општост, можемо да претпоставимо да је $a_0 < a_1$. Нека је

$$S = \{t \in A \mid t < a_1 \wedge \psi(t) = 0\}$$

Тада је скуп S непразан (јер $a_0 \in S$) и ограничен одозго (бројем a_1), па постоји $s = \sup S$. По дефиницији супремума, и из чињенице да је A интервал, следи да за свако $\varepsilon > 0$ постоје тачке $t_- \in]s - \varepsilon, s] \cap A$ и $t_+ \in [s, s + \varepsilon[\cap A$ такве да је $\psi(t_-) = 0$ и $\psi(t_+) = 1$. Када би било $s \in A$, то би значило да је функција ψ прекидна у s ; дакле $s \notin A$. Пошто је

$$A \ni a_0 \leq s \leq a_1 \in A \quad \text{и} \quad s \notin A$$

следи да A није интервал, што је у супротности са претпоставком.

- (114) Из повезаности интервала и (111) следи да је за повезан простор M и непрекидно пресликавање $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ слика $f(M)$ интервал. Специјално, ако је $X = [a, b]$ интервал у \mathbb{R} важи *Теорема о међувредности* за непрекидне функције: Ако је $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна функција и $f(a)f(b) < 0$, онда постоји $c \in]a, b[$ за које је $f(c) = 0$.

- (115) **Задатак:** Доказати да је непрекидно пресликавање $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ монотono ако и само ако је за свако $y \in \mathbb{R}$ скуп $f^{-1}(y)$ повезан.

Овај задатак даје формулацију монотонности само на језику топологије, па се може сматрати дефиницијом монотонности на тополошким (не обавезно уређеним) просторима.

- (116) Ако је (M, d) метрички простор и A његов повезан подскуп, онда је A или празан, или једночлан или непребројив. Заиста, ако A садржи две тачке a_1, a_2 , $a_1 \neq a_2$, онда за свако $\rho \leq d(a_1, a_2)$ на сфери $S(a_1; \rho) = \{x \in M \mid d(x, a_1) = \rho\}$ постоји нека тачка скупа A . У противном би скуп A био унија два отворена скупа

$$A = (A \cap B[a_1; \rho]) \cup (A \cap (M \setminus B[a_1; \rho]))$$

што је немогуће јер је A повезан. Пошто је скуп свих таквих ρ интервал $[0, d(a_1, a_2)]$, који је непребројив скуп, и скуп A мора да буде непребројив.

- (117) Нека је $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ фамилија повезаних подскупова тополошког простора M , таква да за неко $\lambda_0 \in \Lambda$ важи

$$(\forall \lambda \in \Lambda) A_{\lambda_0} \cap A_\lambda \neq \emptyset.$$

Тада је скуп

$$A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$$

повезан.

Доказ: Нека је $\phi : A \rightarrow \{0, 1\}$ непрекидно пресликавање. Пошто су скупови A_λ повезани, на сваком од њих пресликавање ϕ је константно. Претпоставимо, не умањујући општост, да је $\phi \equiv 1$ на A_{λ_0} . Пошто је за свако λ скуп $A_{\lambda_0} \cap A_\lambda$ непразан, мора да важи $\phi(x) \equiv 1$ на сваком A_λ , тј. на целом A . Тиме је доказано да је свако

непрекидно пресликавање $\phi : A \rightarrow \{0, 1\}$ константно, одакле следи да је A повезан.

(118) Ако су X и Y повезани тополошки простори, онда је и њихов производ $X \times Y$ повезан. За доказ је довољно посматрати фамилију $\{x_0\} \times Y$, $\{X \times \{y\}\}_{y \in Y}$ и применити (117).

(119) **Задатак:** Нека је (X, τ) тополошки простор, $Y \subset X$ и \sim релација на Y дефинисана са $a \sim b$ ако и само ако постоји повезан скуп $V \subset Y$ такав да је $a, b \in V$. Доказати:

(а) \sim је релација еквиваленције;

(б) класе еквиваленције C_a су повезани скупови за све $a \in Y$;

(в) C_a је максималан повезан подскуп у Y који садржи тачку a .

Скуп C_a назива се *компонентом повезаности* тачке $a \in Y$. **Задатак:** Нека је $X = \mathbb{R}^2$ и $Y = \Gamma(f)$ график функције f из (112). Доказати да је скуп $V = \Gamma(f) \cap \mathbb{R} \times]-1, 1[$ отворен у $\Gamma(f)$ и да је компонента повезаности тачке $(0, 0)$ у V једночлан скуп $C_{(0,0)} = \{(0, 0)\}$.

(120) Скуп $A \subset X$ у тополошком простору је *путно повезан* ако за све $a_0, a_1 \in A$ постоји непрекидно пресликавање $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$ (непрекидан *пут* у A) такво да је $\gamma(0) = a_0$, $\gamma(1) = a_1$. Из Теореме о међувредности следи да је путно повезан скуп A повезан – у противном би из постојања непрекидне сурјекције $\psi : A \rightarrow \{0, 1\}$ следило да постоји непрекидна сурјекција $\psi \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow \{0, 1\}$ што је немогуће. **Задатак:** Нека је $\Gamma(f)$ график функције f из (112). Доказати да је свако непрекидно пресликавање $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Gamma(f)$ са својством $\gamma(0) = (0, 0)$ константно. Извести закључак да скуп $\Gamma(f)$, за који смо у (112) видели да је повезан, није путно повезан.

Задатак: Доказати да је отворен подскуп у \mathbb{R}^n повезан ако и само ако је путно повезан. Одатле извести закључак да је отворен подскуп тополошке многострукости повезан ако и само ако је путно повезан.

Слично као у (119) дефинишу се и *компоненте путне повезаности*.

(121) Тополошки простор је *локално повезан у тачки* x_0 ако свака околина U тачке x_0 садржи повезану подоколину $V \subset U$ тачке x_0 . Простор је *локално повезан* ако је локално повезан у свакој својој тачки. **Задатак:** Доказати да график из (112) (са релативном топологијом као тополошки потпростор у \mathbb{R}^2) није локално повезан у нули. Ово показује да из повезаности не следи локална повезаност (наравно, не важи ни обрнуто).

(122) Приметимо да је простор X путно повезан ако и само ако свако пресликавање $f : \{-1, 1\} \rightarrow X$ може непрекидно да се прошири до пресликавања $f : [-1, 1] \rightarrow X$. Ако уместо интервала $[-1, 1]$ (лопте димензије 1) и његовог руба $\{-1, 1\}$ (сфере димензије 0) узмемо вишедимензионе лопте и сфере, добијамо следеће дефиниције.

Путно повезан скуп $A \subset X$ у тополошком простору је *просто повезан* ако свако непрекидно пресликавање $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow A$ круга $\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ може да се прошири до непрекидног пресликавања $F : D^2 \rightarrow A$ диска $D^2 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ (тј. ако постоји непрекидно

пресликавање диска у A за које је $F|_{\mathbb{S}^1} = f$). На пример, прстен $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z| \leq 2\}$ је путно повезан, али није просто повезан.

- (123) Општије, скуп A је n -повезан ако за свако $k \leq n$ свако непрекидно пресликавање $f : \mathbb{S}^k \rightarrow A$ сфере

$$\mathbb{S}^k := \{(x_0, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid x_0^2 + \dots + x_k^2 = 1\}$$

може да се продужи до непрекидног пресликавања $F : \mathbb{D}^{k+1} \rightarrow A$ лопте

$$\mathbb{D}^{k+1} := \{(x_0, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid x_0^2 + \dots + x_k^2 \leq 1\}$$

тако да важи $F|_{\mathbb{S}^k} = f$. Специјално, 0-повезан простор је путно повезан, 1-повезан простор је просто повезан. Торус $\mathbb{T}^2 \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ је путно повезан али није просто повезан, сфера \mathbb{S}^2 је просто повезана али није 2-повезана¹².

Задатак: Доказати да је n -повезаност тополошка инваријанта; другим речима, ако је $\varphi : X \rightarrow Y$ хомеоморфизам тополошких простора, онда је један од њих n -повезан ако и само ако је n -повезан и други. Нпр, сфера и торус нису хомеоморфни.

- (124) **Задатак:** Доказати следећа тврђења.

- Отворени интервал $]a, b[$ је хомеоморфан са \mathbb{R} .
- Отворени интервал $]a, b[$ није хомеоморфан затвореном $[c, d]$.
- Интервал није хомеоморфан кругу $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.
- Круг \mathbb{S}^1 и прстен $P = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$ нису хомеоморфни.
- Прстен P и диск $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ нису хомеоморфни.
- Прстен P је хомеоморфан цилиндру $C = [0, 1] \times \mathbb{S}^1$.
- Цилиндар C и Мебијусова трака $M = [0, 1] \times [0, 1] / (0, t) \sim (1, 1-t)$ нису хомеоморфни.

Да ли је унутрашњост прстена $\text{Int } P$ хомеоморфна унутрашњости пробушеног диска $\text{Int } D \setminus \{0\}$?

- (125) **Задатак:** Доказати да постоји непрекидна бијекција

$$f : [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{S}^1$$

полуотвореног интервала на круг. Упоредити ово са резултатом Задатка (124).

- (126) Имајући у виду Задатак (125) природно је поставити следеће питање: да ли постоје простори X и Y који *нису хомеоморфни*, али такви да постоје непрекидне бијекције

$$f : X \rightarrow Y, \quad \text{и} \quad g : Y \rightarrow X$$

у оба смера?

Одговор је потврдан. На пример, нека је X унија пребројиво много дисјунктних полуотворених интервала $[a_n, b_n[$ и пребројиво много изолованих тачака $\{x_n\}$. Нека је Y унија пребројиво много дисјунктних отворених интервала $]c_n, d_n[$ и пребројиво много изолованих тачака $\{y_n\}$. Проверу да овај пример заиста даје потврдан одговор формулишемо као следећи задатак.

¹²Иако су ове чињенице интуитивно очигледне, њихов строг доказ је сложенији, па га не дајемо овде.

Задатак: (а) Доказати да сваки отворени интервал може да се представи као пребројива унија полуотворених. Користећи ту чињеницу, конструисати непрекидну бијекцију $f : X \rightarrow Y$.

(б) Конструисати непрекидну бијекцију $g : Y \rightarrow X$.

(в) Доказати да простори X и Y нису хомеоморфни.

(127) Следећи задатак даје још један пример за феномен из (126).

Задатак: Нека су X и Y тополошки простори добијени од истог скупа, реалне праве \mathbb{R} , задавањем две различите топологије на њој на следећи начин.

- Простор X је реална права са стандардном топологијом на интервалу $]0, +\infty[$ и са дискретном топологијом (видети (70) на стр. 64) на интервалу $] - \infty, 0]$.

- Простор Y је реална права са стандардном топологијом на интервалима $]0, +\infty[$ и $] - 1, 0[$ са дискретном топологијом на њиховом комплементу $] - \infty, -1[\cup \{0\}$.

(а) Доказати да је translација $x \mapsto x + 1$ непрекидна бијекција X на Y .

(б) Доказати да је иста translација, $x \mapsto x + 1$, непрекидна бијекција Y на X .

(в) Доказати да простори X и Y нису хомеоморфни.

(128) Непрекидност и лимеси се могу дефинисати само на језику топологије, тј. у амбијенту метричког или тополошког простора. За дефиницију објеката као што су први извод $f'(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ или бесконачни збир $\sum_{n=1}^{\infty} z_n := \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m z_n$ сем тополошке структуре (lim) потребна нам је и алгебарска (сабирање и дељење у првом, односно сабирање у другом примеру). Следи неколико примера.

(129) *Нормирана Абелова група* је структура $(G, +, 0, \|\cdot\|)$ где је $(G, +)$ Абелова група, а $x \mapsto \|x\|$ пресликавање $G \rightarrow \mathbb{R}$ са особинама

- $\|x\| \geq 0$
- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\| - x \| = \|x\|$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Тада је $d(x, y) = \|y - x\|$ метрика на G . Ова метрика је инваријантна у односу на translацију и рефлексију, а груповне операције су непрекидне у тако дефинисаној метричкој структури (доказати!). Примери нормираних група: $(\mathbb{R}, +, 0, |\cdot|)$, $(\mathbb{C}, +, 0, |\cdot|)$, $(U(1), \cdot, 1, \|\cdot\|)$, где је $U(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $\|z\| := \arccos \operatorname{Re} z$.

Задатак: Доказати да су једине затворене (као метрички потпростори) подгрупе групе $(\mathbb{R}, +, |\cdot|)$ цикличне групе $(a \cdot \mathbb{Z}, +)$, за неко $a > 0$, $\{0\}$ и \mathbb{R} .

Задатак: Нека је $(G, +, \|\cdot\|)$ нормирана група и $H \subset G$ њена подгрупа. Доказати да је и $(\overline{H}, +)$ група.

Специјалан случај нормиране Абелове групе је *тотално уређена Абелова група*: то је структура $(G, +, \leq)$, где је $(G, +)$ Абелова група,

$a \leq$ релација тоталног поретка, која је *сагласна са трансляцијом*, тј. у којој важи

$$x \leq y \Rightarrow x + a \leq y + a \quad \text{за све } x, y, a \in G.$$

У тотално уређеној групи је добро дефинисана *апсолутна вредност*, изведена из релације тоталног поретка: $|x| := \max\{x, -x\}$. Апсолутна вредност се још назива и *модулом*. *Позитивни и негативни део* елемента x тотално уређене групе се дефинишу са

$$x^+ := \max\{x, 0\}, \quad x^- := \max\{-x, 0\},$$

тако да је $x = x^+ - x^-$ и $|x| = x^+ + x^-$.

Ако је $(G, +)$ подгрупа групе $(\mathbb{R}, +)$, онда је апсолутна вредност једна норма на њој¹³.

Тотално уређена група је *архимедска* ако у њој важи *Архимедова аксиома*, тј. било које од следећих, еквивалентних својстава:

- (а) за свако $a > 0$ скуп $\mathbb{N}a := \{na := a + \dots + a \mid n \in \mathbb{N}\}$ није ограничен одозго;
- (б) за свако $a > 0$ скуп $\mathbb{Z}a$ није ограничен ни одозго ни одоздо;
- (в) $G = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [na, (n+1)a[= \mathbb{Z}a + [0, a[$ за свако $a > 0$.

Подскуп $A \subset G$ тотално уређеног скупа је *густ* у скупу $B \subset G$, $A \subset B$, ако за све $x, y \in B$, $x < y$, постоји $a \in A$ такво да је $x < a < y$.

Задатак: Доказати да је ова дефиниција у тотално уређеној Абеловој групи $(\mathbb{R}, +)$ еквивалентна тополошкој дефиницији густог скупа, у норми изведеној из поретка (тј. апсолутној вредности). Упоредити то са групом $(\mathbb{Z}, +)$.

Задатак: Нека је $H \subset G$ нетривијална подгрупа тотално уређене архимедске Абелове групе G и

$$H_+^* := \{x \in H \mid x > 0\}.$$

- (а) Доказати да скуп H густ у G ако и само ако је $\inf H_+^* = 0$.
- (б) Доказати да скуп H није густ у G ако и само ако H_+^* има минимум.

Упутство за тежу импликацију у (б): нека је $]0, a[$ интервал у G који не садржи елементе из H . Доказати да је пресликавање

$$\psi : H_+^* \rightarrow \mathbb{N}, \quad \psi(x) = n \quad \text{за } x \in [na, (n+1)a[$$

добро дефинисано и строго монотono (дакле инјективно). Закључити да је уређена структура (H_+^*, \leq) изоморфна структури (\mathbb{N}, \leq) за неки подскуп $N \subset \mathbb{N}$ и искористити чињеницу да сваки подскуп скупа природних бројева има минимум.

Задатак: Елементи скупа

$$D = \{k2^{-n} \mid k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$$

¹³Ако G није подгрупа у \mathbb{R} онда апсолутна вредност нема реалне вредности, па није норма. Међутим, и у том случају можемо да дефинишемо појмове као што су лimes и непрекидност; нпр. низ x_n у G конвергира ка x_∞ ако за свако $\varepsilon > 0$ (где је $\varepsilon \in G$) постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ са особином да за све $n \geq n_0$ важи $|x_\infty - x_n| < \varepsilon$.

називају се *дијадским разломцима*. Доказати да је D подгрупа групе $(\mathbb{R}, +)$. Доказати да D_+^* нема минимум. Закључити да је скуп D густ у \mathbb{R} .

Тотално уређена Абелова група је *комплетна* ако у њој важи *Аксиома супремума*: сваки непразан одозго ограничен скуп има супремум. Свака комплетна тотално уређена Абелова група је архимедска (доказ је незнатна модификација доказа да у \mathbb{R} из Аксиоме супремума следи Архимедова аксиома).¹⁴

Задатак: Доказати да тврђење (10) важи у свакој комплетној тотално уређеној групи.

Задатак: Доказати да ако је тотално уређена Абелова група комплетна (у смислу претходне дефиниције њене комплетности као уређене структуре) онда сваки Кошијев низ у њој конвергира у норми изведеној из поретка (тј. она је комплетна у смислу тополошке структуре¹⁵).

Задатак: Ако је G тотално уређена група и H њена комплетна густа подгрупа, доказати да је $G = H$.

- (130) Општији појам је *тополошка група*: група која је истовремено тополошки простор, такав да је свака тачка затворен скуп и да су множење $G \times G \rightarrow G$ и инверз $G \rightarrow G$ непрекидна пресликавања (у првом случају ради се о непрекидности у односу на топологију производа тополошких простора). На пример, група $GL(n, \mathbb{K})$ инвертибилних $n \times n$ матрица над пољем $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ са операцијом множења матрица¹⁶ је отворен подскуп у \mathbb{K}^{n^2} (као инверзна слика отвореног скупа $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ при пресликавању $\det : \mathbb{K}^{n^2} \rightarrow \mathbb{K}$), па наслеђује топологију из еуклидског простора. Матричне операције су непрекидне у тој топологији.

Задатак: Доказати да је $GL(n, \mathbb{K})$ отворен густ подскуп у простору \mathbb{K}^{n^2} свих матрица.

У специјалном случају, за $n = 1$, група $GL(1, \mathbb{K})$ је група (\mathbb{K}^*, \cdot) , где је $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Коначне групе као \mathbb{Z}_p се често посматрају као тополошке групе у дискретној топологији.

- (131) Тополошка група је Хаусдорфов простор.

Докажимо пре тога следеће помоћно тврђење: нека је W околина неутралног елемента e тополошке групе (G, \cdot) . Тада постоји отворена околина U која садржи e таква да је

$$U = U^{-1} \quad \text{и} \quad U \cdot U \subset W.$$

¹⁴Реч *Абелова* је овде заправо сувишна – може да се докаже да је свака тотално уређена архимедска група Абелова. То је последица *Хелдереове теореме*, која каже да је свака тотално уређена архимедска група изоморфна подгрупи групе $(\mathbb{R}, +)$.

¹⁵Видети фусноту у (32).

¹⁶Ова група се назива *главном линеарном групом*.

Заиста, Из непрекидности множења и $e \cdot e = e$ следи да постоје отворене околине $U_1, U_2 \ni e$ таква да је $U_1 \cdot U_2 \subset W$, па скуп

$$U = U_1 \cap U_1^{-1} \cap U_2 \cap U_2^{-1}$$

има тражено својство.

За овако конструисани скуп U важи и $\bar{U} \subset W$. Заиста, ако је $g \in \bar{U}$, онда се свака околина тачке g сече са U . Пошто је множење непрекидно, скуп gU је околина тачке g , па је $gU \cap U \neq \emptyset$. Одатле следи да постоји $h \in U$ за које је $gh \in U$. Али тада је

$$g = (gh)h^{-1} \subset U \cdot U^{-1} = U \cdot U \subset W.$$

Сада можемо да докажемо да је тополошка група Хаусдорфов простор: довољно је (због непрекидности множења) доказати да за сваку тачку $x \neq e$ постоје дисјунктни отворени скупови $U \ni e$ и $V \ni x$. Ако је $W = G \setminus \{x\}$, скуп U из претходне конструкције задовољава $\bar{U} \subset W$, што значи $x \notin \bar{U}$. Тиме смо конструисали отворене и дисјунктне скупове U и $V = G \setminus \bar{U}$ такве да је $e \in U$ и $x \in V$.

Задатак: Нека је G тополошка група и H њена нормална подгрупа. Доказати да је G/H тополошка група у односу на топологију дефинисану у (92). Доказати да је, чак и ако подгрупа H није нормална, G/H добро дефинисан тополошки простор. Доказати да је количничка топологија (92) на G/H Хаусдорфова ако и само ако је H затворена (као тополошки потпростор) у G .

Специјално, ако је $G = \mathbb{R}^k$ адитивна Абелова група вектора у k -димензионом простору и $H = \mathbb{Z}^k$ њена дискретна подгрупа, количнички простор $\mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$ је k -димензиони торус $\mathbb{T}^k \cong \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$.

Задатак: Нека је G тополошка група и N компонента повезаности њеног неутралног елемента. Доказати да је N затворена нормална подгрупа групе G и да је G/N тополошка група.

(132) *Нормирано поље* је структура $(F, +, \cdot, \|\cdot\|)$, где је $(F, +, \cdot)$ поље, а $\|\cdot\| : F \rightarrow [0, +\infty[$ функција која задовољава

- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
- $\|xy\| = \|x\| \|y\|$
- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Нормирано поље је *неархимедско* ако у њему важи

$$\|x + y\| \leq \max\{\|x\|, \|y\|\}.$$

Из ове неједнакости следи да је за сваки природан број n (који можемо да сматрамо и елементом поља, користећи исту ознаку n за збир n јединица поља $n \cdot 1 = 1 + \dots + 1$)

$$\|n + 1\| \leq \max\{1, \|n\|\}$$

па ако је $\|n\| > 1$, онда је $\|n+1\| \leq \|n\|$. Одатле видимо да ова дефиниција уопштава својство неархимедске уређене структуре. Нормирано поље је *архимедско* ако није неархимедско (ова дефиниција не укључује поредак; тј. уопштава дефиницију архимедског *уређеног* поља као тотално уређеног поља чија је адитивна група архимедска).

Комплетирање метричког простора \mathbb{Q} са p -адском метриком уведеном у (14) означавамо са \mathbb{Q}_p , елементе овог скупа називамо p -адским бројевима.

Задатак: Доказати да је скуп p -адских бројева \mathbb{Q}_p комплетно неархимедско поље (операције поља се преносе са низова на њихове класе еквиваленције, помоћу којих се конструише комплетирање (видети (105))).

У (129) смо видели да је, ако је норма изведена из релације поретка у тотално уређеној групи (као у нпр. у $(\mathbb{R}, +)$), Архимедова аксиома последица комплетности. Из претходног задатка видимо да је поље \mathbb{Q}_p пример који показује да у општем случају то не важи. Приметимо да су и \mathbb{Q}_p и \mathbb{R} добијени као комплетирање истог скупа \mathbb{Q} , али са различитим метрикама.

Још једна специфичност топологије изведене из поретка види се у следећем задатку. Нека је F тотално уређено поље. Постоји јединствен инјективни морфизам поља \mathbb{Q} у F дефинисан са

$$\varphi(m/n) = (m \cdot 1_F)(n \cdot 1_F)^{-1},$$

тако да свако тотално уређено поље садржи поље \mathbb{Q} .

Задатак: Доказати да је тотално уређено поље F архимедско ако и само ако је скуп \mathbb{Q} густ у F . Пример \mathbb{Q}_p показује да ово не важи за нормирана поља у којима норма није изведена из поретка.

(133) *Нормирани векторски простор* је пар $(X, +, \cdot, \|\cdot\|)$ где је $(X, +, \cdot)$ векторски простор над пољем \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), а $x \mapsto \|x\|$ пресликавање $X \rightarrow \mathbb{R}$ са особинама

- $\|x\| \geq 0$
- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\|\xi \cdot x\| = |\xi| \|x\|$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

за све $x, y \in X$ и $\xi \in \mathbb{K}$. Са $d(x, y) = \|y - x\|$ на X је дефинисана метрика у односу на коју су векторске операције непрекидне. Ова метрика је инваријантна у односу на транслацију и рефлексiju у комутативној групи $(X, +)$ и апсолутно хомогена, тј. $d(\xi x, \xi y) = |\xi| d(x, y)$.

Задатак: Доказати да се комплетирањем (104) нормираног векторског простора добија нормирани векторски простор, тј. да се векторске операције преносе на релације еквиваленције у доказу (105).

Нормирани векторски простор који је комплетан називамо *Банаховим простором*.

(134) Најједноставнији примери нормираних простора су \mathbb{R} и \mathbb{C} , на којима норму дефинише апсолутна вредност. Општије, еуклидски простори су векторски простори \mathbb{R}^n и \mathbb{C}^n са нормама $\|a\| = \sqrt{|a_1|^2 + \dots + |a_n|^2}$.

Важни примери су и простори $C[a, b]$ непрекидних функција, са нормом

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad \text{за } 1 \leq p < +\infty.$$

Неједнкост троугла следи из неједнакости Минковског за интеграле.

(135) Из дефиниције норме следи $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$, па је норма Липшицово пресликавање.

(136) Индукцијом се доказује $\|x_1 + \dots + x_n\| \leq \|x_1\| + \dots + \|x_n\|$.

(137) Нека је \mathcal{F} филтер на скупу S и $(Y, \|\cdot\|)$ нормирани векторски простор. Из неједнакости троугла и хомогености норме следи да $\lim_{\mathcal{F}}$ пресликавања $S \rightarrow Y$ комутира са алгебарским операцијама у Y , тј.

$$\lim_{\mathcal{F}}(f + g) = \lim_{\mathcal{F}} f + \lim_{\mathcal{F}} g, \quad \lim_{\mathcal{F}}(\lambda f) = \lambda \lim_{\mathcal{F}} f$$

за $f, g : S \rightarrow Y$ и $\lambda \in \mathbb{K}$ (доказати!). Специјално:

- Ако су f и g непрекидне функције, онда је и $\lambda f + \mu g$ непрекидна (\mathcal{F} = филтер околина);
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \mu \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ (\mathcal{F} = филтер пробушених околина);
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \mu \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ (\mathcal{F} = Фрешеов филтер);
- $\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx$ (\mathcal{F} = филтер на простору подела).

Задатак: Користећи (135) формулисати и доказати правило комутирања лимеса по филтеру и норме. Доказати да из њега следи

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right|, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right|, \quad \left| \int_a^b g(x) dx \right| \leq \int_a^b |g(x)| dx$$

за комплексне функције f, g и комплексни низ a_n за које ови изрази постоје.

(138) Општије: *тополошки векторски простор* је векторски простор X са тополошком структуром у којој је свака тачка затворен скуп и у односу на коју су операције сабирања вектора $X \times X \rightarrow X$ и множења вектора скаларом $\mathbb{K} \times X \rightarrow X$ непрекидне у односу на одговарајуће топологије производа тополошких простора.

Задатак: Доказати да су translације $x \mapsto a + x$, $a \in X$ и хомотетије $x \mapsto \xi \cdot x$, $\xi \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ хомеоморфизми $X \rightarrow X$.

Тополошки векторски простор је Хаусдорфов (видети (131)).

Задатак: Доказати да је отворен подскуп тополошког векторског простора повезан ако и само ако је путно повезан.

(139) Производ $X_1 \times \dots \times X_n$ нормираних векторских простора $(X_k, \|\cdot\|_{X_k})$ може да се снабде нормом на више начина; нпр за $x = (x_1, \dots, x_n)$:

$$\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|_{X_j}^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < +\infty, \quad \|x\|_\infty := \max_{1 \leq j \leq n} \|x_j\|_{X_j}.$$

Специјално, у векторском простору \mathbb{R}^n (или \mathbb{C}^n) имамо норму

$$\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < +\infty, \quad \|x\|_\infty := \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|.$$

- (140) **Задатак:** Нека је $\mathbb{S} := \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$ јединична сфера у нормираном простору $(X, \|\cdot\|)$ и $G = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid |\lambda| = 1\}$ мултипликативна група јединичних скалара. Доказати да је са $x \mapsto \lambda \cdot x$ дефинисано дејство групе G на скупу \mathbb{S} . Доказати да је на простору орбита овог дејства¹⁷ $P(X) = \mathbb{S}/G$ са $d([x], [y]) = \min\{\|x + \lambda y\| \mid \lambda \in G\}$ дефинисана метрика. Специјално, на реалном пројективном простору је $d([x], [y]) = \min\{\|x - y\|, \|x + y\|\}$.

Простор $P(X)$ се назива *пројективизацијом* Банаховог простора X , или *пројективним простором*. Специјално, за $X = \mathbb{R}^{n+1}$ добијамо реални $\mathbb{R}P^n = \mathbb{S}^n/\mathbb{Z}_2$, а за $X = \mathbb{C}^{n+1}$ комплексни $\mathbb{C}P^n = \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ пројективни простор. За $n = 2$ простор $\mathbb{R}P^2$ смо увели у (92) на други, еквивалентан начин. Још један начин да се дефинише простор $P(X)$ је као количнички простор $(X \setminus \{0\})/\sim$, где је $x \sim \lambda x$ за све $\lambda \in X \setminus \{0\}$. У овој интерпретацији, $P(X)$ се може схватити као простор свих правих¹⁸ кроз тачку $0 \in X$. Уопштење пројективних простора су простори $G_k(X)$ чије су тачке k -димензиони потпростори у X ; ови простори називају се *Грасмановим многострукостима*. Специјално, $G_1(X) = P(X)$.

Задатак: Доказати да је реална пројективна права $\mathbb{R}P^1$ хомеоморфна кругу \mathbb{S}^1 , а комплексна пројективна права $\mathbb{C}P^1$ сфери \mathbb{S}^2 .

- (141) *Униформна* (или *равномерна*) *норма* на простору $B_Y(T)$ ограничених пресликавања скупа T у нормирани векторски простор $(Y, \|\cdot\|)$ је $\|f\|_\infty := \sup_{t \in T} \|f(t)\|$. Структура $(B_Y(T), +_T, \cdot_T, \|\cdot\|_\infty)$ је нормирани векторски простор.
- (142) *Низ ограничене варијације.* Нека је $a \in X^{\mathbb{N}}$ низ у нормираном векторском простору $(X, \|\cdot\|)$. Његова варијација је величина

$$\text{var}(a) := \|a_0\| + \sum_{n=0}^{\infty} \|a_n - a_{n+1}\|.$$

Низ a_n је *низ ограничене варијације* ако је $\text{var}(a) < +\infty$. Скуп низова ограничене варијације у X означавамо са $bv(X)$; овај скуп је векторски простор, а var норма на њему (доказати!).

Ако је x_n монотон низ у \mathbb{R} , онда је $x_n \rightarrow x_\infty \in \overline{\mathbb{R}}$ и $\text{var}(x) = |x_0| + |x_0 - x_\infty|$. Дакле, монотон низ је низ ограничене варијације ако и само ако је ограничен.

Низ x_n у \mathbb{R} је низ ограничене варијације ако и само ако је разлика два растућа ограничена низа.

¹⁷Или, еквивалентно, количничком простору $P(X) = \mathbb{S}/\sim$ у односу на релацију еквиваленције $x \sim \lambda \cdot x$.

¹⁸У случају $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ овде је реч о *комплексним правима*, тј. објектима реалне димензије 2.

Доказ: (\Leftarrow) следи из чињенице да је монотон и ограничен низ низ ограничене варијације. (\Rightarrow) следи из

$$x_{n+1} = \left(x_0^+ + \sum_{k=0}^n (x_{k+1} - x_k)^+ \right) - \left(x_0^- + \sum_{k=0}^n (x_{k+1} - x_k)^- \right),$$

јер су низови $x_0^+ + \sum_{k=0}^n (x_{k+1} - x_k)^+$ и $x_0^- + \sum_{k=0}^n (x_{k+1} - x_k)^-$ растући и ограничени одозго бројем $\text{var}(x)$.

(143) *Функције ограничене варијације.* Нека је $f : I \rightarrow X$ пресликавање интервала $I \subset \mathbb{R}$ у нормирани векторски простор $(X, \|\cdot\|)$. Ако је

$$P : \inf I = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \sup I$$

подела интервала I , њој можемо да придружимо број

$$V_I(f; P) = \|f(t_0)\| + \sum_{k=1}^n \|f(t_k) - f(t_{k-1})\|$$

(ако интервал I није затворен, под $f(t_0)$ и $f(t_n)$ подразумевамо лимесе у тим тачкама). *Тотална варијација* функције f на интервалу I је број

$$\text{Var}_I(f) := \sup_P V_I(f; P).$$

Уколико је овај број коначан, функцију f називамо *функцијом ограничене варијације*. Скуп $BV(I, X)$ свих функција ограничене варијације на интервалу I са вредностима у X је нормирани векторски простор, са нормом $\text{Var}_I(f)$.

Ако је $X = \mathbb{R}$, свака функција ограничене варијације $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ је разлика две монотоне функције:

$$f(t) = \frac{\text{Var}_{[t_0, t]}(f) + f(t)}{2} - \frac{\text{Var}_{[t_0, t]}(f) - f(t)}{2}.$$

Важи и обрнуто, ако је $f = f_1 - f_2$ за монотоне функције f_1 и f_2 , онда је f функција ограничене варијације.

(144) $L : X \rightarrow Y$ је *морфизам нормираних векторских простора* $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ако је

- $L(\xi x + \eta y) = \xi L(x) + \eta L(y)$ за $x, y \in X$ и $\xi, \eta \in \mathbb{K}$ (линеарност);
- $\|L(x)\|_Y = \|x\|_X$.

(145) Нека су $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ нормирани векторски простори и $L : X \rightarrow Y$ линеарно пресликавање. Тада је

$$\text{Lip}(L) = \sup_{x \neq y} \frac{\|L(x) - L(y)\|_Y}{\|x - y\|_X} = \sup_{x \neq y} \left\| L \left(\frac{x - y}{\|x - y\|_X} \right) \right\|_Y = \sup_{\|z\|_X=1} \|L(z)\|_Y,$$

па је L Липшицово ако и само ако је ограничено на јединичној сфери. Липшицова константа линеарног пресликавања назива се његовом *нормом*; она заиста дефинише једну норму на векторском простору $\mathcal{L}(X; Y)$ непрекидних линеарних пресликавања из X у Y (доказати!)¹⁹, па за линеарно пресликавање уместо $\text{Lip}(L)$ чешће користимо ознаку $\|L\|$. Специјално, за $Y = \mathbb{K}$ добијамо норму на дуалном векторском

¹⁹Линеарна пресликавања се још називају и *линеарним операторима*; норма коју смо дефинисали назива се *операторском нормом* линеарног оператора (постоје и друге норме линеарних оператора).

простору²⁰ X^* . Елементе простора X^* називамо *линеарним функцио-
налима* на X .

Задатак: Нека су X и Y простори коначне димензије и $L : X \rightarrow Y$ линеарно пресликавање. Доказати да L слика јединичну сферу на елипсоид и да је $\|L\|$ дужина највеће полуосе тог елипсоида. Закључити да је свако линеарно пресликавање између простора коначне димензије непрекидно.

(146) За линеарно пресликавање $L : X \rightarrow Y$ следећи услови су еквивалентни:

- (а) L је непрекидно у једној тачки;
- (б) L је непрекидно;
- (в) L је Липшицово;
- (г) $\sup_{\|x\|_X=1} \|L(x)\|_Y < +\infty$

Довољно је доказати (а) \Rightarrow (г). Нека је L непрекидно у тачки a . Онда је L ограничено на некој лопти $B[a; \varepsilon] = a + \varepsilon B[0; 1]$. Одатле следи да је L ограничено и на сфери $S(a; \varepsilon) = a + \varepsilon S(0; 1)$, па је ограничено и на сфери $S(0; 1)$.

Задатак: Нека је $t_0 \in [a, b]$ и $\delta_{t_0} : C[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ пресликавање дефинисано са $\delta_{t_0}(f) = f(t_0)$. Доказати да је ово пресликавање линеарно. Да ли је оно непрекидно у односу на неку од норми $\|\cdot\|_p$ уведених у (134)? Да ли је, на сличан начин дефинисано, линеарно пресликавање $\delta_{t_0} : B_Y(T) \rightarrow Y$, где је $B_Y(T)$ простор уведен у (141), непрекидно?

Задатак: Нека је $C^\infty[a, b]$ скуп функција $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ које су n пута диференцијабилне за свако n . Доказати да је

$$D : C^\infty[a, b] \rightarrow C^\infty[a, b], \quad D(f) = \frac{df}{dx}$$

линеарно, али није непрекидно пресликавање нормираног векторског простора $(C^\infty, \|\cdot\|_\infty)$. Другим речима, показати да лимес у норми $\|\cdot\|_\infty$ не комутира са изводом (видети (264) на 128. страни за више детаља).

Задатак: Нека је $k : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ непрекидна функција. Доказати да је са

$$K(f)(x) = \int_0^1 k(x, t) f(t) dt$$

дефинисано непрекидно линеарно пресликавање $K : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ на нормираном простору $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ и да је

$$\|K\| = \sup_{x \in [0, 1]} \int_0^1 |k(x, t)| dt.$$

Упутство: Свести тврђење на случај када је k реална функција. Из неједнакости троугла следи $\|K\| \leq \sup_{x \in [0, 1]} \int_0^1 |k(x, t)| dt$. Треба

²⁰ Дуал X^* векторског простора X над пољем \mathbb{K} је простор свих непрекидних линеарних пресликавања $X \rightarrow \mathbb{K}$; X^* је такође векторски простор над \mathbb{K} .

доказати и обрнуту неједнакост. Из Канторове теореме следи да је функција k равномерно непрекидна, а одатле да је

$$x \mapsto \int_0^1 |k(x, t)| dt$$

непрекидна, па је за неко $a \in [0, 1]$

$$\int_0^1 |k(a, t)| dt = \sup_{x \in [0, 1]} \int_0^1 |k(x, t)| dt.$$

Посматрати пресликавање

$$f \mapsto \int_0^1 k(a, t) f(t) dt.$$

Довољно је доказати да за свако ε постоји функција f_ε таква да је $\|f_\varepsilon\|_\infty = 1$ и

$$\int_0^1 k(a, t) f_\varepsilon(t) dt > \int_0^1 |k(a, t)| dt.$$

Доказати да постоји подела $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ интервала $[0, 1]$ таква да је осцилација функције $t \mapsto k(a, t)$ на сваком подеоном интервалу мања од $\varepsilon/4$. Означимо са P_1 интервале ове поделе који не садрже 0 и 1 и на којима је функција $k(a, \cdot)$ сталног знака, а са P_2 преостале интервале. Дефинисати $f_\varepsilon(t) = \operatorname{sgn} k(a, t)$ ако t припада неком интервалу из P_1 и линеарно је додефинисати на интервалима из P_2 тако да се добије непрекидна функција. Раздвојити интеграл $\int_0^1 k(a, t) f_\varepsilon(t) dt$ на збир интеграла по интервалима из P_1 и интеграла по интервалима из P_2 . Доказати да на P_2 важи $|k(a, t)| < \varepsilon/4$ и искористити ову неједнакост за доказ да f_ε има тражено својство.

(147) Општије, ако су $(X_1, \|\cdot\|_1), \dots, (X_n, \|\cdot\|_n)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ нормирани векторски простори и $L : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$ вишелинеарно (тј. линеарно по свакој променљивој) пресликавање, његова норма се дефинише са

$$\begin{aligned} \|L\| &:= \sup_{\|x_1\|_1 = \dots = \|x_n\|_n = 1} \|L(x_1, \dots, x_n)\|_Y \\ &= \sup_{h_1 \neq 0, \dots, h_n \neq 0} \frac{\|L(h_1, \dots, h_n)\|_Y}{\|h_1\|_1 \dots \|h_n\|_n} \\ &= \inf\{C \geq 0 \mid \|L(x_1, \dots, x_n)\|_Y \leq C \|x_1\|_1 \dots \|x_n\|_n\}. \end{aligned}$$

За вишелинеарно пресликавање L су еквивалентни услови

- (а) L је непрекидно;
- (б) $\|L\| < +\infty$.

Доказ се практично не разликује од доказа у (146).

Примери: Множење $L_1 : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$, $L_1(\xi_1, \dots, \xi_n) = \xi_1 \dots \xi_n$, множење скаларом $L_2 : \mathbb{K} \times X \rightarrow X$, $L_2(\xi, x) = \xi x$, детерминанта $\det : (\mathbb{K}^p)^p \rightarrow \mathbb{K}$, векторски производ $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, скаларни производ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ су примери непрекидних вишелинеарних пресликавања.

Скуп непрекидних вишелинеарних пресликавања

$$X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$$

је векторски простор; означавамо га са $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_n; Y)$. Елементе простора $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_n; \mathbb{K})$, тј. вишеллинеарна пресликавања у простор скалара, називамо *вишеллинеарним функционалима*.

(148) Ако је

$$B : X_1 \times X_2 \rightarrow Y$$

билинеарно пресликавање, онда је

$$L : X_1 \rightarrow \mathcal{L}(X_2; Y), \quad L(x_1)(x_2) := B(x_1, x_2)$$

линеарно пресликавање. Обрнуто, ако је дато линеарно пресликавање $L : X_1 \rightarrow \mathcal{L}(X_2; Y)$, онда је са $B(x_1, x_2) = L(x_1)(x_2)$ дефинисано билинеарно пресликавање $B : X_1 \times X_2 \rightarrow Y$. Ова пресликавања имају исту норму:

$$\begin{aligned} \|B\| &= \sup\{\|B(x_1, x_2)\| \mid \|x_1\| = \|x_2\| = 1\} \\ &= \sup\{\sup\{L(x_1)(x_2) \mid \|x_2\| = 1\} \mid \|x_1\| = 1\} \\ &= \sup\{\|L(x_1)\| \mid \|x_1\| = 1\} = \|L\|. \end{aligned}$$

Индукцијом, добијамо следеће тврђење: Постоји линеарни изоморфизам векторских простора

$$\Phi : \mathcal{L}(X_1, \dots, X_n; Y) \rightarrow \mathcal{L}(X_1, \dots, X_k; \mathcal{L}(X_{k+1}, \dots, X_n; Y))$$

који чува норму.

(149) Нека су $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ нормирани векторски простори над пољем $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ или \mathbb{R} . Ако је простор Y Банахов (тј. комплетан), онда је и нормирани векторски простор $\mathcal{L}(X; Y)$ уведен у (145) Банахов. Специјално, дуални простор $X^* = \mathcal{L}(X; \mathbb{K})$ сваког (не обавезно комплетног) простора је комплетан.

Доказ: Нека је L_n Кошијев низ у $\mathcal{L}(X; Y)$. Онда за свако $\varepsilon > 0$ постоји n_0 са својством

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow \|L_n - L_m\| \leq \varepsilon,$$

где је $\|\cdot\|$ норма уведена у (145). Тада је за свако $x \in X$ $\|L_n(x) - L_m(x)\|_Y \leq \varepsilon\|x\|_X$, па је $L_n(x)$ Кошијев низ у Y . Због комплетности, овај низ конвергира; означимо његову граничну вредност са $L_\infty(x)$. Из $L_n(\lambda x + \mu y) = \lambda L_n(x) + \mu L_n(y)$ и непрекидности сабирања и множења скаларом следи $L_\infty(\lambda x + \mu y) = \lambda L_\infty(x) + \mu L_\infty(y)$, па је L_∞ линеарно пресликавање. Остаје још да се докаже да је оно непрекидно. Из Кошијевог услова $\|L_n(x) - L_m(x)\|_Y < \varepsilon\|x\|_X$, преласком на лимес кад $m \rightarrow \infty$, добијамо $\|L_n(x) - L_\infty(x)\|_Y < \varepsilon\|x\|_X$, одакле, помоћу неједнакости троугла, следи

$$\|L_\infty(x)\|_Y \leq \varepsilon\|x\|_X + \|L_n(x)\|_Y \leq (\varepsilon + \|L_n\|)\|x\|_X.$$

Пошто је сваки Кошијев низ ограничен, важи $\|L_n\| < C < +\infty$, па је $\|L_\infty(x)\|_Y < (\varepsilon + C)\|x\|_X$. На основу (146) то значи да је $L_\infty \in \mathcal{L}(X; Y)$. Из $\|L_n(x) - L_\infty(x)\|_Y < \varepsilon\|x\|_X$ следи да L_n конвергира ка L_∞ и у норми простора $\mathcal{L}(X; Y)$. Тиме је доказ завршен.

Из доказаног тврђења, уз помоћ (148), следи да је простор вишеллинеарних пресликавања $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_n; Y)$ Банахов ако је Y Банахов.

- (150) Нека је S скуп са филтером \mathcal{F} , $A, B \in \mathcal{F}$, Y нормирани векторски простор, $f : A \rightarrow Y$, $g : B \rightarrow Y$.

Слабе асимптотске релације. $f \preceq g \Leftrightarrow f =_{\mathcal{F}} \phi g$ за неку ограничену функцију $\phi : C \rightarrow \mathbb{R}$, и $C \in \mathcal{F}$. Друга ознака: $f = O(g)$.

Другим речима,

$$f \preceq g \Leftrightarrow (\exists M > 0) \|f\| \leq_{\mathcal{F}} M \|g\|.$$

Ако је ово испуњено, каже се да је пресликавање f *потчињено* пресликавању g . Помоћу релације потчињености изводи се релација *слабе асимптотске еквивалентности*:

$$f \asymp g \Leftrightarrow f \preceq g \wedge g \preceq f.$$

Јаке асимптотске релације. $f \ll g \Leftrightarrow f =_{\mathcal{F}} \phi g$ за неку функцију $\phi : C \rightarrow \mathbb{R}$, $C \in \mathcal{F}$ за коју је $\lim_{\mathcal{F}} \phi = 0$. Друга ознака: $f = o(g)$.

Другим речима,

$$f \ll g \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) \|f\| \leq_{\mathcal{F}} \varepsilon \|g\|.$$

Ако је ово испуњено, каже се да је пресликавање f *занемарљиво* у односу на пресликавање g . Помоћу релације занемарљивости дефинише се релација *јаке асимптотске еквивалентности*:

$$f \sim g \Leftrightarrow f - g \ll g \Leftrightarrow f = g + o(g).$$

- (151) **Задачак:** Нека су S, T , $\mathcal{F}_S, \mathcal{F}_T$ и φ као у (29). Ако је Y нормирани простор, $U, V \in \mathcal{F}_S$ и $f : U \rightarrow Y$, $g : V \rightarrow Y$ доказати да важи

$$\begin{aligned} f \preceq_{\mathcal{F}_S} g &\Rightarrow f \circ \varphi \preceq_{\mathcal{F}_T} g \circ \varphi \\ f \ll_{\mathcal{F}_S} g &\Rightarrow f \circ \varphi \ll_{\mathcal{F}_T} g \circ \varphi \\ f \asymp_{\mathcal{F}_S} g &\Rightarrow f \circ \varphi \asymp_{\mathcal{F}_T} g \circ \varphi \\ f \sim_{\mathcal{F}_S} g &\Rightarrow f \circ \varphi \sim_{\mathcal{F}_T} g \circ \varphi. \end{aligned}$$

- (152) Неке појмове који су изведени из алгебарских и тополошких својстава реалне праве (као што су већ споменути изводи и бесконачне суме) можемо да пренесемо у нормиране просторе.

- (153) Ако су X и Y нормирани векторски простори, $A \subset X$ отворен подскуп, $f : A \rightarrow Y$ непрекидно пресликавање и $x_0, \eta \in X$, *извод у правцу вектора η* у тачки x_0 је

$$D_{\eta}f(x_0) := \lim_{\mathbb{R} \ni h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(x_0 + h\eta) - f(x_0))$$

(ако лимес на десној страни постоји). Приметимо да се вектори x_0 и η појављују у несиметричним улогама²¹, слично као што се код диференцијала функције једне променљиве тачка у којој се посматра диференцијал и прираштај појављују у различитим улогама. Ако је $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}$ и $\eta = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ јединични вектор дуж x_j -осе, онда се $D_{\eta}f(x_0)$ означава са $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$ и назива *парцијалним изводом* функције f по променљивој x_j .

²¹Под одређеним претпоставкама (којима се дефинише диференцијабилност у нормираним просторима), $D_{\eta}f(x_0)$ је линеарно по η , али не и по x_0 .

Специјално, ако је $X = \mathbb{R}$, $A =]a, b[$, непрекидно пресликавање $\gamma :]a, b[\rightarrow Y$ се назива *параметризованом кривом* у Y . Ако је $\eta = \mathbf{i}$ јединични вектор у \mathbb{R} , извод

$$\frac{d\gamma}{dt}(t_0) := D_{\mathbf{i}}\gamma(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)}{h},$$

(уколико лимес на десној страни постоји) се назива *тангентним вектором* на параметризовану криву γ у тачки $\gamma(t_0)$. За саму криву тада кажемо да је *глатка* у тој тачки. За $\frac{d\gamma}{dt}$ се користи још и ознака $\dot{\gamma}$. Слика $\gamma(A)$ се назива *непараметризованом кривом*, тангентни вектор на непараметризовану криву у тачки $\gamma(t_0)$ је сваки вектор колинеаран са $\frac{d\gamma}{dt}(t_0)$. Параметризована крива γ је *регуларна* у тачки $\gamma(t_0)$ ако је њен тангентни вектор у тој тачки различит од нуле. Параметарска једначина тангенте на криву $\gamma(A)$ у регуларној тачки $\gamma(t_0)$ је

$$\alpha(t) = \gamma(t_0) + \frac{d\gamma}{dt}(t_0)(t - t_0).$$

Крива је *регуларна* ако је регуларна у свакој својој тачки.

Непараметризована крива је глатка ако има неку глатку параметризацију.

Задатак: Нацртати криву $x^2 = y^3$ у \mathbb{R}^2 и доказати да је она глатка (иако нема тангенту у тачки $(0, 0)$). Овај задатак показује да треба разликовати график глатке функције од глатке криве (чак и ако је та крива график функције).

Хомеоморфизам $\varphi :]\alpha, \beta[\rightarrow]a, b[$, такав да су φ и φ^{-1} диференцијабилна пресликавања, назива се *дифеоморфизмом*; композиција $\gamma \circ \varphi$ назива се *глатком репараметризацијом* криве γ . **Задатак:** Нека је $s_0 = \varphi^{-1}(t_0)$ и $\eta = \varphi'(s_0)\mathbf{i}$. Доказати да из теореме о смени променљиве у лимесу (58) следи да је

$$\frac{d(\gamma \circ \varphi)}{ds}(s_0) = D_{\eta}\gamma(t_0).$$

Специјално, за $\varphi(s) = \lambda s$, $\lambda \in \mathbb{R}$, следи линеарност извода $D_{\eta}f$ по η за функцију f чији је домен интервал у \mathbb{R} .

Ако је $Y = \mathbb{R}^n$ еуклидски простор и $\gamma :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^n$ глатка крива у њему задата са $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, онда је

$$\frac{d\gamma}{dt} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt} \right).$$

Ово следи из (95).

(154) *Дужина криве.* Нека је $\gamma : [a, b] \rightarrow Y$ глатка крива у нормираном векторском простору $(Y, \|\cdot\|)$. Њена дужина је величина

$$l(\gamma) := \int_a^b \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| dt.$$

Ако је крива γ регуларна, онда је

$$t \mapsto \int_a^t \left\| \frac{d\gamma}{du} \right\| du$$

дифеоморфизам интервала $[a, b]$ на $[0, l(\gamma)]$, јер је (због регуларности) његов први извод $\|d\gamma/dt\| > 0$. Овај дифеоморфизам дефинише репараметризацију криве параметром

$$s = \int_a^t \left\| \frac{d\gamma}{du} \right\| du$$

који се назива *природним параметром* регуларне криве γ . Из $ds/dt = \|d\gamma/dt\|$ следи да је

$$\mathbf{T}(s) := \frac{d\gamma}{ds} = \frac{d\gamma}{dt} \frac{dt}{ds}$$

јединични вектор за свако $s \in [0, l(\gamma)]$, зовемо га *јединичним тангентним вектором* на криву γ . Величина

$$\kappa(s_0) = \left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds}(s_0) \right\|$$

назива се *кривином криве* γ у тачки $\gamma(s_0)$. Ако је \mathbf{T} дато као функција произвољног параметра t , тј.

$$\mathbf{T}(t) = \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\|^{-1} \frac{d\gamma}{dt},$$

онда је

$$\kappa(t_0) = \left\| \frac{d\gamma}{dt}(t_0) \right\|^{-1} \left\| \frac{d\mathbf{T}}{dt}(t_0) \right\|.$$

Реципрочна величина $1/\kappa(t_0)$ назива се *полупречником кривине*.

Задатак: У којим тачкама елипса $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ има највећу, а у којим најмању кривину? Доказати да навојница $x = \rho \cos t$, $y = \rho \sin t$, $z = ct$ има константну кривину. Ако је c фиксирано, за које ρ се достиже највећа вредност кривине (тј. око ког цилиндра се навојница задатог вертикалног нагиба највише закривљује)?

Нека је γ регуларна крива у тродимензионом еуклидском простору \mathbb{R}^3 . Диференцирањем израза $\|\mathbf{T}(s)\|^2 = \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = 1$ по природном параметру s и применом Лајбницевог правила добијамо

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} \cdot \mathbf{T} = 0,$$

што значи да је вектор $d\mathbf{T}/ds$ ортогоналан на T . Из дефиниције кривине следи да је

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\kappa} \frac{d\mathbf{T}}{ds}$$

јединични вектор, зовемо га *јединичним нормалним вектором* криве γ .

Раван разапета векторима \mathbf{T} и \mathbf{N} назива се *оскулаторном равни* криве γ .

Векторски производ јединичних вектора је јединични вектор нормалан на њих; вектор

$$\mathbf{B} := \mathbf{T} \times \mathbf{N}$$

називамо *јединичним бинормалним вектором* криве γ ; \mathbf{B} је вектор оскулаторне равни те криве. Вектори \mathbf{T} , \mathbf{N} , \mathbf{B} дефинишу у свакој тачки криве ортогонални координатни систем; овај систем се назива *Френеовим системом*. Диференцирањем последњег израза, којим је дефинисан вектор \mathbf{B} , по природном параметру s добијамо (применом Лајбницевог правила на билинеарно множење \times)

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} \times \mathbf{N} + \mathbf{T} \times \frac{d\mathbf{N}}{ds} = \mathbf{T} \times \frac{d\mathbf{N}}{ds},$$

јер је $\mathbf{N} \times \mathbf{N} = 0$. Одатле следи да је вектор $d\mathbf{B}/ds$ ортогоналан на \mathbf{T} . Диференцирањем израза $\|\mathbf{B}\|^2 = 1$ закључујемо да је он ортогоналан и на \mathbf{B} , па је пропорционалан вектору \mathbf{N} :

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N}.$$

Коефицијент τ у претходној формули називамо *торзијом* криве γ .

Задатак: Израчунати торзију навојнице из претходног задатка.

Кривина криве мери њено одступање од праве (крива је права ако и само ако је $\kappa = 0$), а торзија њено одступање од равни (крива лежи у једној равни ако и само ако је $\tau = 0$).

- (155) *Теореме о средњој вредности.* За реалне функције реалне променљиве важе добро познате теореме о средњој вредности. За функције са вредностима у векторском простору, оне не важе. Нпр, по Роловој теореме за реалну функцију $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, непрекидну на $[a, b]$ и диференцијабилну на $]a, b[$, за коју је $f(a) = f(b)$, постоји $c \in]a, b[$ за које је $f'(c) = 0$. За комплексне функције (или, општије, за функције са вредностима у нормираном векторском простору) ова теорема не важи, као што показује пример функције

$$f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(t) = \cos t + i \sin t,$$

која задовољава услов $f(0) = f(2\pi)$, али f' нема нула.

Задатак: Како смо онда закључивали у (45)?

Задатак: Функција $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ је дефинисана са $f(t) = (0, 0)$ за $-1 \leq t \leq 0$ и $f(t) = (t^2 \sin(1/t), t^2 \cos(1/t))$ за $0 < t \leq 1$. Доказати да је функција f диференцијабилна на $] -1, 1[$, али да $f'(\cdot) - 1, 1[$ није повезан скуп. Упоредити ово са Дарбуовом теоремом, по којој извод сваке *реалне* диференцијабилне функције слика интервал на интервал.

Претходни задатак је још једна манифестација чињенице да теореме о средњој вредности не важе за функције са вредностима у векторском простору димензије веће од 1: Дарбуова теорема је последица Кошијеве (или Лагранжеве) теореме о средњој вредности.

Теореме о средњој вредности за функције са вредностима у нормираном векторском простору могу да се уопште на следећи начин. Сетимо се да по Кошијевој теореме о средњој вредности за функције

$g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ које су непрекидне на $[a, b]$ и диференцијабилне на $]a, b[$ важи

$$(g(b) - g(a))h'(c) = (h(b) - h(a))g'(c)$$

за неко $c \in]a, b[$. Специјално, одавде следи

$$|h'| \leq |g'| \Rightarrow |h(b) - h(a)| \leq |g(b) - g(a)|.$$

Ова неједнакост се, у извесном виду, преноси на функције са вредностима у векторском простору. Прецизније, важи следеће тврђење.

Нека је $(Y, \|\cdot\|)$ нормирани векторски простор, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ограничен и затворен интервал, $P \subset [a, b]$ највише пребројив скуп и $f : [a, b] \rightarrow Y$ непрекидно пресликавање које има десни извод

$$D_+f(t_0) := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$$

у свим тачкама скупа $[a, b] \setminus P$. Нека је $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна функција која има десни извод $D_+\varphi$ у свим тачкама скупа $[a, b] \setminus P$. Ако важи

$$\|D_+f(t)\| \leq D_+\varphi(t) \quad \text{за све } t \in [a, b] \setminus P,$$

онда је

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \varphi(b) - \varphi(a).$$

Ово тврђење важи и ако се десни извод замени левим изводом.

Доказ: Нека је $P = \{p_1, p_2, \dots\}$ скуп P поређан у низ међусобно различитих тачака и нека је

$$\psi_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{за } a \leq t \leq p_n \\ 1, & \text{за } p_n < t \leq b. \end{cases}$$

Из $0 \leq \psi_n \leq 1$ следи да је низ $s_n(t) = \sum_{k=1}^n 2^{-k} \psi_k(t)$ Кошијев (јер је $\sum_{k=1}^n 2^{-k} = 2(1 - 2^{-(n+1)})^{-1}$ конвергентан, па тиме и Кошијев), па конвергира. Нека је

$$\psi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(t).$$

Тиме је дефинисана функција $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ која је растућа (јер су такве ψ_k) и задовољава $\psi(a) = 0$, $0 \leq \psi \leq 1$.

За произвољно $\varepsilon > 0$ дефинишимо скуп A_ε као скуп свих $t \in [a, b]$ са особином

$$\|f(s) - f(a)\| \leq \varphi(s) - \varphi(a) + \varepsilon(s - a) + \varepsilon\psi(s) \quad \text{за све } s \in [a, t].$$

Скуп A_ε је непразан (јер садржи тачку a) и ограничен (јер је садржан у ограниченем интервалу $[a, b]$), па постоји

$$c = \sup A_\varepsilon.$$

По дефиницији, A_ε је интервал. Ако у горњој неједнакости, којом је дефинисан скуп A_ε , пређемо на лимес кад $s \rightarrow c-$, добијемо

$$\|f(c) - f(a)\| \leq \varphi(c) - \varphi(a) + \varepsilon(c - a) + \varepsilon\psi(c-).$$

Пошто је ψ растућа, важи $\psi(c-) \leq \psi(c)$, па $c \in A_\varepsilon$, тј. $A_\varepsilon = [a, c]$. Ако докажемо да је $c = b$, пошто је $\varepsilon > 0$ произвољно, доказ је завршен.

Претпоставимо да је $c < b$. Разматрамо два случаја: $c \notin P$ и $c \in P$.

Ако је $c \in [a, b] \setminus P$, онда из $\|D_+ f(c)\| \leq D_+ \varphi(c) < D_+ \varphi(c) + \varepsilon$ следи да је за неко $\delta > 0$

$$\left\| \frac{f(s) - f(c)}{s - c} \right\| < \frac{\varphi(s) - \varphi(c)}{s - c} + \varepsilon$$

за све $s \in [c, c + \delta]$. Одатле следи да је за $c \leq s \leq c + \delta$

$$\begin{aligned} \|f(s) - f(a)\| &\leq \|f(s) - f(c)\| + \|f(c) - f(a)\| \\ &< \varphi(s) - \varphi(a) + \varepsilon(s - a) + \varepsilon\psi(c) \\ &\leq \varphi(s) - \varphi(a) + \varepsilon(s - a) + \varepsilon\psi(s) \end{aligned}$$

(јер ψ расте, па је $\psi(c) \leq \psi(s)$). Одатле следи $c + \delta \in A_\varepsilon$ што је контрадикција, јер је $c = \sup A_\varepsilon$.

Претпоставимо сада да је $c = p_n \in P$. Из непрекидности функција f и φ у тачки c следи да за неко $\delta > 0$ важи

$$\|f(s) - f(c)\| < \varphi(s) - \varphi(c) + \varepsilon 2^{-n}$$

за све $s \in]c, c + \delta]$. Одатле следи исти закључак као у претходном случају, јер је сада за $c < s \leq c + \delta$

$$\begin{aligned} \|f(s) - f(a)\| &\leq \|f(s) - f(c)\| + \|f(c) - f(a)\| \\ &< \varphi(s) - \varphi(a) + \varepsilon(c - a) + \varepsilon(\psi(c) + 2^{-n}) \\ &< \varphi(s) - \varphi(a) + \varepsilon(s - a) + \varepsilon\psi(s), \end{aligned}$$

У последњем кораку смо користили неједнакости $c - a < s - a$ и $\psi(c) + 2^{-n} < \psi(s)$. Друга неједнакост важи зато што је $\psi(s) = \sum_{p_n < s} 2^{-k}$, па је $\psi(s) - \psi(c) = \sum_{c \leq p_k < s} 2^{-k} \geq 2^{-n}$, јер је $p_n = c$.

Дакле, $c < b$ у оба случаја води до контрадикције, одакле следи $c = b$, што је и требало доказати.

Неке последице су:

- Нека је $I \subset \mathbb{R}$ интервал, $P \subset I$ највише пребројив скуп, Y нормирани векторски простор и $f : I \rightarrow Y$ непрекидна функција таква да је $D_+ f(t) = 0$ за све $t \in I \setminus P$. Тада је f константна на I . Ово следи применом доказаног тврђења на произвољан ограничен и затворен интервал $[a, b] \subset I$ и функцију $\varphi \equiv 0$.
- Нека је $f : I \rightarrow Y$ пресликавање интервала $I \subset \mathbb{R}$ у нормирани векторски простор Y . Пресликавање $F : I \rightarrow Y$ се назива *примитивном функцијом* функције f ако је F непрекидно на I и диференцијабилно на скупу $I \setminus P$ за неки највише пребројив скуп P , и ако је $F'(t) = f(t)$ за све $t \in I \setminus P$. Из претходне напомене следи да је примитивна функција функције f једнозначна до на константу. Скуп свих примитивних функција функције f назива се њеним *неодређеним интегралом* и означава са $\int f(x) dx$.

Задатак: Доказати да свака монотона функција $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ има примитивну функцију.

- Ако је $I \subset \mathbb{R}$ интервал, $P \subset I$ највише пребројив скуп, Y нормирани векторски простор и $f : I \rightarrow Y$ непрекидна функција таква

да постоји $D_+f(t)$ за све $t \in [a, b] \setminus P$. Тада је њена Липшицова константа $\text{Lip } f = \sup_{t \in I \setminus P} \|D_+f(t)\|$. Ово следи применом доказаног тврђења на $\varphi(t) = Ct$ ради доказа еквиваленције

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M|x - y| \Leftrightarrow \sup_{t \in I \setminus P} \|D_+f(t)\| \leq M$$

и задатка у (43).

- *Лопиталова правила.* Нека је $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $P \subset [a, b]$ највише пребројив, $c \in P$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ функције које су непрекидне на $[a, b] \setminus \{c\}$ и имају десни извод на $[a, b] \setminus P$. Претпоставимо да је φ монотона и различита од нуле у околини тачке c и да је

$$\lim_{t \rightarrow c+0} f(t) = 0 = \lim_{t \rightarrow c+0} \varphi(t) \quad \text{или} \quad \lim_{t \rightarrow c+0} |\varphi(t)| = \infty.$$

Тада важи

$$\lim_{t \rightarrow c+0} \frac{f'_+(t)}{\varphi'_+(t)} = \alpha \in \mathbb{C} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow c+0} \frac{f(t)}{\varphi(t)} = \alpha$$

(ако је f реална функција, онда тврђење важи и за $\alpha = \pm\infty$). Тврђење важи и ако се десни лимес замени левим лимесом $\lim_{t \rightarrow c-0}$, или лимесом $\lim_{t \rightarrow c}$.

Доказ тврђења следи из импликације

$$|f'_+| \leq_{\mathcal{F}_c^0} C\varphi'_+ \Rightarrow |f| \leq_{\mathcal{F}_c^0} 2C|\varphi|$$

(где је \mathcal{F}_c^0 филтер пробушених околينا²²) која се изводи применом доказаног тврђења. Из те импликације следи да се асимптотске релације (150), а тиме и лимеси, преносе са f'_+ и φ'_+ на f и φ (специјално, из $f'_+ \ll \varphi'_+$, уз претпоставке теореме, следи $f \ll \varphi$, а одатле, поновном применом на $f - \varphi$ у улози f , закључујемо да из $f'_+ \sim \alpha\varphi'_+$ следи $f \sim \alpha\varphi$).

- Ако је функција $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ диференцијабилна у некој пробушеној околини тачке c , из доказаног тврђења следи да је

$$f'_+(c) = \lim_{t \rightarrow c+0} f'(t)$$

ако лимес на десној страни постоји. Последица: први извод нема прекиде прве врсте.

Задатак: Нека функција $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ има непрекидан десни извод у свакој тачки интервала $[a, b]$. Доказати да је f диференцијабилна.

Упутство: Ако у претходном тврђењу узмемо $\varphi(x) = Mx$, а затим $\varphi(x) = -tx$ и $-f$ уместо f добијамо следеће тврђење – ако је $m \leq f'_+(x) \leq M$, онда је

$$m(x - y) \leq f(x) - f(y) \leq M(x - y).$$

²²Пробушене околине на левој страни импликације се узимају у релативној топологији скупа $[c, b] \setminus P$ ако се ради о десном лимесу и, аналогно томе, за леви лимес $[a, c] \setminus P$ или за лимес $[a, b] \setminus P$.

Ако применимо ову неједнакост на интервал $[x - h, x]$ добијамо

$$\min_{-h \leq t \leq x} f'_+(t) \leq \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} \leq \max_{-h \leq t \leq x} f'_+(t)$$

Искористити сада непрекидност десног извода у тачки x и доказати (преласком на лимес кад $h \rightarrow 0_+$) да постоји леви лимес и да је једнак десном.

(156) *Ред* у нормираној Абеловој групи $(G, +, \|\cdot\|)$ је пар низова (a_n, s_n) у G који задовољавају

$$s_0 = a_0 \quad \text{и} \quad s_{n+1} = s_n + a_{n+1},$$

или, еквивалентно, $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Низ a_n назива се *општим чланом* реда, а чланови низа s_n његовим *парцијалним сумама*. Ред је *конвергентан* ако је конвергентан низ s_n ; лимес $s_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ назива се *сумом реда* и означава са

$$s_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Сваки од низова a_n, s_n једнозначно одређује други, па уместо „ред (a_n, s_n) ” кажемо и „ред $\sum a_n$ ”.

Скуп свих низова a_n у G таквих да ред $\sum a_n$ конвергира означавамо са $cs(G)$; овај скуп је група, а

$$\sum_{n=0}^{\infty} : cs(G) \rightarrow G$$

хомоморфизам група. Ако ред не конвергира, кажемо да он *дивергира*.

Специјално ред у групи $(\mathbb{C}, +)$, или *комплексни ред* је уопштење сабирања комплексних бројева на бесконачне фамилије. У мултипликативној групи $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ уместо термина ред користимо термин *комплексни производ*; то је пар низова (p_n, z_n) у \mathbb{C} такав да је

$$p_0 = z_0 \quad \text{и} \quad p_{n+1} = p_n \cdot z_n.$$

Ако бесконачни производ конвергира, његов лимес означавамо са

$$p_\infty = \prod_{n=0}^{\infty} z_n.$$

Ред у нормираном векторском простору $(X, \|\cdot\|)$ је ред у његовој нормираној Абеловој групи $(X, +, \|\cdot\|)$. Скуп $cs(X)$ свих низова x_n у X за које ред $\sum x_n$ конвергира је у овом случају векторски простор, а

$$\sum_{n=0}^{\infty} : cs(X) \rightarrow X$$

линеарно пресликавање.

(157) Ако су X и Y нормирани векторски простори, $L : X \rightarrow Y$ непрекидно линеарно пресликавање и $\sum a_n$ конвергентан ред у X , онда је

$$L\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} L(a_n).$$

- (158) Из $a_n = s_n - s_{n-1}$ следи да општи члан конвергентног реда тежи нули ($a_\infty = s_\infty - s_\infty$). *Остатак* конвергентног реда је низ $r_n = s_\infty - s_n$; остатак такође тежи нули (односно, неутралу групе²³).

Из $r_n = s_\infty - s_n = \sum_{k=n}^{\infty} (s_{k+1} - s_k)$ следи да је остатак конвергентног реда и сам сума неког реда.

- (159) *Хармонијски ред* у \mathbb{R} је ред $\sum \frac{1}{n}$. Овај ред дивергира, јер је $s_{2n} - s_n > 1/2$, па низ s_n није Кошијев. Видимо да потребан услов за конвергенцију реда да му општи члан тежи нули није и довољан.
- (160) Ако за низ $a : \mathbb{N} \rightarrow X$ важи $a =_{\mathcal{F}_\mathbb{N}} 0$, онда је ред $\sum a_n$ конвергентан и

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n \in \text{supp } a} a_n,$$

где је $\text{supp } a := \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}$ (носач пресликавања a). Сума на десној страни је коначна (редови уопштавају коначне суме).

- (161) Ако је $a =_{\mathcal{F}_\mathbb{N}} b$, онда ред $\sum a_n$ конвергира ако и само ако конвергира ред $\sum b_n$. Ово тврђење следи из претходног: $a =_{\mathcal{F}_\mathbb{N}} b \Rightarrow a - b =_{\mathcal{F}_\mathbb{N}} 0$, па ред $\sum (a_n - b_n)$ конвергира. Пошто је $a = b + (a - b)$ и $b = a - (a - b)$, следи закључак тврђења.
- (162) Ред $\sum a_n$ је конвергентан ако и само ако је конвергентан ред $\sum a_{n-k}$, $n \geq k$ и при томе важи

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} = \sum_{n=k-m}^{\infty} a_{n+m}$$

(конвергенција не зависи од индекса општег члана).

- (163) *Уопштени асоцијативни закон*. Ако је $\sum a_n$ конвергентан ред у нормираном векторском простору и $\varphi : \mathbb{N} \nearrow \mathbb{N}$ растућа функција таква да је $\varphi(0) = 0$, онда конвергира и ред са општим чланом

$$b_n = \sum_{k=\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1} a_k$$

и важи

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n, \quad \text{тј.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1} a_k \right).$$

Доказ следи из чињенице да подниз конвергентног низа конвергира ка истом лимесу.

Обрнуто правило не важи: ред $1-1+1-1+1-1+\dots$ дивергира, јер општи члан $(-1)^n$ не тежи нули, док је $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots = 0$.

- (164) *Редови са позитивним члановима* су редови $\sum x_n$ где су x_n ненегативни реални бројеви²⁴ ($x_n \geq 0$). За ред са позитивним члановима следећи услови су еквивалентни:

- (а) ред $\sum x_n$ је конвергентан;
- (б) низ $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$ је ограничен одозго;
- (в) низ $s_{\varphi(n)}$ је ограничен одозго за неко растуће $\varphi : \mathbb{N} \nearrow \mathbb{N}$;

²³Специјално, општи члан и остатак бесконачног реда у \mathbb{C} теже ка 0, а остатак и општи члан бесконачног производа у $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ тежи ка 1.

²⁴Или, општије, ненегативни елементи комплетне тотално уређене групе.

(г) ред $\sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1} x_n)$ је конвергентан за неко растуће $\varphi : \mathbb{N} \nearrow \mathbb{N}$, $\varphi(1) = 1$.

Доказ: Еквиваленција **(а)** \Leftrightarrow **(б)** следи из чињенице да је, због $x_n \geq 0$, s_n растући низ ($s_n = s_{n-1} + x_n \geq s_{n-1}$), а растући низ је конвергентан ако и само ако је ограничен одозго (10). Импликација **(б)** \Rightarrow **(в)** следи из чињенице да је подниз ограниченог низа ограничен. За **(б)** \Leftarrow **(в)** приметимо да је $\varphi(n) \geq n$. Ако је $\sup_n s_{\varphi(n)} = M < +\infty$, онда је $s_n \leq s_{\varphi(n)} \leq M$ (пошто низ s_n расте), па је s_n ограничен одозго. Импликација **(а)** \Rightarrow **(г)** је уопштени асоцијативни закон (163). Парцијалне суме реда у **(г)** су

$$\sum_{k=1}^n (s_{\varphi(k+1)} - s_{\varphi(k)}) = s_{\varphi(n+1)} - s_{\varphi(1)}.$$

Ако $s_{\varphi(n)}$ конвергира, он је ограничен, па је ограничен и s_n . Одатле следи импликација **(а)** \Leftarrow **(г)**.

(165) *Поредбени принцип за редове са позитивним члановима.* Ако су x_n, y_n низови у \mathbb{R} и $0 \leq_{\mathcal{F}_N} x_n \leq_{\mathcal{F}_N} y_n$, онда

- ако $\sum y_n$ конвергира, онда и $\sum x_n$ конвергира;
- ако $\sum x_n$ дивергира, онда и $\sum y_n$ дивергира.

Доказ следи из чињенице да су парцијалне суме реда са позитивним члановима растући низови и става да монотон низ конвергира ако и само ако је ограничен.

(166) Нека је $x_n \geq 0$ опадајући позитиван низ и $\varphi : \mathbb{N} \nearrow \mathbb{N}$ строго растуће пресликавање такво да је $\varphi(n+1) - \varphi(n) \leq \varphi(n) - \varphi(n-1)$. Тада ред $\sum x_n$ конвергира ако и само ако конвергира ред $\sum (\varphi(n+1) - \varphi(n))x_{\varphi(n)}$.

Доказ: Из услова тврђења следи да је $(\varphi(n+1) - \varphi(n))x_{\varphi(n)} \geq 0$. Из (164) следи да је ред $\sum x_n$ конвергентан ако и само ако је конвергентан ред $\sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{k=\varphi(n)+1}^{\varphi(n+1)} x_k)$. Из $x_n \searrow$ и $\varphi \nearrow$ следи

$$\sum_{k=\varphi(n)+1}^{\varphi(n+1)} x_k \leq (\varphi(n+1) - \varphi(n))x_{\varphi(n)},$$

па, на основу поредбеног принципа за редове са позитивним члановима, из конвергенције реда $\sum (\varphi(n+1) - \varphi(n))x_{\varphi(n)}$ следи конвергенција реда $\sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{k=\varphi(n)+1}^{\varphi(n+1)} x_k)$. За обрнуту импликацију приметимо да је

$$\begin{aligned} (\varphi(n+1) - \varphi(n))x_{\varphi(n)} &\leq (\varphi(n) - \varphi(n-1))x_{\varphi(n)} \\ &= \sum_{k=\varphi(n-1)+1}^{\varphi(n)} x_{\varphi(n)} \leq \sum_{k=\varphi(n-1)+1}^{\varphi(n)} x_k, \end{aligned}$$

па доказ опет следи из поредбеног принципа.

(167) Специјални случај (166), за $\varphi(n) = 2^n$ је тврђење да, ако је x_n опадајући низ позитивних бројева, ред $\sum x_n$ конвергира ако и само ако конвергира ред $\sum 2^n x_{2^n}$.

(168) *Уопштени хармонијски ред.* Ред $\sum \frac{1}{n^p}$ конвергира ако и само ако је $p > 1$. Заиста, за $p > 0$ ово следи из (167), док за $p \leq 0$ општи члан не тежи нули.

(169) Нека је σ_n низ у нормираном векторском простору X . Тада је ред $\sum (\sigma_{n+1} - \sigma_n)$ конвергентан ако и само ако је конвергентан низ σ_n .

Исто важи и за ред $\sum(\sigma_n - \sigma_{n+1})$. Доказ следи из $\sum_{k=n_0}^n (\sigma_{n+1} - \sigma_n) = \sigma_{n+1} - \sigma_{n_0}$. Ако постоји $\lim_{n \rightarrow \infty}$ на левој страни, постојаће и на десној.

(170) Из (169) следи да ред $\sum(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ дивергира, иако његов општи члан тежи нули, па је услов у (158) неопходан, али не и довољан за конвергенцију реда.

(171) *Геометријски ред.* Нека је $q \in \mathbb{C}$ и $|q| < 1$. Из (169) следи

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} q^k = \sum_{k=n_0}^{\infty} \left(\frac{q^k}{1-q} - \frac{q^{k+1}}{1-q} \right) = \frac{q^{n_0}}{1-q}.$$

За $|q| \geq 1$ геометријски ред дивергира, јер му општи члан не тежи нули.

(172) **Дефиниција:** Ред $\sum a_n$ у нормираном векторском простору *апсолутно конвергира* ако конвергира ред $\sum \|a_n\|$ у \mathbb{R} .

(173) **Задатак:** Нека је z_n низ комплексних бројева. Доказати да ред $\sum z_n$ апсолутно конвергира ако и само ако апсолутно конвергирају $\sum \operatorname{Re} z_n$ и $\sum \operatorname{Im} z_n$.

(174) **Задатак:** Доказати да ако ред $\sum a_n$ у (157) апсолутно конвергира, онда апсолутно конвергира и ред $\sum L(a_n)$ на десној страни једнакости.

(175) Простор низова a_n у нормираном простору $(X, \|\cdot\|)$ таквих да ред $\sum \|a_n\|^p$ конвергира означавамо са $l^p(X)$. За $p \geq 1$ простор $l^p(X)$ је нормирани векторски простор, са нормом

$$\|a\|_p := \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\|^p \right)^{1/p}.$$

Скуп ограничених низова је нормирани векторски простор са униформном нормом $\|\cdot\|_{\infty}$, овај простор се некад означава са $b(X)$ или $l^{\infty}(X)$. Пресликавање

$$\sum_{n=0}^{\infty} : l^1(X) \rightarrow X$$

је непрекидно линеарно пресликавање нормираних простора. **Задатак:** Доказати да за $1 \leq p < q \leq \infty$ важи $l^p(X) \subset l^q(X)$ и да је ова инклузија строга (тј. да је $l^q(X) \setminus l^p(X) \neq \emptyset$).

(176) Ако је $(X, \|\cdot\|)$ Банахов простор, онда сваки апсолутно конвергентан ред у X конвергира.

Доказ: Нека је $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Из неједнакости троугла (136) следи да је, за $n > m$, $\|s_n - s_m\| \leq \sum_{k=m+1}^n \|a_k\|$. Пошто је ред $\sum \|a_n\|$ конвергентан, низ његових парцијалних сума је Кошијев. Из последње неједнакости онда следи да је и низ s_n Кошијев, што због комплетности значи да је конвергентан.

(177) **Задатак:** Доказати да је у Банаховом простору $(X, \|\cdot\|)$ сваки низ ограничене варијације $a \in bv(X)$ конвергентан и да његова гранична вредност a_{∞} задовољава неједнакост $\|a_{\infty}\| \leq \operatorname{var}(a)$.

(178) *Уопштени комутативни закон.* Нека је $(X, \|\cdot\|)$ Банахов простор и $\sum a_n$ апсолутно конвергентан ред у X . Тада је за сваку пермутацију

$\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ и ред $\sum a_{\sigma(n)}$ апсолутно конвергентан и важи

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}.$$

Доказ: Ако је $n \in \mathbb{N}$ и $m \geq \max\{\sigma(1), \dots, \sigma(n)\}$, онда је

$$\sum_{k=1}^n \|a_{\sigma(k)}\| \leq \sum_{k=1}^m \|a_k\|,$$

па из апсолутне конвергенције реда $\sum a_n$ следи да је (растући) низ $\sum_{k=1}^n \|a_{\sigma(k)}\|$ ограничен, дакле и конвергентан. Тиме је доказан први део тврђења. За доказ једнакости $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ приметимо да из Кошијевог услова следи да постоји n_0 такво да за $n > n_0$ и свако p важи

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \|a_k\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \sum_{k=n+1}^{n+p} \|a_{\sigma(k)}\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Нека је $n_1 := \max\{\sigma(1), \dots, \sigma(n_0), \sigma^{-1}(1), \dots, \sigma^{-1}(n_0)\}$. Тада је $n_1 \geq n_0$ и

$$\{\sigma(1), \dots, \sigma(n_0)\} \subset \{1, \dots, n_1\}, \quad \{1, \dots, n_0\} \subset \{\sigma(1), \dots, \sigma(n_1)\},$$

па се, за $n > n_1$, у следећој разлици сабирци за индексе мање од n_0 скраћују и добијамо

$$\left\| \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^n a_{\sigma(k)} \right\| \leq \sum_{k=n_0+1}^n \|a_k\| + \sum_{k=n_0+1}^n \|a_{\sigma(k)}\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Преласком на $\lim_{n \rightarrow \infty}$ добијамо $\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} \right\| \leq \varepsilon$. Пошто је $\varepsilon > 0$ произвољно, одатле следи доказ.

(179) Ред $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ конвергира, али не конвергира апсолутно. Заиста, низови

$$s_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \quad \text{и} \quad s_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

су монотони и ограничени ($s_{2n} \nearrow, s_{2n+1} \searrow, s_{2n} \leq s_{2n-1}$), па конвергирају; из $s_{2n+1} = s_{2n} - \frac{1}{2n+1}$ следи да конвергирају ка истој граничној вредности s_{∞} , па s_n конвергира. Овај ред не конвергира апсолутно, јер хармонијски ред дивергира. Из

$$s_n < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

следи $s_{\infty} < 5/6$. Нека је t_n n -та парцијална сума следеће пермутације овог реда

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \frac{1}{13} + \dots$$

Из

$$\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} > 0$$

следи

$$\frac{5}{6} = t_3 < t_6 < t_9 < \dots,$$

па низ t_n не конвергира ка s_∞ јер је $s_\infty < 5/6$. Дакле, уопштени комутативни закон не важи за неапсолутно конвергентне редове.

- (180) **Задатак:** Користећи идеју из (179), доказати *Лајбницов тест*: ако је b_n опадајући низ реалних бројева и $b_n \rightarrow 0$, онда ред $\sum (-1)^{n-1} b_n$ конвергира.
- (181) Контрапример из (179) уопштава *Риманова теорема*: Ако је $\sum c_n$ неапсолутно конвергентан ред у \mathbb{R} и $-\infty \leq a_\infty \leq b_\infty \leq +\infty$, онда постоји пермутација $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ таква да је

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n c_{\sigma(k)} = a_\infty, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n c_{\sigma(k)} = b_\infty.$$

Доказ: из конвергенције $\sum c_n$ следи $c_n \rightarrow 0$, па и $c_{\sigma(n)} \rightarrow 0$ за сваку пермутацију σ . Нека су c_n^+ и c_n^- позитивни и негативни део, тј.

$$c_n^\pm = \frac{1}{2}(|c_n| \pm c_n).$$

Из $\sum |c_n| = +\infty$ следи $\sum c_n^+ = \sum c_n^- = +\infty$, тј, ако је

$$P_+ = \{n \mid c_n \geq 0\}, \quad P_- = \{n \mid c_n < 0\},$$

онда је $\sum_{P_+} c_n = +\infty$, $\sum_{P_-} c_n = -\infty$. Специјално, скупови P_\pm су бесконачни. Нека су a_n и b_n низови у \mathbb{R} такви да је $a_n < b_n$, $a_n \rightarrow a_\infty$, $b_n \rightarrow b_\infty$. Пермутацију σ дефинишемо на следећи начин. Нека је $\sigma(1) = \min P_+$. Ако је $t_1 := c_{\sigma(1)} < b_1$, дефинишемо $\sigma(2) = \min P_+ \setminus \{\sigma(1)\}$. Ако је $t_2 := c_{\sigma(1)} + c_{\sigma(2)} < b_2$ дефинишемо $\sigma(3) = \min P_+ \setminus \{\sigma(1), \sigma(2)\}$. Продужимо тај поступак док не добијемо $t_k > b_k$, што ће се свакако десити после коначно много корака, јер $\sum_{P_+} c_n = +\infty$. Дефинишемо онда $\sigma(k+1) = \min P_-$ и поновимо сличан поступак, узимајући елементе скупа P_- све док не добијемо $t_m < a_m$, када се поново враћамо на скуп P_+ . Пошто су скупови P_\pm бесконачни, овим поступком је добро дефинисано $\sigma(n)$ за све $n \in \mathbb{N}$. Из $c_n \rightarrow 0$, $a_n \rightarrow a_\infty$, $b_n \rightarrow b_\infty$ следи закључак теореме.

- (182) Из Риманове теореме и уопштеног комутативног закона (178) следи да је ред у \mathbb{R} апсолутно конвергентан ако и само ако свака његова пермутација конвергира ка истој вредности (кажемо да је такав ред *комутативно конвергентан*). У општем случају, за редове у Банаховом простору, ова еквиваленција не важи.

Ни сама Риманова теорема не важи за редове у Банаховим просторима, па чак ни за редове у \mathbb{C} . На пример, нека је z_n низ комплексних бројева, такав да $\sum \operatorname{Re} z_n$ неапсолутно конвергира, а $\sum \operatorname{Im} z_n$ апсолутно конвергира ка збиру s_∞ . Тада ред $\sum z_n$ неапсолутно конвергира, али сума сваке његове пермутације припада правој $\operatorname{Im} z = s_\infty$ (јер $\sum \operatorname{Im} z_n$ апсолутно конвергира), тако да се не може наћи пермутација која конвергира ка произвољном комплексном броју.

Међутим, важи следеће уопштење Риманове теореме на комплексне редове: Ако је $\sum z_n$ ред у \mathbb{C} који неапсолутно конвергира, онда постоји права L у комплексној равни, таква да за свако $\zeta \in L$ постоји пермутација $\sum z_{\sigma(n)}$ која конвергира ка ζ . Општије, ако је $\sum x_n$ ред у нормираном простору \mathbb{R}^k који је неапсолутно конвергентан, онда

постоји афини потпростор $A \subset \mathbb{R}^k$, такав да за сваку његову тачку постоји пермутација $\sum x_{\sigma(n)}$ која јој конвергира.

- (183) Нека је Λ највише пребројив скуп. Фамилија вектора $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ у Банаховом простору $(X, \|\cdot\|)$ је *апсолутно збирљива* ако је или Λ коначан, или за неку бијекцију $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \Lambda$ ред $\sum a_{\sigma(n)}$ апсолутно конвергира. Из (178) следи да је ова дефиниција независна од избора бијекције σ . За збир овог реда користимо и ознаку $\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda$.
- (184) Нека је $(X, \|\cdot\|)$ Банахов простор, Λ пребројив скуп и $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ апсолутно збирљива фамилија вектора у X . Нека је $\Lambda = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_k$, где су $\Lambda_1, \dots, \Lambda_k$ непразни и дисјунктни. Тада су за све $j \in \{1, \dots, k\}$ фамилије $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda_j}$ апсолутно збирљиве и важи

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda = \sum_{j=1}^k \left(\sum_{\lambda \in \Lambda_j} a_\lambda \right).$$

Довољно је (на основу принципа индукције) доказати тврђење за $k = 2$. Свака од фамилија $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda_j}$ је апсолутно збирљива јер је $\sum_{\lambda \in \Lambda} \|a_\lambda\| \geq \sum_{\lambda \in \Lambda_j} \|a_\lambda\|$. Ако су Λ_1 и Λ_2 коначни скупови, доказ следи из (163) и (178). Ако је Λ_1 коначан, а Λ_2 бесконачан, онда можемо да одаберемо бијекцију $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \Lambda$ такву да је $\sigma(\{1, \dots, n_0\}) = \Lambda_1$. За $n > n_0$ парцијална сума реда $\sum a_{\sigma(n)}$ је

$$s_n = \sum_{j=1}^{n_0} a_{\sigma(j)} + \sum_{j=n_0+1}^n a_{\sigma(j)},$$

па преласком на лимес завршавамо доказ. На крају, ако су Λ_1 и Λ_2 бесконачни, можемо да изаберемо бијекцију σ тако да слика парне бројеве у Λ_1 , а непарне у Λ_2 ; доказ онда следи из

$$\sum_{j=1}^{2n} a_{\sigma(j)} = \sum_{j=1}^n (a_{\sigma(2j-1)} + a_{\sigma(2j)}) = \sum_{j=1}^n a_{\sigma(2j-1)} + \sum_{j=1}^n a_{\sigma(2j)}$$

после преласка на лимес кад $n \rightarrow \infty$.

- (185) Уопштење тврђења (184) је следеће: Нека је Λ пребројив скуп и нека је $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ апсолутно збирљива фамилија вектора Банаховог простора X . Нека су $\{\Lambda_\varsigma\}_{\varsigma \in S}$ дисјунктни подскупови скупа Λ , такви да је $\Lambda = \bigcup_{\varsigma \in S} \Lambda_\varsigma$. Тада је за свако $\varsigma \in S$ фамилија $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda_\varsigma}$ апсолутно збирљива па су вектори $b_\varsigma = \sum_{\lambda \in \Lambda_\varsigma} a_\lambda$ добро дефинисани. Фамилија вектора $\{b_\varsigma\}_{\varsigma \in S}$ је апсолутно збирљива и важи

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda = \sum_{\varsigma \in S} \left(\sum_{\lambda \in \Lambda_\varsigma} a_\lambda \right).$$

Доказ: Пошто је скуп Λ пребројив, S је највише пребројив. Случај коначног S је тврђење (184); претпоставимо зато да је S бесконачан. Збир апсолутно збирљиве фамилије не зависи од пермутација њених чланова, па можемо на прозвољан начин да нумеришемо елементе пребројивог скупа S . Другим речима, можемо да претпоставимо да је $S = \mathbb{N}$ и $\Lambda = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$ разлагање скупа Λ на дисјунктне подскупове. Доказ да је свака од фамилија $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda_j}$ апсолутно збирљива је исти

као у (184). Нека је

$$b_j = \sum_{\lambda \in \Lambda_j} a_\lambda.$$

Треба да докажемо да ред $\sum b_n$ апсолутно конвергира и да је

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Применом (184) на $\Lambda_1, \dots, \Lambda_k$ добијамо

$$\sum_{j=1}^k \|b_j\| \leq \sum_{j=1}^k \left(\sum_{\lambda \in \Lambda_j} \|a_\lambda\| \right) \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} \|a_\lambda\|,$$

одакле, због апсолутне збирљивости фамилије $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ следи да су парцијалне суме реда $\sum \|b_n\|$ ограничене. Будући да се ради о реду са позитивним члановима, то је довољно за закључак да ред конвергира. Да бисмо доказали преостало тврђење, посматрајмо произвољно $\varepsilon > 0$. Из апсолутне збирљивости фамилије $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ следи да постоји коначан скуп $K \subset \Lambda$ такав да важи

$$\sum_{\lambda \in \Lambda \setminus K} \|a_\lambda\| = \sum_{\lambda \in \Lambda} \|a_\lambda\| - \sum_{\lambda \in K} \|a_\lambda\| < \varepsilon.$$

Нека је $m_0 \in \mathbb{N}$ природан број, такав да за важи $K \subset \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_{m_0}$. Тада за све $m \geq m_0$ важи

$$\sum_{\lambda \in \Lambda \setminus (\Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_m)} \|a_\lambda\| \leq \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus K} \|a_\lambda\| < \varepsilon.$$

Из тврђења (184) примењеног на разлагање $\Lambda_1, \dots, \Lambda_m, \Lambda \setminus (\Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_m)$ добијамо

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda = \sum_{\lambda \in \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_m} a_\lambda + \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus (\Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_m)} a_\lambda.$$

Из (184) следи да је први сабирак једнак $\sum_{n=1}^m b_n$, а видели смо да је норма другог мања од ε , па је

$$\left\| \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda - \sum_{n=1}^m b_n \right\| < \varepsilon.$$

Одатле, преласком на лимес кад $m \rightarrow \infty$, завршавамо доказ.

(186) Из тврђења (185) следи да ако је $\{a_{mn}\}_{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ апсолутно збирљива фамилија вектора у Банаховом простору, онда је за свако n ред $\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}$ апсолутно конвергентан, за свако m је ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}$ апсолутно конвергентан, њихови зборови су апсолутно збирљиве фамилије и важи

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} \right) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \right).$$

Овакви редови се називају *двоструким редовима*.

(187) *Уопштени дистрибутивни закон.* Као специјални случај (185) посматрајмо апсолутно конвергентне редове $\sum a_n$ и $\sum b_n$ у комплексној равни \mathbb{C} . *Тензорски производ* низова a и b је двоструки низ²⁵ $(a \otimes b)_{mn} = a_m b_n$. Применом (185) на разлагање скупа $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ на дисјунктне подскупове $\mathbb{N} \times \{n\}$, $n \in \mathbb{N}$, добијамо

$$\begin{aligned} \sum_{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} (a \otimes b)_{mn} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_m b_n \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} a_m \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \right) \\ &= \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \right). \end{aligned}$$

Ово је правило *тензорског множења редова*.

Други начин множења апсолутно конвергентних редова је *Кошијево множење*. Да бисмо га дефинисали, дефинишимо *конволуцију* $a \star b$ низова a и b као низ

$$(a \star b)_n = \sum_{k+j=n} a_k b_j = \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k}.$$

Применом (185) на разлагање скупа $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ на дисјунктне подскупове $L_n = \{(k, j) \mid k + j = n\}$ добијамо

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a \star b)_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j+k=n} a_k b_j.$$

Услов апсолутне конвергенције под којим је ово множење оправдано може и да се ослаби: ако редови $\sum a_n$ и $\sum b_n$ конвергирају, при чему бар један од њих конвергира апсолутно, онда је

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n,$$

Доказ: претпоставимо да ред $\sum a_n$ конвергира апсолутно. Нека је

$$A_n = \sum_{k=0}^n a_k, \quad B_n = \sum_{k=0}^n b_k, \quad C_n = \sum_{k=0}^n c_k, \quad r_n = B - B_n$$

и $A_n \rightarrow A$, $B_n \rightarrow B$ кад $n \rightarrow \infty$. Тада је

$$\begin{aligned} C_n &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \cdots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0) = \\ &= a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \cdots + a_n B_0 = \\ &= a_0 (B - r_n) + a_1 (B - r_{n-1}) + \cdots + a_n (B - r_0) = \\ &= A_n B - (a_0 r_n + a_1 r_{n-1} + \cdots + a_n r_0). \end{aligned}$$

Пошто је $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n B = AB$, остаје још да докажемо да је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_0 r_n + a_1 r_{n-1} + \cdots + a_n r_0) = 0.$$

²⁵Општије, тензорски производ пресликавања $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ и $g : B \rightarrow \mathbb{C}$ је пресликавање $f \otimes g : A \times B \rightarrow \mathbb{C}$ дефинисано са $f \otimes g(a, b) = f(a)g(b)$.

Нека је $\varepsilon > 0$. Пошто ред $\sum a_n$ апсолутно конвергира, сума $A^* = \sum |a_n|$ је коначна. Из конвергенције реда $\sum b_n$ следи да постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да је $|r_n| < \varepsilon(2A^*)^{-1}$ за $n \geq n_0$. Тада је

$$\begin{aligned} |a_0 r_n + \cdots + a_n r_0| &\leq |a_0 r_n + \cdots + a_{n-n_0-1} r_{n_0+1}| + |a_{n-n_0} r_{n_0} \cdots + a_n r_0| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + |a_{n-n_0} r_{n_0} \cdots + a_n r_0|. \end{aligned}$$

Пошто општи члан a_n конвергентног реда $\sum a_n$ тежи нули кад $n \rightarrow \infty$, за фиксирано n_0 тежи нули и последњи члан у претходној формули, тј. постоји $n_1 \in \mathbb{N}$ такво да за $n \geq n_1$ важи

$$|a_{n-n_0} r_{n_0} \cdots + a_n r_0| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Одатле следи доказ тврђења.

(188) Скуп $l^1(\mathbb{C})$ свих комплексних низова c_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) таквих да ред $\sum |c_n|$ конвергира, снабдевен операцијама

$$(a + b)_n = a_n + b_n \quad \text{и} \quad (a \star b)_n = \sum_{k+j=n} a_k b_j$$

је прстен са јединицом $\mathbf{1} = (1, 0, 0, \dots)$. Нула овог прстена је низ $\mathbf{0} = (0, 0, \dots)$. Из (187) следи да је

$$\sum_{n=0}^{\infty} : (l^1(\mathbb{C}), +, \star, \mathbf{0}, \mathbf{1}) \rightarrow (\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$$

хомоморфизам прстена.

Подскуп

$$\mathbb{C}[x] := \{a \in l^1(\mathbb{C}) \mid a = {}_{\mathcal{F}_N} \mathbf{0}\}$$

свих коначних низова $a = (a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$ је потпрстен прстена $l^1(\mathbb{C})$. Прстен $(\mathbb{C}[x], +, \star, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ назива се *прстеном полинома* са комплексним коефицијентима. Слично се дефинише прстен полинома $\mathbb{F}[x]$ са коефицијентима у произвољном пољу \mathbb{F} . Приметимо да елементи овог прстена *нису полиномске функције* – „променљива” x не учествује у дефиницији, већ је само ознака (ради лакшег памћења начина на који се врше операције). Другим речима, $p \in \mathbb{F}[x]$ нема свој домен и кодомен, већ може да се схвати као *формални израз*

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

у коме x има улогу *формалне променљиве*. Тако има смисла говорити о прстену полинома $\mathbb{C}[d/dx]$; овај прстен је изоморфан прстену $\mathbb{C}[x]$.

Задатак: Доказати да је $M = \mathbb{C}[x]$ модул над прстеном $R = \mathbb{C}[d/dx]$ који није изоморфан модулу $M = \mathbb{C}[x]$ над прстеном $R = \mathbb{C}[x]$ (у првом случају „множење скаларом” је диференцирање, а у другом прстен схватамо као модул над самим собом). Доказати да први модул није, а да други јесте коначно генерисан²⁶.

²⁶Модул M над прстеном R је коначно генерисан ако постоје $v_1, \dots, v_n \in M$ такви да свако $v \in M$ може да се представи у облику $v = r_1 v_1 + \cdots + r_n v_n$ за неке $r_1, \dots, r_n \in R$ (нпр. векторски простор коначне димензије је коначно генерисан, улогу v_1, \dots, v_n игра било која његова база).

- (189) *Кошијев тест*: Нека је a_n низ у нормираном векторском простору. Тада важи

$$\begin{aligned} \limsup_{\mathcal{F}_\mathbb{N}} \sqrt[n]{\|a_n\|} < 1 &\Leftrightarrow (\exists q \in]0, 1[) \|a_n\| \leq q^n \\ &\Rightarrow \sum \|a_n\| \text{ конвергира;} \\ \limsup_{\mathcal{F}_\mathbb{N}} \sqrt[n]{\|a_n\|} > 1 &\Rightarrow \text{не постоји } \lim_{\mathcal{F}_\mathbb{N}} a_n \\ &\Rightarrow \sum a_n \text{ дивергира.} \end{aligned}$$

Доказ: Први део тврђења следи из

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} < 1 &\Leftrightarrow \inf_{k \in \mathbb{N}} \sup_{n \geq k} \sqrt[n]{\|a_n\|} < 1 \\ &\Leftrightarrow (\exists k) \sup_{n \geq k} \sqrt[n]{\|a_n\|} < 1 \\ &\Leftrightarrow (\exists k) (\exists q \in]0, 1[) \sup_{n \geq k} \sqrt[n]{\|a_n\|} \leq q \\ &\Leftrightarrow (\exists k) (\exists q \in]0, 1[) (\forall n) n \geq k \Rightarrow \|a_n\| \leq q^n \\ &\Leftrightarrow (\exists q \in]0, 1[) \|a_n\| \leq_{\mathcal{F}_\mathbb{N}} q^n, \end{aligned}$$

па закључак следи из конвергенције геометријског реда и поредбеног принципа за редове са позитивним члановима. Слично

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} > 1 &\Rightarrow (\exists r > 1) \inf_{k \in \mathbb{N}} \sup_{n \geq k} \sqrt[n]{\|a_n\|} > r \\ &\Rightarrow (\exists r > 1) (\forall k) \sup_{n \geq k} \sqrt[n]{\|a_n\|} > r \\ &\Rightarrow (\exists r > 1) (\forall k) (\exists n) n \geq k \wedge \sqrt[n]{\|a_n\|} > r \\ &\Rightarrow (\exists r > 1) \text{ није } \|a_n\| \leq_{\mathcal{F}_\mathbb{N}} r^n \\ &\Rightarrow \text{не постоји } \lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n\|. \end{aligned}$$

- (190) *Даламберов тест*: Нека је a_n низ у нормираном векторском простору и $\|a_n\| >_{\mathcal{F}_\mathbb{N}} 0$ (сви сем коначно много чланова низа су различити од нуле). Тада важи

$$\begin{aligned} \limsup_{\mathcal{F}_\mathbb{N}} \frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|} < 1 &\Leftrightarrow (\exists q \in]0, 1[) \text{ низ } q^{-n} \|a_n\| \text{ опада} \\ &\Rightarrow \sum \|a_n\| \text{ конвергира;} \\ \frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|} \geq_{\mathcal{F}_\mathbb{N}} 1 &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N}) \|a_n\| \text{ расте за } n \geq k \\ &\Rightarrow \sum a_n \text{ дивергира.} \end{aligned}$$

Слично доказу Кошијевог теста, доказ следи из поредбеног принципа и конвергенције геометријског реда; нпр. први део следи из

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|} < 1 &\Leftrightarrow \inf_{k \in \mathbb{N}} \sup_{n \geq k} \frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|} < 1 \\ &\Leftrightarrow (\exists k) \sup_{n \geq k} \frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|} < 1 \\ &\Leftrightarrow (\exists k) (\exists q \in]0, 1[) \sup_{n \geq k} \frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|} \leq q \\ &\Leftrightarrow (\exists k) (\exists q \in]0, 1[) (\forall n) n \geq k \Rightarrow \frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|} \leq \frac{q^{n+1}}{q^n} \\ &\Leftrightarrow (\exists q \in]0, 1[) (\exists k) (q^{-n} \|a_n\|)_{n \geq k} \text{ опада.} \end{aligned}$$

- (191) За низ реалних бројева x_n за који је $x_n >_{\mathcal{F}_\mathbb{N}} 0$ важи

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n},$$

па Кошијев тест даје одговор о конвергенцији и онда кад га Даламберов не даје. Доказ ових неједнакости може да се изведе на следећи

начин. Нека је $u_n = \rho^{-n} x_n$. Тада важи

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} < \rho &\Leftrightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} < 1 \\ &\Leftrightarrow u_n \leq_{\mathcal{F}_{\mathbb{N}}} q^n \text{ за неко } 0 < q < 1 \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < \rho &\Leftrightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \\ &\Rightarrow u_n \leq_{\mathcal{F}_{\mathbb{N}}} q^n \text{ за неко } 0 < q < 1 \end{aligned}$$

(први закључак следи као у доказу Кошијевог, а други као у доказу Даламберовог теста). Одатле закључујемо

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < \rho \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} < \rho,$$

одакле следи крајња десна неједнакост; за леву посматрамо $1/x_n$. И из самог доказа ових неједнакости се види зашто је Кошијев тест моћнији од Даламберовог: тамо где је у првом случају еквиваленција, у другом је импликација.

(192) *Парцијално сумирање*. Нека је a_n низ у нормираном векторском простору и β_n низ скалара и нека је

$$A_n = \sum_{k=0}^n a_k.$$

Из $\beta_k = \beta_{n+1} + \sum_{j=k}^n (\beta_j - \beta_{j+1})$ следи да важи

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k \beta_k &= \sum_{k=0}^n a_k (\beta_{n+1} + \sum_{j=k}^n (\beta_j - \beta_{j+1})) \\ &= A_n \beta_{n+1} + \sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n a_k (\beta_j - \beta_{j+1}) \\ &= A_n \beta_{n+1} + \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^j a_k (\beta_j - \beta_{j+1}), \end{aligned}$$

одакле добијамо

$$\sum_{k=0}^n a_k \beta_k = \sum_{k=0}^n A_k (\beta_k - \beta_{k+1}) + A_n \beta_{n+1}.$$

Ова формула назива се *Абеловом сумационом формулом*.

(193) Нека је a_n низ у Банаховом простору $(X, \|\cdot\|)$ и β_n низ ограничене варијације у пољу скалара (\mathbb{R} или \mathbb{C}).

Дирихлеов тест. Претпоставимо да је

1. низ $\sum_{k=0}^n a_k$ парцијалних сума реда $\sum a_n$ ограничен
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$.

Тада ред $\sum a_n \beta_n$ конвергира и важи

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \beta_n = \sum_{k=0}^{\infty} A_k (\beta_k - \beta_{k+1}).$$

Абелов тест. Претпоставимо да важи

1. ред $\sum a_n$ конвергира и A_{∞} је његов збир
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \beta_{\infty}$.

Тада ред $\sum a_n \beta_n$ конвергира и важи

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \beta_n = \sum_{k=0}^{\infty} A_k (\beta_k - \beta_{k+1}) + A_{\infty} \beta_{\infty}.$$

Доказ: У оба случаја низ A_n је ограничен; $\|A_n\| \leq M$, па је

$$\|A_n(\beta_n - \beta_{n+1})\| \leq M|\beta_n - \beta_{n+1}|.$$

Пошто је β_n низ ограничене варијације, следи да ред $\sum A_n(\beta_n - \beta_{n+1})$ апсолутно конвергира. Због комплетности, из (176) следи да овај ред конвергира. Одатле, на основу Абелове сумационе формуле, следи закључак Дирихлеовог и Абеловог става.

(194) Специјално, из Дирихлеовог теста (193) добијамо још један доказ Лајбницевог теста (180).

(195) Ако низ $f_n : T \rightarrow Y$ функција конвергира у односу на униформну норму $\|\cdot\|_\infty$ онда је он *униформно ограничен*, тј.

$$\sup_n \|f_n\|_\infty = \sup_n \sup_t \|f_n(t)\| < C < +\infty$$

(конвергентан низ у сваком метричком простору је ограничен).

Задатак: Доказати да је низ функција

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n = x^2(x^2 + (1 - nx)^2)^{-1}$$

униформно ограничен и задовољава

$$(\forall x \in [0, 1]) \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0,$$

али да (због $f_n(n^{-1}) = 1$) ниједан његов подниз не конвергира униформно.

(196) *Вајерштрасов став.* Нека је Y Банахов простор над пољем $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, f_n низ у $B_Y(T)$ и c_n низ у \mathbb{R} такав да ред $\sum c_n$ конвергира. Ако је

$$\|f_n\|_\infty \leq_{\mathcal{F}_\mathbb{N}} c_n$$

онда ред $\sum f_n$ апсолутно (по тачкама) и униформно конвергира.

Доказ следи из

$$\left\| \sum_{k=m+1}^n f_k \right\|_\infty \leq \sum_{k=m+1}^n \|f_k\|_\infty \leq \sum_{k=m+1}^n c_k$$

и примене комплетности и Кошијевог услова постојања лimesа.

За низ f_n за који важи $\|f_n\|_\infty \leq c_n$ за неки низ скалара c_n такав да ред $\sum c_n$ конвергира кажемо да *нормално конвергира*. У комплетним просторима нормална конвергенција повлачи и апсолутну (по тачкама) и униформну конвергенцију. Обрнуто не важи.

Задатак: Нека је функција $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана са

$$f_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{за } n \leq t \leq n+1 \\ 0, & \text{за остале } t. \end{cases}$$

Доказати да ред $\sum f_n$ конвергира апсолутно по тачкама и униформно, али не и нормално. Доказати да је овај ред и комутативно конвергентан, али да није апсолутно конвергентан као ред у Банаховом простору $(B_\mathbb{R}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ ограничених реалних функција (видети коментар у (182)).

Задатак: Нека је $f_0 \in C[0, 1]$ и

$$f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t) dt \quad \text{за } x \in [0, 1], n \in \mathbb{N}.$$

Доказати да ред $\sum f_n$ апсолутно и униформно конвергира на $[0, 1]$ и да је

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right| \leq \|f_0\|_{\infty} e^x.$$

- (197) Применом (193) на униформну норму $\|\cdot\|_{\infty}$ добијамо следећа тврђења. Нека је X Банахов простор над пољем скалара $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, T непразан скуп, $f_n : T \rightarrow X$, $F_n = \sum_{k=1}^n f_k$ и $\varphi_n : T \rightarrow \mathbb{K}$ низ такав да је $\varphi_n(t)$ низ униформно ограничене варијације.

Абелов став. Ако ред $\sum f_n$ униформно конвергира, а низ φ_n је униформно ограничен, онда ред $\sum \varphi_n f_n$ униформно конвергира.

Дирихлеов став. Ако је низ F_n униформно ограничен, а низ φ_n униформно тежи нули, онда ред $\sum \varphi_n f_n$ униформно конвергира.

- (198) **Задатак:** Нека је a_n комплексан низ ограничене варијације и нека $a_n \rightarrow 0$. Доказати да редови $\sum a_n \cos(nt)$ и $\sum a_n \sin(nt)$ униформно конвергирају на $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ за свако $\varepsilon > 0$.
- (199) Нека је X Банахов простор над пољем $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ и нека је c_n низ у X . *Степени ред* са центром у $a \in \mathbb{K}$ је ред облика

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n, \quad z \in \mathbb{K}.$$

Чланови низа c_n називају се *коэффицијентима* степеног реда. Лимес

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|c_n\|}} \in \overline{\mathbb{R}}$$

се назива *полупречником конвергенције* степеног реда. Ако постоји (у $\overline{\mathbb{R}}$) лимес низа $\|c_{n+1}\|/\|c_n\|$, онда је

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|c_n\|}{\|c_{n+1}\|};$$

ово следи из (191). Скуп $D = \{z \in \mathbb{K} \mid |z - a| < R\}$ назива се *диск*ом *конвергенције* (за $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), или *интервалом конвергенције* (за $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) степеног реда.

- (200) Степени ред
- апсолутно конвергира на D и дивергира ван \overline{D} ;
 - нормално (специјално, униформно) конвергира на компактним²⁷ подскуповима скупа D ;
 - ако је $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, униформно конвергира на сваком компактном подскупу домена функције $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n$.

²⁷Подскуп $K \subset \mathbb{C}$ је *компактан* ако и само ако је ограничен и затворен; општија дефиниција компактности у метричком простору дата је у (207).

Доказ првог тврђења следи из Кошијевог теста (189). Пошто је сваки компактан подскуп у D садржан у скупу $\{z \mid |z - a| \leq \rho < R\}$, друго тврђење следи из Вајерштрасовог става (196), јер је

$$\sup_{|z-a| \leq \rho} \|c_n(z-a)^n\| = \|c_n\| \rho^n,$$

а за $\rho < R$, на основу Кошијевог теста, ред $\|c_n\| \rho^n$ конвергира. Треће тврђење следи из другог ако је домен функције f отворен интервал $]a-R, a+R[$; ако гранична тачка $a \pm R$ тог интервала припада домену функције f , доказ следи из Абеловог става (197) примењеног на ред са општим чланом

$$c_n(x-a)^n = \frac{(x-a)^n}{(\pm R)^n} \cdot c_n(\pm R)^n.$$

(201) Последица претходног тврђења је да је полупречник конвергенције степеног реда

$$\begin{aligned} R &= \sup\{t \in \mathbb{R} \mid \text{ред } \sum c_n t^n \text{ конвергира}\} \\ &= \sup\{t \in \mathbb{R} \mid \text{ред } \sum |c_n t^n| \text{ конвергира}\} \\ &= \sup\{t \in \mathbb{R} \mid \text{низ } c_n t^n \text{ је ограничен}\}. \end{aligned}$$

Ако степени ред $\sum c_n(z-a)^n$ конвергира у тачки $z = \zeta$, онда он апсолутно конвергира на диску (или, у реалном случају, интервалу) $\{z \mid |z-a| < |\zeta-a|\}$ и униформно конвергира на његовим компактним подскуповима.

Задатак: Доказати ова тврђења, резонујући слично као у (200).

Задатак: Нека су a_n и b_n низови у \mathbb{C} и нека су R_a и R_b полупречници конвергенције степених редова $\sum a_n z^n$ и $\sum b_n z^n$. Доказати да важи:

- Полупречник конвергенције R_1 степеног реда $\sum a_n b_n z^n$ задовољава неједнакост $R_1 \geq R_a R_b$.
- Ако је $b_n \neq 0$, онда полупречник конвергенције R_2 степеног реда $\sum \frac{a_n}{b_n} z^n$ задовољава неједнакост $R_2 \geq \frac{R_a}{R_b}$.
- Полупречник конвергенције R_3 степеног реда $\sum (a_n \star b_n) z^n$, где је $a_n \star b_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ конволуција низова a_n и b_n , задовољава неједнакост $R_3 \geq \min\{R_a, R_b\}$.

(202) Чињеница да степени ред униформно конвергира на компактним подскуповима домена на коме апсолутно конвергира је специфичност степених редова. У општем случају, ове две конвергенције нису повезане. На пример, ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2 + n}{n^2}$$

униформно конвергира на сваком компактном подскупу реалне праве, а не конвергира апсолутно ни у једној тачки $x \in \mathbb{R}$. Ако је

$$a_n(x) = \begin{cases} \sin^2((xn)^{-1}), & \text{за } (n+1)^{-1} \leq x \leq n^{-1} \\ 0 & \text{за остале } x, \end{cases}$$

ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ апсолутно конвергира за све $x \in \mathbb{R}$, али не конвергира униформно.

- (203) Нормирани векторски простор $(X, \|\cdot\|)$ је Банахов ако и само ако сваки апсолутно конвергентан ред у њему конвергира.

Доказ: (\Rightarrow) је доказано у (176); треба доказати само још (\Leftarrow) . Нека је a_n Кошијев низ у X . Због Кошијевог својства, постоји растућа функција $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ таква да је $\|a_{\varphi(n)} - a_{\varphi(n+1)}\| \leq 2^{-n}$. Геометријски ред $\sum 2^{-n}$ конвергира, па ред $\sum (a_{\varphi(n)} - a_{\varphi(n+1)})$ апсолутно конвергира. По претпоставци, он и конвергира. Из $\sum_{k=0}^n (a_{\varphi(k)} - a_{\varphi(k+1)}) = a_{\varphi(0)} - a_{\varphi(n+1)}$ следи да конвергира низ $a_{\varphi(n)}$. Пошто Кошијев низ који има конвергентан подниз и сам конвергира (35), доказ је завршен.

- (204) **Задатак:** Доказати да је нормирани простор Банахов ако и само ако је сваки низ ограничене варијације у њему конвергентан.

- (205) Нормирани векторски простор $(B_Y(T), \|\cdot\|_\infty)$ из (141) је комплетан ако и само ако је Y комплетан.

Доказ: Означимо са $\|\cdot\|$ норму на Y и са $\|\cdot\|_\infty$ униформну норму на $B_Y(T)$.

(\Rightarrow) Нека је $B_Y(T)$ комплетан и нека је $\sum a_n$ апсолутно конвергентан ред у Y . Тада је тај ред конвергентан и у $B_Y(T)$ (при томе свако a_n схватамо као константну функцију $t \mapsto a_n$ из T у Y ; супремум константне функције је управо та константа па је $\|a_n\| = \|a_n\|_\infty$). Пошто је $B_Y(T)$ комплетан, овај ред конвергира у $B_Y(T)$ ка неком пресликавању $f(t) = \sum_{n=0}^\infty a_n$. Пошто за произвољно $t_0 \in T$ важи неједнакост $\|f(t_0) - \sum_{k=0}^n a_k\| \leq \|f(t_0) - \sum_{k=0}^n a_k\|_\infty \rightarrow 0$, следи да ред $\sum a_n$ конвергира и у Y , па је на основу (203) Y комплетан.

(\Leftarrow) Претпоставимо да је Y комплетан. Нека је $\sum f_n$ апсолутно конвергентан ред у $B_Y(T)$. Пошто је $\|f_n(t)\| \leq \|f_n\|_\infty$ за свако $t \in T$, из конвергенције реда $\sum \|f_n\|_\infty$ следи, на основу поредбеног принципа, конвергенција реда $\sum \|f_n(t)\|$. Пошто је Y комплетан, апсолутно конвергентан ред $\sum f_n(t)$ у Y је конвергентан (за свако $t \in T$), па је са $f(t) := \sum_{n=0}^\infty f_n(t)$ добро дефинисана функција $f : T \rightarrow Y$. Из уопштене неједнакости троугла (136) и непрекидности норме следи неједнакост $\|f(t)\| \leq \sum_{n=0}^\infty \|f_n(t)\| \leq \sum_{n=0}^\infty \|f_n\|_\infty$. Преласком на \sup_T из ње добијамо $\|f\|_\infty \leq \sum_{n=0}^\infty \|f_n\|_\infty < +\infty$, па закључујемо да $f \in B_Y(T)$. Остаје још да докажемо да ред $\sum f_n$ конвергира ка f у $B_Y(T)$, тј. у норми $\|\cdot\|_\infty$. То следи из $f(t) - \sum_{k=0}^n f_k(t) = \sum_{k=n+1}^\infty f_k(t)$, одакле, после примене неједнакости троугла и преласка на \sup_T , добијамо неједнакост $0 \leq \|f - \sum_{k=0}^n f_k\|_\infty \leq \sum_{k=n+1}^\infty \|f_k\|_\infty$. Последњи израз тежи нули, као остатак конвергентног реда. Тиме је доказ завршен.

- (206) Последица тврђења (205) је да је простор $C[a, b]$ непрекидних функција $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ на ограниченем и затвореном интервалу комплетан у односу на униформну норму. Довољно је доказати да је он затворен у $B_{\mathbb{C}}[a, b]$ ($C[a, b]$ је свакако подскуп простора $B_{\mathbb{C}}[a, b]$ јер је непрекидна функција на затвореном интервалу ограничена). Нека је f_n низ у $C[a, b]$ и нека $f_n \rightarrow f_\infty \in B_{\mathbb{C}}[a, b]$, тј. $\|f_n - f_\infty\|_\infty \rightarrow 0$. Треба доказати да је $f_\infty \in C[a, b]$, тј. да је функција f_∞ непрекидна у произвољној тачки $t_0 \in [a, b]$. Нека је $\varepsilon > 0$. Тада постоји n_0 такво да је $\|f_{n_0} - f_\infty\|_\infty < \varepsilon/3$ и $\delta > 0$ такво да је, за $t \in]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$, $|f_{n_0}(t) - f_{n_0}(t_0)| < \varepsilon/3$ (јер је $f_{n_0} \in C[a, b]$). Доказ следи из

$$|f_\infty(t) - f_\infty(t_0)| \leq |f_\infty(t) - f_{n_0}(t)| + |f_{n_0}(t) - f_{n_0}(t_0)| + |f_{n_0}(t_0) - f_\infty(t_0)|.$$

Овиме смо доказали да униформни лимес чува непрекидност у тачки.

Може се поставити питање да ли униформни лимес чува и својство *прекидности* у тачки; одговор је негативан: низ

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{за } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{за } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

функција $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ које су прекидне у свакој тачки униформно конвергира ка функцији $f_\infty(x) \equiv 0$ која је непрекидна у свакој тачки.

- (207) *Компактност.* Запажање о комплетности простора $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ може да се уопшти (са истим доказом) ако се затворени интервал $[a, b]$ у (206) замени *компактним метричким простором* M . **Дефиниција:** Метрички простор (M, d) је *компактан* ако у њему сваки низ има конвергентан подниз. Из (35) следи да је сваки компактан простор комплетан. Обрнуто није тачно, нпр. \mathbb{R} и \mathbb{C} су комплетни, али нису компактни. Из Болцано – Вајерштрасове теореме следи да је подскуп скупа \mathbb{C} компактан ако и само ако је ограничен и затворен. Непрекидна функција на компактном скупу је ограничена, па је униформна норма на $C(M)$ добро дефинисана. Доказ: претпоставимо да је $f : M \rightarrow N$ непрекидно пресликавање компактног метричког простора (M, d_M) у метрички простор (N, d_N) . Претпоставимо да f није ограничено, тј. да $f(M)$ није садржано ни у једној лопти у N . Тада за свако n постоји $x_n \in M$ тако да $f(x_n) \notin B[a; n]$, где је $a \in N$ фиксирана тачка. Због компактности, x_n има подниз $x_{\varphi(n)}$ који конвергира ка неком $x_\infty \in M$, а због непрекидности $f(x_{\varphi(n)}) \rightarrow f(x_\infty)$. То значи да, почев од неког n_0 , сви чланови низа $f(x_{\varphi(n)})$ налазе у некој лопти $B[x_\infty; \varepsilon]$. Пошто је, за довољно велико m , $B[x_\infty; \varepsilon] \subset B[a; m]$, добили смо контрадикцију са претпоставком $f(x_n) \notin B[a; n]$.
- (208) У доказу (206) комплетности простора $C[a, b]$ непрекидних функција $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ користили смо компактност интервала $[a, b]$ и комплетност простора \mathbb{C} .

Задатак: Показати да се на исти начин доказује следеће тврђење: Нека је $C_Y(M)$ простор непрекидних пресликавања $f : M \rightarrow Y$ компактног метричког простора (M, d) у нормирани векторски простор $(Y, \|\cdot\|)$ са униформном нормом

$$\|f - g\|_\infty = \sup_M \|f(x) - g(x)\|.$$

Ако је Y Банахов, онда је $C_Y(M)$ комплетан.

- (209) Ако су M и N метрички простори, $K \subset M$ компактан и $f : M \rightarrow N$ непрекидно пресликавање, онда је $f(K)$ компактан. Ово следи из чињенице да непрекидна функција комутира са лимесом низа.
- (210) *Носач функције* $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ је затворење скупа $f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$, тј. скуп

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in M \mid f(x) \neq 0\}}.$$

Ако је (M, d) метрички простор, скуп непрекидних функција $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ са компактним носачем означава се са $C_c(M)$.

Задатак: Доказати да је норма $\|\cdot\|_\infty$ добро дефинисана на $C_c(M)$. Дати пример (некомпактног) простора M таквог да нормирани простор $(C_c(M), \|\cdot\|_\infty)$ није комплетан.

- (211) **Задатак:** Нека је M компактан метрички простор, Y нормирани векторски простор, f_n низ који конвергира у нормираном векторском простору $(C_Y(M), \|\cdot\|_\infty)$ и $g : Y \rightarrow \mathbb{C}$ непрекидна функција. Доказати да низ $g \circ f_n$ конвергира у простору $(C_C(M), \|\cdot\|_\infty)$.
- (212) Компактан подскуп метричког простора је затворен. Подскуп компактног простора је компактан ако и само ако је затворен. Подскуп простора \mathbb{R}^n (са било којом од метрика d_p) је компактан ако и само ако је ограничен и затворен²⁸. Доказ ових тврђења следи из карактеризације затворености помоћу низова и дефиниције компактности.

Задатак: Нека је на реалној правој \mathbb{R} дефинисана метрика

$$d(x, y) = \frac{|y - x|}{1 + |y - x|}.$$

Да ли је скуп $[1, +\infty[$ ограничен у овом метричком простору? Да ли је он затворен? Да ли је он компактан? Који су одговори на ова питања ако се уместо реалне праве посматрају проширене реалне праве $\overline{\mathbb{R}}$ са метрикама из последњег примера у (14)?

- (213) **Задатак:** Нека је M скуп речи српског језика дужине n и нека је, за $x, y \in M$, $d(x, y)$ број места у речи x и y на којима је различито слово. Доказати да је (M, d) метрички простор. Да ли је овај простор компактан?
- (214) **Задатак:** Нека је (M, d) компактан метрички простор и x_n низ у M који има само једну тачку нагомилавања. Доказати да x_n конвергира. Примером показати да ово не мора да важи у метричком простору који није компактан.
- (215) Ако је $f : M \rightarrow Y$ непрекидно пресликавање компактног метричког простора (M, d) у нормирани векторски простор $(Y, \|\cdot\|)$, онда реална функција $x \mapsto \|f(x)\|$ достиже максимум на M . У противном би функција $x \mapsto (\sup_{t \in M} \|f(t)\| - \|f(x)\|)^{-1}$ била добро дефинисана, непрекидна и неограничена, што је контрадикција. То, између осталог, значи да униформну норму на простору $C(M)$ непрекидних комплексних (или реалних) функција на компактном скупу можемо да дефинишемо и као $\|f\|_\infty = \max_{x \in M} |f(x)|$.
- (216) **Задатак:** Нека је K компактан, а F затворен подскуп метричког простора (M, d) и нека је $F \cap K = \emptyset$. Доказати да је $d(K, F) > 0$. Дати пример два затворена дисјунктна подскупа F, G таква да је $d(F, G) = 0$. Доказати да, ако је F затворен скуп, за свако $x \notin F$ важи $d(x, F) > 0$.
- (217) Нека је (M, d) компактан метрички простор и $f : M \rightarrow M$ пресликавање које чува метрику: $f^*d = d$. Тада је f бијекција.

²⁸Ова еквиваленција следи из Болцано-Вајерштрасове теореме, и представља специфичност еуклидског простора; у општем случају, ограничен и затворен подскуп метричког простора не мора да буде компактан

Доказ: Из $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ следи да је пресликавање f непрекидно и инјективно, докажимо још да је оно сурјективно. Претпоставимо да постоји $x_0 \in M \setminus f(M)$. Нека је $\varepsilon > 0$. Низ $x_n := f^n(x_0)$ има конвергентан подниз, па постоје природни бројеви m, n , такви да је $m > n$ и $d(f^m(x_0), f^n(x_0)) < \varepsilon$. Одатле следи да је $d(f^{m-n}(x_0), x_0) < \varepsilon$, што значи да је $d(x_0, f(M)) < \varepsilon$. Пошто је $\varepsilon > 0$ произвољно, следи да је $d(x_0, f(M)) = 0$. Пошто је $f(M)$ компактан, одатле следи да је $x_0 \in f(M)$.

Задатак: Нека су $l^p(X)$ као у (175). Доказати да пресликавање

$$S : l^p(X) \rightarrow l^p(X), \quad S(\{x_1, x_2, x_3, \dots\}) = \{0, x_1, x_2, x_3, \dots\}$$

чува метрику, али није бијекција.

- (218) **Задатак:** Нека је (M, d) компактан метрички простор и $f : M \rightarrow M$ пресликавање за које важи $d(f(x), f(y)) \geq d(x, y)$ за све $x, y \in M$. Доказати да је $f(M) = M$ и да је f изометрија.

Упутство: За $x, y \in M$ посматрати низове $f^n(x)$ и $f^n(y)$. Аргументујући слично као у (217) закључити

$$d(\{f^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}, x) = 0 \quad \text{и} \quad d(\{f^n(y) \mid n \in \mathbb{N}\}, y) = 0.$$

Доказати да одатле следи да постоје поднизови²⁹ такви да $f^{\varphi(n)}(x) \rightarrow x$, $f^{\varphi(n)}(y) \rightarrow y$. Из претпоставки закључити да је

$$d(x, y) \leq d(f(x), f(y)) \leq d(f^{\varphi(n)}(x), f^{\varphi(n)}(y)) \rightarrow d(x, y),$$

одакле следи $d(x, y) = d(f(x), f(y))$, па закључак следи из (217).

- (219) Пошто из (35) следи да је сваки компактан простор комплетан, Банахова теорема о фиксној тачки важи и у компактним просторима. Али, пошто је компактност јаче својство, она се може ослабити – свако пресликавање $f : M \rightarrow M$ компактног метричког простора (M, d) које задовољава

$$x \neq y \Rightarrow d(f(x), f(y)) < d(x, y)$$

има јединствену фиксну тачку.

Доказ: Непрекидна функција $x \mapsto d(x, f(x))$ на компактном простору M достиже минимум у некој тачки x_0 . У тој тачки је $f(x_0) = x_0$, јер би у противном било

$$x_0 \neq f(x_0) \Rightarrow d(f(x_0), f(f(x_0))) < d(x_0, f(x_0)),$$

па x_0 не би била тачка у којој се достиже минимум. Фиксна тачка x_0 је јединствена, јер би из $f(x_1) = x_1$ за $x_1 \neq x_0$ следило

$$d(x_1, x_0) = d(f(x_1), f(x_0)) < d(x_1, x_0),$$

што је немогуће.

Задатак: Доказати да претходно тврђење важи и ако се услов компактности простора M замени слабијим условом да је $f(M)$ компактан.

²⁹Један од начина да се покаже да и за x и за y може да се изабере исто $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ је да се $(f^n(x), f^n(y))$ посматра као низ у метричком простору $(M \times M)$ са метриком $d_1 := \pi_1^* d + \pi_2^* d$ који конвергира ка (x, y) . Пресликавање $f_1(x, y) = (f(x), f(y))$ на $M \times M$ задовољава исту неједнакост које задовољава f , па и на њега може да се примени резонување из (217).

- (220) **Задатак:** Нека је $K \subset \mathbb{R}^k$ компактан скуп. Доказати да је функција $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна ако и само ако је њен график

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in K\} \subset \mathbb{R}^{k+1}$$

компактан скуп (метрике на \mathbb{R} , \mathbb{R}^k и \mathbb{R}^{k+1} су стандардне еуклидске метрике).

- (221) Нека су $\|\cdot\|_0$ и $\|\cdot\|$ две норме на векторском простору коначне димензије над пољем $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Тада је $\|\cdot\|_0 \asymp \|\cdot\|$.

Доказ: Сваки векторски простор коначне димензије је изоморфан неком \mathbb{K}^n . Због транзитивности \asymp можемо да претпоставимо да је $\|\cdot\|$ стандардна еуклидска норма на \mathbb{K}^n ($\|x\| = (|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2)^{1/2}$). Нека је e_1, \dots, e_n стандардна база ($e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ итд). Тада је, за $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

$$\|x\|_0 \leq |x_1| \|e_1\|_0 + \dots + |x_n| \|e_n\|_0 \leq C \|x\|.$$

У последњој неједнакости је искоришћена Коши – Шварцова неједнакост и чињеница да су e_j фиксирани вектори, па је $\sum \|e_j\|_0^2$ константа. Одатле следи да је $\|\cdot\|_0$ Липшицово пресликавање у односу на норму $\|\cdot\|$, па је непрекидно. Пошто је јединична сфера $S = \{x \mid \|x\| = 1\}$ ограничен (садржан у лопти полупречника 2) и затворен (инверзна слика затвореног скупа $\{0\}$ при непрекидном пресликавању $x \mapsto \|x\| - 1$) скуп, она је компактна³⁰, па непрекидна функција $\|\cdot\|_0$ на њој достиже минимум и максимум, тј.

$$\alpha \leq \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\|_0 = \frac{1}{\|x\|} \|x\|_0 \leq \beta,$$

што је и требало доказати.

- (222) Из претходног тврђења и (83) следи да су свака два векторска простора исте *коначне* димензије тополошки изоморфна. Из Линеарне алгебре знамо да су свака два таква простора и алгебарски изоморфна.
- (223) **Задатак:** Ако је $L : X \rightarrow Y$ инјективно линеарно пресликавање и $\|\cdot\|$ норма на Y , доказати да је $x \mapsto \|L(x)\|$ норма. Извести одатле, уз помоћ (221), још један доказ тврђења да је свако линеарно пресликавање $L : V \rightarrow W$ нормираних коначнодимензионих векторских простора V, W непрекидно (видети (145)).
- (224) Непрекидна бијекција $f : M \rightarrow N$ компактног метричког простора M на метрички простор N је хомеоморфизам. Доказ: ако је $F \subset M$ затворен, онда је он и компактан, па је $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ компактан, дакле затворен.

Пример непрекидне бијекције која није хомеоморфизам (без претпоставке о компактности): $M = \mathbb{R}$ са дискретном метриком, $N = \mathbb{R}$ са стандардном метриком, $f : M \rightarrow N$ било која бијекција (нпр. $f(x) = x$).

³⁰Можемо, не умањујући општост, да претпоставимо да је једна од норми стандардна еуклидска норма (а знамо да је у њој сваки ограничен и затворен подскуп компактан), јер ако докажемо да је свака норма еквивалентна еуклидској, тиме смо доказали да су сваке две норме еквивалентне.

Приметимо да ако у овом примеру уместо \mathbb{R} узмемо $[0, 1]$, долазимо до истог закључка о пресликавању f . Одатле видимо да компактност *кодомена* није довољна за закључак да је f хомеоморфизам (домен $[0, 1]$ није компактан у дискретној метрици).

Још један пример даје следећи задатак.

Задатак: Доказати да је

$$f : [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{S}^1, \quad f(t) = \cos t + i \sin t$$

непрекидна бијекција које није хомеоморфизам и наћи тачке прекида инверзног пресликавања.

- (225) Скуп $B \subset M$ у метричком простору (M, d) је ε -мрежа скупа $A \subset M$ ако за свако $a \in A$ постоји $b \in B$ тако да је $d(a, b) < \varepsilon$. Скуп A је *тотално ограничен* (или *прекомпактан*) ако за свако $\varepsilon > 0$ има коначну ε -мрежу.
- (226) Метрички простор (M, d) је тотално ограничен ако и само ако сваки низ у њему има Кошијев подниз.

Доказ: (\Rightarrow) Нека је M тотално ограничен, и a_n низ у M . Ако је скуп $\{a_1, a_2, \dots\}$ коначан, низ a_n очигледно испуњава тврђење. Претпоставимо да је тај скуп бесконачан. Нека је B коначна 1 -мрежа скупа M . Тада се за неко b_1 у лопти $B]b_1; 1[$ налази бесконачно много чланова низа a_n . Нека је $\varphi(1) = \min\{k \mid a_k \in B]b_1; 1[\}$. Поновимо овај поступак за $1/2$ -мрежу скупа $B]b_1; 1[$; тада постоји лопта $B]b_2; 1/2[\subset B]b_1; 1/2[$ која садржи бесконачно много чланова низа a_n , нека је $\varphi(2) = \min\{k > \varphi(1) \mid a_k \in B]b_2; 1/2[\}$. Индуктивно – ако је конструисано $\varphi(n)$, и $B]b_n; 1/n[$, тада се у некој лопти $B]b_{n+1}; 1/(n+1)[$ налази бесконачно много чланова низа a_n ; дефинишемо $\varphi(n+1) = \min\{k > \varphi(n) \mid a_k \in B]b_{n+1}; 1/(n+1)[$. Низ $a_{\varphi(n)}$ је Кошијев, јер је

$$d(a_{\varphi(n)}, a_{\varphi(m)}) < 1/\min\{m, n\} \rightarrow 0.$$

(\Leftarrow) Претпоставимо да M није тотално ограничен. Нека је $\varepsilon > 0$. Тада за сваки коначан скуп $A \subset M$ постоји $x \in M$ тако да је $d(x, A) \geq \varepsilon$. Нека је $a_0 \in M$ произвољна тачка. Дефинишимо низ a_n индуктивно. Ако су a_1, \dots, a_n дефинисани, a_{n+1} дефинишемо као произвољан елемент скупа M за који је $d(a_{n+1}, \{a_1, \dots, a_n\}) \geq \varepsilon$. Нека је $m < n$. Тада је $a_m \in \{a_1, \dots, a_{n-1}\}$, па је $d(a_m, a_n) \geq \varepsilon$, што значи да низ a_n нема Кошијев подниз.

- (227) Последица претходног тврђења: Метрички простор је компактан ако и само ако је комплетан и тотално ограничен.
- (228) Подскуп $A \subset M$ у метричком простору (M, d) је *релативно компактан* ако је \bar{A} компактан. Ако је M комплетан, онда је $A \subset M$ релативно компактан ако и само ако је тотално ограничен (доказати!).
- (229) За метрички простор (M, d) су еквивалентни следећи услови:
- M је компактан;
 - Ако је $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ фамилија отворених скупова и $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = M$ (оваква фамилија се назива *отвореним покривањем* скупа M), онда је $U_{\lambda_1} \cup \dots \cup U_{\lambda_k} = M$ за неки коначан скуп $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\} \subset \Lambda$;
 - Ако је $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ фамилија затворених скупова и $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda = \emptyset$, онда је $F_{\lambda_1} \cap \dots \cap F_{\lambda_k} = \emptyset$ за неки коначан скуп $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\} \subset \Lambda$;

(г) Ако је F_n опадајући низ затворених скупова у M и $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$, онда је $F_n = \emptyset$ почев од неког n ;

Доказ: Еквиваленција **(б)** \Leftrightarrow **(в)** следи из $(\cup X)^c = \cap X^c$ и $(\cap X)^c = \cup X^c$. Импликација **(в)** \Rightarrow **(г)** је очигледна, будући да је

$$F_{\lambda_1} \cap \dots \cap F_{\lambda_k} = F_{\max\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}}.$$

За доказ импликације **(г)** \Rightarrow **(а)**, за дати низ a_n дефинишимо опадајући низ затворених скупова

$$F_n = \overline{\{a_n, a_{n+1}, \dots\}}.$$

Из **(г)** следи да је $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$, па постоји $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Из дефиниције затворења скупа следи да је за сваку лопту $B]x_0; 1/n[$

$$B]x_0; 1/n[\cap \{a_k, a_{k+1}, \dots\} \neq \emptyset,$$

па свака таква лопта садржи бесконачно много чланова низа a_n . То нам омогућава да издвојимо подниз $a_{\varphi(n)}$ који конвергира ка x_0 ($\varphi(1)$ узмемо тако да је $a_{\varphi(1)} \in B]x_0; 1[$; ако је дефинисано $\varphi(n)$ онда $\varphi(n+1)$ дефинишемо тако да је $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ и $\varphi(n+1) \in B]x_0; 1/(n+1)[$), што значи да важи **(а)**. Да бисмо доказали да важи импликација **(а)** \Rightarrow **(б)** претпоставимо супротно, да је M компактан а U_λ фамилија отворених скупова која покрива M , али нема коначно потпокривање. Пошто је сваки компактан скуп тотално ограничен, можемо да покријемо M коначним бројем затворених лопти полупречника 1. По претпоставци, бар једна од њих, означимо је са $B]a_1; 1[$, не може да се покрије коначним бројем скупова фамилије U_λ . Пошто је затворена лопта у компактном простору такође компактна, $B]a_1; 1[$ може да се покрије коначним бројем лопти полупречника $1/2$; бар једна од њих, означимо је са $B]a_2; 1/2[$ не може да се покрије коначним бројем скупова фамилије U_λ . Понављањем овог поступка индуктивно дефинишимо низ лопти $B]a_n; 1/2n[$ од којих ни једна не може да се покрије коначним бројем скупова фамилије U_λ . Из конструкције следи да је, за $m > n$, $d(a_n, a_m) < 1/n \rightarrow 0$, па је низ a_n Кошијев. Пошто је M компактан (одакле следи да је и комплетан), $a_n \rightarrow a_\infty$. Пошто фамилија U_λ покрива M , за неко λ_0 је $a_\infty \in U_{\lambda_0}$, а самим тим и $B]a_\infty; \delta[\subset U_{\lambda_0}$ за неко $\delta > 0$ (јер је U_{λ_0} отворен). Из $a_n \rightarrow a_\infty$ следи да је за довољно велико n

$$B]a_n; 1/2n[\subset B]a_\infty; \delta[\subset U_{\lambda_0}$$

за неко k , што је контрадикција, пошто лопте $B]a_n; 1/2n[$ не могу да се покрију са коначно много скупова фамилије U_λ .

- (230) Еквиваленција **(а)** \Leftrightarrow **(б)** из претходног тврђења је *Борел – Лебегова теорема*; она уопштава Борел – Лебегово својство компактних интервала на реалној правој. Та еквиваленција се узима и за дефиницију компактности у тополошким просторима (знамо да у њима није увек дефинисана конвергенција), пошто **(б)** користи само језик топологије.
- (231) **Задатак:** Доказати да скуп $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| \leq 1\}$ није компактан у стандардној еуклидској топологији комплексне равни и наћи неко његово отворено покривање које нема коначно потпокривање.
- (232) **Задатак:** Доказати да је тополошки простор (54) компактан.

- (233) **Задатак:** Користећи Борел–Лебегово својство, доказати да тврђење да је непрекидна функција на компактном метричком простору ограничена (207) важи и за компактне тополошке просторе. Доказати да непрекидна функција $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ на компактном тополошком простору K достиже свој максимум и минимум.
- (234) **Задатак:** Нека је X Хаусдорфов простор, $K \subset X$ компактан и $x \in X \setminus K$. Доказати да постоје отворени подскупови $U, V \subset X$ такви да је

$$x \in U, \quad K \subset V, \quad U \cap V = \emptyset.$$

- (235) **Задатак:** Нека је $\{K_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ фамилија компактних подскупова Хаусдорфовог простора X таква да је

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda = \emptyset.$$

Доказати да постоји коначан подскуп $\Lambda_0 \subset \Lambda$ такав да је

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda_0} K_\lambda = \emptyset.$$

Верзију овог тврђења за *метричке* просторе видели смо у (229).

- (236) **Лебегова лема:** Нека је M компактан метрички простор и $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ његово отворено покривање. Тада постоји $\delta > 0$ са особином да је свака отворена лопта полупречника δ садржана у неком U_λ . Овај број δ назива се *Лебеговим бројем покривача* U_λ .

Доказ: Пошто су U_λ отворени скупови који покривају M , за свако $x \in M$ постоји $\delta_x > 0$ тако да је $B[x; 2\delta_x] \subset U_\lambda$ за неко λ . Фамилија $\{B[x; 2^{-1}\delta_x]_{x \in M}\}$ је отворено покривање компактног простора M па, на основу Борел – Лебегове теореме, постоји коначан скуп $\{x_1, \dots, x_k\}$ такав да фамилија $B[x_1; \delta_{x_1}], \dots, B[x_k; \delta_{x_k}]$ покрива M . Тада број $\delta := \min\{\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_k}\}$ задовољава услове теореме. Заиста, ако је $B[x; \delta]$ лопта лопта полупречника δ , њен центар x припада некој лопти $B[x_j; \delta_{x_j}]$, па је $B[x; \delta] \subset B[x_j; 2\delta_{x_j}]$, а скуп $B[x_j; \delta_{x_j}]$ припада неком U_λ .

- (237) **Канторова теорема:** Непрекидно пресликавање $f : M \rightarrow N$ на компактном метричком простору M је равномерно непрекидно.

Доказ: Ако f није равномерно непрекидно, онда постоје низови a_n и b_n у M такви да $d_M(a_n, b_n) \rightarrow 0$ и $d_N(f(a_n), f(b_n)) > \delta$ за неко фиксирано $\delta > 0$. Преласком на поднизове и позивањем на компактност добијамо поднизове $a_{\varphi(n)}$ и $b_{\varphi(n)}$ који конвергирају и то ка истој граничној вредности (због $d_M(a_n, b_n) \rightarrow 0$). Из непрекидности следи $d_N(f(a_{\varphi(n)}), f(b_{\varphi(n)})) \rightarrow 0$, што је немогуће због $d_N(f(a_n), f(b_n)) > \delta$.

- (238) **Задатак:** Доказати Канторову теорему (237) применом Борел–Лебеговог својства компактних простора. Приметимо да је тај доказ у основи тополошки. Међутим, за дефиницију равномерне непрекидности у тополошким просторима потребна је, сем тополошке, и тзв. *равномерна структура*. Више детаља може да се нађе у [4].
- (239) Метрички простор M је *сепарабилан* ако има пребројив свуда густ подскуп. На пример, \mathbb{R} је сепарабилан јер је $\mathbb{R} = \mathbb{Q}$ и \mathbb{Q} је пребројив.
- (240) **Задатак:** Доказати да је метрички простор M сепарабилан ако и само ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји највише пребројива ε -мрежа у M .

- (241) **Задатак:** Доказати да је скуп тачака у којима функција $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ на сепарабилном метричком простору M има строги локални екстремум³¹ највише пребројив.
- (242) **Задатак:** Нека је $A \subset \mathbb{R}^n$ затворен подскуп. Доказати да постоји функција $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ која је прекидна у свим тачкама скупа A и непрекидна на $\mathbb{R}^n \setminus A$.
- (243) Простор $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ је сепарабилан.

Доказ: Довољно је посматрати реалне функције. Нека је S скуп део по део линеарних функција са рационалним теменима, тј. скуп свих функција $L : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ које имају својство да постоје рационални бројеви $q_1, \dots, q_k, r_0, \dots, r_{k+1}$ такви да је $a < q_1 < \dots < q_k < b$, L је линеарна на сваком од интервала $[a, q_1]$, $[q_j, q_{j+1}]$, $[q_k, b]$, $L(a) = r_0$, $L(b) = r_{k+1}$ и $L(q_j) = r_j$ за $1 \leq j \leq k$. Из пребројивости скупа \mathbb{Q} следи да је S пребројив.

Нека је $f \in C[a, b]$ и нека је $\varepsilon > 0$. Пошто је $[a, b]$ компактан, f је равномерно непрекидна, па постоји $\delta > 0$ са особином $|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon/2$. Нека су q_1, \dots, q_k рационални бројеви такви да је дужина интервала поделе $a < q_1 < \dots < q_k < b$ мања од δ и нека је L_0 део по део линеарна функција таква да је $L_0(a) = f(a)$, $L_0(q_j) = f(q_j)$, $L_0(b) = f(b)$. Из једначине праве кроз две тачке следи да на сваком интервалу $[q_j, q_{j+1}]$ важи

$$L_0(x) = f(q_j) + \frac{f(q_{j+1}) - f(q_j)}{q_{j+1} - q_j}(x - q_j),$$

и слично на интервалима $[a, q_1]$ и $[q_k, b]$. Користећи овај израз, разлику $f(x) - L_0(x)$ можемо да изразимо експлицитно на сваком интервалу поделе и, користећи чињеницу да је дужина ових интервала мања од δ , видимо да на сваком интервалу поделе (а тиме и на целом $[a, b]$) важи $|f(x) - L_0(x)| < \varepsilon$. Функција L_0 нема рационална темена (јер $f(q_j)$ нису обавезно рационални бројеви), али из густине скупа \mathbb{Q} у \mathbb{R} следи да постоји део по део линеарна функција $L_1 : [a, b]$ са рационалним теменима таква да је $|L_0(x) - L_1(x)| < \varepsilon/2$, одакле следи $\|f - L_1\|_\infty < \varepsilon$. Пошто је ε произвољно, следи да је пребројив скуп S густ у $C[a, b]$.

- (244) **Задатак:** Нека је (M, d) сепарабилан метрички простор и $N \subset M$. Доказати да је метрички простор (N, d) сепарабилан.
- (245) Сепарабилност је могуће дефинисати и у тополошком простору (сви термини који учествују у дефиницији сепарабилности су тополошки). Тврђење претходног задатка *не важи* у сваком тополошком простору. На пример, нека је на реалној правој \mathbb{R} дефинисана топологија τ као топологија чија је база (видети (87)) фамилија свих скупова облика

$$\{x\} \cup (]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap \mathbb{Q}) \quad \text{за све } x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0.$$

Скуп \mathbb{Q} је пребројив и свуда густ у овом тополошком простору. Нека је Y скуп свих ирационалних бројева. Овај скуп нема пребројив густ (у релативној топологији (55)) подскуп, јер је Y непребројив, а релативна топологија на Y је дискретна (тачке су отворени скупови), па за сваки

³¹Тачка $x_0 \in M$ је *строги локални максимум* функције f ако постоји околина $V \ni x_0$ таква да је $f(x_0) > f(x)$ за све $x \in V \setminus \{x_0\}$; слично се дефинише строги локални минимум.

пребројив скуп S постоји тачка (а тиме и отворен скуп) у Y који је дисјунктан са S .

(246) **Задатак:** Нека је X тополошки простор из (54). Доказати да је *сваки* низ међусобно различитих тачака густ у X .

(247) Сваки компактан метрички простор је сепарабилан.

Доказ: Докажимо прво да за свако $n \in \mathbb{N}$ постоји коначан скуп S_n такав да важи

$$(\forall x \in M)(\exists s \in S_n) d(x, s) < \frac{1}{n}.$$

Претпоставимо супротно, да за неко $n_0 \in \mathbb{N}$ и за сваки коначан подскуп $S \subset M$ важи

$$(\exists x \in M)(\forall s \in S) d(x, s) \geq \frac{1}{n_0}.$$

Нека је $x_1 \in M$. Пошто је скуп $\{x_1\}$ коначан, из претпоставке следи да постоји тачка $x_2 \in M$ за коју важи $d(x_1, x_2) \geq \frac{1}{n_0}$. Поновимо овај поступак: претпоставимо да смо њиме издвојили коначан скуп тачака $\{x_1, \dots, x_k\}$ такав да је $d(x_i, x_j) \geq \frac{1}{n_0}$. Тада из претпоставке следи постоји тачка $x_{k+1} \in M$ таква да је $d(x_k, x_j) \geq \frac{1}{n_0}$ за свако $j < k$. Тиме смо конструисали низ x_1, x_2, \dots такав да важи $d(x_i, x_j) \geq \frac{1}{n_0}$ за $i \neq j$. Одатле следи да низ x_1, x_2, \dots нема Кошијев подниз па нема ни конвергентан подниз. То је у супротности са претпоставком да је M компактан. Тиме је доказано³² да за свако $n \in \mathbb{N}$ постоји коначан скуп S_n такав да важи $(\forall x \in M)(\exists s \in S_n) d(x, s) < \frac{1}{n}$.

Нека је

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n.$$

Скуп S је пребројива унија коначних скупова, па је пребројив. Нека је $x \in M$ произвољна тачка. Из доказаног тврђења следи да за свако $n \in \mathbb{N}$ постоји тачка $s_n \in S$ за коју важи $d(x, s_n) < \frac{1}{n}$. Тиме смо доказали да постоји низ $s_n \in S$ који конвергира ка x . Одатле следи да је $\bar{S} = M$. Тиме је доказано да је простор M сепарабилан.

(248) **Задатак:** Доказати да је метрички простор M сепарабилан ако и само ако свако његово отворено покривање има највише пребројиво потпокривање.

(249) **Задатак:** Доказати да је комплетирање метричког простора M сепарабилно ако и само ако је простор M сепарабилан.

(250) **Задатак:** Доказати да је свака тополошка многострукост (видети дефиницију у (94)) унија пребројиве фамилије компактних скупова,³³ и одатле закључити да је свака тополошка многострукост сепарабилан простор.

(251) *Компактификација* тополошког простора X је пар (Y, ι) , где је Y тополошки простор и $\iota : X \rightarrow Y$ пресликавање са својствима

- Y је компактан;
- $\iota : X \rightarrow \iota(X)$ је хомеоморфизам;

³²Пажљиви читалац ће приметити да доказ следи и из (227).

³³Тополошке просторе који су пребројива унија компактних називамо σ -компактним.

- скуп $\iota(X)$ је густ у Y .

За разлику од комплетирања (видети (104), (105)), компактификација се спроводи у тополошкој категорији и није јединствена.

Задатак: Нека је \mathbb{R} реална права са стандардном топологијом. Доказати да су проширена реална права $\overline{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ и круг \mathbb{S}^1 две њене компактификације које нису хомеоморфне. Доказати да су n -димензиона сфера \mathbb{S}^n и пројективни простор $\mathbb{R}P^n$ компактификације еуклидског простора \mathbb{R}^n .

Најједноставнија конструкција компактификације је *компактификација једном тачком* (нпр. \mathbb{S}^1 као компактификација реалне праве у претходном задатку). Нека је (X, τ_X) некомпактан тополошки простор, и нека је $X^\bullet = X \cup \{\omega\}$, где је ω тачка која не припада скупу X . Топологија на скупу X^\bullet се дефинише као фамилија свих његових подскупова U који задовољавају један од следећа два услова:

(а) $\omega \notin U$ и $U \in \tau_X$

(б) $\omega \in U$ и $X \setminus U$ је компактан и затворен³⁴ у X .

Лако се проверава да је X^\bullet компактификација простора X , што остављамо читаоцу за вежбу.

Задатак: Нека је X непребројив скуп са топологијом изведеном из дискретне метрике. Доказати да је његова компактификација једном тачком X^\bullet компактан Хаусдорфов простор, који није сепарабилан. Извести закључак да X^\bullet није метрички простор (иако X јесте), тј. да је компактификација конструкција у тополошкој, а не метричкој, категорији. Из овог задатка видимо и да тврђење (247) не важи и за тополошке просторе.

- (252) Комплетност простора $(C(M), d_\infty)$ за компактан метрички простор M је у основи доказа *Пикарове теореме* о егзистенцији и јединствености решења диференцијалних једначина. Посматрајмо диференцијалну једначину

$$y' = f(x, y).$$

где је $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна функција која је *униформно Липшицова по другој променљивој*³⁵. Тражимо решење ове једначине (по непознатој функцији $y(x)$) које задовољава почетни услов $y(x_0) = y_0$ за задате $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$.

Теорема: Постоји околина $U \ni x_0$ тачке x_0 на којој једначина $y' = f(x, y)$ има јединствено решење $y : U \rightarrow \mathbb{R}$ које задовољава почетни услов $y(x_0) = y_0$.

Доказ: Задата диференцијална једначина је еквивалентна једначини

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

³⁴Пошто се ради о *тополошким* просторима, затвореност није последица компактности. Затворен подскуп компактног тополошког простора је компактан, али није сваки компактан подскуп тополошког простора затворен (дати пример!). Ако је тополошки простор Хаусдорфов, онда је сваки његов компактан подскуп затворен.

³⁵Другим речима таква да је за свако $x \in \mathbb{R}$ функција $y \mapsto f(x, y)$ Липшицова и да њена Липшицова константа не зависи од x .

по непознатој функцији y . Нека је $K \subset \mathbb{R}$ компактна околина тачке x_0 . Посматрајмо пресликавање

$$F : C(K) \rightarrow C(K), \quad F(y) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt.$$

Тада је

$$\begin{aligned} \|F(y_1) - F(y_2)\|_\infty &= \max_{x \in K} \left| \int_{x_0}^x (f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))) dt \right| \\ &\leq \max_{x \in K} \int_{x_0}^x |f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))| dt \\ &\leq \int_{x_0}^x \text{Lip}(f) |y_1(t) - y_2(t)| dt \\ &\leq \text{Lip}(f) |x - x_0| \|y_1 - y_2\|_\infty. \end{aligned}$$

Ако је K изабрано тако да је $\text{Lip}(f)|x - x_0| < 1$ (нпр. интервал дужине $\frac{1}{2\text{Lip}(f)}$), онда је F контракција на Банаховом простору $C(K)$ па, по Банаховом ставу о фиксној тачки (48), има јединствену фиксну тачку, која је решење полазне једначине.

- (253) Нека су p, q непрекидне функције на интервалу $J \subset \mathbb{R}$. Диференцијална једначина облика

$$y' + p(x)y = q(x)$$

са почетним условом $y(x_0) = y_0$ назива се *линеарном диференцијалном једначином првог реда* и своди се сменом

$$u(x) = e^{I(x)}y(x), \quad \text{где је } I(x) := \int_{x_0}^x p(t) dt$$

на једначину

$$u'(x) = e^{I(x)}q(x), \quad u(x_0) = y_0$$

што је једначина облика (252). Пошто десна страна зависи само од x , једначина може да се реши директном интеграцијом. Њено јединствено решење је

$$y = y_0 e^{-I(x)} + e^{-I(x)} \int_{x_0}^x q(t) e^{I(t)} dt.$$

- (254) Приметимо да смо у (252) могли, уместо простора $C(M)$, да користимо простор $C(M; \mathbb{K}^n)$ функција са вредностима у (такође комплетном) векторском простору \mathbb{K}^n , јер је тада и $(C(M; \mathbb{K}^n), \|\cdot\|_\infty)$ комплетан простор. Тако добијамо Пикарову теорему за *системе обичних диференцијалних једначина*.
- (255) Комплетност простора $C(M)$ (за компактан простор M) везана је за униформну норму. На пример, простор $C[-1, 1]$ са нормом $\|f\|_1 := \int_{-1}^1 |f(t)| dt$ није комплетан. Низ

$$f_n(t) = \begin{cases} -1, & t \leq -1/n \\ nt, & -1/n \leq t \leq 1/n \\ 1, & t \geq 1/n \end{cases}$$

у $C[-1, 1]$ је Кошијев, али није конвергентан (јер $x \mapsto \operatorname{sgn} x$ није непрекидна функција). Општије: норме $\|\cdot\|_p$ из (134) за $1 \leq p < +\infty$ дефинишу некомплетне норме на $C[a, b]$.

- (256) Комплетирање метричког простора $(C[a, b], \|\cdot\|_1)$ ($p = 1$ у (134)) се означава са $L^1[a, b]$ и назива *простором функција*³⁶ *интеграбилних по Лебегу*. Из (146) следи да је Риманов интеграл

$$\int_a^b : C[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$$

униформно непрекидно линеарно пресликавање нормираног простора $(C[a, b], \|\cdot\|_1)$ у нормирани простор $(\mathbb{C}, |\cdot|)$. Одатле, на основу (103), следи да \int_a^b може да се продужи на $L^1[a, b] = \overline{C[a, b]}$; ово продужење назива се *Лебеговим интегралом*.

Из конструкције је јасно да Лебегов интеграл уопштава Кошијев (или рестрикцију Римановог на $C[a, b]$). Следећа конструкција показује да он уопштава и Риманов. Нека је $0 < \delta < \frac{1}{3}$. Конструирамо скуп $K \subset [0, 1]$ на следећи начин, сличан конструкцији Канторовог скупа. У првом кораку из $[0, 1]$ одстранимо отворени интервал дужине δ са центром у $\frac{1}{2}$. У следећем кораку, одстранимо из сваког од преостала два интервала отворене интервале са центром у њиховим центрима, дужине $\frac{\delta}{3}$. У следећем кораку одстрањујемо интервале дужине $\frac{\delta}{9}$ итд, у n -том кораку одстрањујемо интервале дужине $\frac{\delta}{3^{n+1}}$. Укупна дужина одстрањених интервала је

$$\delta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} = 3\delta < 1,$$

па преостали скуп K није скуп Лебегове мере нула. Нека је $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ функција која је једнака нули на делу интервала $[0, 1]$ који је одстрањен у првих n корака, а на осталом делу је једнака 1. Јасно је да је свака од функција f_n интеграбилна по Риману. Лако је проверити и да је f_n Кошијев низ у норми³⁷ $\|\cdot\|_1$. Када би низ f_n конвергирао у норми $\|\cdot\|_1$ ка функцији интеграбилној по Риману, онда би та функција била скоро свуда једнака карактеристичној функцији скупа K и имала би прекид у свим тачкама тог скупа. Међутим, тај скуп није мере нула, па по Лебеговој теореме та функција није интеграбилна по Риману. Дакле, простор $\mathcal{R}[a, b]$ функција интеграбилних по Риману није комплетан. Његово комплетирање је простор $L^1[a, b]$.

- (257) Из (255) видимо да тврђење аналогно (222) не важи за нормиране просторе бесконачне димензије: $(C[a, b], \|\cdot\|_1)$ и $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ нису изоморфни простори, јер је један комплетан, а други није. Наиме, иако комплетност није тополошка инваријанта, она може да се дефинише у категорији тополошких векторских простора (или, општије,

³⁶Елементи скупа $L^1[a, b]$ су заиста функције (тачније, класе еквиваленције функција у односу на релацију „= скоро свуда“; скоро свуда значи „на комплементу скупа Лебегове мере нула“), иако су у овој (која није једина) конструкцији простора $L^1[a, b]$ добијени као апстрактни елементи комплетираниг простора.

³⁷Строго говорећи, $\|\cdot\|_1$ није норма на простору функција интеграбилних по Риману, јер из $\|f\|_1 = 0$ не следи $f = 0$. Зато се простор $\mathcal{R}[a, b]$ дефинише као количнички простор функција интеграбилних по Риману у односу на релацију еквиваленције „= скоро свуда“.

тополошких група). Низ x_n је, по дефиницији, Кошијев, ако за сваку околину V нуле постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ са особиним

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow x_m - x_n \in V.$$

Тополошки векторски простор (или тополошка група) је комплетан ако сваки, овако дефинисан, Кошијев низ конвергира. Овако дефинисана комплетност уопштава дефиницију комплетног нормираног простора (или комплетне нормиране групе) и она је инваријанта тополошке и алгебарске структуре (иако није инваријанта само тополошке структуре), будући да је дефинисана само уз помоћ те две структуре.

(258) **Задатак:** Доказати да са

$$f \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 f\left(\frac{xt}{n}\right) dt$$

дефинисано непрекидно пресликавање нормираних простора

$$(C[0, 1], \|\cdot\|_{\infty}) \rightarrow (C[0, 1], \|\cdot\|_{\infty}).$$

(259) У (206) смо доказали да је униформни лимес непрекидних функција непрекидна функција. Другим речима: униформни лимес комутира са лимесом по филтеру околина. На исти начин се доказује да униформни лимес комутира са лимесом по филтеру пробушених околина. Дакле, ако низ $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ униформно конвергира и ако је $x_0 \in \bar{X}$, онда важи

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x).$$

(260) Обични лимеси не морају да комутирају³⁸. Опште тврђење је следеће. Нека су S, T скупови на којима су дефинисани филтери $\mathcal{F}_S, \mathcal{F}_T$ и нека је $f : S \times T \rightarrow \mathbb{C}$ функција. Претпоставимо да за свако s постоји $\lim_{\mathcal{F}_T} f(s, t) = \phi(s)$ и да за свако t постоји $\lim_{\mathcal{F}_S} f(s, t) = \psi(t)$. Ако је први лимес *униформан*, тј. ако је за свако $\varepsilon > 0$

$$\|f(s, t) - \phi(s)\|_{\infty} := \sup_{s \in S} |f(s, t) - \phi(s)| <_{\mathcal{F}_T} \varepsilon,$$

онда је $\lim_{\mathcal{F}_T} \lim_{\mathcal{F}_S} f(s, t) = \lim_{\mathcal{F}_S} \lim_{\mathcal{F}_T} f(s, t)$. Доказ је у суштини исти као у (206).

(261) Природно се поставља питање комутативности са лимесом у простору подела, тј. са Римановим интегралом; односно, питање када важи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

Ово питање није део тврђења (260), јер један од лимеса није лимес од $f_n(x)$, него лимес придружене функције Φ_f на простору подела (31). Ипак, важи следеће тврђење: Ако низ f_n функција интегралних по Риману униформно конвергира, онда је његов лимес f_{∞} интегралан по Риману и комутира са Римановим интегралом.

³⁸Нпр. $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 1-0} x^n \neq \lim_{x \rightarrow 1-0} \lim_{n \rightarrow \infty} x^n$.

Доказ³⁹: Ако $f_n \rightarrow f_\infty$ униформно, онда је скуп прекида граничне функције f_∞ подскуп уније прекида функција f_n (јер се непрекидност у тачки чува при униформном лимесу). Пошто је свака од функција f_n интегрална, по Лебеговој теорему о интегралности скуп прекида сваке од њих има Лебегову меру нула, па је и скуп прекида функције f_∞ Лебегове мере нула, пошто је садржан у пребројивој унији скупова мере нула. Дакле, по Лебеговој теорему, f_∞ је интегрална функција. Ако је $\varepsilon > 0$, онда је $\|f_n - f_\infty\|_\infty < \varepsilon/(b-a)$, за велико n , па је

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f_\infty(x) dx \right| &\leq \int_a^b |f_n(x) - f_\infty(x)| dx \\ &\leq \int_a^b \sup_{x \in X} |f_n(x) - f_\infty(x)| dx \\ &= (b-a) \|f_n - f_\infty\|_\infty < \varepsilon, \end{aligned}$$

тј. $\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f_\infty(x) dx$. Пример низа $f_n(x) = (n+1)x(1-x^2)^n$ (или $g_n = n^2 x e^{-nx}$) на интервалу $[0, 1]$ показује да ово некад не важи за неунормне лимесе.

(262) **Задатак:** Доказати да ако $f_n \rightarrow f_\infty$ у норми $\|\cdot\|_\infty$ онда $f_n \rightarrow f_\infty$ у норми $\|\cdot\|_p$ за $p \geq 1$.

На сличан начин се доказује и да Стилтјесов интеграл комутира са униформним лимесом функције која се интегрални, тј. да за функцију ограничене варијације g и униформно конвергентан низ f_n важи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dg(x) = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dg(x).$$

Стилтјесов интеграл не комутира са униформним лимесом функције по којој се интегрални, али важе следећа тврђења.

Задатак: Нека је $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ непрекидна функција и $g_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ низ функција *униформно ограничене варијације*, тј. такав да је

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \text{Var}_{[a,b]}(g_n) < C,$$

који конвергира ка g_∞ у обичном смислу (по тачкама). Доказати да је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dg_n(x) = \int_a^b f(x) dg_\infty(x).$$

Задатак: Нека је $g_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ низ функција ограничене варијације, такав да је $g_n(a) = 0$ за све n . Ако низ g_n конвергира ка g_∞ у простору $BV([a, b], \mathbb{R})$, тј. у норми $\text{Var}_{[a,b]}(\cdot)$ (видети (143)), доказати да за произвољну непрекидну функцију $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ важи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dg_n(x) = \int_a^b f(x) dg_\infty(x).$$

³⁹Доказ овог тврђења заиста може, уз мало додатне аргументације, да се сведе на комутирање $\lim_{n \rightarrow \infty}$ и лимеса у простору подела. То ћемо, у нешто општијем облику, и да урадимо у Глави 4; овде дајемо други, мало директнији, доказ.

- (263) Комутативност интеграла са лимесом је сложеније питање ако је интеграл несвојствени. Тада је сам несвојствени интеграл дефинисан као лимес својственог, па да бисмо закључили да важи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^\beta f_n(x) dx = \int_a^\beta \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$

за интеграл који је несвојствен у β , потребно је оправдати следећа комутирања лимеса:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^\beta f_n(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{b \rightarrow \beta_-} \int_a^b f_n(x) dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \beta_-} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \beta_-} \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx \\ &= \int_a^\beta \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx. \end{aligned}$$

Уколико f_n равномерно конвергира, оправдано је комутирање $\lim_{n \rightarrow \infty}$ са \int_a^b у трећем кораку. Али, да би било оправдано комутирање лимеса $\lim_{n \rightarrow \infty}$ и $\lim_{b \rightarrow \beta_-}$ потребно је да један од њих буде униформан у односу на променљиву из другог. Уколико је то $\lim_{b \rightarrow \beta_-}$, кажемо да несвојствени интеграл $\int_a^\beta f_n(x) dx$ *конвергира униформно по n* .

Задатак: Нека је $\chi_{[0,n]}$ карактеристична функција интервала $[0, n]$. Доказати да низ

$$f_n = \frac{\chi_{[0,n]}}{n}$$

униформно конвергира ка 0, али да $\int_0^\infty f_n(x) dx \rightarrow 1$. Који од услова комутативности лимеса и интеграла из претходног закључивања није задовољен?

- (264) Извод *не* комутира са униформним лимесима (што показује нпр. низ $f_n(x) = x(1 + nx^2)^{-1}$ или $g_n(x) = n^{-1} \sin n^2 x$), али важи следеће тврђење: Нека је $f_n :]\alpha, \beta \rightarrow \mathbb{C}$ низ диференцијабилних функција, такав да *низ извода* f'_n униформно конвергира ка $g :]\alpha, \beta \rightarrow \mathbb{C}$, и да је $f_n(t_0)$ конвергентан низ комплексних бројева за неко $t_0 \in]\alpha, \beta[$. Тада низ f_n униформно конвергира ка диференцијабилној функцији f_∞ таквој да је $f'_\infty = g$. Доказ униформне конвергенције низа f_n следи из

$|f_n(t) - f_m(t)| \leq |f_n(t) - f_m(t) - f_n(t_0) + f_m(t_0)| + |f_n(t_0) - f_m(t_0)|$
применом Лагранжеве теореме⁴⁰ на функцију $f_n - f_m$ и Кошијевог критеријума конвергенције за комплетне норме $\|\cdot\|_\infty$ и $|\cdot|$. На сличан начин, применом Лагранжеве теореме се доказује да за свако $a \in]\alpha, \beta[$ низ

$$g_n(t) := \frac{f_n(t) - f_n(a)}{t - a}$$

униформно конвергира. Пошто је

$$\lim_{t \rightarrow a} g_n(t) = f'_n(a), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t) = \frac{f_\infty(t) - f_\infty(a)}{t - a}$$

⁴⁰Лагранжева теорема не важи за комплексне функције, али раздвајањем реалног и имагинарног дела тврђење које доказујемо се своди на аналогно тврђење за реалне функције.

једнакост $f'_\infty = g$ следи из (260). Заиста, пошто је g равномерно лимес низа f'_n , у изразу

$$g(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow a} g_n(t)$$

лимеси могу да комутирају. Одатле следи

$$g(a) = \lim_{t \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(t) - f_n(a)}{t - a}.$$

Пошто низ f_n равномерно конвергира, конвергирају и низови $f_n(t)$ и $f_n(a)$, па је

$$g(a) = \lim_{t \rightarrow a} \frac{f_\infty(t) - f_\infty(a)}{t - a} = f'_\infty(a)$$

за свако a .

Задатак: Доказати да је са

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+nx)}{nx^n}$$

дефинисана функција $f : [2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ класе C^∞ .

- (265) **Задатак:** Нека је $C^1[a, b]$ простор непрекидно диференцијабилних функција (тј. диференцијабилних функција које имају непрекидан први извод) и $d : C^1[a, b] \times C^1[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ функција дефинисана са

$$d(f, g) = |f(a) - g(a)| + \max_{a \leq t \leq b} |f'(t) - g'(t)|.$$

Доказати да је d метрика и да лимес сваког низа f_n који конвергира у метричком простору $(C^1[a, b], d)$ комутира са изводом, тј. да је за сваки такав низ $(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n)'(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(t)$. Доказати да је и

$$d_0(f, g) = \max_{a \leq t \leq b} |f(t) - g(t)| + \max_{a \leq t \leq b} |f'(t) - g'(t)|$$

метрика на $C^1[a, b]$ и да низ конвергира у $(C^1[a, b], d_0)$ ако и само ако конвергира у $(C^1[a, b], d)$.

- (266) **Задатак:** Доказати да простор $(C^\infty[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ функција које имају извод произвољног реда није комплетан у односу на равномерну норму $\|\cdot\|_\infty$.

- (267) **Задатак:** Доказати да простор $(C^k[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ функција које су k пута непрекидно диференцијабилне (тј. функција које су k пута диференцијабилне, при чему је $f^{(k)}$ непрекидна функција) није комплетан у односу на равномерну норму $\|\cdot\|_\infty$, али да је комплетан у односу на норму

$$\|f\|_{C^k} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + \dots + \|f^{(k)}\|_\infty.$$

- (268) *Непрекидна нигде диференцијабилна функција.* Нека је

$$\psi(x) = d(x, \mathbb{Z}) = \min\{x - [x], [x] + 1 - x\}.$$

Функција ψ је непрекидна, периодична са периодом 1, $\min \psi = 0$ се достиже у тачкама из \mathbb{Z} , $\max \psi = \frac{1}{2}$ у тачкама из $\frac{1}{2} + \mathbb{Z}$. Функција $x \mapsto \psi(x)$ има леви и десни извод у свакој тачки, али није диференцијабилна у тачкама у којима достиже максимум и минимум.

Тада је функција

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (9/10)^n \psi(10^n x)$$

непрекидна у свакој, а није диференцијабилна ни у једној тачки.

Заиста, из Вајерштрасовог става (196) и конвергенције геометријског реда $\sum 10^{-n}$ следи да ред на десној страни униформно конвергира, па из непрекидности функција $10^{-n}\psi(10^n x)$ следи да је f непрекидна функција.

Нека је $a \in \mathbb{R}$ и $k \in \mathbb{N}$ и нека је $\delta_k = \pm 10^{-k-1}$, где је знак изабран тако да између $10^k a$ и $10^k(a + \delta_k)$ нема целих бројева (то је могуће јер је $|10^k \delta_k| = 10^{-1}$), тј. тако да је функција ψ линеарна између та два броја. Из периодичности функције ψ следи да је

$$\psi(10^n(a + \delta_k)) - \psi(10^n a) = 0 \quad \text{за све } n > k,$$

па је

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(a+\delta_k) - f(a)}{\delta_k} \right| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(9/10)^n}{\delta_k} (\psi(10^n(a + \delta_k)) - \psi(10^n a)) \right| \\ &= \left| \sum_{n=1}^k \frac{(9/10)^n}{\delta_k} (\psi(10^n(a + \delta_k)) - \psi(10^n a)) \right| \\ &\geq \frac{(9/10)^k}{\delta_k} |\psi(10^k(a + \delta_k)) - \psi(10^k a)| \\ &\quad - \left| \sum_{n=1}^{k-1} \frac{(9/10)^n}{\delta_k} (\psi(10^n(a + \delta_k)) - \psi(10^n a)) \right| \\ &= 9^k - \sum_{n=1}^{k-1} 9^n = \frac{1}{2}(3^k + 1). \end{aligned}$$

Пошто $\delta_k \rightarrow 0$ кад $k \rightarrow \infty$, следи да не постоји $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, тј. функција f није диференцијабилна у a , за произвољно $a \in \mathbb{R}$.

(269) Непрекидних функција као што је она конструисана у (268), има више него оних које су негде (бар у једној тачки) диференцијабилне, у следећем смислу:

- Скуп непрекидних функција које нису диференцијабилне ни у једној тачки је свуда густ у $(C[0, 1], \|\cdot\|_{\infty})$.
- Скуп функција које имају коначан извод у бар једној тачки је скуп прве категорије у $(C[0, 1], \|\cdot\|_{\infty})$.

Доказ: Довољно је доказати друго тврђење; прво следи из њега на основу Берове теореме и комплетности простора $C[0, 1]$ у униформној метрици.

Довољно је доказати ово тврђење за реалне функције. Нека је A_k скуп функција $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ које за неко $x \in]0, 1 - k^{-1}[$ задовољавају неједнакост

$$|f(x+h) - f(x)| \leq kh \quad \text{за све } 0 < h < k^{-1}.$$

Скуп $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ садржи све функције које имају коначан десни извод у некој тачки из $]0, 1[$. Доказаћемо да је сваки од скупова A_k затворен и нигде густ, одакле следи да је A скуп прве категорије.

Да бисмо доказали да је A_k затворен, претпоставимо да је f_n низ из A_k и да $f_n \rightarrow f_{\infty}$ (у норми $\|\cdot\|_{\infty}$) кад $n \rightarrow \infty$. Пошто је $f_n \in A_k$, постоји $x_n \in [0, 1 - k^{-1}]$ за које је $|f_n(x_n + h) - f_n(x_n)| \leq kh$ за $0 < h < 1 - x_n$. Из компактности интервала $[0, 1 - k^{-1}]$ следи да низ x_n има конвергентан подниз $x_{\varphi(n)}$; нека је x_{∞} његов лимес. Ако је

$0 < h < 1 - x_\infty$, онда је, за довољно велико n , $0 < h < 1 - x_{\varphi(n)}$, па за такве h важи

$$\begin{aligned} |f_\infty(x_\infty + h) - f_\infty(x_\infty)| &\leq |f_\infty(x_\infty + h) - f_\infty(x_{\varphi(n)} + h)| + \\ &+ |f_\infty(x_{\varphi(n)} + h) - f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)} + h)| + \\ &+ |f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)} + h) - f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)})| + \\ &+ |f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) - f_\infty(x_{\varphi(n)})| + |f_\infty(x_{\varphi(n)}) - f_\infty(x_\infty)| \\ &\leq |f_\infty(x_\infty + h) - f_\infty(x_{\varphi(n)} + h)| + \|f_{\varphi(n)} - f_\infty\|_\infty \\ &+ kh + \|f_{\varphi(n)} - f_\infty\| + |f_\infty(x_{\varphi(n)}) - f_\infty(x_\infty)|. \end{aligned}$$

После преласка на лимес кад $n \rightarrow \infty$ добијамо

$$|f_\infty(x_\infty + h) - f_\infty(x_\infty)| \leq kh,$$

односно $f_\infty \in A_k$, што значи да је A_k затворен.

Пошто смо у (243) доказали да је скуп део по део линеарних функција густ у $C[0, 1]$, да бисмо доказали да је A_k нигде густ довољно је да докажемо да за сваку део по део линеарну функцију L свака отворена лопта $B]L; \varepsilon[$ у $C[0, 1]$ садржи функцију која није у A_k . За то ћемо употребити функцију ψ дефинисану у (268). Нека је S максимална апсолутна вредност нагиба функције L . Изаберимо $m \in \mathbb{R}$ тако да важи

$$m\varepsilon > S + k.$$

Тада функција $f(x) = L(x) + \varepsilon\psi(mx)$ задовољава $\|f - L\|_\infty = \varepsilon/2$, па је $f \in B]L; \varepsilon[$. Пошто је апсолутна вредност нагиба функције $x \mapsto \varepsilon\psi(mx)$ једнака εm , из избора m следи да је нагиб функције f већи од k у свакој тачки интервала $[0, 1 - n^{-1}]$, па $f \notin A_k$.

(270) *Динијева теорема.* Нека је M компактан скуп и f_n монотон низ реалних функција у $C(M)$ који обично (по тачкама) конвергира ка непрекидној функцији f_∞ . Тада f_n униформно конвергира ка f_∞ .

Монотоност овде означава монотоност у односу на природну релацију поретка \leq^M на $C(M)$: $f \leq^M g \Leftrightarrow (\forall x \in M) f(x) \leq g(x)$. (Довољно је претпоставити и да је низ $f_n(x)$ монотон за све $x \in M$).

Доказ теореме: Нека је $g_n = |f_\infty - f_n|$. Тада је g_n опадајући низ у $C(M)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = 0$ за све $x \in M$. Нека је дато $\varepsilon > 0$. За свако $n \in \mathbb{N}$, скуп

$$F_n = \{x \in M \mid g_n(x) \geq \varepsilon\}$$

је затворен и важи $F_{n+1} \subset F_n$. Из $g_n(x) \rightarrow 0$ за све x следи да је

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x \in M \mid g_n(x) \geq \varepsilon \text{ за све } n\} = \emptyset.$$

Одатле, због компактности простора M , на основу (229) следи да је $F_{n_0} = \emptyset$ за неко n_0 , па је $g_{n_0}(x) < \varepsilon$ за све $x \in M$. Пошто је низ $g_n(x)$ опадајући за свако x , опадајући је и низ $\|g_n\|_\infty$, па је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n\|_\infty = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|g_n\|_\infty \leq \|g_{n_0}\|_\infty < \varepsilon,$$

што значи да $\|g_n\|_\infty \rightarrow 0$.

- (271) Ако је $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ монотон низ у $C[a, b]$ који конвергира ка $f_\infty \in C[a, b]$, из Динијеве теореме (270) и комутативности интеграла и униформног лимеса следи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f_\infty(x) dx.$$

Ова чињеница мотивише следећу, апстрактну, дефиницију интеграла који уопштава Риманов и Лебегов интеграл и назива се *Данијеловим интегралом*. Нека је \mathcal{E} подскуп реалног векторског простора \mathbb{R}^T свих реалних функција $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ који има следећа својства:

- \mathcal{E} је векторски простор над \mathbb{R}
- $f, g \in \mathcal{E} \Rightarrow \min\{f, g\} \in \mathcal{E} \wedge \max\{f, g\} \in \mathcal{E}$.

Друго својство је еквивалентно са $f \in \mathcal{E} \Rightarrow |f| \in \mathcal{E}$.

Функције фамилије \mathcal{E} називамо *елементарним функцијама*. Пресликавање $I : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ назива се *елементарним интегралом* ако задовољава следеће аксиоме:

- (E1) $I(\lambda f + \mu g) = \lambda I(f) + \mu I(g)$ за $f, g \in \mathcal{E}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (линеарност);
 (E2) $f \geq 0 \Rightarrow I(f) \geq 0$ (позитивност);
 (E3) Ако је $f_n \searrow$ опадајући низ у \mathcal{E} такав да $f_n(t) \rightarrow 0$ кад $n \rightarrow \infty$ за све $t \in T$, онда $I(f_n) \rightarrow 0$ (непрекидност).

Задатак: Доказати да у претходној дефиницији аксиома непрекидности (E3) може да се замени еквивалентном аксиомом

- Ако је f_n растући низ функција у \mathcal{E} такав да $f_n(t) \rightarrow f_\infty(t)$ кад $n \rightarrow \infty$ за све $t \in T$ и $f_\infty \in \mathcal{E}$, онда $I(f_n) \rightarrow I(f_\infty)$.

Подскуп $S \subset T$ има *меру нула* у односу на елементарни интеграл I ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји неоппадајући низ ненегативних функција $f_n \in \mathcal{E}$ такав да је $I(f_n) < \varepsilon$ и $\sup_n f_n(s) \geq 1$ за све $s \in S$. Ако неко тврђење важи свуда сем можда на скупу мере нула, кажемо да оно важи *скоро свуда*.

Уз помоћ монотоне конвергенције (тј. аксиоме непрекидности (E3)) елементарни интеграл се може продужити са скупа \mathcal{E} на већи скуп, на следећи начин. Нека је \mathcal{D}^+ скуп свих функција $f_\infty \in \mathbb{R}^T$ које су лимес неоппадајућег низа $f_n \in \mathcal{E}$ скоро свуда (тј. $f_n(t) \rightarrow f_\infty(t)$ за скоро све $t \in T$) за који је низ $I(f_n)$ ограничен. Интеграл функције f_∞ тада се дефинише као $I(f_\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n)$. Из аксиома елементарног интеграла следи да је овај објекат добро дефинисан (да не зависи од избора низа f_n који монотono конвергира ка f_∞ и да заиста продужава I , тј. је за $f_\infty \in \mathcal{E}$ за које је вредност $I(f_\infty)$ већ дефинисана, добијени лимес на десној страни једнак тој вредности).

Скуп \mathcal{D}^+ није затворен у односу на множење негативним скаларом (па тиме ни у односу на одузимање), тако да није векторски простор. Дефинишимо зато $\mathcal{D} := \{f - g \mid f, g \in \mathcal{D}^+\}$. *Данијелов интеграл* је линеарни функционал

$$I : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}, \quad I(f - g) := I(f) - I(g) \quad \text{за } f, g \in \mathcal{D}^+;$$

овај функционал се продужује на комплексне функције $f : T \rightarrow \mathbb{C}$ чији реални и имагинарни део припадају скупу \mathcal{D} , са $I(f) := I(\operatorname{Re} f) + iI(\operatorname{Im} f)$.

Задатак: Доказати неједнакост троугла $|I(f)| \leq I(|f|)$.

Помоћу Данијеловог интеграла може да се дефинише мера скупа: подскуп $A \subset T$ је *мерљив* ако његова карактеристична функција χ_A припада скупу \mathcal{D} ; величина $\mu(A) := I(\chi_A)$ назива се *мером скупа* A .

Као специјалан случај Данијеловог интеграла за $\mathcal{E} = C[a, b]$ (простор непрекидних функција) и $I = \int_a^b$ (Риманов интеграл) добија се⁴¹ Лебегов интеграл (256).

Задатак: Нека је $T = \{t_1, \dots, t_n\}$ коначан скуп и нека је \mathcal{E} скуп свих функција $f : T \rightarrow \mathbb{R}$. Доказати да је са

$$I(f) := \sum_{k=1}^n f(t_k)$$

дефинисан елементарни Данијелов интеграл на \mathcal{E} . Шта је у овом случају скуп \mathcal{D} и Данијелов интеграл $I : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$?

(272) Фамилија \mathcal{K} пресликавања $f : M \rightarrow N$ метричког простора (M, d_M) у (N, d_N) се назива *равностепено непрекидно* ако

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) d_M(x, y) < \delta \Rightarrow (\forall f \in \mathcal{K}) d_N(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Задатак: Доказати да је фамилија $\{f_\lambda : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}\}_{\lambda \in \Lambda}$ диференцијабилних функција таквих да је скуп

$$\{f'_\lambda(x) \mid \lambda \in \Lambda, x \in]0, 1[\}$$

ограничен, равностепено непрекидна. За које $p \in]0, +\infty[$ је фамилија

$$f_n : [0, p] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

равностепено непрекидна? За које $p \in]0, +\infty[$ је фамилија

$$g_n : [0, p] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_n(x) = \cos nx, \quad n \in \mathbb{N}$$

равностепено непрекидна?

Задатак: Који од следећих низова су равностепено непрекидни, а који равномерно ограничени:

- (а) $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = x^n$;
- (б) $f_n : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = x^n$;
- (в) $f_n : [0, 1 - \varepsilon^2] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = x^n$;
- (г) $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \cos(nx)$?

(273) *Арцела–Асколијева теорема.* Ако је M сепарабилан метрички простор и $f_n : M \rightarrow \mathbb{C}$ низ комплексних функција који је

- (а) ограничен по тачкама (тј. $(\forall x \in M) \sup\{|f_n(x)| \mid n \in \mathbb{N}\} < +\infty$)
- (б) равностепено непрекидан,

⁴¹Традиционално се Лебегов интеграл конструише са другим избором, без позивања на Риманов, за скуп \mathcal{E} се узима скуп линеарних комбинација карактеристичних функција мерљивих скупова (овоме, при оваквом приступу, претходи увођење концепта *Лебегове мере* m и *мерљивог скупа* пре концепта интеграла, док је у апстрактном приступу који овде дајемо обрнуто – мера се изводи из интеграла) а пресликавање I се дефинише као линеарно продужење „површине испод графика карактеристичне функције” (тј. $I(\chi_A) = m(A)$).

онда он има подниз који униформно конвергира на сваком компактном подскупу у M .

Даћемо доказ овог тврђења који илуструје тзв. *дијагонални постулат* (видети Напомену 2 на стр. 19). Пошто је M сепарабилан, постоји пребројив густ подскуп $S \subset M$; поређајмо његове тачке у низ $S = \{x_1, x_2, \dots\}$. Дефинишимо низ подскупова $N_k \subset \mathbb{N}$ скупа природних бројева индуктивно; нека је $N_0 = \mathbb{N}$. Нека је N_k дефинисано. Пошто је, по претпоставци **(а)**, $\{f_n(x_{k+1})\}_{n \in N_k}$ ограничен низ комплексних бројева, он садржи конвергентан подниз. Другим речима, постоји бесконачан скуп $N_{k+1} \subset N_k$, такав да постоји

$$\lim_{N_{k+1} \ni n \rightarrow \infty} f_n(x_{k+1}).$$

Тиме је дефинисан низ скупова $\{N_k\}$. Сваки од ових скупова је уређен (као подскуп уређеног скупа (\mathbb{N}, \leq)), па можемо да изаберемо k -ти елемент из скупа N_k за свако k (дијагонални избор); означимо га са n_k . Нека је $N := \{n_1, n_2, \dots\}$. Овај скуп је бесконачан; из његове конструкције следи да за свако $x \in S$ постоји

$$\lim_{N \ni n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Нека је $K \subset M$ компактан скуп и $\varepsilon > 0$. Из **(б)** следи да постоји $\delta > 0$ са особиним

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow (\forall n) |f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Нека су B_1, \dots, B_k отворене лопте полупречника $\delta/2$ које покривају K (користимо компактност скупа K). Пошто је S густ у M , постоји $x_j \in S \cap B_j$ за свако j . Пошто је $x_j \in S$, постоји лимес $f_n(x_j)$ кад $N \ni n \rightarrow \infty$. Из Кошијевог услова (у комплетном простору \mathbb{C}) следи да

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in N) m > n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x_j) - f_m(x_j)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

за све $j \in \{1, \dots, k\}$. Нека је $x \in K$ произвољна тачка. Тада је $x \in B_j$ за неко j , па за све $x_j \in B_j \cap S$ важи $d(x, x_j) < \delta$ и зато је

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f_n(x_j)| + |f_n(x_j) - f_m(x_j)| + |f_m(x_j) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Одатле следи да је $\sup_K |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, што доказује да је низ f_n Кошијев у комплетном простору $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$, а тиме и конвергентан у униформној норми $\|\cdot\|_\infty$.

Задатак: Нека је $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ равномерно ограничен низ интегралних функција. Доказати да низ

$$F_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, \quad F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt$$

има равномерно конвергентан подниз.

Задатак: Нека је $f_n : K \rightarrow \mathbb{C}$ равностепено непрекидан низ функција дефинисаних на компактном простору K , такав да је за свако $x \in K$ низ $f_n(x)$ конвергентан. Доказати да је низ f_n равномерно конвергентан.

(274) Постоји и следећа варијанта Арцела–Асколијеве теореме: Нека је M компактан метрички простор, Y Банахов простор и $(C_Y(M), \|\cdot\|_\infty)$ Банахов простор непрекидних пресликавања $f : M \rightarrow Y$ са униформном нормом $\|\cdot\|_\infty$. Подскуп $\mathcal{K} \subset C_Y(M)$ је релативно компактан ако и само ако су задовољена следећа два услова:

- (а) фамилија \mathcal{K} је равностепено непрекидна;
- (б) за свако $x \in M$ скуп $\mathcal{K}(x) := \{f(x) \mid f \in \mathcal{K}\}$ је релативно компактан у Y .

Доказ: (\Rightarrow) Нека је $\mathcal{K} \subset C_Y(M)$ релативно компактан скуп. Пошто је $C_Y(M)$ комплетан, из (228) следи да је \mathcal{K} тотално ограничен, што значи да за свако $\varepsilon > 0$ има коначну ε -мрежу. Дакле, постоји коначна фамилија $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{K}$ таква да за свако $f \in \mathcal{K}$ за неко f_j важи $\|f - f_j\|_\infty < \varepsilon/3$. Специјално, за свако $x \in M$ је $\|f(x) - f_j(x)\| < \varepsilon$. То показује да је $\mathcal{K}(x)$ тотално ограничен, па из комплетности простора Y следи (б). Остаје да докажемо (а). Пошто је M компактан, из Канторове теореме следи да су сва пресликавања из $C_Y(M)$ униформно непрекидна, па постоји $\delta > 0$ са својством да за сваку од функција f_1, \dots, f_n важи $d(x, y) < \delta \Rightarrow \|f_j(x) - f_j(y)\| < \varepsilon/3$. Из неједнакости троугла онда следи да је $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$ за свако $f \in \mathcal{K}$, што доказује (а).

(\Leftarrow) Пошто је $C_Y(M)$ комплетан, довољно је да докажемо да је \mathcal{K} тотално ограничен. Нека је $\varepsilon > 0$. Из (а) следи да свако $x \in M$ има отворену околину V_x која има својство да за $y \in V_x$ важи $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon/4$ за све $f \in \mathcal{K}$. Фамилија $\{V_x\}_{x \in M}$ је отворено покривање компактног простора M ; по Борел–Лебеговој теорему она има коначно потпокривање V_{x_1}, \dots, V_{x_n} . Из (б) следи да је сваки од скупова $\mathcal{K}(x_j)$ релативно компактан, па пошто је ових скупова коначно много, и њихова унија је релативно компактан скуп; означимо овај скуп са S . Из компактности скупа \bar{S} следи да се он може покрити са коначно много отворених лопти полупречника $\varepsilon/4$ (из отвореног покривања $\{B]s; \varepsilon/4[\}_{s \in S}$ може да се издвоји коначно потпокривање). Означимо центре ових лопти са s_1, \dots, s_m . Нека је F скуп свих пресликавања

$$\psi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$$

и нека је, за свако $\psi \in F$, \mathcal{T}_ψ скуп свих пресликавања $f \in \mathcal{K}$ таквих да за свако $j \in \{1, \dots, n\}$ важи $\|f(x_j) - s_{\psi(j)}\| \leq \varepsilon/4$ (неки од скупова \mathcal{T}_ψ могу да буду и празни). Пошто лопте $B]s_j; \varepsilon/4[$ покривају S , скупови \mathcal{T}_ψ покриваће \mathcal{K} . Треба само још да докажемо да сваки од ових скупова има дијаметар мањи од ε ; то ће значити да они формирају коначну ε -мрежу за \mathcal{K} . Нека су, за неко ψ , $f, g \in \mathcal{T}_\psi$. Тада за свако $y \in M$ постоји $j \in \{1, \dots, n\}$ тако да $y \in V_{x_j}$, па је

$$\|f(y) - f(x_j)\| \leq \varepsilon/4, \quad \|g(y) - g(x_j)\| \leq \varepsilon/4, \quad \|f(x_j) - g(x_j)\| \leq \varepsilon/2$$

(последња неједнакост следи из дефиниције \mathcal{T}_ψ : f и g сликају x_j у исту лопту полупречника $\varepsilon/4$). Закључак следи из претходне три неједнакости и неједнакости троугла.

(275) Уз помоћ Арцела–Асколијеве теореме може да се уопшти део Пикарове теореме (252) који говори о егзистенцији решења диференцијалних

једначина. То тврђење је *Пеанова теорема*; једна једноставнија верзија ове теореме гласи: Нека је $f : [x_0, x_0 + a] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна функција. Тада једначина

$$y' = f(x, y)$$

има решење које задовољава $y(x_0) = y_0$.

Доказ: Нека је $n \in \mathbb{N}$ и $x_j = x_0 + aj/n$ за $j \in \{0, 1, \dots, n\}$. Нека је $y_n : [x_0, x_0 + a] \rightarrow \mathbb{R}$ функција дефинисана са $y_n(x_0) = y_0$ и

$$y'_n(x) = f(x, y_n(x_j)) \quad \text{за } x_j < x \leq x_{j+1}$$

и $y_n(x_j)$ тако да је y_n непрекидна. Израз $y_n(x_j)$ на десној страни је константа, па је функција y_n на овај начин добро дефинисана. Она задовољава једначину

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x y'_n(t) dt = y_0 + \int_{x_0}^x (f(t, y_n(t)) + h_n(t)) dt,$$

где је $h_n(t) = y'_n(t) - f(t, y_n(t))$ за $t \neq x_j$ и $h_n(x_j) = 0$. За $t \in [x_j, x_{j+1}]$ је $h_n(t) = f(t, y_n(x_j)) - f(t, y_n(t))$. Нека је $\delta > 0$. Из компактности интервала $[x_0, x_0 + a]$ и непрекидности функције f следи да је $\|y_n\|_\infty \leq b$ за неко $b \in \mathbb{R}$. Из

$$y_n(t) - y_n(x_j) = \int_{x_j}^t y'_n(s) ds = \int_{x_j}^t f(s, y_n(x_j)) ds$$

следи да је, за довољно велико n , $|y_n(t) - y_n(x_j)| < \delta$. Одатле и из непрекидности функције f следи $\|h_n\|_\infty \rightarrow 0$. Из

$$|y_n(u) - y_n(v)| \leq \int_u^v (|f(t, y_n(t))| + |h_n(t)|) dt$$

за $[x_0 \leq u < v \leq x_0 + a]$ и непрекидности функције f на компактном скупу $[x_0, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ следи да низ y_n испуњава услове Арцела–Асколијеве теореме (273), па има подниз који униформно конвергира ка некој функцији y . Пошто униформни лимес комутира са интегралом, функција y задовољава

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt,$$

тј. $y'(x) = f(x, y(x))$ и $y(x_0) = y_0$.

Задатак: Приметимо да Пеанова теорема говори само о егзистенцији, али не и о јединствености (као Пикарова) решења. Наћи све функције које задовољавају $y' = \sqrt{|y|}$, $y(0) = 0$ (има их више). Наћи (јединствену) функцију која задовољава $y' = y^2$, $y(0) = 0$. Објаснити ово у светлу Пикарове и Пеанове теореме. У првом случају функција на десној страни је (униформно) непрекидна на реалној оси, али није Липшицова (па Пикарова теорема не може да се примени); у другом случају је непрекидна, али није униформно непрекидна (а тим пре ни Липшицова); ипак, Пикарова теорема (252) може да се примени (зашто?).

- (276) **Задатак:** Доказати да Пикарова (252) и Пеанова (275) теорема важе и за једначине $y' = f(x, y)$ по функцији $y : I \rightarrow \mathbb{C}^n$, ако је $f : \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ непрекидна у случају Пеанове, односно Липшицова у случају Пикарове теореме. Ово уопштење се односи на решивост система диференцијалних једначина. Доказати да се сменом $y = y_1, y' = y_2, \dots, y^{(n-1)} = y_n$ диференцијална једначина n -тог реда

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

своди на систем диференцијалних једначина првог реда, тако да Пикарова и Пенова теорема дају довољне услове решивости и за једначине вишег реда.

- (277) *Вајерштрасова теорема.* Скуп полинома је густ у нормираном простору $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$. Другим речима, за сваку непрекидну функцију $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ постоји низ полинома са комплексним коефицијентима који равномерно конвергира ка f . Ако је f реална функција, постоји низ полинома са реалним коефицијентима који равномерно конвергира ка f .

Доказ: Довољно је доказати теорему за $[a, b] = [0, 1]$ и непрекидну функцију за коју је $f(0) = f(1) = 0$. Заиста, у противном можемо да посматрамо функцију

$$g(x) = f(a + (b - a)x) - f(a) - x(f(b) - f(a)),$$

израз $x(f(b) - f(a))$ је полином, смена променљиве $x \mapsto a + (b - a)x$ полином трансформише у полином и не мења својство равномерности лimesа (јер се ради о бијекцији $\varphi : [0, 1] \rightarrow [a, b]$, па је $\sup_{[0, 1]} |f - p_n| = \sup_{[a, b]} |f \circ \varphi - p_n \circ \varphi|$).

Претпоставимо да је $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ непрекидна функција таква да је $f(0) = f(1) = 0$. Захваљујући овој претпоставци, можемо непрекидно да продужимо f и ван интервала $[0, 1]$, тако да је $f(x) \equiv 0$ за $x < 0$ и $x > 1$, и претпоставимо да $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Нека је, за $n \in \mathbb{N}$,

$$\Delta_n(x) = \frac{1}{c_n}(1 - x^2)^n,$$

где је

$$c_n = \int_{-1}^1 (1 - r^2)^n dr = 2 \int_0^1 (1 - r^2)^n dr \quad \text{тј.} \quad \int_{-1}^1 \Delta_n(x) dx = 1.$$

Нека је

$$p_n(x) = \int_{-1}^1 f(x + s)\Delta_n(s) ds.$$

Сменом променљиве $t = x + s$ добијамо (због начина на који смо продужили f ван $[0, 1]$)

$$p_n(x) = \int_0^1 f(t)\Delta_n(t - x) dt,$$

одакле видимо да је p_n полином. При томе, ако је f реална функција, p_n је полином са реалним коефицијентима.

Нека је $\varepsilon > 0$. Из Канторове теореме (237) следи да је функција f равномерно непрекидна, па постоји $\delta > 0$ тако да из $|x - y| < \delta$ следи $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$.

Из дефиниције c_n и Бернулијеве неједнакости следи

$$2 \int_0^1 (1-r^2)^n dr \geq 2 \int_0^{1/\sqrt{n}} (1-r^2)^n dr \geq 2 \int_0^{1/\sqrt{n}} (1-nr^2) dr = \frac{4}{3\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}},$$

па је $c_n^{-1} < \sqrt{n}$. Одатле следи да је за $\delta \leq |x| \leq 1$

$$\Delta_n(x) \leq \sqrt{n}(1-\delta^2)^n.$$

Због $\int_{-1}^1 \Delta_n(x) dx = 1$, за све $0 \leq x \leq 1$ важи

$$\begin{aligned} |p_n(x) - f(x)| &= \left| \int_{-1}^1 (f(x+t) - f(x)) \Delta_n(t) dt \right| \\ &\leq \int_{-1}^1 |f(x+t) - f(x)| \Delta_n(t) dt \\ &= \left(\int_{-1}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^1 \right) |f(x+t) - f(x)| \Delta_n(t) dt \\ &\leq 2\|f\|_{\infty} \int_{-1}^{-\delta} \Delta_n(t) dt + \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} \Delta_n(t) dt + 2\|f\|_{\infty} \int_{\delta}^1 \Delta_n(t) dt \\ &\leq 4\|f\|_{\infty} \sqrt{n}(1-\delta^2)^n + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Први сабирак у последњем реду је, за довољно велико n , мањи од $\varepsilon/2$, па је $\|p_n - f\|_{\infty} < \varepsilon$.

Задатак: Доказати да је скуп полинома са рационалним коефицијентима у случају реалних, односно коефицијентима из $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$ у случају комплексних функција, густ у $C[a, b]$. Ово је још један доказ сепарабилности простора $C[a, b]$ о којој је било речи у (243).

Задатак: Нека је p_n низ полинома који конвергира униформно на \mathbb{R} . Доказати да је његов лимес полином. Овај задатак показује да услов компактности домена у Вајерштрасовој теорему не може да се изостави.

(278) **Задатак:** Нека је $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ непрекидна функција и нека је

$$\int_a^b x^n f(x) dx = 0 \quad \text{за све } n \in \{0\} \cup \mathbb{N}.$$

Доказати да је $f \equiv 0$.

Решење: Функција $\bar{f}(x) = \overline{f(x)}$ је непрекидна. Нека је p_n низ полинома који униформно конвергира ка \bar{f} . Из комутативности униформног лимеса и интеграла следи

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b p_n(x) f(x) dx = 0,$$

па је $|f(x)|^2 \equiv 0$.

(279) *Компактно отворена топологија.* Нека су X и Y тополошки простори и $C(X, Y)$ скуп свих непрекидних пресликавања $f : X \rightarrow Y$. Нека је τ_Y фамилија свих отворених подскупова у Y и \mathcal{C}_X фамилија свих компактних подскупова у X . За сваки пар $(K, V) \subset \mathcal{C}_X \times \tau_Y$ дефинишимо скуп

$$\mathcal{U}_{K,V} := \{f \in C(X, Y) \mid f(K) \subset V\} \subset C(X, Y).$$

Фамилија

$$\beta := \{\mathcal{U}_{K,V} \mid (K, V) \subset \mathcal{C}_X \times \tau_Y\}$$

је база топологије на $C(X, Y)$. Топологија генерисана овом базом (видети (87) и (88)) назива се *компактно-отвореном топологијом* на скупу $C(X, Y)$.

Задатак: Нека је Y метички простор. Доказати да је $C(X, Y)$ Хаусдорфов (па је у њему дефинисан појам лимеса). Доказати да у том случају низ f_n у $C(X, Y)$ конвергира ка $f_\infty \in C(X, Y)$ ако и само ако за сваки компактан подскуп $K \subset X$ низ f_n конвергира ка f_∞ равномерно на K (тј. низ рестрикција $f_n|_K : K \rightarrow Y$ равномерно конвергира ка рестрикцији $f_\infty|_K : K \rightarrow Y$).

Задатак: Доказати да је простор Y просто повезан (видети дефиницију у (122)) ако и само ако је простор $C(\mathbb{S}^1, Y)$ путно повезан.

Тополошки простор $C(\mathbb{S}^1, Y)$ назива се *простором слободних петљи* у простору Y и означава се са $\Lambda(Y)$. Ако је $y_0 \in Y$ фиксирана тачка, потпростор простора $\Lambda(Y)$

$$\Omega(Y) := \{\gamma \in \Lambda(Y) \mid \gamma(1) = y_0\}$$

назива се *простором петљи* са базном тачком y_0 .

Задатак: Доказати да је простор X n -повезан ако и само ако је простор петљи $\Omega(X)$ $(n-1)$ -повезан.

(280) Нека је Y Банахов простор над пољем $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ и $A \subset \mathbb{K}$. Функција $f : A \rightarrow Y$ је *аналитичка у тачки* $a \in A$ ако је

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

за неки низ c_n у Y , такав да ред $\sum c_n (z - a)^n$ конвергира на скупу $|z - a| < \rho$ за неко $\rho > 0$. Функција је *аналитичка на скупу* A ако је аналитичка у свакој тачки тог скупа. *Цела функција* је функција која је аналитичка на \mathbb{K} .

(281) Ако ред $\sum c_n (z - a)^n$ има полупречник конвергенције $R > 0$, онда је функција

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

аналитичка на скупу $D = \{z \in \mathbb{K} \mid |z - a| < R\}$.

Доказ: Нека је $b \in D$. Тада је

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n ((z - b) + (b - a))^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (z - b)^k (b - a)^{n-k} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} c_n \binom{n}{k} (b - a)^{n-k} \right) (z - b)^k. \end{aligned}$$

Промена поретка сумирања је оправдана због апсолутне конвергенције:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \|c_n\| \binom{n}{k} |z - b|^k |b - a|^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \|c_n\| (|z - b| + |b - a|)^n < +\infty,$$

за z за које важи $|z - b| + |b - a| < R$, јер степени ред $\sum c_n t^n$ апсолутно конвергира за све $t \in [0, R[$. Ако напишемо $\tilde{c}_n = \sum_{n=k}^{\infty} c_n \binom{n}{k} (b-a)^{n-k}$, добијамо

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_n (z - b)^n,$$

тј. f је аналитичка у b .

Задатак: Нека су $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ и $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ аналитичке функције дефинисане на отвореним скуповима U и V . Доказати да из Кошијевог правила множења (апсолутно конвергентних) редова (187) следи да је њихов производ $fg : U \cap V \rightarrow \mathbb{C}$ аналитичка функција.

(282) Нека c_n низ у \mathbb{C} и f аналитичка функција реалне променљиве x :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n.$$

Из (261) следи да је

$$\int_p^q f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x - a)^{n+1}}{n + 1} \Big|_p^q$$

за произвољне унутрашње тачке p, q интервала конвергенције.

Из $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ следи да ред $\sum c_n n (x - a)^{n-1}$ има исти полупречник конвергенције као и ред $\sum c_n (x - a)^n$, па из (264) следи да је функција f диференцијабилна у унутрашњим тачкама домена и да је њен извод

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}.$$

Специјално, $f'(a) = c_1$. Понављањем овог поступка добијамо израз $f^{(n)}(a) = n! c_n$, одакле следи да се функција која је аналитичка у тачки a може записати у облику

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n.$$

Ред на десној страни назива се *Тејлоровим редом* функције f . Специјално, аналитичка функција је класе C^∞ .

Задатак: Нека је $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ цела функција, таква да је за свако $a \in \mathbb{C}$ у њеном развоју у ред са центром у a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

бар један од коефицијената c_n једнак нули. Доказати да је f полином.

(283) *Пример функције која је класе C^∞ а није аналитичка.* Функција

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{за } x \leq 0 \\ e^{-1/x} & \text{за } x > 0 \end{cases}$$

је бесконачно пута диференцијабилна, али није аналитичка у нули, јер је $f^{(n)}(0) = 0$ за све n , па би, кад би f била аналитичка у нули, за x у околини нуле било

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \equiv 0.$$

Међутим, f је строго позитивна у свакој (десној) околини нуле.

(284) Композиција аналитичких функција је аналитичка.

Скица доказа: Нека је f аналитичка у тачки a и g аналитичка у тачки $b = f(a)$. Тада постоје ненегативне константе C_1, C_2, ρ_1, ρ_2 такве да, x близу a и $y = f(x)$, важи

$$|f^{(m)}(x)| \leq C_1 \frac{m!}{\rho_1^m} \quad \text{и} \quad |g^{(m)}(y)| \leq C_2 \frac{m!}{\rho_2^m}$$

Користећи ове неједнакости, ди Брунову формулу за n -ти извод композиције (видети нпр. [15])

$$(g \circ f)^{(n)}(x) = \sum \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_n!} g^{(k)}(y) \left(\frac{f^{(1)}(x)}{1!} \right)^{k_1} \left(\frac{f^{(2)}(x)}{2!} \right)^{k_2} \dots \left(\frac{f^{(n)}(x)}{n!} \right)^{k_n},$$

где је $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ и где се сумирање врши по свим k_1, k_2, \dots, k_n таквим да је $k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n$ и формулу

$$\sum \frac{k!}{k_1! k_2! \dots k_n!} \rho^k = \rho(1 + \rho)^{n-1}$$

(где је, опет, $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ и сумирање се врши по свим k_1, k_2, \dots, k_n таквим да је $k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n$; ова формула може да се изведе из ди Брунове примењене на геометријске степене редове, видети [15]), добијамо оцене за коефицијенте и остатак Тејлоровог реда композиције, одакле закључујемо да тај ред конвергира у околини тачке a .

(285) За функцију $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ су еквивалентни услови

(а) $f(x) = e^x$

(б) $f' = f$ и $f(0) = 1$.

Доказ: $f'(x) = f(x) \Leftrightarrow (e^{-x} f(x))' = 0 \Leftrightarrow e^{-x} f(x) = e^{-0} f(0)$.

Последица:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

јер десна страна задовољава (б).

(286) *Биномни ред*. За свако $\alpha \in \mathbb{R}$ је

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad \text{за } |x| < 1.$$

Доказ: Из Даламберовог теста следи да ред на десној страни конвергира за $|x| < 1$. Ако његов збир (тј. израз на десној страни) означимо са $f(x)$, диференцирањем, уз помоћ (282), после сређивања биномних коефицијената добијамо $(1+x)f'(x) = \alpha f(x)$, односно

$$(1+x)^{-\alpha} f'(x) - \alpha(1+x)^{-\alpha-1} f(x) = 0,$$

tj. $((1+x)^{-\alpha}f(x))' = 0$. Пошто је $f(0) = 1$, одатле следи да је $(1+x)^{-\alpha}f(x) = 1$.

Специјално, ако је $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, добијамо Њутнову биномну формулу. У том случају, збир на десној страни је коначан (па формула важи за све x).

Ако $\alpha \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$, онда је полупречник конвергенције биномног реда $R = 1$, па ред на интервалу $] -1, 1[$ конвергира апсолутно, а на његовим компактним подскуповима и униформно. На рубовима интервала конвергенције, у тачкама ± 1 , конвергенција зависи од α :

- за $\alpha > 0$ ред апсолутно конвергира за $x \in \{-1, 1\}$;
- за $-1 < \alpha \leq 0$ ред неапсолутно конвергира за $x = 1$ и дивергира за $x = -1$;
- за $\alpha \leq -1$ ред дивергира за $x \in \{-1, 1\}$.

Општије, ако су $\zeta = \alpha + i\beta$ и z комплексни бројеви, онда биномни ред

$$(1+z)^\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\zeta}{n} z^n$$

Има коначан број сабирака ако је $\zeta \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, па је питање конвергенције тривијално. За $\zeta \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$ биномни ред

- конвергира на диску $|z| < 1$ и дивергира на скупу $|z| > 1$;
- на јединичном кругу $|z| = 1$ без тачке $z = -1$ апсолутно конвергира за $\alpha > 0$, условно конвергира за $-1 < \alpha \leq 0$ и дивергира за $\alpha \leq -1$;
- у тачки $z = -1$ апсолутно конвергира за $\alpha > 0$ и дивергира за $\alpha \leq 0$.

Специфичност тачке $z = -1$ се појављује из следећег разлога. Ако α није природан број или нула, низ

$$a_n := \binom{\alpha}{n}$$

је, почев од неког n , алтернирајући: $a_{n+1} = -a_n$. Тако да у тачки $z = 1$ имамо посла са редом чији је општи члан $(-1)^n |a_n|$. Његову апсолутну конвергенцију можемо да испитамо Рабеовим, а условну Лајбницовим тестом (видети [15] за детаље). У тачки $z = -1$ се појављује још једно $(-1)^n$ и због тога немамо неапсолутну конвергенцију, него само апсолутну или дивергенцију. Остале тачке на рубу $|z| = 1$ су сличније тачки $z = 1$ него $z = -1$ зато што се, после записа комплексног броја z у тригонометријском облику, у општем члану биномног реда појављују синуси и косинуси и његова неапсолутна конвергенција може да се утврди помоћу Абел–Дирихлеовог става.

Приметимо да конвергенција не зависи од $\beta = \text{Im } \zeta$.

Задатак: Доказати да је функција $f(z) = (1-z-z^2)^{-1}$ аналитичка у нули и да коефицијенти c_n у њеном развоју у степени ред $\sum c_n z^n$ формирају Фибоначијев низ: $c_0 = c_1 = 1$, $c_{n+2} = c_{n+1} + c_n$.

(287) Конвергенцију биномног реда можемо да искористимо за још један доказ *Вајерштрасове теореме* о апроксимацији непрекидних функција полиномима (277).

Из Рабеовог теста за конвергенцију редова следи да, за $\alpha > 0$, биномни ред

$$(1-t)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} t^n$$

конвергира у тачки $t = 1$. Из 200 следи да овај ред конвергира равномерно по $t \in [0, 1]$. Специјално, за $\alpha = 1/2$ ред

$$\sqrt{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} t^n$$

конвергира равномерно по $x \in [-1, 1]$. Ако ставимо $t = 1 - x^2$ добијамо равномерно конвергентан степени

$$|x| = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (1-x^2)^n$$

што је још један начин да се докаже тврђење 288 о равномерној апроксимацији функције $|x|$ полиномима. Приметимо да из равномерне конвергенције низа полинома $p_n(x)$ ка $|x|$ на $[-1, 1]$ следи равномерна конвергенција низа полинома $\rho p_n(\rho^{-1}x)$ ка $\rho|\rho^{-1}x|$ на $[-\rho, \rho]$ за свако $\rho > 0$. Одатле следи да функција $|x|$ може да се равномерно апроксимира полиномима не само на интервалу $[-1, 1]$ на коме равномерно конвергира претходни ред, него и на сваком компактном интервалу.

Ову чињеницу можемо да искористимо да докажемо Вајерштрасову теорему. Пошто смо у (243) видели да је скуп део по део линеарних функција густ у $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$, довољно је доказати да за сваку део по део линеарну функцију постоји низ полинома који јој конвергира у норми $\|\cdot\|_\infty$. Свака део по део линеарна функција $L : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, са теменима (x_j, y_j) , $y_j = L(x_j)$ за

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b,$$

може да се напише у облику

$$L(x) = \sum_{j=0}^m c_j |x - x_j|$$

за погодно изабране коефицијенте c_1, \dots, c_m . Заиста, десна страна овог израза је део по део линеарна функција (непрекидна је и линеарна је на сваком интервалу $[x_j, x_{j+1}]$), па је једнозначно одређена теменима. Да би она заиста била једнака функцији L , потребно је и довољно да буде

$$y_k = \sum_{j=0}^m c_j |x_k - x_j|$$

за све $k \in \{0, \dots, m\}$. Ово је систем линеарних једначина по непознатим c_0, \dots, c_m . Матрица овог система је симетрична квадратна матрица $(|x_k - x_j|)_{k,j \in \{0, \dots, m\}}$. Уместо да разматрамо решивост овог система у терминима својстава те матрице, можемо да поступимо на следећи начин.

Скуп свих део по део линеарних функција чија темена имају x -координате x_0, \dots, x_m је векторски простор, јер је линеарна комбинација део по део линеарних функција део по део линеарна функција. Означимо овај простор са \mathcal{L} . Његова димензија је $m + 1$, јер је пресликавање

$$\mathcal{L} \ni L \mapsto (L(x_0), \dots, L(x_m)) \in \mathbb{R}^{m+1}$$

линеарни изоморфизам – инјективно је зато што је L једнозначно одређено теменима, а сурјективно зато што сваки избор темена одређује неко L .

Линеарно пресликавање векторских простора

$$\mathbb{R}^{m+1} \ni (c_0, \dots, c_m) \mapsto \sum_{j=0}^m c_j |x - x_j| \in \mathcal{L}$$

има тривијално језгро: ако је сума на десној страни једнака нули, онда је њен извод по x на $[x_{j-1}, x_j]$ једнак

$$c_0 + \dots + c_{j-1} - c_j - c_{j+1} - c_{j+2} - \dots - c_m = 0$$

а на $[x_j, x_{j+1}]$

$$c_0 + \dots + c_{j-1} + c_j - c_{j+1} - c_{j+2} - \dots - c_m = 0,$$

одакле следи $c_j = 0$ за $1 \leq j \leq m - 1$, а одатле лако следи и $c_0 = c_m = 0$. Пошто има тривијално језгро, ово линеарно пресликавање је инјективно. Линеарно пресликавање простора исте димензије је инјективно ако и само ако је сурјективно. То доказује да је свака део по део линеарна функција L слика овог пресликавања, тј. да се може написати у горе наведеном облику.

Из развоја функције $f(t) = (1+t)^\alpha$ за $t = (x-x_j)^2(b-a)^{-2} - 1$ и $\alpha = 1/2$ у биномни ред (у том случају биномни ред конвергира и на рубу домена) видимо да постоји низ полинома (парцијалних сума степеног реда) који равномерно на $[a, b]$ конвергира ка свакој од функција

$$|x - x_j| = (b - a) \sqrt{1 + ((x - x_j)^2(b - a)^{-2} - 1)},$$

па линеарна комбинација тих полинома равномерно конвергира ка L .
(288) Низ полиномских функција $p_n(t)$ који униформно конвергира ка функцији $|t|$, коришћен у претходном доказу, може да се конструише и на следећи начин, без позивања на униформну конвергенцију биномног реда. Нека је $I = [-1, 1]$. Дефинишемо низ полинома $p_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ са

$$p_0 \equiv 0, \quad p_{n+1}(t) = p_n(t) + \frac{1}{2}(t^2 - p_n^2(t)).$$

Тада је $p_n(-t) = p_n(t)$, па је

$$\sup_{t \in I} |p_n(t) - |t|| = \sup_{t \in [0,1]} |p_n(t) - t|.$$

Индукцијом видимо да за $t \in [0, 1]$ важи $p_n(t) \leq t$ и $p_{n+1}(t) \geq p_n(t)$. Следи да низ $p_n(t)$, као растући и ограничен, конвергира за свако t ; означимо његов лимес са $p_\infty(t)$. Преласком на лимес у горњој рекурентној формули добијамо

$$p_\infty(t) = p_\infty(t) + \frac{1}{2}(t^2 - p_\infty^2(t)),$$

тј. $p_\infty(t) = |t|$. По Динијевој теореме (270) ова конвергенција је униформна на $[0, 1]$, а због парности и на I .

(289) За функцију $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ су еквивалентни следећи услови

(а) $f(x) = \sin x$

(б) $f'' = -f$, $f(0) = 0$ и $f'(0) = 1$.

Доказ: Импликација **(а)** \Rightarrow **(б)** очигледно важи, треба доказати још **(б)** \Rightarrow **(а)**. Из $f'' = -f$ следи да је функција f класе C^∞ – десна страна ове једнакости (функција f) је двапут диференцијабилна, а онда је двапут диференцијабилна и лева, што значи да је f заправо четири пута диференцијабилна, али онда је и f'' четири пута диференцијабилна, тј. f је шест пута диференцијабилна итд. Из Тејлорове формуле

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + r_n(x)$$

са остатком у Лагранжевом облику $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$ следи

$$|r_n(x)| \leq \max_{k \in \{0,1\}} \sup_{c \in [-x,x]} |f^{(k)}(c)| \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Максимум на десној страни је, за свако x , коначан (јер, због $f'' = -f$, укључује само коначно много k), па за свако $x \in \mathbb{R}$ важи $r_n(x) \rightarrow 0$ кад $n \rightarrow \infty$. Одатле, после преласка на $\lim_{n \rightarrow \infty}$ у Тејлоровој формули, добијамо

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n+1)!},$$

јер из **(б)** следи $f^{(2n)}(0) = 0$, $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$. Пошто функција $x \mapsto \sin x$ задовољава **(б)**, исти аргументи нам дају израз

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n+1)!}$$

чиме је доказано **(б)** \Rightarrow **(а)**.

(290) Комплексне функције

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

су целе; оне уопштавају експоненцијалне и тригонометријске функције реалне променљиве. Приметимо да су синус и косинус *неограничене* функције комплексне променљиве. Специјално, за $z = ix$ из представљања ових функција помоћу редова добијамо Ојлерову формулу

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Ако је $a > 0$, комплексна функција $a^z := e^{z \log a}$ је цела.

Задатак: Доказати да ред $\sum \frac{z^n}{n!}$ апсолутно конвергира на целој комплексној равни \mathbb{C} и униформно конвергира на њеним компактним подскуповима, али да не конвергира униформно на \mathbb{C} .

Задатак: Доказати из Кошијевог услова униформне конвергенције (Кошијев услов у норми $\|\cdot\|_\infty$) следи да ред $\sum c_n z^n$ ($c_n \in \mathbb{C}$) униформно конвергира на \mathbb{C} ако и само ако је $c_n =_{\mathcal{F}_\mathbb{N}} 0$, тј. ако и само ако је $\sum c_n z^n$ полином.

Интеграцијом геометријског реда уз примену (261) добијамо

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

Реална функција

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

је аналитичка на интервалу $] -1, 1[$; ред на десној страни конвергира на $] -1, 1[$.

Слично, полазећи од геометријског реда чија је сума $1/(1+x^2)$, се доказује да је

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

за $x \in] -1, 1[$.

Применом (286) за $\alpha = -1/2$ на $1/\sqrt{1-x^2}$ и интеграцијом добијамо

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad \text{за } |x| < 1.$$

Задатак: Функцију $f(x) = e^{1/(x-1)}$ реалне променљиве можемо да развијемо у ред, најпре по степенима од $(x-1)^{-1}$, а затим по x :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x-1)^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-1)^k x^k.$$

Доказати да је ред добијен променом поретка сумирања Тејлоров ред функције f и извести одатле закључак да је f аналитичка функција на $] -1, 1[$ (видети, такође, (284)). Доказати да добијени ред конвергира за $x = 1$.

Задатак: Доказати да функција

$$f(z) : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z} + \frac{1}{2}$$

може да се дефинише у тачки $z = 0$ тако да је добијена функција аналитичка. Коefицијенти B_n у њеном развоју у степени ред

$$\frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z} + \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{B_n}{(2n)!} z^{2n-1}$$

називају се *Бернулијевим бројевима*. Израчунати B_1, \dots, B_5 . Доказати да је низ B_n неограничен и одредити полупречник конвергенције реда на десној страни.

- (291) **Задатак:** Нека је X Банахов простор и a_n низ у X . Доказати да ако *Дирихлеов ред* $\sum a_n n^{-t}$ конвергира за неко $t_0 \in \mathbb{R}$, онда он униформно конвергира на $[t_0, +\infty[$. Специјално, *Риманова зета функција* $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ је дефинисана на скупу $\operatorname{Re} z > 1$.
- (292) *Принцип изолованих нула.* Нека је Y Банахов простор над пољем \mathbb{K} реалних или комплексних бројева, $A \subset \mathbb{K}$ и $f : A \rightarrow Y$ функција аналитичка у тачки a , дата у околини те тачке степеним редом

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

са полупречником конвергенције $R > 0$. Ако је $c_n \neq 0$ за неко n , онда постоји околина U тачке a таква да је

$$(\forall z \in U \setminus \{a\}) f(z) \neq 0.$$

Доказ: Нека је $k = \min\{n \in \mathbb{N} \mid c_n \neq 0\}$. Тада је

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n (z - a)^n = (z - a)^k \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+k} (z - a)^n = (z - a)^k g(z).$$

Ред $\sum c_{n+k} (z - a)^n$ има исти полупречник конвергенције као и ред $\sum c_n (z - a)^n$, па је g непрекидна на скупу $D = \{z \in \mathbb{K} \mid |z - a| < R\}$. Из непрекидности и $g(a) = c_k \neq 0$ следи да је $g(a) \neq 0$ у некој околини U тачке a , па функција $f(z) = (z - a)^k g(z)$ нема нула на скупу $U \setminus \{a\}$.

- (293) *Теорема јединствености.* Ако је аналитичка функција једнака нули на скупу који има тачку нагомилавања, онда је она идентички једнака нули. Ова теорема је контрапозиција принципа изолованих нула. Некада се формулише и овако: две аналитичке функције које су једнаке на скупу који има тачку нагомилавања су идентички једнаке.

На пример, за комплексне бројеве важи идентитет

$$\sin(2z) = 2 \sin z \cos z,$$

јер он важи за реалне бројеве, а скуп \mathbb{R} у \mathbb{C} има тачку нагомилавања (функције на обе стране ове једнакости су аналитичке, за десну страну једнакости то следи из правила Кошијевог множења комплексних редова – видети (281)).

- (294) Други начин да се види да C^∞ функција из (283) није аналитичка је помоћу Теореме јединствености (293) (или Принципа изолованих нула (292)): скуп нула функције f је интервал $]-\infty, 0]$; нула је његова тачка нагомилавања.
- (295) *Принцип максимума модула.* Нека је $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ аналитичка функција у области $U \subset \mathbb{C}$. Ако $z \mapsto |f(z)|$ има локални максимум у

унутрашњој тачки скупа U , онда је функција f константа. Последница: модул аналитичке комплексне функције комплексне променљиве достиже максимум на рубу домена.

Доказ: Довољно је доказати да, ако је

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

онда $|f(z)|$ не може да има локални максимум у тачки $z = 0$. Ако је $c_0 = 0$, ово тврђење следи из Принципа изолованих нула (292). Претпоставимо да је $c_0 \neq 0$ и да $|f|$ достиже локални максимум у нули. Ако f није константна функција, онда је $c_m \neq 0$ и за неко $m \geq 1$, па је

$$f(z) = c_0 + c_m z^m + z^m g(z),$$

где је g аналитичка функција у околини нуле и $g(0) = 0$. Из непрекидности функције g следи да постоји диск полупречника r_0 са центром у нули, такав да је на њему $|g(z)| \leq \frac{1}{2}|c_m|$. Нека је $r < r_0$, $c_m = |c_m|e^{i\theta}$ и нека је $z_0 = re^{-i\theta/m}$. Тада је $c_m z_0^m = |c_m|r^m$ позитиван реални број, па из неједнакости троугла следи

$$|f(z_0)| \geq c_0 + |c_m|r^m - r^m|g(z_0)| \geq c_0 + \frac{1}{2}|c_m|r^m,$$

што је у противречности са претпоставком да је нула локални максимум функције $|f|$.

Задатак: На примеру функције $f(x) = (1 + x^2)^{-1}$ показати да Принцип максимума модула не важи за аналитичке функције реалне променљиве. На ком месту у доказу Принципа максимума модула се користи специфичност комплексног домена?

Задатак: На примеру Банаховог простора $X = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ са нормом $\|(z_1, z_2)\|_{\infty} = \max\{|z_1|, |z_2|\}$ и аналитичке функције

$$f : \mathbb{C} \rightarrow X, \quad f(z) = (1, 0) + (0, 1)z$$

показати да Принцип максимума модула не важи за аналитичке функције са кодоменом у Банаховом простору, јер је $\|f\|_{\infty} \equiv 1$ за $|z| < 1$. На ком месту у доказу Принципа максимума модула се користи специфичност комплексног кодомена?

Задатак: Нека је $V \subset \mathbb{C}$ отворен скуп и $f : \bar{V} \rightarrow \mathbb{C}$ функција која је аналитичка на V , непрекидна на \bar{V} и није константна. Ако је функција $|f(z)|$ константна на рубу ∂V , доказати да је $f(z_0) = 0$ за неко $z_0 \in V$.

(296) *Абелова теорема.* Ако ред $\sum c_n$ у Банаховом простору X конвергира, онда ред $\sum c_n t^n$ равномерно конвергира на интервалу $0 \leq t \leq 1$ и важи

$$\lim_{t \rightarrow 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n.$$

Под истим условима, ред $\sum c_n z^n$ конвергира на диску $D = \{z \in \mathbb{C}, \text{ али у комплексном случају важи}$

$$\lim_{z \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n, \quad \text{уз услов } |1 - z| \leq C(1 - |z|) \text{ за неко } C > 0.$$

Без додатног услова $|1 - z| \leq C(1 - |z|)$, комплексна верзија ове теореме не важи. Приметимо да је тај услов еквивалентан услову да $z \rightarrow 1$ тако да z остаје унутар угла између две тетиве јединичног круга којима је 1 заједничка тачка: величина $|1 - z|$ је растојање између тачака 1 и z , а $1 - |z|$ растојање између тачака 1 и $|z|$ на x -оси. Када $z \rightarrow 1$, количник $|1 - z|/(1 - |z|)$ је близу $1/\cos \theta$, где је θ угао између $1 - z$ и $1 - |z|$, па је тај количник ограничен ако и само ако θ не прилази произвољно близу $\pi/2$, тј. z остаје унутар угла између две фиксирание тетиве јединичног круга са заједничким теменом у тачки 1.

Овакав лимес се назива *нетангентним лимесом*.

Доказ: Пошто $[0, 1]$ лежи унутар оштрог угла између две тетиве са теменом у 1, реална верзија ове теореме је последица комплексне. Зато је довољно доказати комплексну. Ако $\sum c_n$ конвергира, онда за полупречник R конвергенције реда $\sum c_n z^n$ важи $R \geq 1$, па је функција комплексне променљиве

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

са вредностима у X дефинисана на јединичном диску D . Без умањења општости можемо да претпоставимо да је $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = 0$ (у супротном је довољно одузети константу од c_0), тј. да низ парцијалних сума

$$s_n = \sum_{k=0}^n c_k$$

конвергира ка нули. Нека је $\varepsilon > 0$. Тада, за довољно велико n_0 важи $\|s_n\| < \varepsilon$ за $n \geq n_0$. Из $c_k = s_k - s_{k-1}$ следи

$$f(z) = \sum_{n=0}^{n_0} (s_n - s_{n-1})z^n + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} (s_n - s_{n-1})z^n, \quad \text{где је } s_{-1} := 0.$$

Норма првог сабирка у овој једнакости је

$$\|(1 - z)(s_0 + s_1 z + \dots + s_{n_0-1} z^{n_0-1}) + s_{n_0} z^{n_0}\| \leq |1 - z| \sum_{n=0}^{n_0-1} \|s_n\| |z|^n + \varepsilon,$$

а норма другог је мања од

$$\varepsilon |1 - z| \frac{|z|^{n_0+1}}{1 - |z|}$$

(користили смо $\|s_n\| < \varepsilon$ за $n \geq n_0$ и формулу за суму геометријског реда $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |z|^n = |z|^{n_0+1}/(1 - |z|)$). Одатле следи да $f(z)$ тежи нули кад $z \rightarrow 1$ унутар области у којој је $|1 - z|/(1 - |z|)$ ограничено. Тиме је доказ завршен.

Приметимо да лимес у претходној теореми не зависи од угла унутар кога $z \rightarrow 1$, односно од константе C која дефинише област

$$|1 - z|/(1 - |z|) \leq C.$$

Задатак: Доказати да је $f(z) = e^{1/(z-1)}$ аналитичка функција у јединичном диску и да њен развој у степени ред са центром у нули конвергира за $z = 1$ (видети задатак у (290)). Доказати да је

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 0, \quad \text{кад } x \text{ тежи ка } 1 \text{ унутар интервала } [0, 1[\subset \mathbb{R}.$$

Нека је $z(\varepsilon) = 1 - \varepsilon^2 + i\varepsilon$ крива унутар јединичног диска. Доказати да је

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} z(\varepsilon) = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} |f(z(\varepsilon))| = e^{-1} \neq 0.$$

Овај задатак показује да закључак Абелове теореме не важи ако z тежи ка 1 ван описаног угла (крива $z(\varepsilon)$ у овом задатку је тангентна на круг \mathbb{S}^1 у тачки 1; функција дуж те криве не тежи нули, којој тежи кад z тежи ка 1 радијално или, општије, унутар угла описаног у Абеловој теореми).

- (297) Абелова теорема даје нам могућност да уопштимо збир реда, помоћу *Абеловог поступка збирљивости*. Ред $\sum c_n$ је *збирљив по Абелу* ако постоји

$$\lim_{t \rightarrow 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n;$$

овај лимес се назива његовим *Абеловим збиром*. Из Абелове теореме следи да је конвергентан ред збирљив по Абелу и да му је збир једнак Абеловом збиру. Ред $\sum (-1)^n$ је дивергентан, али је збирљив по Абелу, и Абелов збир му је једнак $1/2$ (јер је $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n$ геометријски ред са збиром $1/(1+t)$).

- (298) Пример из (297) показује да не важи обрнута импликација у Абеловој теореми, без неких додатних услова. Додатни услови под којима обрнута импликација важи називају се *Тауберовим условима*, а одговарајуће теореме *Тауберовим теоремама*. Једна од њих је следећа: Ако за низ c_n важи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n c_n = 0,$$

онда из постојања лимеса

$$\lim_{t \rightarrow 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = A$$

следи конвергенција реда $\sum c_n$ и важи

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = A.$$

Доказ: Нека је $\delta_n = \sup_{m \geq n} \|m c_m\|$. Низ δ_n је опадајући, а из услова теореме следи да $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$. За $n_0 \in \mathbb{N}$ важи

$$\sum_{n=0}^{n_0} c_n - A = \sum_{n=0}^{n_0} c_n (1 - t^n) - \sum_{n=n_0+1}^{\infty} c_n t^n + \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n - A \right).$$

Одатле, уз коришћење неједнакости

$$1 - t^n = (1 - t)(1 + t + \dots + t^{n-1}) \leq n(1 - t)$$

следи

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=0}^{n_0} c_n - A \right\| &\leq (1 - t) \sum_{n=0}^{n_0} \|nc_n\| + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{\|nc_n\|t^n}{n} + \\ &+ \left\| \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n - A \right\| \\ &\leq (1 - t)n_0\delta_0 + \frac{\delta_{n_0+1}}{(n_0+1)} \frac{1}{(1-t)} + \left\| \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n - A \right\|. \end{aligned}$$

Нека је $\varepsilon > 0$. Изаберимо t тако да важи

$$(1 - t)n_0 = \varepsilon.$$

Тако изабрано t тежи 1 кад $n_0 \rightarrow \infty$. Нека је n_0 довољно велико да је $\delta_{n_0+1} < \varepsilon^2$ и t толико близу 1 да важи

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n - A \right\| < \varepsilon.$$

Тада је

$$\left\| \sum_{n=0}^{n_0} c_n - A \right\| \leq (2 + \delta_0)\varepsilon,$$

одакле следи тврђење теореме.

(299) **Задатак:** Нека је

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}.$$

- (а) Доказати да ред на десној страни конвергира за $|z| < 1$.
 (б) Користећи Абелову теорему и

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) > \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=0}^m x^{2^n} > m$$

доказати да ред на десној страни дивергира у тачки $z = 1$.

- (в) Доказати да је $f(z) = z^2 + f(z^2)$ и закључити из (б) да ред дивергира у тачки $z = -1$.
 (г) Слично као у (в), користећи $f(z) = z^2 + z^4 + f(z^4)$ доказати да ред дивергира у тачкама $z = \pm i$ и, општије, користећи $f(z) = z^2 + \dots + z^{2^n} + f(z^{2^n})$ доказати да ред дивергира у тачкама $z = e^{2k\pi i/2^n}$.
 (д) Користећи густину скупа D дијадских разломака (видети (129)) у \mathbb{R} доказати да ред дивергира у свим тачкама јединичног круга.

Овај задатак показује да степени ред може да дивергира на целом рубу диска конвергенције, и то тако да њиме дефинисана аналитичка функција не може да се прошири на већи скуп. Упоредити то са геометријским редом $\sum (-1)^n z^{2^n}$ који конвергира за $|z| < 1$ и дивергира за $|z| \geq 1$, али је његов збир $(1 + z^2)^{-1}$ дефинисан на $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$.

Супротан екстремни случај је следећи задатак.

Задатак: Доказати да степени ред

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

конвергира на целом затвореном диску $|z| \leq 1$, али не конвергира ни на једном већем скупу.

Дакле, степени ред може да конвергира у свим тачкама границе диска конвергенције, али и да дивергира у свим тим тачкама. Лако је конструисати и пример реда који у неким тачкама руба диска конвергенције конвергира, а у неким дивергира.

- (300) Из Абелове теореме можемо да изведемо следећу верзију Кошијевог множења редова (187). Нека је c_n конволуција низова a_n и b_n . Претпоставимо да редови $\sum a_n$, $\sum b_n$ и $\sum c_n$ конвергирају. Тада је

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

Доказ следи из чињенице да редови $\sum a_n x^n$, $\sum b_n x^n$ и $\sum c_n x^n$ апсолутно конвергирају за $|x| < 1$ и Абелове теореме.

- (301) Из непрекидности полиномијалних функција и комутативности униформног и обичног лимеса следи да је функција

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

непрекидна у унутрашњости скупа D (ознаке из (199)) ако је $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, а непрекидна на целом домену ако је $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

- (302) *Асоцијативна алгебра* над пољем \mathbb{K} је векторски простор $(A, +, \cdot)$ над \mathbb{K} , на коме је дефинисано множење вектора $A \times A \rightarrow A$ које задовољава

$$\begin{aligned} x(yz) &= (xy)z, \\ (x+y)z &= xz + yz, \quad x(y+z) = zy + xz, \\ \lambda(xy) &= (\lambda x)y = x(\lambda y), \end{aligned}$$

за све $x, y, z \in A$ и $\lambda \in \mathbb{K}$.

Нормирана алгебра је асоцијативна алгебра која је нормирани векторски простор, и која задовољава

$$\|xy\| \leq \|x\| \|y\| \quad \text{за све } x, y \in A.$$

Задатак: Доказати да је за свако $a \in A$ множење $A \ni x \mapsto ax \in A$ непрекидно.

Задатак: Доказати да је пресликавање

$$\mathcal{L}(X_1 \times X_2; Y) \times \mathcal{L}(X_1; X_1 \times X_2) \rightarrow \mathcal{L}(X_1; Y), \quad (S, T) \mapsto S \circ T$$

на просторима непрекидних линеарних оператора непрекидно.

Алгебра A је *алгебра са јединицом* ако има неутрал за множење вектора, тј. ако постоји $e \in A$ за које је

$$ex = xe = x \quad \text{за све } x \in A.$$

Нормирана алгебра са јединицом је алгебра са јединицом e која је нормирана и за коју је $\|e\| = 1$. Нормирана алгебра са јединицом која је комплетна у односу на метрику $d(x, y) = \|y - x\|$ назива се *Банаховом алгебром*.

Најједноставнији примери (реалне и комплексне) Банахове алгебре су \mathbb{R} и \mathbb{C} . Простор $C(K)$ непрекидних (реалних или комплексних) функција на компактном скупу је Банахова алгебра у односу на операције дефинисане по тачкама и униформну норму $\|\cdot\|_\infty$. Простор квадратних $n \times n$ матрица је Банахова алгебра, са операцијама сабирања и множења матрица и множења матрица скаларом и било којом нормом $\|\cdot\|_p$ за $1 \leq p \leq \infty$ на \mathbb{K}^{n^2} .

Задатак: Нека је \mathcal{A} подалгебра са јединицом Банахове алгебре. Доказати да је $\overline{\mathcal{A}}$ Банахова алгебра.

Нека је $G(A)$ скуп свих инвертибилних (у односу на векторско множење) вектора Банахове алгебре A . Тада је $G(A)$ група у односу на множење (доказати!).

Ако је $q \in A$ и $\|q\| < 1$, онда је геометријски ред $\sum \|q\|^n$ конвергентан, па због комплетности и $\|q^n\| \leq \|q\|^n$ конвергира и ред $\sum q^n$. Из

$$(e - q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} (q^n - q^{n+1}) = e,$$

добијамо *уопштење збира геометријског реда*

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = (e - q)^{-1}$$

Одатле следи да је $e \pm q \in G(A)$.

Задатак: Применом претходног аргумента дати још једно решење задатка (51).

(303) **Задатак:** Доказати да је $G(A)$ отворен подскуп у A и да је пресликавање $x \mapsto x^{-1}$ хомеоморфизам $G(A) \rightarrow G(A)$. Нека је G_0 компонента повезаности скупа $G(A)$ која садржи јединицу. Доказати да је G_0 отворена нормална подгрупа групе $G(A)$.

(304) *Множење редова; уопштени дистрибутивни закон.* Нека су a_n и b_n низови у комутативној Банаховој алгебри и нека је $c_n = (a \star b)_n$ њихова конволуција:

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

Задатак: Претпоставимо да је испуњен један од следећа два услова:

- редови $\sum a_n$ и $\sum b_n$ конвергирају, при чему бар један од њих конвергира апсолутно;
- редови $\sum a_n$, $\sum b_n$, $\sum c_n$ конвергирају.

Доказати да је тада

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n,$$

тј. да се доказ одговарајућег правила Кошијевог множења за комплексне редове (187) и (300) преноси и на овај случај. Доказати да за сваке две тачке x, y у комутативној Банаховој алгебри важи

$$e^{x+y} = e^x e^y,$$

где је

$$e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

Задатак: Доказати да је за сваку реалну квадратну матрицу A

$$\det e^A > 0.$$

Упутство: Матрице A и $-A$ комутирају, па је $e^A e^{-A} = \text{Id}$. Одатле следи да је матрица e^A инвертибилна. Посматрати пресликавање $t \mapsto \det e^{tA}$, доказати да је оно непрекидно, и одатле да је његова слика повезан скуп у $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(305) Нека је X нормирани векторски простор. Векторски простор $\mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X; X)$ непрекидних линеарних пресликавања $L : X \rightarrow X$ је нормирана алгебра у односу на операцију \circ композиције пресликавања $L_2 \circ L_1(x) = L_2(L_1(x))$ и норму дефинисану у (145). Јединица у овој алгебри је идентичко пресликавање $I(x) = x$. Ако је простор X Банахов, из (149) следи да је тада $\mathcal{L}(X)$ Банахова алгебра.

(306) Ако је M компактан метрички простор, простор $C(M)$ непрекидних комплексних или реалних функција на M је Банахова алгебра, у односу на сабирање, множење скаларом и множење функција по тачкама:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x), \quad (f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$$

и униформну норму $\|\cdot\|_{\infty}$. Јединица ове алгебре је константна функција $\mathbf{1}(x) = 1$.

Задатак: Наћи све максималне идеале у $C(M)$.

Кажемо да подалгебра \mathcal{A} алгебре $C(M)$ разликује тачке ако

$$(\forall x, y \in M)[x \neq y \Rightarrow (\exists f \in \mathcal{A})f(x) \neq f(y)]$$

(307) *Стон-Вајерштрасова теорема – реални облик.* Нека је M компактан метрички простор и $C_{\mathbb{R}}(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R}\}$ алгебра непрекидних реалних функција са нормом $\|\cdot\|_{\infty}$. Ако \mathcal{A} садржи јединицу и разликује тачке, онда је \mathcal{A} густ подскуп у $C_{\mathbb{R}}(M)$.

Доказ ћемо извести у неколико корака.

(а) Нека је $f \in \mathcal{A}$. Тада је $|f| \in \overline{\mathcal{A}}$. Доказ: Ако је $f \equiv 0$, тврђење је тривијално. Ако је $\|f\|_{\infty} > 0$, онда, за низ полинома p_n из (288) (видети такође 287) који униформно конвергира на $[-1, 1]$ ка $|\cdot|$ важи (због $\|f\|_{\infty}^{-1} f(t) \in [-1, 1]$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(\|f\|_{\infty}^{-1} f) = |f| \|f\|_{\infty}^{-1}, \quad \text{униформно на } M.$$

Пошто је \mathcal{A} алгебра, $p_n(\|f\|_{\infty}^{-1} f) \in \mathcal{A}$, па $|f| \in \overline{\mathcal{A}}$.

- (б) Нека су f, g из \mathcal{A} . Тада су $\max\{f, g\}$ и $\min\{f, g\}$ из $\overline{\mathcal{A}}$. Доказ следи из (а) и

$$\max\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|), \quad \min\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|).$$

- (в) Нека је $x_0, y_0 \in M$, $x_0 \neq y_0$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Тада постоји функција $f \in \mathcal{A}$, таква да је $f(x_0) = \lambda$, $f(y_0) = \mu$. Доказ: Нека је $g \in \mathcal{A}$ функција која разликује тачке x_0 и y_0 ($g(x_0) \neq g(y_0)$) и

$$f(x) = \lambda + \frac{\mu - \lambda}{g(y_0) - g(x_0)}(g(x) - g(x_0)).$$

- (г) Нека је $h \in C_{\mathbb{R}}(M)$, $x_0 \in M$, $\varepsilon > 0$. Тада постоји функција $g \in \overline{\mathcal{A}}$ таква да је $g(x_0) = h(x_0)$ и $g \leq h + \varepsilon$. Доказ: На основу (в), за произвољно $y \in M$ постоји $g_y \in \mathcal{A}$ такво да је $g_y(x_0) = h(x_0)$ и $g_y(y) \leq h(y) + \frac{\varepsilon}{2}$. Из непрекидности следи да је скуп

$$U_y = \{x \in M \mid g_y(x) < h(x) + \varepsilon\}$$

отворена околина тачке y , па је $\{U_y\}_{y \in M}$ отворено покривање компактног простора M . По Борел–Лебеговој теорему, постоји његово коначно потпокривање U_{y_1}, \dots, U_{y_k} . Из (б) следи

$$g = \min\{g_{y_1}, \dots, g_{y_k}\} \in \overline{\mathcal{A}}.$$

Функција g задовољава $g(x_0) = h(x_0)$ и $g < h + \varepsilon$.

- (д) Завршетак доказа: нека је $h \in C_{\mathbb{R}}(M)$. Треба доказати да постоји $g \in \overline{\mathcal{A}}$ такво да је $\|h - g\|_{\infty} < \varepsilon$. Из (г) следи да за свако $x \in M$ постоји функција $g_x \in \overline{\mathcal{A}}$ таква да је $g_x(x) = h(x)$ и $g_x < h + \varepsilon$. Пошто је $g_x(x) > h(x) - \varepsilon$, скуп

$$V_x = \{y \in M \mid g_x(y) > h(y) - \varepsilon\}$$

је отворена околина тачке x , па је $\{V_x\}_{x \in M}$ отворено покривање простора M . Нека је V_{x_1}, \dots, V_{x_n} његово коначно потпокривање. Тада функција

$$g = \max\{g_{x_1}, \dots, g_{x_n}\} \in \overline{\mathcal{A}}$$

задовољава $g - \varepsilon < h < g + \varepsilon$, што значи $\|g - h\|_{\infty} < \varepsilon$.

Задатак: Нека је $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна функција. Доказати да је ψ строго монотона ако и само ако за сваку непрекидну функцију $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ и свако $\varepsilon > 0$ постоје $n \in \mathbb{N}$ и $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ за које важи

$$(\forall x \in [a, b]) \left| f(x) - \sum_{k=0}^n c_k (\psi(x))^k \right| < \varepsilon.$$

- (308) Вајерштрасова теорема о апроксимацији непрекидних функција полиномима (277) је специјални случај Стоун – Вајерштрасове теореме.
- (309) **Задатак:** Нека је \mathcal{A} алгебра реалних функција која садржи јединицу и функцију $f(t) = t$. Описати њено затворење $\overline{\mathcal{A}}$ у односу на $\|\cdot\|_{\infty}$ у алгебри $C_{\mathbb{R}}[a, b]$.
- (310) **Задатак:** Нека је \mathcal{A} алгебра која садржи све линеарне комбинације функција $t \mapsto t^{2n}$, за $n = 0, 1, 2, \dots$. Описати њено затворење у односу на $\|\cdot\|_{\infty}$ у алгебри $C_{\mathbb{R}}[0, 1]$.

- (311) *Стон–Вајерштрасова теорема – комплексни облик.* Нека је M компактан метрички простор и $C_{\mathbb{C}}(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{C}\}$ алгебра непрекидних комплексних функција са нормом $\|\cdot\|_{\infty}$. Нека је \mathcal{A} њена подалгебра која садржи јединицу, разликује тачке и затворена је у односу на комплексно конјуговање, тј.

$$f \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{f} \in \mathcal{A}, \quad \bar{f}(x) = \overline{f(x)}.$$

Тада је \mathcal{A} густ подскуп у $C_{\mathbb{C}}(M)$.

Доказ: $\mathcal{A}_{\mathbb{R}} = \{f \in \mathcal{A} \mid f(M) \subset \mathbb{R}\}$ је *реална подалгебра* алгебре \mathcal{A} (затворена за множење *реалним* скаларом).

Алгебра $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ разликује тачке. Заиста, за $x, y \in M$, $x \neq y$ постоји комплексна функција $f \in \mathcal{A}$ таква да је $f(x) \neq f(y)$, а тада је или $\operatorname{Re} f(x) \neq \operatorname{Re} f(y)$ или $\operatorname{Im} f(x) \neq \operatorname{Im} f(y)$. Пошто је

$$\operatorname{Re} f = \frac{1}{2}(f + \bar{f}), \quad \operatorname{Im} f = \frac{1}{2i}(f - \bar{f}),$$

из затворености у односу на комплексно конјуговање следи $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in \mathcal{A}$.

Из реалне Стон–Вајерштрасове теореме следи $\bar{\mathcal{A}}_{\mathbb{R}} = C_{\mathbb{R}}(M)$, па је

$$\bar{\mathcal{A}} = \bar{\mathcal{A}}_{\mathbb{R}} + i\bar{\mathcal{A}}_{\mathbb{R}} = C_{\mathbb{R}}(M) + iC_{\mathbb{R}}(M) = C_{\mathbb{C}}(M).$$

- (312) Из комплексне Стон–Вајерштрасове теореме следи *Вајерштрасова теорема о апроксимацији тригонометријским полиномима*: Скуп *тригонометријских полинома*

$$p_n(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)),$$

где су $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n \in \mathbb{R}$, је густ у простору 2π -периодичних непрекидних реалних функција реалне променљиве⁴².

Ова теорема некад се назива и *Другом Вајерштрасовом теоремом* о апроксимацији непрекидних функција (теорема о апроксимацији полиномима се тада назива *Првом*).

Доказ: Скуп комплексних полинома⁴³

$$p_n : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}, \quad p_n(z) = \sum_{k=-n}^n c_k z^k, \quad c_k \in \mathbb{C}$$

је подалгебра алгебре $C_{\mathbb{C}}(\mathbb{S}^1)$ непрекидних функција на јединичном кругу. Ова подалгебра задовољава услове Стон–Вајерштрасове теореме. Доказ следи из параметризације јединичног круга $z(t) = \cos t + i \sin t$ и чињенице да се свака непрекидна 2π -периодична функција може представити као непрекидна функција на \mathbb{S}^1 .

- (313) *Вејлова теорема.* Нека је θ реалан број. Посматрајмо низ $x_n = n\theta \pmod{1}$; тј. $x_n = \{n\theta\}$, где $\{\cdot\}$ означава разломљени део реалног броја.

(а) Ако је θ рационалан број, низ x_n је периодичан.

⁴²Ови полиноми су од значаја у теорији тригонометријских Фуријеових редова; коефицијент $1/2$ уз a_0 се пише да би неке формуле у тој теорији имале елегантнији запис.

⁴³Иако у изразу за p_n учествују и негативни степени, овај израз називамо *полиномом*, имајући у виду да се ради о полиному по z и z^{-1} .

(б) Ако је θ ирационалан број, низ x_n је равномерно распоређен у интервалу $[0, 1[$, у смислу да је за сваки интервал $[a, b] \subset [0, 1[$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{k \mid 1 \leq k \leq n, x_k \in [a, b]\}}{n} = b - a,$$

где $\#\{\cdot\}$ означава број елемената скупа.

Доказ тврђења (а) је елементаран: ако је $\theta = p/q$, онда је $x_{n+q} = x_n$. Тврђење (б) је еквивалентно тврђењу да је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \chi_{[a,b]}(x_k) = \int_0^1 \chi_{[a,b]}(t) dt$$

(где је $\chi[a, b]$ карактеристична функција интервала $[a, b]$), јер је интеграл на десној страни једнак $b - a$. Непосредно се проверава да је, за $m \in \mathbb{Z}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2\pi i m x_k} = \int_0^1 e^{2\pi i m t} dt$$

(за $m = 0$ једнакост важи и без лимеса на левој страни, а за $m \neq 0$, због $e^{2\pi i m x_k} = e^{2\pi i m k \theta}$, на левој страни је геометријски збир, који је ограничен, па је лимес једнак нули, као што је, због периодичности, и интеграл на десној страни). Одатле следи да је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P(x_k) = \int_0^1 P(t) dt$$

за сваки тригонометријски полином $P(x) = \sum_{m=-N}^N c_m e^{imx}$. Из Друге Вајерштрасове теореме (312) следи да је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) = \int_0^1 f(t) dt$$

за сваку непрекидну функцију са периодом 1. Доказ сада следи из апроксимације функције $\chi_{[a,b]}$ непрекидном функцијом f таквом да је

$$\chi_{[a,b]}(t) \leq f(t), \quad \int_0^1 f(t) dt < (b - a) + \varepsilon.$$

Задатак: Довршити доказ.

(314) **Задатак:** Доказати да се међу првим цифрама чланова низа 2^n цифра 7 појављује чешће од цифре 8.

Упутство: Ако је a_n прва цифра броја 2^n , онда је $2^n = a_n 10^m + r$, за $0 \leq r < 10^m$. Пошто је $10^m < 2^n < 10^{m+1}$, следи да је $m = [n \log_{10} 2]$ ($[\cdot]$ означава цео део реалног броја). Нека је $x_n = \{n \log_{10} 2\}$ ($\{\cdot\}$ означава разломљени део), тако да је $n \log_{10} 2 = m + x_n$, односно $2^n 10^{-m} = 10^{x_n}$. Одатле, и из $2^n = a_n 10^m + r$ следи, пошто је $10^{-m} r < 1$, да је $a_n = [2^n 10^{-m}] = [10^{x_n}]$, па је $a_n = k$ ако и само ако је $k \leq 10^{x_n} < k + 1$, односно ако и само ако $x_n = \{n \log_{10} 2\}$ припада интервалу $[\log_{10} k, \log_{10}(k + 1)[$. Применити чињеницу да је дужина

овог интервала $\log_{10}(1 + 1/k)$ (дакле мања за $k = 8$ него за $k = 7$) и Вејлову теорему (313).⁴⁴

- (315) Нека су X и Y компактни простори и $C(X) \otimes C(Y)$ алгебра генерисана (као векторски простор) коначним линеарним комбинацијама

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k f_k \otimes g_k, \quad \lambda_k \in \mathbb{K}, \quad f_k \in C(X), \quad g_k \in C(Y),$$

где је \mathbb{K} поље реалних или комплексних бројева и (као у (187))

$$f \otimes g : X \times Y \rightarrow \mathbb{K}, \quad f \otimes g(x, y) := f(x) \cdot g(y).$$

Ова алгебра је подалгебра алгебре $C(X \times Y)$ непрекидних функција на $X \times Y$ која садржи јединицу и разликује тачке, па је, на основу Стон–Вајерштрасових теорема

$$\overline{C(X) \otimes C(Y)} = C(X \times Y),$$

где је на десној страни затворење у норми $\|\cdot\|_\infty$ у $C(X \times Y)$.

- (316) *Бернштајнови полиноми* за непрекидну функцију $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ су полиноми

$$(B_n f)(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k}.$$

Низ $B_n f$ равномерно конвергира ка f на $[a, b]$. Овиме добијамо још један поступак униформне апроксимације непрекидне функције полиномима.

Поделићемо доказ у неколико корака.

- (а) Линеарна смена променљиве $x(t) = (b-a)^{-1}(t-a)$ хомеоморфно пресликава интервал $[a, b]$ на $[0, 1]$; њен инверз је $t(x) = a + (b-a)x$ Бернштајнов полином функције $g = f \circ t : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ је

$$(B_n g)(x) = \sum_{k=0}^n g(k/n) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

- (б) Из биномне формуле следи

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x + (1-x))^n = 1.$$

Диференцирањем по x и сређивањем добијених израза добијамо

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= nx, \\ \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= nx(1-x + nx). \end{aligned}$$

Из ове три једнакости добијамо

$$\sum_{k=0}^n (nx - k)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x).$$

⁴⁴ $\theta = \log_{10} 2$ је ирационалан број, јер би из $\log_{10} 2 = p/q$ следило $2^p = 10^q$, што није могуће јер 2^p није дељиво са 5.

(в) Из прве једнакости у **(б)** следи

$$g(x) = \sum_{k=1}^n g(x) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},$$

па је

$$|g(x) - (B_n g)(x)| \leq \sum_{k=0}^n |g(x) - g\left(\frac{k}{n}\right)| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

(г) Нека је $\varepsilon > 0$. Из униформне непрекидности функције g следи да постоји $\delta > 0$ тако да за $|x_1 - x_2| < \delta$ важи $|g(x_1) - g(x_2)| < \varepsilon/2$. Нека је $x \in [0, 1]$ и

$$A = \{k \mid |x - k/n| < \delta\}, \quad B = \{0, 1, \dots, n\} \setminus A.$$

Раздвојимо последњу суму у **(в)** на суму по скупу A и суму по скупу B . Применом формула доказаних у **(б)** добијамо следеће оцене ових сума. За $k \in A$ важи неједнакост $|g(x) - g(k/n)| < \varepsilon/2$, па је

$$\sum_{k \in A} \left| g(x) - g\left(\frac{k}{n}\right) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k \in A} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

За $k \in B$ је $\delta \leq |x - k/n|$, па добијамо

$$\begin{aligned} \sum_{k \in B} |g(x) - g\left(\frac{k}{n}\right)| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &\leq \frac{2\|g\|_\infty}{\delta^2} \sum_{k=0}^n \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \frac{2\|g\|_\infty}{n^2 \delta^2} \sum_{k=0}^n (nx - k)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \frac{2\|g\|_\infty}{n^2 \delta^2} nx(1-x) \leq \frac{\|g\|_\infty}{2n\delta^2}, \end{aligned}$$

јер је $x(1-x) \leq 1/4$ на $[0, 1]$. За $n > \|g\|_\infty (\delta^2 \varepsilon)^{-1}$ последњи израз је мањи од $\varepsilon/2$. Сабирањем $\sum_A + \sum_B$ закључујемо

$$\|g - (B_n g)\|_\infty < \varepsilon.$$

(д) После смене $t = a + (b-a)x$ инверзне оној у **(а)** завршавамо доказ.

Из овог начина апроксимације непрекидне функције полиномима и комутативности интеграла са униформним лимесима добијамо добро познату формулу

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b (B_n f)(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

за непрекидну функцију $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, која се некад узима као дефиниција интеграла *непрекидне* функције, и назива *Кошијевим интегралом*. Овај приступ дефиницији интеграла је историјски претходио Римановом.

(317) Конструкција низа Бернштајнових полинома из (316) може да се уопшти на следећи начин. Нека је M компактан метрички простор и $C(M)$ векторски простор непрекидних реалних функција на M . Векторски потпростор $H \subset C(M)$ назива се *минимизирајућим* ако има следећа два својства

- $1 \in H$;

- за свако $x \in M$ постоји функција $f \in H$ за коју је x строги локални минимум (тј. $(\forall t \in M) f(x) < f(t)$).

Линеарно пресликавање $T : C(M) \rightarrow C(M)$ назива се *позитивним* ако важи импликација

$$f \geq 0 \Rightarrow T(f) \geq 0.$$

Ова импликација је еквивалентна са

$$f \leq g \Rightarrow T(f) \leq T(g).$$

Коровкинова теорема: Нека је $H_0 \subset C(M)$ подскуп, такав да је њиме генерисани векторски простор⁴⁵ H минимизирајући. Нека је

$$T_n : C(M) \rightarrow C(M)$$

низ позитивних линеарних пресликавања, такав да $T_n(f)$ равномерно конвергира ка f за свако $f \in H_0$. Тада $T_n(f)$ равномерно конвергира ка f за свако $f \in C(M)$.

Доказ: Пошто је тврђење линеарно по f , можемо да претпоставимо да је $H_0 = H$. Доказ ћемо да поделимо на неколико корака.

- (а) За сваку функцију $f \in C(M)$, свако $x_0 \in M$ и свако $\varepsilon > 0$ постоји функција $g \in H$ таква да је

$$g(x_0) < f(x_0) + \varepsilon \quad \text{и} \quad f < g.$$

Доказ: пошто је H минимизирајући, постоји функција $h \in H$ која у x_0 има строги минимум. Можемо да претпоставимо и да је $h(x_0) = 0$ (у противном, користећи чињеницу да $1 \in H$, можемо да узмемо $h - h(x_0) \cdot 1$). Нека је

$$g_n(x) = nh(x) + f(x_0) + \varepsilon.$$

Скупови $V_n = \{x \in M \mid f(x) < g_n(x)\}$ су отворени и покривају M . Пошто је $V_n \subset V_{n+1}$, из компактности следи да је $M = V_m$ за неко m , па функција $g = g_m$ има тражена својства.

- (б) За сваку функцију $f \in C(M)$ и свако $\varepsilon > 0$ постоје функције $g_1, g_2, \dots, g_k \in H$ такве да је

$$f < \inf\{g_1, g_2, \dots, g_k\} < f + \varepsilon.$$

Доказ: Из (а) следи да свако $x \in M$ постоји функција $g_x \in H$ за коју је

$$g_x(x) < f(x) + \varepsilon \quad \text{и} \quad f < g_x.$$

Због непрекидности, прва неједнакост важи и у некој околини U_x тачке x , тј. постоји отворен скуп U_x такав да важи

$$y \in U_x \Rightarrow g_x(y) < f(y) + \varepsilon.$$

Из Борел–Лебегове теореме следи да покривање $\{U_x \mid x \in M\}$ има коначно потпокривање, тј. да је

$$M = U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \dots \cup U_{x_k}$$

за неки коначан скуп тачака x_1, x_2, \dots, x_k . Тражене функције су $g_j = g_{x_j}$.

⁴⁵тј. простор свих *коначних* линеарних комбинација функција из H_0

(в) Нека је $f \in C(M)$ и $\varepsilon > 0$. Изаберимо функције $g_1, g_2, \dots, g_k \in H$ као у (б). По претпоставци, $T_n(g_j)$ равномерно конвергира ка g_j , па је

$$-\varepsilon < T_n(g_j)(x) - g_j(x) < \varepsilon, \quad \text{тј.} \quad g_j(x) - \varepsilon < T_n(g_j)(x) < g_j(x) + \varepsilon.$$

Пошто је T_n позитивно линеарно пресликавање и $f < g_j$, следи да је

$$T_n(f) \leq T_n(g_j) < g_j + \varepsilon.$$

Пошто ова неједнакост важи за свако j , следи да је

$$T_n(f) \leq \inf\{g_1, g_2, \dots, g_k\} + \varepsilon < f + 2\varepsilon.$$

Исто резонување можемо да поновимо за $-f$ уместо f и добијемо

$$-T_n(f) = T_n(-f) < -f + 2\varepsilon.$$

Из претходне две неједнакости следи

$$\|T_n(f) - f\|_\infty < 2\varepsilon,$$

што доказује Коровкинову теорему.

Задатак: Нека је

$$g_0(x) = 1, \quad g_1(x) = x, \quad g_2(x) = x^2.$$

Доказати да је векторски простор генерисан скупом

$$H_0 = \{g_0, g_1, g_2\} \subset C([0, 1])$$

минимизирајући. Доказати да су Бернштајнови полиноми

$$B_n : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1]), \quad B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n f(k/n) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

позитивна линеарна пресликавања и да је

$$B_n(g_0) = g_0, \quad B_n(g_1) = g_1, \quad B_n(g_2) = \frac{1}{n}g_1 + \frac{n-1}{n}g_2.$$

Применом Коровкинове теореме доказати тврђење (316) о равномерној апроксимацији непрекидне функције Бернштајновим полиномима.

(318) **Задатак:** Наћи затворење, унутрашњост, руб и скуп тачака нагомилавања следећих подскупова нормираног простора $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$:

- $\{f \in C[a, b] \mid (\forall t \in [a, b]) f(t) > 0\}$;
- $\{f \in C[a, b] \mid \int_a^b f(t) dt > 0\}$;
- скуп свих полинома.

(319) Теореме о апроксимацији о којима је до сада било речи (Вајерштрасове, Стон–Вајерштрасове, Коровкинова) односе се на функције са вредностима у пољу скалара. Оне могу да се уопште помоћу следеће теореме, познате као *разлагање јединице*⁴⁶. Нека је M компактан метрички простор и V_1, V_2, \dots, V_k његово коначно покривање отвореним

⁴⁶Постоје различите верзије теорема о разлагању јединице – са различитим претпоставкама о простору–домени, покривању, као и са различитим својствима функција које дефинишу то разлагање.

подскуповима. Тада постоје непрекидне функције

$$\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k : M \rightarrow \mathbb{R}$$

такве да је за свако j

$$0 \leq \rho_j \leq 1, \quad \text{supp } \rho_j \subset V_j$$

и за свако $x \in M$

$$\rho_1(x) + \rho_2(x) + \dots + \rho_k(x) = 1.$$

Доказ: Изаберимо, за сваку тачку $x \in M$ њену отворену околину W_x такву да је $\overline{W_x} \subset V_j$ за неко j . Из компактности следи да постоји коначно много тачака, тако да важи

$$W_{x_1} \cup W_{x_2} \cup \dots \cup W_{x_n} = M.$$

Нека је $H_j \subset V_j$ унија скупова $\overline{W_{x_i}}$ који су садржани у V_j . Из Урисонове леме (69) следи да за свако j постоји функција $\phi_j : M \rightarrow [0, 1]$ таква да је

$$\text{supp } \phi_j \subset V_j \quad \text{и} \quad \phi_j(H_j) = \{1\}.$$

Функције

$$\rho_1 = \phi_1, \quad \rho_2 = (1 - \phi_1)\phi_2, \quad \dots \quad \rho_n = (1 - \phi_1)(1 - \phi_2) \dots (1 - \phi_{n-1})\phi_n$$

остварују тражено разлагање јединице.

(320) Покажимо сада како разлагање јединице може да се искористи за уопштење теорема о равномерној апроксимацији са скаларних функција на општија непрекидна пресликавања.

Нека је M компактан метрички простор, Y нормирани векторски простор над пољем $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ и $C(M; Y)$ простор непрекидних пресликавања $f : M \rightarrow Y$. Ако је $H \subset C(M; \mathbb{K})$ са особином да свака функција из $C(M; \mathbb{K})$ може равномерно да се апроксимира функцијама из H , онда свако пресликавање из $C(M; Y)$ може да се равномерно апроксимира линеарним комбинацијама функција из H са коефицијентима из Y .

Доказ: Нека је $\varepsilon > 0$. Пошто је M компактан простор, свако пресликавање $f \in C(M; Y)$ је равномерно непрекидно, па постоји коначна фамилија отворених скупова V_1, V_2, \dots, V_k таква да је

$$M = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$$

и, за свако j ,

$$x, y \in V_j \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

Нека је $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k$ разлагање јединице потчињено покривању $\{V_j\}$, тј. фамилија непрекидних функција $\rho_j : M \rightarrow \mathbb{R}$ таквих да је

$$\text{supp } \rho_j \subset V_j, \quad \rho_1(x) + \rho_2(x) + \dots + \rho_k(x) = 1$$

и нека су $w_j \in f(V_j)$ произвољне тачке. Тада за $x \in V_j$ важи $\|f(x) - w_j\| < \varepsilon$, а за $x \notin V_j$ је $\rho_j(x) = 0$, па је

$$\left\| f(x) - \sum_{j=1}^k \rho_j(x) w_j \right\| = \left\| \sum_{j=1}^k \rho_j(x) (f(x) - w_j) \right\| < \varepsilon.$$

Са друге стране, за свако j постоји $h_j \in H$ такво да је

$$\|h_j - \rho_j\|_\infty < \frac{\varepsilon}{\sum \|w_j\|}.$$

Одатле следи да је

$$\left\| f(x) - \sum_{j=1}^k h_j(x)w_j \right\| < 2\varepsilon,$$

чиме је доказ завршен.

(321) Нека је X векторски простор над пољем $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ или \mathbb{R} . *Скаларни производ у X* је пресликавање $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ са својствима

- (C1) $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$ – адитивност;
- (C2) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ – хомогеност по првој променљивој;
- (C3) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ – хермитска симетрија;
- (C4) $\langle x, x \rangle \geq 0$ – позитивна (семи)дефинитност;
- (C5) $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ – недегенерисаност.

Приметимо да (C4) има смисла и ако је $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, јер из (C3) следи $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$. Из (C1) и (C3) следи да је скаларни производ адитиван и по другој променљивој, а из (C2) и (C3) да је *конјуговано хомоген* по другој променљивој: $\langle x, \lambda y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle$.

Пар $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ назива се *унитарним* (или *предхилбертовим*) *простором*.

(322) Примери унитарних простора:

- \mathbb{R}^n са скаларним производом $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$;
- \mathbb{C}^n са скаларним производом $\langle z, w \rangle = z_1\overline{w_1} + \dots + z_n\overline{w_n}$.
- $l^2(\mathbb{C})$ – простор свих комплексних низова z_n таквих да ред $\sum |z_n|^2$ конвергира, са скаларним производом $\langle \{z_n\}, \{w_n\} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} z_n\overline{w_n}$ (из Хелдерове неједнакости следи да ред на десној страни апсолутно конвергира, што оправдава ову дефиницију).
- простор непрекидних функција $C[a, b]$ са скаларним производом $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)} dt$.

(323) Унитарни простори $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X)$ и $(Y, \langle \cdot, \cdot \rangle_Y)$ су изоморфни ако постоји линеарна бијекција $L : X \rightarrow Y$ таква да је

$$\langle L(x_1), L(x_2) \rangle_Y = \langle x_1, x_2 \rangle_X$$

за све $x_1, x_2 \in X$; тада можемо да поистоветимо X и Y као изоморфне просторе. Таква пресликавања L називамо *линеарним изометријама*; скуп свих линеарних изометрија је група у односу на слагање пресликавања (које има смисла уз речено поистовећивање изоморфних простора, тј. ради се о групи линеарних изометрија $X \rightarrow X$).

У случају $X = Y = \mathbb{C}^n$ ову групу називамо *унитарном групом* и означавамо са $U(n)$, а у случају $X = Y = \mathbb{R}^n$ *ортогоналном групом* и означавамо са $O(n)$. Специјално, $U(1) = \mathbb{S}^1$ је група јединичних комплексних бројева, $O(2)$ је група изометријских трансформација равни које фиксирају координатни почетак. Ако је A ортогонална или унитарна матрица, онда је $|\det A| = 1$ (доказати!).

Подгрупа групе $O(n)$ која чува оријентацију (еквивалентно, језгро морфизма $\det : O(n) \rightarrow \{1, -1\}$ мултипликативних група) се назива

специјалном ортогоналном групом и означава $SO(n)$. Слично, специјална унитарна група је језгро морфизма $\det : U(n) \rightarrow \mathbb{S}^1$. Све ове матричне групе могу да се посматрају и као тополошки простори, са релативном топологијом у \mathbb{K}^{n^2} .

Задатак: Доказати да су $SO(3)$ и $\mathbb{R}P^3$ хомеоморфни.

- (324) Скаларни производ има следећа својства:
- $\langle \sum_i \lambda_i x_i, \sum_j \mu_j y_j \rangle = \sum_i \sum_j \lambda_i \mu_j \langle x_i, y_j \rangle$
 - $\langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle$
 - $\langle x + y, x - y \rangle = \langle x, x \rangle - 2i\operatorname{Im} \langle x, y \rangle - \langle y, y \rangle$
 - $4\operatorname{Re} \langle x, y \rangle = \langle x + y, x + y \rangle - \langle x - y, x - y \rangle$
 - $\operatorname{Im} \langle x, y \rangle = \operatorname{Re} \langle x, iy \rangle$.

Из последње две једнакости следи да је скаларни производ једнозначно одређен вредностима на дијагонали.

- (325) Коши – Шварцова неједнакост: $|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$. Једнакост важи ако и само ако су x и y колинеарни (тј. линеарно зависни).

Доказ: За векторе x, y и реални број ξ важи

$$0 \leq \langle x + \xi y, x + \xi y \rangle = \xi^2 \langle x, x \rangle + 2\xi \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle.$$

Десна страна је квадратни тринوم по ξ , који је позитиван ако и само ако је $(\operatorname{Re} \langle x, y \rangle)^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$. Ако је $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ доказ је овде завршен; ако је $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, тада је $\langle x, y \rangle = e^{i\theta} |\langle x, y \rangle|$ (јер је $|\langle x, y \rangle|^{-1} \langle x, y \rangle \in \mathbb{S}^1$, а сваки комплексни број са јединичног круга је облика $\cos \theta + i \sin \theta$), па је

$$\begin{aligned} |\langle x, y \rangle| &= \langle x, e^{i\theta} y \rangle = \operatorname{Re} \langle x, e^{i\theta} y \rangle \\ &\leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle e^{i\theta} y, e^{i\theta} y \rangle} \\ &= \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}. \end{aligned}$$

Специјални случајеви ове неједнакости, за скаларне производе из (322) су:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} z_n \overline{w_n} \right| &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|^2 \right)^{1/2}, \\ \left| \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt \right| &\leq \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_a^b |g(t)|^2 dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

- (326) Ако је $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ унитарни простор, онда је са $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ на њему дефинисана норма. Неједнакост троугла следи из Коши – Шварцове неједнакости:

$$\begin{aligned} \langle x + y, x + y \rangle &= \langle x, x \rangle + 2\operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &\leq \langle x, x \rangle + 2\sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle} + \langle y, y \rangle \\ &= (\sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle})^2. \end{aligned}$$

У терминима норме, Коши – Шварцова неједнакост може да се напише као $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

- (327) Из Коши – Шварцове неједнакости, линеарности скаларног производа и (146), односно (147) следи да је скаларни производ непрекидан, као функција једне или две променљиве. Прецизније, за фиксирано a , пресликавања

$$x \mapsto \langle x, a \rangle, \quad x \mapsto \langle a, x \rangle, \quad (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

су непрекидна.

- (328) Ако су $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ норме на $C[0, 1]$ уведене у (134), тада је $\|\cdot\|_2$ изведена из скаларног производа уведеног у (322) и из Коши–Шварцове неједнакости следи неједнакост

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx = \langle 1, |f| \rangle \leq \|f\|_2.$$

Одатле следи да је свака лопта простора $(C[0, 1], \|\cdot\|_2)$ садржана у некој лопти простора $(C[0, 1], \|\cdot\|_1)$, односно да је скуп који је ограничен у $(C[0, 1], \|\cdot\|_2)$ ограничен и у $(C[0, 1], \|\cdot\|_1)$. Са друге стране, за низ

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{за } x \in [0, 1 - 1/n] \\ 2n^2x - 2n(n-1) & \text{за } x \in [1 - 1/n, 1 - 1/2n] \\ n & \text{за } x \in [1 - 1/2n, 1] \end{cases}$$

важи $\|f_n\|_2 \geq \sqrt{n/2}$ и $\|f_n\|_1 = 3/4$, одакле следи да је јединична лопта у простору $(C[0, 1], \|\cdot\|_1)$ неограничен скуп у простору $(C[0, 1], \|\cdot\|_2)$.

Приметимо да из (221) следи да ово не може да се деси у нормираним просторима коначне димензије. Векторски простор је *бесконачне димензије* ако за сваки коначан скуп вектора постоји вектор који није у њиховом линеарном омотачу. Из претходних разматрања следи да је $C[a, b]$ простор бесконачне димензије (наравно, ова чињеница може да се докаже и директно).

- (329) **Задатак:** Нека су $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_0$ две нееквивалентне (тј. такве да није $\|\cdot\| \asymp \|\cdot\|_0$) норме на простору X , такве да

$$(\exists C > 0)(\forall x \in X) \|x\|_0 \leq C\|x\|.$$

Доказати да је *свака* лопта простора $(X, \|\cdot\|_0)$ неограничен скуп у простору $(X, \|\cdot\|)$.

- (330) **Задатак:** Нека је (M, d) метрички простор у коме је затворење $\overline{B[x; \rho]}$ сваке лопте компактан скуп. Доказати да је M комплетан простор.

- (331) **Задатак:** Доказати да је са

$$C[0, 1] \ni f \mapsto |f(1)| - \int_0^1 |f(t)| dt$$

дефинисано непрекидно пресликавање $F : (C[0, 1], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Доказати да је $\sup\{F(f) \mid \|f\|_\infty \leq 1\} = 1$, али да F не достиже тај супремум ни у једној тачки јединичне лопте $\{f \mid \|f\|_\infty \leq 1\}$. Извести закључак да јединична лопта простора $C[0, 1]$ у униформној норми није компактан скуп. Ово је пример ограниченог и затвореног подскупа метричког простора који није компактан. Он показује и да у (330) не важи обрнуто тврђење.

- (332) **Задатак:** Нека је $S \subset C_{\mathbb{R}}[a, b]$ скуп непрекидних реалних функција које су у свакој тачки различите од нуле. Израчунати

$$\inf_{f \in S} \left(\int_a^b f(x) dx \right) \left(\int_a^b \frac{dx}{f(x)} \right).$$

- (333) Ако је норма $\|\cdot\|$ добијена из скаларног производа $\langle \cdot, \cdot \rangle$ онда важи једнакост паралелограма:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Доказ следи из следећих једнакости:

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \|y\|^2 \\ \|x - y\|^2 &= \langle x - y, x - y \rangle = \|x\|^2 - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \|y\|^2.\end{aligned}$$

Важи и обрнуто тврђење: ако норма $\|\cdot\|$ на нормираном векторском простору X над пољем $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ задовољава једнакост паралелограма, онда на X постоји скаларни производ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ такав да је $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$. У случају $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ скаларни производ је задат са

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2),$$

а у случају $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ са

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) + \frac{i}{4}(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2).$$

Скицираћемо доказ. Прво, из претпоставке да важи једнакост паралелограма, лако се изводи да је

$$\langle x + y, 2z \rangle = 2\langle x, z \rangle + 2\langle y, z \rangle.$$

Специјално, за $y = 0$ добијамо својство $\langle x, 2z \rangle = 2\langle x, z \rangle$, па, скраћивањем претходне једнакости са 2 добијамо адитивност

$$\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle.$$

Из адитивности следи

$$\langle nx, y \rangle = \langle x + \dots + x, y \rangle = n\langle x, y \rangle \quad \text{за} \quad n \in \mathbb{N},$$

а одатле $\langle qx, y \rangle = a\langle x, y \rangle$ за $q \in \mathbb{Q}$. Хомогеност по $\alpha \in \mathbb{R}$ следи преласком на лимес кад $\mathbb{Q} \ni q \rightarrow \alpha$. Остала својства скаларног производа се проверавају непосредно.

Задатак: Које од норми $\|\cdot\|_p$ ($1 \leq p \leq \infty$) на \mathbb{C}^n и \mathbb{R}^n , дефинисаних у (139), су изведене из неког скаларног производа?

- (334) Вектори x и y унитарног простора X су *ортогонални* ако је $\langle x, y \rangle = 0$, а *ортономирани* ако су ортогонални и $\|x\| = \|y\| = 1$.

Задатак: Доказати да су вектори $\cos nx$ и $\sin mx$ ($m, n \in \mathbb{N}$) ортогонални у простору $C[-\pi, \pi]$ са скаларним производом дефинисаним у (322). Доказати да су вектори $\cos nx$ и $\cos mx$ ортогонални за $m \neq n$. Исто важи и за $\sin nx$ и $\sin mx$. Ова тврђења се могу објединити у једно: вектори e^{inx} и e^{imx} су ортогонални ако је $m \neq n$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

Ако је $\langle x, y \rangle = 0$, пишемо $x \perp y$. Ако је $S \subset X$, кажемо да је вектор x *ортогоналан на* S ако је $x \perp y$ за све $y \in S$ и пишемо $x \perp S$. Скуп свих вектора $x \in X$ ортогоналних на скуп S означавамо са S^\perp . Из линеарности скаларног производа следи да је S^\perp потпростор простора X , а из непрекидности да је тај потпростор затворен.

Задатак: Дати пример скупа S за који је $(S^\perp)^\perp \neq S$. Доказати да је $((S^\perp)^\perp)^\perp = S^\perp$ за сваки скуп S .

- (335) Нека је X унитарни простор над \mathbb{R} коначне димензије, $\dim X = n$ и e_1, \dots, e_n његова ортонормирана база. Нека су $x_1, \dots, x_n \in X$ произвољни вектори, $P : X \rightarrow X$ линеарно пресликавање дефинисано са $P(e_i) = x_i$, $[P]$ његова матрица и $[G] = (\langle x_k, x_j \rangle)_{k,j \in \{1, \dots, n\}}$. Из

$$(\det [P])^2 = \det [P] \cdot \det [P]^T = \det ([P][P]^T)$$

следи

$$\det [P] = \sqrt{\det [G]}.$$

Матрица G се назива *Грамовом матрицом* вектора x_1, \dots, x_n , а детерминанта матрице P (или квадратни корен детерминанте Грамове матрице) *n -димензионом запремином паралелепипеда* над тим векторима.

Задатак: Доказати да је систем од n вектора линеарно независан ако и само ако је његова Грамова матрица инвертибилна.

- (336) Нека су x_1, \dots, x_n међусобно ортогонални вектори унитарног простора ($\langle x_j, x_k \rangle = 0$ за $j \neq k$). За њих важи *Питагорина теорема*:

$$\left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2.$$

Доказ следи из

$$\left\langle \sum_{k=1}^n x_k, \sum_{j=1}^n x_j \right\rangle = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \langle x_k, x_j \rangle = \sum_{k=1}^n \langle x_k, x_k \rangle,$$

пошто је $\langle x_k, x_j \rangle = 0$ за $j \neq k$.

- (337) Нека су e_1, \dots, e_n ортонормирани вектори унитарног простора X . Тада за сваки вектор $x \in X$ важи *Беселова неједнакост*

$$\sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Приметимо да ова неједнакост уопштава Коши–Шварцову (на коју се своди за $n = 1$).

Доказ: Нека је $h = x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$. Пошто је $\{e_j\}$ ортонормиран скуп, $\langle e_k, e_m \rangle = \delta_{mk}$, па је

$$\langle h, e_m \rangle = \langle x, e_m \rangle - \langle x, e_m \rangle = 0.$$

То значи да је h ортогоналан на све векторе e_1, \dots, e_n , па из Питагорине теореме следи

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 + \|h\|^2.$$

Пошто је $\|h\|^2 \geq 0$ одавде следи Беселова неједнакост.

- (338) Нека је $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ унитарни простор бесконачне димензије (нпр. простор $C[a, b]$, са скаларним производом $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt$). Нека је e_1 произвољни јединични вектор. Конструиримо низ међусобно ортогоналних јединичних вектора на следећи начин. Ако су e_1, \dots, e_n већ

конструисани, изаберимо произвољни вектор x који није у њиховом линеарном омотачу. Ово је могуће, пошто је X простор бесконачне димензије. У доказу Беселове неједнакости (337) дефинисали смо вектор h који је ортогоналан на све e_j , $1 \leq j \leq n$. Дефинишимо $e_{n+1} = \|h\|^{-1}h$. Из Питагорине теореме следи

$$\|e_m - e_n\|^2 = \|e_m\|^2 + \|e_n\|^2 = 2,$$

па низ e_n нема Кошијев, дакле ни конвергентан, подниз. Тиме смо доказали да сфера

$$\mathbb{S} := \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$$

у бесконачно димензионом простору није компактан скуп.

- (339) При доказу некомпактности \mathbb{S} у (338) смо користили скаларни производ, али важи и општије тврђење: нормирани (не обавезно унитарни) простор је коначне димензије ако и само ако је свака лопта у њему компактан скуп. Задатак (331) је једна илустрација овог тврђења.

Тополошки простор је *локално компактан* ако свака његова тачка има неку компактну околину. Сваки компактан простор је локално компактан.

Задатак: Дати пример локално компактних подскупова A, B метричког простора, таквих да њихова унија $A \cup B$ није локално компактан скуп.

Задатак: Доказати да је нормирани векторски простор X локално компактан ако и само ако је јединична кугла $\mathbb{B} = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$ компактан скуп.

Задатак: Доказати да је нормирани простор локално компактан ако и само ако је коначне димензије.

- (340) Нека је X локално компактан Хаусдорфов простор, $U \subset X$ отворен и $K \subset U$ компактан подскуп. Тада постоји отворен подскуп $V \subset X$ такав да је \bar{V} компактан и да важи

$$K \subset V \subset \bar{V} \subset U.$$

Доказ: из локалне компактности простора X и компактности скупа K следи да K може да се покрије са коначно много отворених скупова са компактним затворењем. Унија тих скупова W је отворен скуп са компактним затворењем који садржи K . Ако је $U = X$, доказ је завршен избором $V = W$. Нека је $Y = X \setminus U$ непразан скуп. Из (234) следи да за свако $y \in Y$ постоји отворен скуп V_y такав да је

$$K \subset V_y, \quad y \notin \bar{V}_y,$$

па фамилија $\{Y \cap \bar{W} \cap \bar{V}_y\}_{y \in Y}$ компактних скупова има празан пресек. Из (235) следи да постоји коначан скуп $\{y_1, \dots, y_n\} \subset Y$ такав да је

$$Y \cap \bar{W} \cap \bar{V}_{y_1} \cap \dots \cap \bar{V}_{y_n} = \emptyset.$$

Нека је

$$V = W \cap V_{y_1} \cap \dots \cap V_{y_n}.$$

Тада је

$$\bar{V} \subset \bar{W} \cap \bar{V}_{y_1} \cap \cdots \cap \bar{V}_{y_n},$$

па скуп V испуњава услове тврђења.

- (341) За локално компактне Хаусдорфове просторе важи следећа варијанта Урисонове леме (видети (69)). Нека је X локално компактан Хаусдорфов простор, $V \subset X$ отворен подскуп и $K \subset V$ компактан. Тада постоји непрекидна функција $\psi : X \rightarrow \mathbb{R}$ са компактним носачем таква да је $0 \leq \psi(x) \leq 1$,

$$\text{supp } \psi \subset V, \quad \text{тј. } \psi \equiv 0 \text{ на } X \setminus V$$

и $\psi \equiv 1$ на K . Другим речима, постоји непрекидна функција ψ таква да је

$$\chi_K \leq \psi \leq \chi_V,$$

где су χ_K и χ_V карактеристичне функције скупова K и V .

Доказ: Поређајмо рационалне бројеве из интервала $[0, 1]$ у низ $\{q_n\}$, тако да је $q_1 = 0$ и $q_2 = 1$. За свако q_n конструишимо скуп V_{q_n} на следећи начин. Скупове V_0 и V_1 (дакле V_{q_1} и V_{q_2}) изаберимо, користећи (340), тако да је

$$K \subset V_1 \subset \bar{V}_1 \subset V_0 \subset \bar{V}_0 \subset V.$$

Даље настављамо индуктивно. Претпоставимо да су V_{q_1}, \dots, V_{q_n} конструисани тако да важи

$$q_j < q_k \Rightarrow \bar{V}_{q_k} \subset V_{q_j}.$$

Нека q_m највећи међу бројевима q_1, \dots, q_n који је мањи од q_{n+1} и нека је q_v најмањи међу тим бројевима који је већи од q_{n+1} . Користећи (340) закључујемо да постоји отворен скуп $V_{r_{n+1}}$ такав да је

$$\bar{V}_{r_v} \subset V_{r_{n+1}} \subset \bar{V}_{r_{n+1}} \subset v_{r_m}.$$

Нека је, за $q \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$,

$$\psi_q(x) = \begin{cases} q, & x \in V_q \\ 0, & x \notin V_q \end{cases} \quad \phi_q(x) = \begin{cases} 1, & x \in \bar{V}_q \\ q, & x \notin \bar{V}_q \end{cases}$$

и нека је

$$\psi(x) = \sup_q \psi_q(x), \quad \phi(x) = \inf_q \phi_q(x).$$

Тада је функција ψ полунепрекидна одоздо, а ϕ одозго (видети (102)). Функција ψ је идентички једнака 1 на K , задовољава $0 \leq \psi(x) \leq 1$ и има носач садржан у V .

Показаћемо да је $\psi = \phi$, одакле следи да је ψ непрекидна (јер је тада полунепрекидна и одоздо и одозго), па тиме и да задовољава сва услове тврђења.

Неједнакост $\psi_r(x) > \phi_s(x)$ може да важи само ако је $x \in V_r$ и $x \notin \bar{V}_s$ за неке рационалне бројеве r и s такве да је $r > s$. Али такви x , r и s не постоје, јер за $r > s$ је $V_r \subset V_s$. Дакле, важи неједнакост $\psi_q \leq \phi_t$ за све q и t , па је $\psi \leq \phi$.

Претпоставимо да је $\psi(x) < \phi(x)$ за неко x . Тада је

$$\psi(x) < r < s < \phi(x)$$

за неке рационалне бројеве r, s . Из прве неједнакости следи $x \notin V_r$, а из друге $x \notin \overline{V}_s$. Међутим, то је контрадикција, јер за $r < s$ је $\overline{V}_s \subset V_r$.

Тиме је доказано да је $\psi = \phi$. Ова функција задовољава услове тврђења.

- (342) Нека је X локално компактан Хаусдорфов простор и $C_c(X)$ простор непрекидних функција $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ са компактним носачем. *Радонов интеграл* је пресликавање

$$I : C_c(X) \rightarrow \mathbb{R}$$

које задовољава

- (E1) $I(\lambda f + \mu g) = \lambda I(f) + \mu I(g)$ за $f, g \in C_c(X), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (линеарност);
 (E2) $f \geq 0 \Rightarrow I(f) \geq 0$ (позитивност).

Докажимо да тада I задовољава и

- (E3) Ако је $f_n \searrow$ опадајући низ у $C_c(X)$ такав да $f_n(t) \rightarrow 0$ кад $n \rightarrow \infty$ за све $t \in T$, онда $I(f_n) \rightarrow 0$ (непрекидност),

што значи да је Радонов интеграл један специјалан случај Данијеловог (271). Нека је $K_n = \text{supp } f_n$. Из монотоности и позитивности низа f_n следи да је

$$K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \dots$$

Из (341) следи да постоји функција $\psi \in C_c(X)$ која задовољава $0 \leq \psi(x) \leq 1$ таква да је $\psi \equiv 1$ на K_1 . Нека је $\varepsilon > 0$. Из Динијеве теореме следи да f_n равномерно конвергира ка нули, па постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ са својством

$$n \geq n_0 \rightarrow f_n < \varepsilon.$$

Носач сваке функције f_n је садржан у K_1 , па је за $n \geq n_0$

$$f_n = f_n \cdot \chi_{K_1} \leq f_n \psi < \varepsilon \psi.$$

Одатле следи $I(f_n) < \varepsilon I(\psi)$, тј. $I(f_n) \rightarrow 0$ кад $n \rightarrow \infty$.

Задатак: Доказати ово тврђење на други начин: нека је f_n опадајући низ који тежи нули. Доказати да $I(f_n) \rightarrow c$ за неко $c \geq 0$. Користећи Динијеву терему (270) доказати да постоји подниз f_{n_k} такав да је $\|f_{n_k}\|_\infty \leq k^{-2}$. Закључити одатле да ред $\sum f_{n_k}$ униформно конвергира ка некој непрекидној функцији f са компактним носачем. Доказати да је за свако $k \in \mathbb{N}$

$$ck \leq \sum_{j=1}^k I(f_{n_j}) \leq I(f)$$

и одатле закључити да је $c = 0$.

- (343) *Примери Радановог интеграла.*

1. Риманов интеграл

$$I : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad I(f) = \int_a^b f(x) dx$$

за компактан интервал $[a, b]$.

2. Риман Стилтјесов интеграл

$$I : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad I(f) = \int_a^b f(x) d\alpha$$

за компактан интервал $[a, b]$ и растућу функцију α .

3. Диракова δ -функција

$$\delta_a(f) : C(X) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \delta_a(f) = f(a)$$

за фиксирану тачку $a \in X$.

- (344) **Задатак:** Нека је X локално компактан Хаусдорфов простор $K \subset X$ компактан подскуп и $C_c(X; K)$ скуп функција уз $C_c(X)$ чији је носач садржан у K . Доказати да је $C_c(X; K)$ нормирани векторски простор у односу на норму

$$\|f\|_K := \sup\{|f(x)| \mid x \in K\}$$

и да је рестрикција

$$I : C_c(X; K) \rightarrow \mathbb{R}$$

Радоновог интеграла непрекидна у односу на ту норму. (Упутство: ако је ψ као у (341), онда је $|f(x) - g(x)| \leq \|f - g\|_K \psi(x)$ за $f, g \in C_c(X; K)$.)

- (345) Нека су X и Y компактни простори; тада је и $X \times Y$ компактан. Из (344) и (146) следи да је Радонов интеграл равномерно непрекидно пресликавање на простору $C(X \times Y)$, па из (103) и (315) следи да за компактне просторе X и Y и Радонове интеграле

$$I_X : C(X) \rightarrow \mathbb{R}, \quad I_Y : C(Y) \rightarrow \mathbb{R}$$

постоји јединствени Радонов интеграл

$$I : C(X \times Y) \rightarrow \mathbb{R}$$

који има својство

$$I(f \otimes g) = I_X(f) \cdot I_Y(g).$$

Специјално, на овај начин, уопштавајући први пример из (343) индуктивно по n добијамо дефиницију Римановог интеграла *непрекидне* функције n променљивих по n -*димензионом квадрату*, тј. функције

$$f : [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \rightarrow \mathbb{R}.$$

У Глави 3 уопштићемо овај појам на класу функција ширу од класе непрекидних.

- (346) Унитарни простор $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ је *Хилбертов* ако је комплетан као метрички простор са метриком $d(x, y) = \|y - x\| = \sqrt{\langle y - x, y - x \rangle}$. Важан пример Хилбертовог простора је простор $L^2[a, b]$, који се добија комплетирањем простора $(C[a, b], \|\cdot\|_2)$ ($p = 2$ у (134)); норма $\|\cdot\|_2$ је изведена из скаларног производа $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt$.

Задатак: Нека је Y потпростор Хилбертовог простора X . Доказати да је \overline{Y} Хилбертов простор.

Задатак: Доказати да Принцип максимума модула (295) важи за функције комплексне променљиве са вредностима у Хилбертовом

простору. Упоредити то са Задатком у (295) који показује да Принцип максимума модула не важи за функције са вредностима у Банаховом простору.

Упутство: нека је f аналитичка функција комплексне променљиве са вредностима у Хилбертовом простору и z_0 унутрашња тачка њеног домена у којој $\|f(z)\|$ достиже максимум. Доказати да је

$$z \mapsto \langle f(z), f(z_0) \rangle$$

комплексна аналитичка функција комплексне променљиве. Применом Коши–Шварцове неједнакости доказати да она достиже максимум у тачки z_0 и из принципа максимума за аналитичке функције са вредностима у \mathbb{C} закључити да је $\langle f(z), f(z_0) \rangle \equiv C$. Специјално, $\|f(z_0)\|^2 = C$, што значи да је C реалан број. Из Коши–Шварцове неједнакости следи

$$\|f(z_0)\|^2 = \langle f(z_0), f(z_0) \rangle \leq \|f(z)\| \cdot \|f(z_0)\|,$$

па је $\|f(z_0)\| \leq \|f(z)\|$. Али, по претпоставци је и $\|f(z)\| \leq \|f(z_0)\|$, па је $\|f(z_0)\| = \|f(z)\| = C$. Извести одатле да је

$$\|f(z) - f(z_0)\|^2 = \langle f(z) - f(z_0), f(z) - f(z_0) \rangle = C - C - \bar{C} + C = 0.$$

(347) У терминима унитарних простора задатак у (278) може да се интерпретира на следећи начин. Претпоставка

$$\int_a^b t^n f(t) dt = 0$$

значи да је вектор $f \in C[a, b]$ ортогоналан (у односу на скаларни производ дефинисан интегралом) на векторе $f_n(t) = t^n$. Због линеарности скаларног производа, то значи да је он ортогоналан и на линеарни омотач вектора $f_n(t) = t^n$, тј. на потпростор полинома. По Вајерштрасовој теореме о апроксимацији, тај потпростор је густ у $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$, па постоји низ полинома такав да $p_k \rightarrow f$ у норми $\|\cdot\|_\infty$. Из теореме о комутативности униформног лимеса и интеграла следи да низ који конвергира у $\|\cdot\|_\infty$ норми конвергира и у $\|\cdot\|_2$ норми. Та норма је генерисана скаларним производом, па је скаларни производ непрекидан у односу на њу (327), одакле следи

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle p_k, f \rangle = \langle \lim_{k \rightarrow \infty} p_k, f \rangle = \langle f, f \rangle = \|f\|^2,$$

одакле, због недегенерисаности норми, следи $f = 0$.

Слично, из Вајерштрасове теореме о апроксимацији периодичних непрекидних функција тригонометријским полиномима (312) следи да ако је функција f задовољава следеће релације ортогоналности

$$\int_0^{2\pi} f(t) \sin nt dt = 0 = \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt dt$$

за све $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, онда је $f \equiv 0$.

(348) Фамилија вектора $\{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ у нормираном простору X је *потпуна* ако је скуп свих њихових коначних линеарних комбинација густ у X . Фамилија је *линеарно независна* ако је сваки њен коначан подскуп

линеарно независан. Нпр. фамилија $\{1, t, t^2, \dots\}$ је линеарно независна (доказати!) и, по Вајерштрасовој теорему, потпуна у $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$.

Задатак: Нека је нормирани простор X густ у нормираном простору Y и нека је фамилија вектора $\{x_1, x_2, \dots\}$ потпуна у X . Доказати да је та фамилија потпуна и у Y .

(349) Примери из (347) могу да се посматрају у склопу следећег, општијег тврђења. Нека је $\{x_1, x_2, \dots\}$ линеарно независна фамилија вектора у унитарном простору $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Да би ова фамилија била потпуна

- неопходно је да у X не постоји вектор $h \neq 0$ који је ортогоналан на све векторе x_k ;
- ако је простор X Хилбертов, и довољно је да у X не постоји вектор $h \neq 0$ који је ортогоналан на све векторе x_k .

Доказ: (\Rightarrow) Да је наведени услов неопходан у сваком унитарном простору следи из чињенице да, ако је вектор h ортогоналан на све векторе x_k , из Питагорине теореме следи

$$\|h - \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j\|^2 = \|h\|^2 + \|\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j\|^2 \geq \|h\|^2.$$

Када би било $h \neq 0$, тј. $\|h\| > 0$, из претходне неједнакости би следило да је растојање вектора h од било које линеарне комбинације вектора фамилије $\{x_1, x_2, \dots\}$ веће од неке позитивне константе, што значи да фамилија није потпуна.

(\Leftarrow) Докажимо сада да је наведени услов и довољан, ако је простор X комплетан. Применом Грам–Шмитовог поступка ортогонализације на систем вектора $\{x_1, x_2, \dots\}$ добијамо ортонормирани систем $\{e_1, e_2, \dots\}$ који има исти линеарни омотач као и полазни. Нека је $x \in X$ произвољни вектор. Ред $\sum |\langle x, e_n \rangle|^2$ конвергира, јер се ради о реду са позитивним члановима чије су парцијалне суме, на основу Беселове неједнакости (337), ограничене. Његове парцијалне суме формирају Кошијев низ, па постоји n_0 са својством да за $n > m \geq n_0$ важи

$$\|\sum_{j=m}^n \langle x, e_j \rangle e_j\|^2 \leq \sum_{j=m}^n |\langle x, e_j \rangle|^2 < \varepsilon.$$

Одатле, на основу Кошијевог услова конвергенције у комплетном простору X , следи да ред $\sum \langle x, e_j \rangle e_j$ конвергира. Нека је

$$h = x - \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n.$$

Из линеарности и непрекидности скаларног производа следи $\langle h, e_k \rangle = 0$ за све e_k , па је h ортогоналан на све векторе система $\{e_1, e_3, \dots\}$, а тиме и $\{x_1, x_2, \dots\}$. По претпоставци је тада $h = 0$, што значи да је

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n.$$

Израз на десној страни припада затворењу линеарног омотача система $\{e_1, e_2, \dots\}$, тј. система $\{x_1, x_2, \dots\}$, што је и требало доказати.

(350) Из дискусије у (349) следи неједнакост

$$\left\| x - \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle e_j \right\| \leq \left\| x - \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j \right\|$$

за произвољну линеарну комбинацију $\sum_{j=1}^n \lambda_j e_j$. Другим речима, то значи да је

$$h_e := \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle e_j$$

вектор линеарног омотача ортонормираног система $\{e_1, \dots, e_n\}$ који најбоље апроксимира h .

(351) **Задатак:** Наћи све непрекидне функције $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ за које постоје низови a_n, b_n комплексних бројева такви да је

$$\int_0^1 |f(x) - a_n x - b_n|^2 \leq \frac{1}{n}$$

за све $n \in \mathbb{N}$.

(352) Закључак (350) је у основи *метода најмањих квадрата*, који се састоји у следећем. Претпоставимо да знамо да су величине x и y повезане линеарним условом

$$y = ax$$

али да не знамо вредност константе a . Претпоставимо да је у n мерења установљено да вредностима x_1, \dots, x_n величине x одговарају вредности y_1, \dots, y_n величине y . тада коефицијент a бирамо тако да величина

$$\sum_{j=1}^n \|y_j - ax_j\|^2$$

буде најмања. Другим речима, тражимо вектор колинеаран вектору (x_1, \dots, x_n) који је најближи вектору (y_1, \dots, y_n) у стандардној еуклидској норми простора \mathbb{R}^n . Општије, ако величина $y \in \mathbb{R}$ линеарно зависи од $\vec{x} = (p_1, \dots, p_m) \in \mathbb{R}^m$, тј. ако је

$$y = \vec{a} \cdot \vec{x}$$

за $\vec{a} = (a_1, \dots, a_m)$ и ако је извршено n мерења у којима су вредностима $\vec{a}_k = (p_1^k, \dots, p_m^k)$, $1 \leq k \leq n$ величине \vec{x} одговарале добијене вредности (y_1, \dots, y_n) величине y , онда \vec{a} бирамо тако да величина

$$\sum_{k=1}^n \left(y_k - \sum_{j=1}^m a_j p_j^k \right)^2$$

буде најмања. Другим речима, тражимо најбољу апроксимацију вектора (y_1, \dots, y_n) линеарним комбинацијама вектора \vec{a}_k у стандардној еуклидској норми простора \mathbb{R}^n .

Задатак: Методом најмањих квадрата наћи праву $y = ax + b$ која најбоље описује измерене вредности $A(0, -2)$, $B(2, 0)$ и $C(3, 2)$.

Задатак: Методом најмањих квадрата нађена је права $y = ax + b$ која најбоље описује измерене вредности $A_1(x_1, y_1), \dots, A_n(x_n, y_n)$.

Доказати да се позитивна и негативна вертикална одступања међусобно поништавају, тј. да је $\sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) = 0$.

- (353) Линеарно независан систем вектора $\{f_1, f_2, \dots\}$ у нормираном векторском простору X бесконачне димензије је база⁴⁷ тог простора ако сваки вектор $x \in X$ може да се представи у облику

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n$$

за неке скаларе λ_n , $n \in \mathbb{N}$.

Свака база је потпун систем, али није сваки потпун систем линеарно независних вектора база⁴⁸, као што показује пример система $\{1, t, t^2, \dots\}$ у $C[-1, 1]$. По Вајерштрасовој теореме о апроксимацији полиномима, овај систем је потпун у простору $(C[-1, 1], \|\cdot\|_{\infty})$, а тиме и у $(C[-1, 1], \|\cdot\|_2)$ (пошто униформни лимес комутира са интегралом којим је дефинисана норма $\|\cdot\|_2$). Када би овај систем био база, сваки вектор $f \in C[-1, 1]$ би могао да се представи у облику збира

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n t^n$$

који конвергира у $(C[-1, 1], \|\cdot\|_2)$. Општи члан конвергентног реда тежи нули, па из ове конвергенције следи $\|\lambda_n t^n\|_2 \rightarrow 0$ кад $n \rightarrow \infty$. Пошто је

$$\|\lambda_n t^n\|_2 = \sqrt{\int_{-1}^1 |\lambda_n|^2 t^{2n} dt} = |\lambda_n| \sqrt{\frac{2}{2n+1}},$$

за довољно велико n важи $|\lambda_n| < \sqrt{2n+1}$. Одатле следи да степени ред $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n t^n$ униформно конвергира на компактним скуповима интервала $] -1, 1[$. Означимо његов збир са

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n t^n.$$

Напоменимо да је функција f сума овог истог реда, али у норми $\|\cdot\|_2$. Зато за његов збир за конкретно t користимо ознаку $g(t)$, пошто, у принципу, лимеси низа у односу на две различите метрике могу да буду различити. Ипак, у овом случају из комутативности интеграла и униформног лимеса следи

$$0 = \left\| f - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n t^n \right\|_2^2 \geq \int_{-1+\delta}^{1-\delta} |f(t) - g(t)|^2 dt \geq 0,$$

⁴⁷Ово је дефиниција тзв. *Шаудерове базе* у нормираном простору. *Хамелова база* векторског простора је сваки максималан (у односу на подскуп) скуп линеарно независних вектора. Може да се докаже, применом Цорнове леме, да сваки векторски простор има Хамелову базу. Шаудерова база, међутим, у бесконачно димензионим просторима има смисла само у присуству топологије (јер је дефинисана као бесконачна сума реда). Постоје Банахови простори који немају Шаудерову базу. Сваки Хилбертов простор има Шаудерову базу.

⁴⁸Наравно, ово се односи на просторе бесконачне димензије; у просторима коначне димензије сваки потпун систем линеарно независних вектора је база.

па је, због непрекидности функција f и g , $f = g$ на сваком интервалу $[-1 + \delta, 1 - \delta]$. Међутим, g је аналитичка функција (па је, између осталог и класе C^∞), док је f само непрекидна, не обавезно ни диференцијабилна.

- (354) Ако је систем вектора у унитарном простору X ортогоналан и потпун, онда је он база.

Доказ: Множење вектора датог система скаларом не мења садржај тврђења, па можемо да претпоставимо да је $\{e_1, e_2, \dots\}$ ортонормиран систем. Такав систем је линеарно независан, јер из

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j e_j = 0$$

скаларним множењем са e_k и применом ортогоналности добијамо $\lambda_k = 0$. Нека је $x \in X$ произвољан вектор, $y = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j$. Тада је

$$x - y = \left(\sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle e_j - y \right) + \left(x - \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle e_j \right).$$

Први сабирак припада линеарном омотачу вектора $\{e_1, \dots, e_n\}$, а за други се скаларним множењем са e_k за $1 \leq k \leq n$ лако види да је ортогоналан на сваки од тих вектора, па на њихов збир можемо да применимо Питагорину теорему, одакле закључујемо да је

$$\left\| x - \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle e_j \right\| \leq \left\| x - \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j \right\|,$$

при чему се једнакост достиже ако и само ако је $\lambda_j = \langle x, e_j \rangle$ за све j . Пошто је систем $\{e_1, e_2, \dots\}$ потпун, за свако $\varepsilon > 0$ у лопти $B[x; \varepsilon]$ постоји вектор y који је линеарна комбинација вектора $\{e_1, \dots, e_{n_0}\}$, а тиме и линеарна комбинација вектора $\{e_1, \dots, e_n\}$ за свако $n \geq n_0$, па је за такве n и десна страна мања од ε , чиме је доказано

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n.$$

Израз на десној страни назива се *Фуријеовим редом* вектора x . Скаларним множењем обе стране са x , користећи непрекидност норме добијамо *Парсевалову једнакост*

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2.$$

Слично, користећи непрекидност скаларног производа, добијамо Парсевалову једнакост за скаларни производ:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \overline{\langle y, e_n \rangle}.$$

Успут смо доказали и следеће тврђење: Ако је E_n линеарни омотач коначног скуп ортонормираних вектора $\{e_1, \dots, e_n\}$, онда је

$$P_n(x) = \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle e_j$$

јединствени вектор потпростора E_n чије је растојање од x једнако $d(x, E_n)$. Пресликавање $P_n : X \rightarrow E_n$ је линеарно и непрекидно (доказати!); назива се *ортогоналним пројектором* простора X на E_n .

Задатак: Нека су f_1, \dots, f_n линеарно независни вектори у унитарном простору и E_n њихов линеарни омотач. Нека је e_1, \dots, e_n ортонормирана база простора E_n , добијена Грам–Шмитовим поступком ортонормализације система f_1, \dots, f_n . Нека је $x \in X$ произвољни вектор, и $P_n(x)$ његова ортогонална пројекција на E_n ; запишимо је у бази f_1, \dots, f_n простора E_n као $P_n(x) = a_1 f_1 + \dots + a_n f_n$. Доказати да из $x - P_n(x) \perp E_n$ следи

$$\begin{aligned} \langle f_1, f_1 \rangle a_1 + \dots + \langle f_n, f_1 \rangle a_n &= \langle x, f_1 \rangle \\ \dots & \\ \dots & \\ \dots & \\ \langle f_1, f_n \rangle a_1 + \dots + \langle f_n, f_n \rangle a_n &= \langle x, f_n \rangle. \end{aligned}$$

Из чињенице да је за свако x дефинисан јединствен вектор $P_n(x)$ закључити да овај систем има јединствено решење по a_1, \dots, a_n . Извести одатле још једно решење задатка из (335).

(355) Систем вектора $\{1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots\}$ је ортогоналан у унитарном простору $C[-\pi, \pi]$ са скаларним производом

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t) dt.$$

По Вајерштрасовој теореме (312) о апроксимацији непрекидних периодичних функција тригонометријским полиномима, овај систем је потпун у простору 2π -периодичних функција у норми $\|\cdot\|_{\infty}$, па тиме и у $\|\cdot\|_2$, због комутативности униформног лимеса и интеграла. За сваку функцију f која је непрекидна на $[-\pi, \pi]$ постоји функција g која задовољава $g(-\pi) = g(\pi)$ и $\|f - g\|_2 < \varepsilon/2$, где је $\|\cdot\|$ норма изведена из скаларног производа. Да бисмо то видели, довољно је узети функцију g такву да је $g = f$ на $[-\pi + \delta, \pi]$, а на $[-\pi, -\pi + \delta]$ дефинисати g као линеарну функцију чији график спаја тачке $(-\pi + \delta, f(-\pi + \delta))$ и $(-\pi, f(\pi))$ (тако да је $g(-\pi) = f(\pi)$). За овако изабрану функцију g је $\|f - g\|_2^2 = \int_{-\pi-\delta}^{-\pi} |f(t) - g(t)|^2 dt \rightarrow 0$ кад $\delta \rightarrow 0_+$. Пошто је g 2π -периодична, по Вајерштрасовој теореме постоји тригонометријски полином p_n такав да је $\|p_n - g\|_2 < \varepsilon/2$, одакле следи $\|f - p_n\|_2 < \varepsilon$.

Дакле, систем тригонометријских полинома је потпун у $C[-\pi, \pi]$, па, као и у (354), за сваки вектор $f \in C[-\pi, \pi]$ важи

$$f = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

у смислу конвергенције у $\|\cdot\|_2$, где се коефицијенти, као и у реду у (354) у општем случају, изражавају помоћу скаларног производа:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt,$$

за $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Овај ред конвергира у $\|\cdot\|_2$, али не и за свако x (између осталог, лева страна не мора да буде периодична функција, иако десна јесте). Он може да се запише и у облику

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}, \quad \text{где је } c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt, \quad n \in \mathbb{Z},$$

тј. као *степенни ред* по $z = e^{ix}$. Овде се под двостраном сумом сматра

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx},$$

јер су коначне суме на десној страни оно што се добије кад се парцијалне суме реда по синусима и косинусима трансформишу уз помоћ Ојлерове формуле.

Задатак: Доказати да је векторски простор свих апсолутно конвергентних тригонометријских редова Банахова алгебра, ако су за

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}, \quad g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n e^{int}.$$

норма и множење дефинисани са

$$\|f\| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|, \quad (f \star g)(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k+j=n} c_k d_j \right) e^{int}.$$

Парсевалова једнакост једнакост из (354) у случају тригонометријског реда гласи

$$\frac{1}{2\pi} \|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2, \quad \text{или} \quad \frac{1}{\pi} \|f\|_2^2 = \frac{1}{2} |a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2).$$

Задатак: Доказати да из Парсевалове једнакости за функцију $f(t) = t$ следи

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(356) Парсевалову једнакост можемо да искористимо за доказ следећег твђења, познатог као *Лиувилова теорема*. Нека је c_n низ у \mathbb{C} и нека ред

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

конвергира за свако $z \in \mathbb{C}$ (тј. функција $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ је цела – аналитичка на целој комплексној равни). Ако је f ограничена, онда је она константна.

Доказ: За $z = r e^{ix}$ степенни ред $\sum c_n z^n$ је тригонометријски Фуријеов ред, па из Парсевалове једнакости следи

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(r e^{ix})|^2 dx.$$

Ако је $\|f\|_\infty \leq C$, онда је

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} \leq C^2,$$

што је могуће само ако је $c_n = 0$ за све $n \geq 1$. Одатле следи $f \equiv c_0$.

Пример $f(x) = \sin x$ показује да ово тврђење не важи за реалне целе функције.

Задатак: Нека је f цела функција и нека је $|f(z)| \leq a|z|^p + b$ за неке позитивне реалне бројеве a, b, p . Доказати да је f полином.

Задатак: Извести из Парсевалове једнакости доказ Принципа максимума модула (295).

(357) Из једнакости

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx},$$

у којој се подразумева да ред на десној страни конвергира у норми $\|\cdot\|_2$, не следи да је вредност функције на левој страни за конкретне вредности променљиве x једнака суми реда на десној, већ се ради само о разлагању вектора f по ортогоналној бази у унитарном простору $C[-\pi, \pi]$. Неопходан услов да је вредност функције на левој страни једнака суми реда на десној је да је функција f 2π -периодична.⁴⁹

Ако функција f није периодична, онда можемо да јој придружимо Фуријеов ред на интервалу $[-T, T]$ и пустимо да $T \rightarrow +\infty$. На интервалу $[-T, T]$ систем $e^{i\pi nx/T}$ је ортогоналан, а Фуријеов ред функције $f: [-T, T] \rightarrow \mathbb{C}$ у односу на тај систем је

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\pi nx/T}, \quad \text{где је } c_n = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) e^{-i\pi nt/T} dt.$$

Напишимо овај ред у облику

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \frac{T}{\pi} e^{i\pi nx/T} \frac{\pi}{T}.$$

Приметимо да је

$$c_n \frac{T}{\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T f(t) e^{i\pi nt/T} dt.$$

Нека је

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\xi t} dt.$$

Овај интеграл назива се *Фуријеовом трансформацијом* функције f . Приметимо да је, уз одређене претпоставке о функцији f (нпр. да интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ конвергира), за велико T

$$c_n \frac{T}{\pi} \approx f(\xi_n), \quad \text{где је } \xi_n := \frac{\pi n}{T}.$$

⁴⁹Овај услов није и довољан; више детаља о овоме ћемо да видимо у Глави 5.

Тако је Фуријеов ред функције f приближно једнак

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi_n) e^{i\xi_n x} \frac{\pi}{T} \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi, \quad \text{кад } T \rightarrow +\infty.$$

Овај интеграл назива се *Фуријеовим интегралом* функције f . Развијање 2π -периодичне функције у њен Фуријеов ред је аналогно представљању функције реалне променљиве њеним Фуријеовим интегралом. Ова, донекле неформлана, разматрања ћемо детаљније размотрити у Глави 5.

(358) *Рисова теорема о пројекцији*. Нека је X Хилбертов простор и Y његов затворен потпростор. Тада сваки вектор $x \in X$ може на јединствен начин да се напише у облику

$$x = y + z, \quad y \in Y, z \in Y^\perp.$$

Вектор y се назива *ортогоналном пројекцијом* вектора x на простор Y и он је јединствени вектор простора Y за који важи

$$d(x, Y) = \|x - y\|.$$

Ако уведемо ознаку $y = P(x)$, пресликавање $P : X \rightarrow Y$ је непрекидно, линеарно и важи $P^2 = P$. Ако је $Y \neq \{0\}$ онда је $\|P\| = 1$ (норма линеарног пресликавања је уведена у (145)). Пресликавање P се назива *ортогоналним пројектором* простора X на потпростор Y ; оно уопштава пресликавање P_n уведено у (354) за коначнодимензиони простор E_n у улози Y .

Доказ: Нека је $d = d(x, Y) = \inf\{\|x - v\| \mid v \in Y\}$. Тада за свако $n \in \mathbb{N}$ постоји вектор $y_n \in Y$ за који је

$$\|x - y_n\| < d + \frac{1}{n} = d_n.$$

Из једнакости паралелограма (333) следи

$$\|(x - y_n) + (x - y_m)\|^2 + \|(x - y_n) - (x - y_m)\|^2 = 2(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2),$$

односно,

$$2\|x - (y_n + y_m)/2\|^2 + \frac{1}{2}\|y_n - y_m\|^2 = \|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2.$$

Израз на десној страни је мањи од $d_n^2 + d_m^2$. Пошто је $(y_n + y_m)/2 \in Y$, први сабирак на десној страни је већи од $2d^2$, па из претходне једнакости и дефиниције $d_n = d + 1/n$ добијамо неједнакост

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq \frac{4d}{n} + \frac{4d}{m} + \frac{2}{n^2} + \frac{2}{m^2}.$$

Одатле следи да је низ y_n Кошијев, па због комплетности конвергира ка неком y ; из затворености скупа Y следи $y \in Y$. Преласком на лимес у $\|x - y_n\| < d + 1/n$ добијамо $\|x - y\| \leq d$, одакле, због $y \in Y$ следи $\|x - y\| = d = d(x, Y)$.

Докажимо да је y једина тачка скупа Y која задовољава ову једнакост. Претпоставимо да постоји још један вектор $y_0 \in Y \setminus \{y\}$, са својством

$$\|x - y_0\| = d = \|x - y\|.$$

Из једнакости паралелограма следи

$$\begin{aligned} \|(x - y_0) + (x - y)\|^2 + \|(x - y_0) - (x - y)\|^2 &= 2(\|x - y_0\|^2 + \|x - y\|^2) \\ &= 2(d^2 + d^2) = 4d^2. \end{aligned}$$

Ако је $y \neq y_0$, онда је $\|(x - y_0) - (x - y)\|^2 > 0$, па добијамо

$$\left\| x - \frac{y + y_0}{2} \right\| = \left\| \frac{(x - y_0) + (x - y)}{2} \right\| < d,$$

што је немогуће због $(y + y_0)/2 \in Y$.

Остаје још да докажемо да је вектор $z = x - y$ ортогоналан на Y . Претпоставимо супротно, да постоји вектор $v \in Y$ такав да је

$$c := \langle x - y, v \rangle \neq 0.$$

Нека је

$$u = y + \frac{c}{\|v\|^2} v \in Y.$$

Тада је

$$\|x - u\|^2 = \langle x - u, x - u \rangle = \|x - y\|^2 - \frac{|c|^2}{\|v\|^2} < \|x - y\|^2 = d(x, Y)^2,$$

што је немогуће, пошто је $u \in Y$.

- (359) У случају Банахових простора (у којима нема смисла говорити о ортогоналности), имамо следећу теорему о пројекцији. Нека је X Банахов простор и $K \subset X$ компактан подскуп. Нека је $\varepsilon > 0$, F коначна ε -мрежа скупа K и нека је K_ε конвексни омотач скупа F . Тада постоји пресликавање

$$\pi_\varepsilon : X \rightarrow K_\varepsilon$$

такво да је $\|\pi_\varepsilon(x) - \pi_\varepsilon(y)\| \leq \|x - y\|$ за све $x, y \in X$ и $\|x - \pi_\varepsilon(x)\| \leq \varepsilon$ за све $x \in K$.

Доказ: нека је $F = \{p_1, \dots, p_n\}$. Пошто је F ε -мрежа, лопте $B]p_j; \varepsilon[$ покривају K . Дефинишимо непрекидне функције

$$\phi_j := \begin{cases} \varepsilon - \|x - p_j\|, & x \in B]p_j; \varepsilon[\\ 0, & x \notin B]p_j; \varepsilon[\end{cases}$$

и $\phi(x) = \sum_{j=1}^n \phi_j(x)$. Тада је

$$\pi_\varepsilon(x) := \frac{\sum_{j=1}^n \phi_j(x) p_j}{\phi(x)}$$

тражено пресликавање.

Пресликавање π_ε назива се *Шаудеровом пројекцијом*.

- (360) У просторима коначне димензије свако линеарно пресликавање може да се представи матрицом. Специјално, линеарно пресликавање векторског простора димензије n у простор скалара (једнодимензиони векторски простор) се представља матрицом $1 \times n$, тј. вектором, а само линеарно пресликавање своди се на скаларни производ.

Уопштење овог запажања на просторе бесконачне димензије даје *Рисова теорема о репрезентацији линеарних функционала*: Нека је X

Хилбертов простор и X^* његов дуални простор (дефинисан у (145)). Тада за свако $a^* \in X^*$ постоји јединствен вектор $a \in X$ такав да је

$$a^*(x) = \langle x, a \rangle \quad \text{за све } x \in X.$$

Пресликавање $\Phi : X^* \rightarrow X$ које на овај начин функционалу a^* придружује вектор a има следећа својства:

- $\Phi(\lambda a^* + \mu b^*) = \bar{\lambda}\Phi(a^*) + \bar{\mu}\Phi(b^*)$ (антилинеарност);
- $\Phi(X^*) = X$ (сурјективност);
- $\|\Phi(a^*)\| = \|a^*\|$ (изометричност).

Норма на десној страни последње једнакости је уведена у (145).

Доказ: Нека је

$$Y = \{x \in X \mid a^*x = 0\}$$

језгро функционала a^* . Због непрекидности, Y је затворен потпростор простора X . Ако је $Y = X$ вектор $a = 0$ задовољава тврђење теореме. Ако је $Y \neq X$, постоји $x \notin Y$, па по Рисовој теореме о пројекцији (358) постоји вектор z који је ортогоналан на Y . Нека је $v = \|z\|^{-1}z$, тада је $\|v\| = 1$ и $v \perp Y$. Нека је

$$a = \overline{a^*(v)}v.$$

Пошто је за свако $x \in X$

$$h = x - \frac{a^*(x)}{a^*(v)}v \in Y$$

(јер је $a^*(h) = 0$, а Y је језгро функционала a^*), из $v \perp Y$ и $\|v\| = 1$ следи

$$\langle x, v \rangle - \frac{a^*(x)}{a^*(v)}\|v\|^2 = 0, \quad \text{односно} \quad a^*(x) = \langle x, a \rangle.$$

Тиме је доказано постојање вектора a . Јединственост следи из недегенерисаности норми, јер кад би постојао још један такав вектор a_0 , било би $\langle x, a - a_0 \rangle = 0$ за све $x \in X$, па и за $x = a - a_0$, тј. било би $\|a - a_0\|^2 = 0$, одакле следи $a = a_0$.

Антилинеарност пресликавања Φ следи из

$$\begin{aligned} \langle x, \Phi(\lambda a^* + \mu b^*) \rangle &= (\lambda a^* + \mu b^*)(x) \\ &= \lambda a^*(x) + \mu b^*(x) \\ &= \lambda \langle x, \Phi(a^*) \rangle + \mu \langle x, \Phi(b^*) \rangle \\ &= \langle x, \bar{\lambda}\Phi(a^*) + \bar{\mu}\Phi(b^*) \rangle. \end{aligned}$$

Сурјективност је очигледна, јер свако $a \in X$ дефинише линеарно пресликавање $x \mapsto \langle x, a \rangle$, које је непрекидно на основу Коши–Шварцове неједнакости.

Пошто је $\Phi(0) = 0$, да бисмо доказали изометричност довољно је да посматрамо $a \neq 0$. Из дефиниције норми линеарног пресликавања (145) следи

$$\|a^*\| = \sup\{\|a^*(x)\| \mid \|x\| \leq 1\} = \sup\{|\langle x, a \rangle| \mid \|x\| \leq 1\}.$$

Одатле и из Коши–Шварцове неједнакости следи $\|a^*\| \leq \|a\|$. Обрнута неједнакост $\|a^*\| \geq \|a\|$ следи из

$$a^*(\|a\|^{-1}a) = \langle \|a\|^{-1}a, a \rangle = \|a\|.$$

Тиме је доказана изометричност.

- (361) Последица Рисове теореме о репрезентацији је да је Хилбертов простор изоморфан свом дуалу. За Банахов просторе ово не важи. Ако је X Банахов простор, не постоји ни природно пресликавање $X \rightarrow X^*$ (у Хилбертовом оно постоји захваљујући скаларном производу и његовој линеарности), али постоји природно линеарно пресликавање

$$\Psi : X \rightarrow (X^*)^*, \quad \Psi(x)(x^*) = x^*(x),$$

Ако је ово пресликавање изоморфизам, Банахов простор X се назива *рефлексивним*. У општем случају, оно задовољава $\|\Psi(x)\| = \|x\|$ (доказ остављамо за вежбу!), одакле следи да је непрекидно и инјективно. Због комплетности, слика $\Psi(X)$ је затворен потпростор у $(X^*)^*$ изоморфан простору X , па, уз идентификацију ова два изоморфна простора, можемо да сматрамо да је $X \subset (X^*)^*$. У Хилбертовом простору ова инклузија је једнакост (Хилбертови простори су рефлексивни), у Банаховим она може да буде и строга.

- (362) Нека су X и Y нормирани векторски простори над пољем $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ или \mathbb{R} и $B : X \times Y \rightarrow \mathbb{K}$ непрекидан билинеарни функционал.

- Ако је Y Хилбертов простор, онда постоји јединствено ограничено линеарно пресликавање $S : X \rightarrow Y$ такво да је

$$B(x, y) = \langle S(x), y \rangle \quad \text{и} \quad \|B\| = \|S\|$$

- Ако је X Хилбертов простор, онда постоји јединствено ограничено линеарно пресликавање $T : Y \rightarrow X$ такво да је

$$B(x, y) = \langle x, T(y) \rangle \quad \text{и} \quad \|B\| = \|T\|.$$

Докажимо прво тврђење, друго се доказује на исти начин. За $x \in X$ пресликавање $y \mapsto B(x, y)$ је непрекидан линеарни функционал на Y па, по Рисовој теорему о репрезентацији, постоји јединствени вектор $a \in X$ такав да је $B(x, y) = \langle y, a \rangle$ за свако $y \in Y$. Вектор a зависи од x ; означимо то са $a = S(x)$. Проверу да S има наведена својства остављамо за вежбу.

Као последицу, добијамо следеће тврђење (упоредити са (148)):

- Ако је X нормирани, а Y Хилбертов простор над пољем $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ или \mathbb{R} , онда постоји изоморфизам $\mathcal{L}(X \times Y; \mathbb{K}) \cong \mathcal{L}(X; Y)$ који чува норму.
- Ако је X Хилбертов, а Y нормирани простор над пољем $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ или \mathbb{R} , онда постоји изоморфизам $\mathcal{L}(X \times Y; \mathbb{K}) \cong \mathcal{L}(Y; X)$ који чува норму.

Још једна последица доказаног тврђења је следећа: Ако су X и Y Хилбертови простори, онда за свако непрекидно линеарно пресликавање $A \in \mathcal{L}(X; Y)$ постоји јединствено непрекидно линеарно пресликавање $A^* \in \mathcal{L}(Y; X)$ (називамо га *конјугованим* или *адјунгованим* пресликавањем) које задовољава $\langle A(x), y \rangle = \langle x, A^*(y) \rangle$ и $\|A\| = \|A^*\|$.
Задатак: Доказати $(A^*)^* = A$ и $(A \circ B)^* = B^* \circ A^*$.

Диференцирање

1. Диференцирање у нормираним просторима

- (1) У Глави 1 смо видели да извод реалне функције реалне променљиве можемо да уопшtimo на пресликавања $f : I \rightarrow Y$ интервала $I \subset \mathbb{R}$ у нормирани векторски простор $(Y, \|\cdot\|_Y)$ – ако је $t_0 \in I$ унутрашња тачка, израз

$$f'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(f(t_0 + h) - f(t_0))$$

има смисла, јер су сви објекти на десној страни добро дефинисани. Ако је и домен функције f нормирани векторски простор, десна страна нема смисла (јер h у том случају више није скалар), па уопштење извода на тај случај захтева мало детаљнију анализу, којом ћемо сада да се позабавимо.

- (2) Непрекидно пресликавање $\gamma : I \rightarrow Y$ интервала $I \subset \mathbb{R}$ у нормирани векторски простор $(Y, \|\cdot\|)$ назива се *кривом* (или *параметризованом кривом*) у Y , а слика $\gamma(I) \subset Y$ *непараметризованом кривом* у Y . Крива γ је *глатка*, или *диференцијабилна*, у унутрашњој тачки $t_0 \in \text{Int}(I)$ ако постоји лимес

$$\gamma'(t_0) := \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}.$$

Тада се права

$$l(t) = \gamma(t_0) + (t - t_0)\gamma'(t_0)$$

назива *тангентом на криву* γ у тачки $y = \gamma(t_0)$.

Глатке криве $\gamma_1, \gamma_2 : I \rightarrow Y$ су *тангентне у тачки* t_0 ако важи

$$\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0) \quad \text{и} \quad \gamma_1'(t_0) = \gamma_2'(t_0).$$

Ова два услова су еквивалентна са

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\|}{t - t_0} = 0.$$

Последњи израз има смисла и за криве које нису глатке.

- (3) Претходна дефиниција може да се уопшти на следећи начин. Нека су $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ нормирани векторски простори над истим пољем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или \mathbb{C} , и $V \subset X$ отворен подскуп. Непрекидна пресликавања $f, g : V \rightarrow Y$ су *тангентна у тачки* $x_0 \in V$ ако је

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|f(x) - g(x)\|_Y}{\|x - x_0\|_X} = 0.$$

Специјално, из последње једнакости следи $f(x_0) = g(x_0)$.

Из неједнакости троугла лако следи да је „бити тангентан у тачки x_0 ” релација еквиваленције на скупу свих пресликавања из X у Y непрекидних у x_0 . Класа еквиваленције сваког таквог пресликавања f садржи *највише* једно пресликавање облика

$$x \mapsto f(x_0) + L(x - x_0),$$

где је $L : X \rightarrow Y$ линеарно пресликавање. Заиста, за два таква линеарна пресликавања L_1, L_2 важило би

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|L_1(x) - L_2(x)\|_Y}{\|x\|_X} = 0,$$

одакле следи да за свако $\varepsilon > 0$ и довољно мало $\|x\|$ важи

$$\frac{\|L_1(x) - L_2(x)\|_Y}{\|x\|_X} < \varepsilon.$$

Међутим, израз на левој страни ове неједнакости је једнак

$$\|L_1(x/\|x\|_X) - L_2(x/\|x\|_X)\|_Y,$$

што значи да је разлика $L_1 - L_2$ једнака нули на јединичној сфери $\mathbb{S} = \{x \in X \mid \|x\|_X = 1\}$, а тиме, због хомогености линеарних пресликавања, и на целом X .

Дефиниција: Непрекидно пресликавање $f : V \rightarrow Y$ је *диференцијабилно* у тачки x_0 ако постоји линеарно пресликавање L такво да су пресликавања

$$x \mapsto f(x) \quad \text{и} \quad x \mapsto f(x_0) + L(x - x_0)$$

тангентна у тачки x_0 . Линеарно пресликавање L се назива *изводом*, или *првим изводом* пресликавања f у тачки x_0 . Користе се ознаке $L = f'(x_0)$ или $L = Df(x_0)$. Пресликавање f је *диференцијабилно* ако је диференцијабилно у свакој тачки свог домена.¹

Из претходне дискусије следи да је извод непрекидног пресликавања, уколико постоји, јединствен.

Из локалности лимеса следи да је и извод локални објекат, тј. зависи само од понашања функције у некој околини тачке x_0 .

- (4) Ако је непрекидно пресликавање f диференцијабилно у тачки x_0 , онда је његов први извод $L = Df(x_0)$ *непрекидно* линеарно пресликавање.

Доказ: Нека је $\varepsilon > 0$. Тада постоји $\delta > 0$ тако да за $\|h\|_X < \delta$ важи

$\|f(x_0+h) - f(x_0)\|_Y < \frac{\varepsilon}{2}$ и $\|f(x_0+h) - f(x_0) - L(h)\|_Y < \frac{\varepsilon}{2}\|h\|_X$. Одатле следи да за $\|h\|_X < \delta$ важи $\|L(h)\|_Y < \varepsilon$. То значи да је L непрекидно у нули, а самим тим, због линеарности, и у свакој тачки.

Доказано тврђење показује да је извод диференцијабилног пресликавања $f : V \rightarrow Y$ на отвореном скупу $V \subset X$ пресликавање

$$Df : V \rightarrow \mathcal{L}(X; Y)$$

скупа V у векторски простор непрекидних линеарних пресликавања из $(X, \|\cdot\|_X)$ у $(Y, \|\cdot\|_Y)$.

¹Прецизније би било користити термин \mathbb{K} -диференцијабилно пресликавање, да би се нагласило да је поље скалара \mathbb{K} ; ускоро ћемо да објаснимо и зашто (видети (14)).

- (5) Из (3) следи да, ако је пресликавање $f : V \rightarrow Y$ диференцијабилно у x_0 , онда постоји линеарно пресликавање $L : X \rightarrow Y$ такво да је

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = L(h) + o(h), \quad \text{кад } h \rightarrow 0.$$

При томе смо у (4) из претпоставке о непрекидности пресликавања f у тачки x_0 доказали да је L непрекидно линеарно пресликавање.

Уколико, без претпоставке о непрекидности пресликавања f , претпоставимо да оно задовољава

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = L(h) + o(h), \quad \text{кад } h \rightarrow 0.$$

за *непрекидно* линеарно пресликавање L , онда одатле следи да је и f непрекидно у x_0 .

То значи да услов непрекидности пресликавања f у тачки x_0 у дефиницији у (3) можемо да изоставимо, ако уместо њега додамо захтев да је линеарно пресликавање L непрекидно. Другим речима, следећа дефиниција је еквивалентна оној у (3):

Дефиниција: Пресликавање $f : V \rightarrow Y$ је *диференцијабилно* у тачки x_0 ако постоји *непрекидно* линеарно пресликавање $L : X \rightarrow Y$ такво да је

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + L(h) + o(h), \quad \text{кад } h \rightarrow 0.$$

У Глави 1 смо видели да је *свако* линеарно пресликавање простора *коначне димензије* непрекидно, тако да, у случају таквих простора, ова дефиниција полази од слабијих услова, а непрекидност пресликавања f даје као последицу.

- (6) Дефиницију извода у векторском простору можемо да напишемо облику

$$f(x) - f(x_0) = Df(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), \quad \text{кад } x \rightarrow x_0.$$

Овај запис омогућава дефиницију извода у категорији *нормираних афиних простора*. Из Линеарне алгебре нам је познато да је *афини простор* структура $(A, V, +)$ где је A скуп, V векторски простор и

$$+ : A \times V \rightarrow A$$

пресликавање које задовољава

$$(A1) \quad a + 0 = a \text{ за све } a \in A;$$

$$(A2) \quad (a + v) + w = a + (v + w) \text{ за све } a \in A \text{ и све } v, w \in V; \text{ овде је } + \text{ на последњем месту сабирање у } V;$$

$$(A3) \quad \text{за сваке две тачке } a_1, a_2 \in A \text{ постоји јединствени вектор } v \in V \text{ такав да је } a_2 = a_1 + v.$$

Ако је V нормирани векторски простор, онда $(A, V, +)$ називамо *нормираним афиним простором*. На њему је дефинисано растојање са

$$d(a_1, a_2) = \|v\|,$$

где је $\|v\|$ норма (у нормираном векторском простору V) јединственог вектора из (A3). Некад овај вектор означавамо и са $v := a_2 - a_1$ и пишемо $\|v\| = \|a_2 - a_1\|$.

На самом скупу A на очигледан начин може да се уведе векторска структура ако се тачка $a \in A$ прогласи координатним почетком. Добијени векторски простор означавамо са $T_a A$; овај векторски простор је изоморфан простору V .

Ако је $f : A \rightarrow B$ нормираних афиних простора такво да постоји непрекидно линеарно пресликавање $L \in \mathcal{L}(T_{x_0} A; T_{f(x_0)} B)$ које задовољава асимптотску релацију

$$f(x) - f(x_0) = L(x - x_0) + o(x - x_0), \quad \text{кад } x \rightarrow x_0,$$

онда кажемо да је f диференцијабилно у тачки x_0 . Извод пресликавања f диференцијабилног на скупу $V \subset A$ је пресликавање

$$Df : V \rightarrow \bigcup_{a \in A} \mathcal{L}(T_a A; T_{f(a)} B)$$

које задовољава $Df(x_0) \in \mathcal{L}(T_{x_0} A; T_{f(x_0)} B)$. Приметимо да кодомен пресликавања Df у овој ситуацији *није* векторски простор – не могу да се сабирају линеарна пресликавања са различитим доменима T_a и кодоменима T_b . Сличну ситуацију ћемо имати кад будемо дефинисали извод на многострукостима, касније у овој глави.

- (7) У случају коначнодимензионих простора свако линеарно пресликавање се представља матрицом². Матрицу $[Df(x_0)]$ извода пресликавања $f : X \rightarrow Y$ називамо његовом *Јакобијевом матрицом*; означавамо је и са $J_f(x_0)$. Ако су X и Y простори исте димензије, детерминанту матрице $J_f(x_0)$ називамо *Јакобијаном* пресликавања f у тачки x_0 .

Ако је $X = Y = \mathbb{K}$ једнодимензиони векторски простор, онда је матрица сваког линеарног пресликавања димензија 1×1 (а свако линеарно пресликавање у том случају је множење скаларом), па се извод у једнодимензионом (и само у том) случају може идентификовати са скаларном функцијом, дакле објектом истог типа као и функција која се диференцира. У општем случају, функција и њен извод су објекти различитог типа.

- (8) *Правила диференцирања.*

- *Линеарност извода.* Ако су пресликавања $f, g : V \rightarrow Y$ диференцијабилна у тачки $x_0 \in V$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, онда је и пресликавање $\lambda f + \mu g$ диференцијабилно у x_0 и важи

$$D(\lambda f + \mu g)(x_0) = \lambda Df(x_0) + \mu Dg(x_0).$$

Ово је једноставна последица дефиниције извода.

- *Извод сложене функције.* Нека су X, Y, Z нормирани векторски простори, $V \subset X$ отворен подскуп, пресликавање $f : V \rightarrow Y$ диференцијабилно у тачки $x_0 \in V$, $W \subset Y$ отворен скуп, $f(x_0) = y_0 \in W$ и $g : W \rightarrow Z$ пресликавање диференцијабилно у y_0 . Тада је композиција $g \circ f$ пресликавање диференцијабилно у тачки x_0 и важи

$$D(g \circ f)(x_0) = Dg(y_0) \cdot Df(x_0).$$

²Ово представљање зависи од избора база на домену и кодомену

Производ на десној страни је композиција линеарних пресликавања; претходни израз може да се напише и као

$$D(g \circ f) = (Dg \circ f) \cdot Df.$$

Доказ: Нека је $\varepsilon > 0$. По претпоставци, постоји $\delta > 0$, тако да за $\|h\|_X < \delta$ и $\|k\|_Y < \delta$ важи

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) + Df(x_0)(h) + \alpha(h), \\ g(y_0 + k) &= g(y_0) + Dg(y_0)(k) + \beta(k) \end{aligned}$$

где је

$$\|\alpha(h)\|_Y \leq \varepsilon \|h\|_X, \quad \|\beta(k)\|_Z \leq \varepsilon \|k\|_Y.$$

Из особина непрекидних линеарних пресликавања (Глава 1) следи да постоје константе a и b такве да је

$$\|Df(x_0)(h)\|_Y \leq a \|h\|_X, \quad \|Dg(y_0)(k)\|_Z \leq b \|k\|_Y,$$

па је, за $\|h\|_X < \delta$,

$$\|Df(x_0)(h) + \alpha(h)\|_Y \leq (a + 1) \|h\|_X.$$

Одатле следи, да је за $\|h\|_X \leq \delta/(a + 1)$,

$$\|\beta(Df(x_0)(h) + \alpha(h))\|_Z \leq (a + 1)\varepsilon \|h\|_X \text{ и } \|Dg(y_0)(\alpha(h))\|_Z \leq b\varepsilon \|h\|_X.$$

Нека је $h = g \circ f$. Тада је

$$h(x_0 + h) = g(y_0 + Df(x_0)(h) + \alpha(h)) = g(y_0) + Dg(y_0)(Df(x_0)(h)) + \gamma(h),$$

где је $\|\gamma(h)\|_Z \leq (a + b + 1)\varepsilon \|h\|_X$, чиме је доказ завршен.

- Из правила за извод сложене функције следи да, ако тачка $x_0 \in V$ има околину $V_0 \ni x_0$ такву да је рестрикција $f : V_0 \rightarrow f(V_0)$ бијекција и да је пресликавање $f^{-1} : f(V_0) \rightarrow V_0$ диференцијабилно у тачки $y_0 = f(x_0)$, онда је

$$D(f^{-1})(y_0) = (Df(x_0))^{-1}.$$

- *Извод инверзног пресликавања.* Претходна напомена може да се изведе и под следећим претпоставкама. Нека је f хомеоморфизам отвореног скупа V у нормираном простору X на отворен скуп W у нормираном простору Y и f^{-1} инверзни хомеоморфизам са W на V . Претпоставимо да је пресликавање f диференцијабилно у тачки $x_0 \in V$ и да је $Df(x_0)$ линеарни хомеоморфизам нормираног простора X на Y (тј. $Df(x_0)$ има непрекидно инверзно пресликавање³). Тада је f^{-1} диференцијабилно у тачки $y_0 = f(x_0)$ и његов извод у тој тачки је инверз линеарног пресликавања $Df(x_0)$, тј.

$$D(f^{-1})(f(x_0)) = (Df(x_0))^{-1}.$$

Доказ: Нека је $\psi(h) = f(x_0 + h) - f(x_0)$, тј.

$$\psi = \tau_{-y_0} \circ f \circ \tau_{x_0},$$

где је $\tau_a(v) = v + a$ translација за вектор a . Тада је

$$\psi^{-1} = \tau_{x_0}^{-1} \circ f^{-1} \circ \tau_{-y_0}^{-1} = \tau_{-x_0} \circ f^{-1} \circ \tau_{y_0},$$

³Одатле следи и да су X и Y изоморфни простори.

тј. $\psi^{-1}(k) = f^{-1}(k + y_0) - x_0 = f^{-1}(k + y_0) - f^{-1}(y_0)$. Одатле следи да, ако је

$$k = f(x_0 + h) - f(x_0),$$

онда је

$$h = f^{-1}(y_0 + k) - f^{-1}(y_0).$$

Нека је $L = (Df(x_0))^{-1}$. Из

$$k = f(x_0 + h) - f(x_0) = Df(x_0)(h) + o(h), \quad h \rightarrow 0$$

следи $L(k) = h + L(o(h))$, кад $h \rightarrow 0$, односно

$$f^{-1}(y_0 + k) - f^{-1}(y_0) = Lk + L(o(h)), \quad h \rightarrow 0.$$

Остаје још да се докаже да је величина $L(o(h))$, кад $h \rightarrow 0$, једнака $o(k)$ кад $k \rightarrow 0$.

По претпоставци L је непрекидно линеарно пресликавање, па је $\|L(o(h))\| \leq \|L\| \|o(h)\|$, одакле следи да је довољно доказати да је $o(h) = o(k)$ кад $k \rightarrow 0$.

Пошто је $k = Df(x_0)(h) + o(h)$, из непрекидности линеарног пресликавања $(Df(x_0))^{-1}$ и неједнакости троугла следи

$$\|k\| \geq \|Df(x_0)h\| - \|o(h)\| \geq \|(Df(x_0))^{-1}\|^{-1} \|h\| - \|o(h)\| \geq C\|h\|$$

(друга неједнакост следи из

$$\|h\| = \|(Df(x_0))^{-1}Df(x_0)h\| \leq \|(Df(x_0))^{-1}\| \|Df(x_0)h\|,$$

а трећа из тога што је величина $o(h)$ бесконачно мала у поређењу са $\|(Df(x_0))^{-1}\|^{-1} \|h\|$), па је $h = O(k)$ кад $k \rightarrow 0$, одакле следи

$$o(h) = o(O(k)) = o(k), \quad k \rightarrow 0,$$

чиме је доказ завршен.

(9) *Примери.*

- Ако је $f : V \rightarrow Y$ константно пресликавање, $f(x) = c$ онда је $f'(x) = 0 \in \mathcal{L}(X; Y)$. Ово следи из

$$f(x + h) = c = f(x) = f(x) + 0 + o(h).$$

- Ако је $L : X \rightarrow Y$ непрекидно линеарно пресликавање, онда је $DL(x) = L$ за све $x \in X$, јер је

$$L(x + h) = L(x) + L(h) = L(x) + L(h) + o(h).$$

Општије, ако је пресликавање $f : V \rightarrow Y$ диференцијабилно у тачки x_0 и $L \in \mathcal{L}(Y; Z)$, онда је

$$D(L \circ f)(x_0) = L \cdot Df(x_0).$$

Доказ последње једнакости може да се изведе директно из дефиниције извода, или из доказаног својства $DL(x) = L$ помоћу правила за извод сложеног пресликавања.

Задатак: Наћи матрицу првог извода пресликавања

$$L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad L(x, y) = (x, -y).$$

- Нека је $Y = Y_1 \times \cdots \times Y_n$ производ нормираних векторских простора $(Y_k, \|\cdot\|_k)$ са нормом

$$\|y\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} \|\pi_k y\|_k$$

(или неком њој тополошки еквивалентном нормом; нпр. (139) на стр. 85) и $f : V \rightarrow Y$, $f = (f_1, \dots, f_n)$. Ако су координатна пресликавања f_k диференцијабилна у тачки x_0 , онда је и f диференцијабилно у тој тачки и важи

$$Df(x_0) = (Df_1(x_0), \dots, Df_n(x_0)).$$

- Нека је $L : X_1 \times \cdots \times X_n \rightarrow Y$ непрекидно вишелинеарно пресликавање. Тада је L диференцијабилно и, за $h = (h_1, \dots, h_n)$,

$$DL(x_1, \dots, x_n)(h) = L(h_1, x_2, \dots, x_n) + L(x_1, h_2, x_2, \dots, x_n) + \cdots + \cdots + L(x_1, \dots, x_{n-1}, h_n).$$

Доказ је сличан доказу за $n = 1$ и остављамо га за вежбу.

- **Задатак:** Нека је $L : X \times \cdots \times X \rightarrow Y$ симетрично вишелинеарно пресликавање. Дефинишимо пресликавање $X \rightarrow Y$

$$Lh^n := L(h, \dots, h).$$

Доказати да је

$$DLh^n = nLh^{n-1} \in \mathcal{L}(X; Y)$$

где је линеарно пресликавање на десној страни дефинисано са

$$nLh^{n-1}(\eta) = L(h, \dots, h, \eta).$$

- (10) **Задатак:** Нека је A Банахова алгебра и $G(A)$ група њених инвертибилних елемената. Доказати да је пресликавање

$$f : G(A) \rightarrow A, \quad f(x) = x^{-1}$$

диференцијабилно и да је $Df(a)(h) = -a^{-1}ha^{-1}$ (уопштење формуле $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$ за функције реалне променљиве). Доказати да је пресликавање

$$\exp : A \rightarrow A, \quad x \mapsto e^x$$

диференцијабилно и да је

$$D\exp(x)h = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} x^k h x^{n-k-1} \right).$$

Специјално, ако x и h комутирају, $D\exp(x)h = e^x h = h e^x$, што уопштава познату чињеницу о изводу експоненцијалне функције реалне (и комплексне) променљивих.

- (11) Специјалан случај (10) је Банахова Алгебра $A = \mathcal{L}(X; X)$ линеарних пресликавања Банаховог простора у себе. Следећи задатак је уопштење овог случаја.

Задатак: Нека су X и Y Банахови простори.

(а) Доказати да је скуп

$$G := \{L \in \mathcal{L}(X; Y) \mid (\exists) L^{-1} \in \mathcal{L}(Y; X)\}$$

отворен у $\mathcal{L}(X; Y)$.

(б) Израчунати извод пресликавања

$$G \rightarrow \mathcal{L}(Y; X), \quad L \mapsto L^{-1}.$$

(12) **Задатак:** Нека је $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Хилбертов простор. Доказати да је функција $x \mapsto \|x\|$ диференцијабилна у свакој тачки $x_0 \in X \setminus \{0\}$ и да је њен извод у x_0 пресликавање $\xi \mapsto \frac{\langle \xi, x_0 \rangle}{\|x_0\|}$.

(13) **Задатак:** Нека је

$$A : \mathbb{R} \rightarrow GL(n, \mathbb{K})$$

глатка крива у главној линеарној групи (видети (130) на стр. 82). Доказати да је други извод пресликавања $\gamma(t) = A^{-1}(t)$ (инверзна матрица) једнак

$$\gamma'' = 2\gamma' A \gamma' - A^{-1} \frac{d^2 A}{dt^2} A^{-1}.$$

(14) *Напомене о пољу скалара \mathbb{K} .* Ако су у претходним разматрањима X и Y нормирани векторски простори над пољем \mathbb{C} , уз рестрикцију множења скаларом на \mathbb{R} , можемо да их посматрамо и као векторске просторе над \mathbb{R} . На пример, n -димензиони комплексни векторски простор \mathbb{C}^n може да се посматра као $2n$ -димензиони реални векторски простор \mathbb{R}^{2n} .

Ако је

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + L(h) + o(h), \quad \text{кад } h \rightarrow 0$$

за неко пресликавање $L : X \rightarrow Y$ које је линеарно над \mathbb{R} , онда је f диференцијабилно као пресликавање реалних нормираних простора, али не обавезно и као пресликавање комплексних. Са друге стране, ако је пресликавање L линеарно над \mathbb{C} , онда је оно свакако линеарно и над \mathbb{R} .

Одатле видимо да у случају нормираних векторских простора над пољем \mathbb{C} имамо две врсте диференцијабилности – реалну и комплексну, и да из диференцијабилности над \mathbb{C} следи диференцијабилност над \mathbb{R} , али не и обрнуто.

Пресликавања која су диференцијабилна над \mathbb{C} називамо *\mathbb{C} -диференцијабилним, комплексно диференцијабилним*, а пресликавања која су диференцијабилна над \mathbb{R} *\mathbb{R} -диференцијабилним* или *реално диференцијабилним*. Пресликавање је *холоморфно* у тачки a ако је оно комплексно диференцијабилно у некој отвореној околини те тачке⁴. Када не постоји могућност забуне и када је очигледно (или небитно) о ком пољу скалара је реч, говоримо просто о *диференцијабилним пресликавањима*.

Задатак: Доказати да је пресликавање $z \mapsto \bar{z}$ реално диференцијабилно као пресликавање реалног векторског простора \mathbb{R}^2 у себе,

⁴Нпр. пресликавање $z \mapsto |z|^2$ комплексне равни \mathbb{C} је комплексно диференцијабилно у нули, али није холоморфно у нули, јер није комплексно диференцијабилно ни у једној другој тачки. Читалац који ово не види одмах, треба да се стрпи до (41).

али да његов извод није линеаран над \mathbb{C} , тако да оно није комплексно диференцијабилно (видети задатак у (9)).

Задатак: Нека су X и Y векторски простори над пољем \mathbb{C} и $L : X \rightarrow Y$ пресликавање које је линеарно над \mathbb{R} , тј. такво да је

$$L(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 L(x_1) + \lambda_2 L(x_2)$$

за све $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ и $x_1, x_2 \in X$. Доказати да L може да се представи у облику

$$L = L_{\mathbb{C}} + \overline{L}_{\mathbb{C}},$$

где је $L_{\mathbb{C}}$ линеарно, а $\overline{L}_{\mathbb{C}}$ антилинеарно над \mathbb{C} , тј.

$$\begin{aligned} L_{\mathbb{C}}(\zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2) &= \zeta_1 L_{\mathbb{C}}(x_1) + \zeta_2 L_{\mathbb{C}}(x_2), \\ \overline{L}_{\mathbb{C}}(\zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2) &= \overline{\zeta_1} \overline{L}_{\mathbb{C}}(x_1) + \overline{\zeta_2} \overline{L}_{\mathbb{C}}(x_2), \end{aligned}$$

за све $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{C}$ и $x_1, x_2 \in X$. Последица: извод \mathbb{R} -диференцијалног пресликавања f може да се представи као збир линеарног и антилинеарног дела

$$Df(x) = D_{\mathbb{C}}f(x) + \overline{D}_{\mathbb{C}}f(x).$$

\mathbb{R} -диференцијабилно пресликавање f је \mathbb{C} -диференцијабилно ако и само ако је $\overline{D}f(x) = 0$. Овај услов се назива *Коши-Римановим условом*.

- (15) Изучавање пресликавања која су \mathbb{R} -диференцијабилна у нормираним просторима над пољем \mathbb{C} укључује, у смислу напомена у (14), и рад са комплексним скаларима као специјални случај. Специфичности комплексно диференцијабилних пресликавања изучавају се у Комплексној анализи. Једна од тих специфичности је да је свака комплексно диференцијална функција аналитичка (упоредити ово са случајем реално диференцијабилних функција (283) на стр. 140).
- (16) *Парцијални изводи.* Нека су $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ нормирани векторски простори, при чему је $X = X_1 \times X_2$. Нека је $V \subset X$ отворен скуп, $a = (a_1, a_2) \in V$ и $f : V \rightarrow Y$. Пресликавање

$$\psi_1(x) : B_1 \rightarrow Y, \quad \psi_1(x) = f(x, a_2)$$

је дефинисано у некој отвореној (у релативној топологији простора X_1) околини $B_1 \subset \pi_1(V)$ тачке a_1 . Ако је ψ_1 диференцијабилно у тачки a_1 , кажемо да је f *диференцијабилно по првој променљивој* у тачки a , а његов извод $D\psi_1(a_1)$ називамо *парцијалним изводом* пресликавања f по првој променљивој у тачки a , и означавамо са $D_1f(a)$. Слично се, помоћу пресликавања

$$\psi_2(x) : B_2 \rightarrow Y, \quad \psi_2(x) = f(a_1, x),$$

дефинише диференцијабилност по другој променљивој и парцијални извод $D_2f(a)$ (ако постоји).

Из локалности извода следи да ова дефиниција не зависи од избора околине B_1 и B_2 .

На исти начин се дефинише r парцијалних извода на Декартовом производу r нормираних простора $X = X_1 \times \cdots \times X_r$.

Специјално, ако је $f : \mathbb{K}^r \rightarrow \mathbb{K}$ функција r скаларних променљивих, парцијални изводи

$$D_j f(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h e_j) - f(a)}{h}, \quad e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

су изводи функције једне (j -те) променљиве, при чему се остале променљиве третирају као константе. У овом случају за $D_j f$ користи се и ознака $\frac{\partial f}{\partial x_j}$. На пример, ако је $f(x, y) = x^2 y + e^x$, онда је

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy + e^x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2.$$

- (17) **Задатак:** Доказати да функција $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана са

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6 + y^6}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

има парцијалне изводе $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$, али није непрекидна (па самим тим ни диференцијабилна) у тачки $(0, 0)$.

- (18) *Извод у правцу вектора.* Појам парцијалног извода може да се уопшти на следећи начин. Нека су $(X, \|\cdot\|_X)$, и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ нормирани векторски простори, $V \subset X$ отворен скуп, $a \in V$ и $f : V \rightarrow Y$. *Извод у правцу вектора* $\xi \in X$ је

$$D_\xi f(a) = \lim_{\mathbb{K} \ni t \rightarrow 0} \frac{f(a + t\xi) - f(a)}{t},$$

уколико лимес на десној страни постоји.

Специјално, из дефиниције следи да су парцијални изводи $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ функције r скаларних променљивих $f : \mathbb{K}^r \rightarrow \mathbb{K}$ изводи у правцу јединичних координатних вектора $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$.

- (19) **Задатак:** Наћи извод функције

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = x - yz^2 + y^3$$

у тачки $(1, 0, 1)$ правцу вектора $\xi = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

- (20) Из теореме о смени променљиве у лимесу следи

$$D_{c\xi} f(a) = c D_\xi f(a), \quad \text{за све } c \in \mathbb{K}.$$

Специјално, ако је пресликавање f диференцијабилно у тачки a , из дефиниције извода следи да оно има извод у правцу сваког вектора и да је

$$D_\xi f(a) = Df(a)(\xi).$$

У том случају је

$$D_{c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2} f(a) = c_1 D_{\xi_1} f(a) + c_2 D_{\xi_2} f(a),$$

јер је извод линеарно пресликавање.

- (21) Нека је $V \subset X$ отворен скуп, пресликавање $f : V \rightarrow Y$ диференцијабилно у тачки $a \in V$ и $\gamma :]-\delta, \delta[\rightarrow V$ крива таква да је $\gamma(0) = a$ и $\gamma'(0) = \xi$. Тада из правила за извод сложене функције следи

$$D_\xi f(a) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ \gamma(t).$$

Другим речима, уместо криве $a + t\xi$ у (18) може да се узме било која крива тангентна на ξ .

- (22) **Задатак:** Функција $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, дефинисана је са

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Доказати да постоје изводи $D_{\mathbf{i}}f(0, 0)$ и $D_{\mathbf{j}}f(0, 0)$ у правцу вектора $\mathbf{i} = (1, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1)$ и израчунати их. Доказати да не постоји извод $D_{\mathbf{i}+\mathbf{j}}f(0, 0)$ у правцу вектора $\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

- (23) **Задатак:** Наћи вектор ξ такав да је извод функције

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 3z$$

у тачки $(1, 3, 5)$ у правцу вектора $\frac{\xi}{\|\xi\|}$ највећи (норма је стандардна еуклидска норма).

- (24) **Задатак:** Доказати да функција $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, дефинисана са

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

има извод $D_{\xi}f(0, 0)$ у правцу сваког вектора $\xi \in \mathbb{R}^2$, али да није диференцијабилна у тачки $(0, 0)$.

- (25) **Задатак:** Доказати да је функција

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})^3$$

непрекидна на \mathbb{R}^2 и да има извод у правцу сваког вектора у свакој тачки, а да није диференцијабилна у $(0, 0)$.

- (26) Ако пресликавање $f : V \rightarrow Y$ отвореног скупа $V \subset X$ има у тачки $a \in V$ извод у правцу вектора $h \in X$ и ако је $L \in \mathcal{L}(Y; Z)$ непрекидно линеарно пресликавање, онда је

$$D_h(L \circ f)(a) = L \cdot D_h f(a).$$

Ова формула уопштава сличну формулу из (9); доказује се на сличан начин.

- (27) Теорема о средњој вредности из Главе 1 (видети (155) на стр. 94) има следеће важно уопштење: Нека је $V \subset X$ конвексан подскуп нормираног простора X , пресликавање $f : V \rightarrow Y$ непрекидно на V и диференцијабилно у тачкама сегмента

$$[a, b] = \{ta + (1-t)b \mid 0 \leq t \leq 1\} \subset X$$

који спаја тачке $a, b \in V$. Тада је

$$\|f(b) - f(a)\|_Y \leq \|b - a\|_X \sup_{0 \leq \theta \leq 1} \|Df(a + \theta(b-a))\|_{\mathcal{L}(X; Y)}.$$

Доказ: У Глави 1 смо доказали да је Липшицова константа диференцијабилног пресликавања $h : [0, 1] \rightarrow Y$ једнака супремуму норме првог извода $\|Dh(t)\|_Y$ (видети (155) на стр. 94). Доказ сада следи применом овог резултата и правила диференцирања сложене функције на пресликавање

$$h : [0, 1] \rightarrow Y, \quad h(t) = f(a + t(b-a)).$$

Задатак: Посматрајући пресликавање $x \mapsto f(x) - Df(c)(x)$ доказати да, под претпоставкама из претходног тврђења, за свако $c \in V$ важи

$$\|f(b) - f(a) - Df(c)(b-a)\|_Y \leq \|b-a\|_X \sup_{x \in [a,b]} \|Df(x) - Df(c)\|_{\mathcal{L}(X;Y)}.$$

- (28) **Задатак:** Нека је $V \subset X$ отворен повезан подскуп и $f : V \rightarrow Y$ диференцијабилно пресликавање. Доказати да ако је $Df \equiv 0$ на V , онда је пресликавање f константно.

Задатак: Нека је $V \subset \mathbb{R}^2$ отворен повезан подскуп и $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна функција, таква да је

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \quad \text{за све } (x, y) \in V.$$

Да ли одатле следи да f не зависи од y ? Решење: Не следи. Пример:

нека је $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$, где је

$$V_1 =]-2, 0[\times]-3, 3[, \quad V_2 = [0, 2[\times]1, 3[, \quad V_3 = [0, 2[\times]-3, -1[.$$

а $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ функција дефинисана са

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2, & (x, y) \in V_1 \cup V_2 \\ -x^2, & (x, y) \in V_3. \end{cases}$$

Тада је $\frac{\partial f}{\partial y} \equiv 0$, а $f(1, 2) = 1 \neq -1 = f(1, -2)$.

Задатак: Нека је $V \subset \mathbb{R}^2$ отворен *конвексан* подскуп и $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна функција, таква да је

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \quad \text{за све } (x, y) \in V.$$

Доказати да f не зависи од y .

- (29) *Непрекидно диференцијабилна пресликавања.* Диференцијабилно пресликавање $f : V \rightarrow Y$ је *непрекидно диференцијабилно*, или *класе C^1* , ако је

$$Df : V \rightarrow \mathcal{L}(X; Y)$$

непрекидно пресликавање нормираних векторских простора. Скуп непрекидно диференцијабилних пресликавања на скупу V означавамо са $C^1(V)$, овај скуп је векторски простор.

- (30) Нека је V отворен подскуп нормираног векторског простора $X_1 \times X_2$. Тада пресликавање $f : V \rightarrow Y$ припада класи $C^1(V)$ ако и само ако постоје непрекидни парцијални изводи $D_1f(x_1, x_2)$ и $D_2f(x_1, x_2)$ за све $x_1, x_2 \in V$. Непрекидност парцијалних извода овде значи да су пресликавања

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) &\mapsto D_1f(x_1, x_2), & V &\rightarrow \mathcal{L}(X_1; Y) \\ (x_1, x_2) &\mapsto D_2f(x_1, x_2), & V &\rightarrow \mathcal{L}(X_2; Y) \end{aligned}$$

непрекидна.

Специјално, из овог тврђења следи да је непрекидност парцијалних извода довољан услов за диференцијабилност (упоредити за задацима (17), (24) и (25)).

Доказ: (\Rightarrow) Нека је пресликавање f класе C^1 на V и нека је $a = (a_1, a_2) \in V$. Пресликавање

$$x_1 \rightarrow f(x_1, a_2)$$

је композиција пресликавања f и инклузије

$$j_1 : X_1 \rightarrow X_1 \times X_2, \quad j_1(x_1) = (x_1, a_1).$$

Пресликавање j_1 је линеарно, композиција транслације и пресликавања $i_1(x_1) = (x_1, 0)$, тј;

$$j_1(x_1) = (0, a_2) + i_1(x_1).$$

Извод константе је нула, па је $Dj_1 = Di_1$. Пресликавање i_1 је линеарно и непрекидно, па је, као што смо видели у (9), $Di_1 = i_1$. Одатле, на основу правила за извод композиције пресликавања и дефиниције парцијалног извода следи

$$D_1f(a) = D(f \circ j_1)(a_1) = Df(j_1(a_1)) \cdot i_1.$$

Слично се доказује да је

$$D_2f(a) = D(f \circ j_2)(a_2) = Df(j_2(a_2)) \cdot i_2$$

за инклузију

$$j_2 : X_1 \rightarrow X_1 \times X_2, \quad j_2(x_2) = (a_1, x_2)$$

и њен извод i_2 . Закључак сада следи из непрекидности пресликавања

$$\mathcal{L}(X_1 \times X_2; Y) \times \mathcal{L}(X_1; X_1 \times X_2) \rightarrow \mathcal{L}(X_1; Y), \quad (S, T) \mapsto S \circ T$$

(видети (302) на стр. 152).

(\Leftarrow) Нека је $a = (a_1, a_2) \in V$, претпоставимо да постоје парцијални изводи $D_1f(a)$, $D_2f(a)$ и да су непрекидни. Дефинишимо линеарно пресликавање $L : X_1 \times X_2 \rightarrow Y$ са

$$L(h) = D_1f(a)(h_1) + D_2f(a)(h_2), \quad \text{за } h = (h_1, h_2) \in X_1 \times X_2.$$

Тада је

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) - L(h) &= \\ &= f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) - D_1f(a)(h_1) - D_2f(a)(h_2) \\ &= f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2 + h_2) - D_1f(a)(h_1) + \\ &+ f(a_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) - D_2f(a)(h_2). \end{aligned}$$

Применом теореме о средњој вредности (27) одатле закључујемо

$$\begin{aligned} \|f(a+h) - f(a) - L(h)\|_Y &\leq \\ &\leq \sup_{0 \leq \theta_1 \leq 1} \|D_1f(a_1 + \theta_1 h_1, a_2 + h_2) - D_1f(a_1, a_2)\|_{\mathcal{L}(X_1; Y)} \|h_1\|_{X_1} \\ &+ \sup_{0 \leq \theta_2 \leq 1} \|D_2f(a_1, a_2 + \theta_2 h_2) - D_2f(a_1, a_2)\|_{\mathcal{L}(X_2; Y)} \|h_2\|_{X_2}. \end{aligned}$$

Одатле, због непрекидности парцијалних извода, следи доказ.

(31) Уз ознаке из тврђења (30), сваки вектор $h = (h_1, h_2) \in X_1 \times X_2$ може да се напише као

$$h = i_1(h_1) + i_2(h_2)$$

Одатле следи да за диференцијабилно пресликавање f важи

$$Df(a)(h) = Df(a)(i_1(h_1) + i_2(h_2)) = Df(a)(i_1(h_1)) + Df(a)(i_2(h_2))$$

Пошто је, како смо видели у (30), $D_1f(a) = D(f \circ j_1(a_1)) = Df(j_1(a_1)) \cdot i_1$ (и слично за D_2f), тиме смо доказали следећу важну формулу за диференцијабилно пресликавање f :

$$Df(a)(h_1, h_2) = D_1f(a)(h_1) + D_2f(a)(h_2)$$

за $a = (a_1, a_2) \in V$ и $(h_1, h_2) \in X_1 \times X_2$.

- (32) Из (30) индукцијом се лако доказује да пресликавање $f : V \rightarrow Y$ на отвореном скупу $V \subset X_1 \times \cdots \times X_r$ припада класи $C^1(V)$ ако и само ако има непрекидне парцијалне изводе D_jf за све $1 \leq j \leq r$. Такође, праволинијски се уопштава (31): за диференцијабилно пресликавање $f : X_1 \times \cdots \times X_r \rightarrow Y$ важи

$$Df(a)(h) = \sum_{k=1}^r D_kf(a)h_k, \quad \text{за } h = (h_1, \dots, h_r) \in X_1 \times \cdots \times X_r.$$

Специјално, ако је $V \subset \mathbb{K}^r$ и

$$f = (f_1, \dots, f_s) : V \rightarrow \mathbb{K}^s$$

диференцијабилно пресликавање, онда је његова Јакобијева матрица⁵ у тачки $a \in V$

$$J_f(a) = \left[\frac{\partial f_j}{\partial x_k} \right]_{j=1, \dots, s; k=1, \dots, r}.$$

Из правила за множење матрица следе записи теореме о изводу сложеног пресликавања у терминима парцијалних извода. На пример, ако је

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

онда је извод сложене функције $f(x, y, z)$ по t једнак

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

(за извод функције једне променљиве t користимо уобичајену ознаку $\frac{d}{dt}$). Општије, ако су x, y, z функције више променљивих, нпр.

$$x = x(r, s, t), \quad y = y(r, s, t), \quad z = z(r, s, t),$$

онда се парцијални изводи сложене функције $f(x, y, z)$ рачунају по правилу

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r}.$$

Задатак: Доказати да су парцијални изводи функције $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ у поларним координатама

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta, \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = -r \frac{\partial f}{\partial x} \sin \theta + r \frac{\partial f}{\partial y} \cos \theta.$$

Задатак: Нека је $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ диференцијабилно пресликавање,

$$u(x, y) = x + y, \quad v(x, y) = x - y$$

⁵Матрично представљање линеарног пресликавања зависи од избора базе; овде је реч о стандардним базама на \mathbb{K}^r и \mathbb{K}^s које чине јединични вектори дуж координатних оса, $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ итд.

и $z(x, y) = f(u, v)$. Доказати да је

$$\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)^2.$$

Задатак: Нека је $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ диференцијабилна функција и

$$u(x, y) = f(\lambda x + \mu y), \quad v(x, y) = f(xy(x^2 + y^2)^{-1}).$$

Доказати да је

$$\mu \frac{\partial u}{\partial x} = \lambda \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{и} \quad x \frac{\partial v}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

- (33) Нека је $V \subset X$ отворен подскуп нормираног простора X , $g_k : V \rightarrow Y_k$, $1 \leq k \leq r$ диференцијабилна пресликавања у нормиране просторе Y_k и $f : Y_1 \times \cdots \times Y_r \rightarrow Z$ диференцијабилно пресликавање у нормирани простор Z . Из правила за извод сложене функције и (31) следи

$$D(f \circ (g_1, \dots, g_r)) = \sum_{k=1}^r ((D_k f) \circ (g_1, \dots, g_r)) \cdot Dg_k.$$

- (34) Ако је $V \subset \mathbb{K}^r$, функција $f : V \rightarrow \mathbb{K}$ је класе C^1 ако и само ако су њени парцијални изводи $\frac{\partial f}{\partial x_k} : V \rightarrow \mathbb{K}$ непрекидне функције⁶ за све $1 \leq k \leq r$.

- (35) **Задатак:** Доказати да функција $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана са

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} + y^2 \sin \frac{1}{y}, & xy \neq 0, \\ x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0, y = 0 \\ y^2 \sin \frac{1}{y} & x = 0, y \neq 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$$

диференцијабилна, али није непрекидно диференцијабилна у тачки $(0, 0)$.

- (36) **Задатак:** Доказати да функција $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана са

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

има парцијалне изводе $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ који су прекидни у $(0, 0)$, али да је f диференцијабилна у $(0, 0)$.

- (37) **Задатак:** Доказати да је функција $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана са

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

непрекидна у тачки $(0, 0)$ и има ограничене парцијалне изводе $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$, али да није диференцијабилна у тачки $(0, 0)$.

⁶У (7) смо објаснили зашто у овом случају (парцијални) извод можемо да сматрамо скаларном функцијом.

- (38) **Задатак:** Нека је $\mathbb{K}^{n \times n}$ Банахова алгебра квадратних матрица реда n и $GL(n, \mathbb{K})$ група њених инвертибилних елемената. Доказати да је извод пресликавања

$$f : GL(n, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}, \quad f(X) = \det X$$

у тачки $B \in GL(n, \mathbb{K})$ у правцу вектора $V \in \mathbb{K}^{n \times n}$ једнак

$$df(B)V = \det B \operatorname{tr}(B^{-1}V).$$

Овај израз назива се *Јакобијевом формулом*.

Упутство: Прво доказати формулу за $B = \operatorname{Id}$ развијањем детерминанте матрице X по произвољној колони и рачунањем парцијалних извода у тачки $X = \operatorname{Id}$. За општи случај приметити да је $f(X) = \det B f(B^{-1}X)$ и диференцирати обе стране у тачки $X = B$.

Задатак: Доказати да је за сваку квадратну матрицу A

$$\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}.$$

Упутство: Нека је $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ и $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функција $f(t) = \det e^{tA}$. Из комутативности матрица sA и tA за $s, t \in \mathbb{R}$ следи $e^{(s+t)A} = e^{sA}e^{tA}$ (видети (304 на стр. 153)), па функција f задовољава Кошијеву једначину $f(s+t) = f(s)f(t)$. Одатле следи $f(t) = e^{Ct}$, где је $C = f'(0)$. Из комутативности A и $-A$ следи да је $e^A e^{-A} = \operatorname{Id}$, тј. да је матрица e^A инвертибилна, па применом Јакобијеве формуле (38) можемо да нађемо C . Случај $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ се своди на реални захваљујући мултипликативности детерминанте и адитивности трага.

Приметимо да је последица овог задатка неједнакост $\det e^A > 0$ за реалне матрице A , која је била садржај задатка у (304) на стр. 153.

- (39) Нека је $V \subset \mathbb{K}^n$ отворен подскуп, M компактан метрички простор и $f : V \times M \rightarrow Y$ непрекидна функција, са непрекидним парцијалним изводом $D_1 f$. Нека је

$$G : V \rightarrow C_Y(M), \quad x \mapsto f(x, \cdot)$$

пресликавање скупа V у нормирани простор $(C_Y(M), \|\cdot\|_\infty)$ непрекидних функција $f : M \rightarrow Y$. Тада је G диференцијабилно и његов први извод у тачки $x \in V$ је $D_1 f(x, \cdot) \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; C_Y(M))$.

Доказ: Из Теореме о средњој вредности следи да је за свако $t \in M$

$$\begin{aligned} \|f(x+h, t) - f(x, t) - D_1 f(x, t)(h)\|_Y &\leq \\ &\leq \|h\|_X \sup_{0 \leq \theta \leq 1} \|D_1 f(x + \theta h, t) - D_1 f(x, t)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{K}^n; Y)}. \end{aligned}$$

Преласком на $\sup_{t \in M}$, уз помоћ чињенице да је $D_1 f$ на компактном скупу равномерно непрекидно пресликавање, добијамо

$$\|f(x+h, \cdot) - f(x, \cdot) - D_1 f(x, \cdot)(h)\|_\infty = o(h), \quad \text{кад } h \rightarrow 0.$$

- (40) *Диференцирање интеграла.* Нека је $V \subset \mathbb{K}^n$ отворен подскуп, $[a, b]$ интервал у \mathbb{R} и $f : V \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ функција класе C^1 . Тада функција

$$F : V \rightarrow \mathbb{C}, \quad F(x) = \int_a^b f(x, t) dt$$

може да се схвати као композиција пресликавања

$$G : V \rightarrow C[a, b], \quad x \mapsto f(x, \cdot) \quad \text{и} \quad L : C[a, b] \rightarrow \mathbb{C}, \quad f \mapsto \int_a^b f(t) dt.$$

Пресликавање је линеарно и непрекидно у односу на норму $\|f\|_\infty =$ (јер је $|L(f)| \leq (b-a)\|f\|_\infty$), па је $DF = D(L \circ G) = L \cdot DG$, односно, на основу (39),

$$D \int_a^b f(x, t) dt = \int_a^b D_1 f(x, t) dt.$$

- (41) *Диференцијал*. Ако је V отворен подскуп нормираног простора X , а $f : V \rightarrow \mathbb{K}$ диференцијабилна функција са вредностима у пољу скалара, извод функције f се назива и њеним *диференцијалом* и означава са df . Специјално, ако је $X = \mathbb{K}^r$, из (32) следи

$$df(a)(h) = \sum_{k=1}^r \frac{\partial f}{\partial t_k}(a) h_k.$$

Пошто су пројекције

$$(t_1, \dots, t_r) \mapsto t_k$$

линеарна пресликавања, њихови изводи (односно диференцијали) су такође пројекције, па је $dt_k(a)(h) = h_k$ за све a , тако да претходни израз за диференцијал можемо да запишемо у облику

$$df(a) = \sum_{k=1}^r \frac{\partial f}{\partial t_k}(a) dt_k$$

(не пишемо $dt_k(a)$ већ само dt_k , јер, као што смо видели, $dt_k(a)$ не зависи од a), или, краће,

$$df = \sum_{k=1}^r \frac{\partial f}{\partial t_k} dt_k.$$

Ако је поље скалара $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $V \subset \mathbb{C}^r$ отворен скуп $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ онда можемо, као у (14), да говоримо о реалном и комплексном диференцијалну функције f . Ако је функција f диференцијабилна у реалном смислу, онда је њен диференцијал df линеаран над \mathbb{R} . У координатама $z_k = x_k + iy_k$ он се записује као

$$df = \sum_{k=1}^r \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial f}{\partial y_k} dy_k \right).$$

Ако израчунамо диференцијале dz_k и $d\bar{z}_k$ као диференцијале функција од x_k и y_k добијамо

$$dz_k = dx_k + idy_k, \quad d\bar{z}_k = dx_k - idy_k.$$

Одавде dx_k и dy_k могу једнозначно да се изразе преко dz_k и $d\bar{z}_k$, па диференцијал df може да се напише у облику

$$df = \sum_{k=1}^r \left(\frac{\partial f}{\partial z_k} dz_k + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k \right),$$

где је

$$\frac{\partial f}{\partial z_k} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} - i \frac{\partial f}{\partial y_k} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} + i \frac{\partial f}{\partial y_k} \right).$$

Ако, као у (14), df раздвојимо на комплексно линеарни и комплексно антилинеарни део; то пишемо у облику

$$df = \partial f + \bar{\partial} f,$$

где је $\partial f(a)$ \mathbb{C} -линеарно, а $\bar{\partial} f(a)$ \mathbb{C} -антилинеарно пресликавање. У координатама је

$$\partial f = \sum_{k=1}^r \frac{\partial f}{\partial z_k} dz_k, \quad \bar{\partial} f = \sum_{k=1}^r \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k.$$

Закључак из (14) је да је \mathbb{R} -диференцијабилна функција f и \mathbb{C} -диференцијабилна ако и само ако је $\bar{\partial} f = 0$. Нпр, функција

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = |z|^2$$

је \mathbb{R} -диференцијабилна у свакој тачки, али је \mathbb{C} -диференцијабилна само у нули, јер је, због $f(z) = z\bar{z}$, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = z$ (видети фусноту у (14)).

- (42) *Градијент*. Нека је $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Хилбертов простор над пољем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или \mathbb{C} , $V \subset X$ отворен подскуп и $f : V \rightarrow \mathbb{K}$ диференцијабилна функција са вредностима у пољу скалара. Њен диференцијал у тачки $a \in V$ је елемент дуалног простора:

$$df(a) \in \mathcal{L}(X; \mathbb{K}) = X^*.$$

По Рисовој теорему о репрезентацији (видети (360) на стр. 181), постоји јединствени вектор, означимо га са $\nabla f(a) \in X$, такав да је

$$df(a)(h) = \langle h, \nabla f(a) \rangle,$$

за све $h \in X$. Вектор $\nabla f(a)$ назива се *градијентом* функције f .

Ако је $X = \mathbb{K}^r$ са стандардним скаларним производом, онда су координате градијента у стандардној бази

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f_r}{\partial x_r}(a) \right).$$

Напоменимо да овај запис зависи од избора базе и од скаларног производа. У стандардној бази и са стандардним скаларним производом он је сличан запису диференцијала из (41). Међутим, ова два објекта се разликују: диференцијал је канонски⁷ дефинисан у произвољном нормираном простору, док је за градијент потребан скаларни производ и комплетност.

Ако је $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, из Коши–Шварцове неједнакости следи да за извод у правцу вектора ξ у тачки a важи

$$D_\xi f(a) = Df(a)(\xi) = \langle \xi, \nabla f(a) \rangle \leq \|\xi\| \|\nabla f(a)\|.$$

при чему једнакост важи ако и само ако је ξ колинеарно са $\nabla f(a)$ (упоредити са Задатком (23)).

⁷ „Канонски” у математици значи „без увођења додатне структуре”.

- (43) *Тангента на криву у равни.* Нека је C крива задата једначином $f(x, y) = 0$, где је функција $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ диференцијабилна, и нека је у тачки $(x_0, y_0) \in C$ $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$ (тачке у којима је градијент једнак нули називају се *сингуларним тачкама* криве $f(x, y) = 0$). Тада је тангента на C у тачки (x_0, y_0) дата једначином

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

Заиста, ако је $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ параметризација криве C , $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$, тада је $f(\gamma(t)) \equiv 0$, па је, по правилу за извод сложене функције,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} f(\gamma(t)) = \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \frac{d\gamma}{dt}(t_0).$$

Одатле видимо да је вектор

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

ортогоналан на тангентни вектор $\frac{d\gamma}{dt}(t_0)$, одакле следи тражена једначина тангенте.

- (44) **Задатак:** Нека је крива C у \mathbb{R}^3 задата као пресек две површи

$$f(x, y, z) = 0 \quad \text{и} \quad g(x, y, z) = 0,$$

и нека је $(x_0, y_0, z_0) \in C$ тачка у којој је

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq 0 \quad \text{и} \quad \nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq 0.$$

Доказати да је тангента на криву C у тој тачки колинеарна са вектором $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \times \nabla g(x_0, y_0, z_0)$, где је \times векторски производ у \mathbb{R}^3 . Скицирати криву пресека површи $z^2 = 4x^2 + 9y^2$, $6x + 3y + 2z = 5$ и наћи параметарску једначину њене тангенте у тачки $(2, 1, -5)$.

- (45) *Хомогена пресликавања.* Пресликавање $f : X \rightarrow Y$ векторских простора над пољем скалара \mathbb{K} је *хомогено* ако је

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) \quad \text{за све} \quad \lambda \in \mathbb{K}.$$

Ако су X и Y нормирани простори, а f хомогено пресликавање које је диференцијабилно у нули, онда је f линеарно. Заиста, из хомогености следи $f(0) = 0$ и $f(t\xi) = tf(\xi)$ за $t \in \mathbb{K}$, па је

$$Df(0)(\xi) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t\xi) - f(0)}{t} = f(\xi).$$

То значи да је $f = Df(0) \in \mathcal{L}(X; Y)$.

- (46) *Позитивно хомогене функције и Ојлерова теорема.* Уопштење (45) су пресликавања која су *хомогена степена k* , за неки позитиван број k . То су пресликавања за која је

$$f(\lambda x) = \lambda^k f(x) \quad \text{за све} \quad \lambda \in \mathbb{K}.$$

На пример, k -линеарна пресликавања $X_1 \times \cdots \times X_k \rightarrow Y$ су хомогена степена k . Полином

$$p(x, y, z) = x^7 + 3x^4yz^2 + 27y^2z^5$$

је хомоген степена 7.

Задатак: Нека је пресликавање $f : X \rightarrow Y$ диференцијабилно и хомогено степена k . Доказати да је за свако $h \in X$ извод у правцу $D_h f : X \rightarrow Y$ хомогено пресликавање степена $k - 1$.

Ако је поље скалара $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, уопштење хомогености је *позитивна хомогеност*, који се добија захтевом да једнакост $f(\lambda x) = \lambda^k f(x)$ важи за све $\lambda > 0$. За позитивно хомогене функције важи *Ојлерова теорема*: Диференцијабилна функција $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ на реалном нормираном простору X је позитивно хомогена степена k ако и само ако је

$$Df(x)(x) = kf(x).$$

Доказ: (\Rightarrow) Нека је $x \in X$ и нека је $\phi : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ функција дефинисана са

$$\phi(\lambda) = f(\lambda x) - \lambda^k f(x).$$

Ако је f позитивно хомогена степена k , онда је $\phi \equiv 0$, па је $\phi'(\lambda) \equiv 0$. По правилу диференцирања сложене функције одатле следи

$$Df(x)(x) = kf(x).$$

(\Leftarrow) Нека је $Df(x)(x) = kf(x)$. Нека је $x \in X$ и $\psi : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ функција дефинисана са

$$\psi(\lambda) = f(\lambda x) - \lambda^k f(x).$$

Диференцирањем ове функције и применом правила о изводу сложене функције добијамо да ψ задовољава линеарну диференцијалну једначину

$$\psi'(\lambda) - \frac{k}{\lambda}\psi(\lambda) = 0, \quad \psi(1) = 0 \quad \text{за } \lambda > 0.$$

На основу опште формуле за решење ове једначине коју смо извели у Глави 1 (видети (253) на стр. 124), следи да је $\psi \equiv 0$. Тиме је доказ завршен.

Оператор

$$f(x) \mapsto Df(x)(x)$$

на простору функција $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ назива се *Ојлеровим оператором*. Ојлерова теорема, другим речима, установљава да су позитивно хомогене функције степена k сопствени вектори Ојлеровог оператора који одговарају сопственој вредности k .

Задатак: Нека су $p(x, y)$ и $q(x, y)$ хомогене функције истог степена хомогености. Доказати да се *хомогена диференцијална једначина*

$$p(x, y) \frac{dy}{dx} + q(x, y) = 0$$

сменом $y = vx$ своди на једначину

$$\frac{dv}{\frac{q(1,v)}{p(1,v)} + v} = -\frac{dx}{x}$$

у којој лева страна зависи само од v а десна само од x , па може експлицитно да се реши интеграцијом обе стране.

Задатак: Скицирати криву $y^2 = x^3 + x^2$, и доказати да је $(0, 0)$ њена сингуларна тачка. Доказати да се сменом $y = vx$ ова крива преводи у криву $v^2 = x + 1$ која нема сингуларних тачака.

У оба претходна задатка, смена променљиве $y = vx$ која је поједноставила проблем може да се схвати као увођење нових координата $x = u$, $y = uv$. Пресликавање

$$\sigma : (u, v) \mapsto (u, uv).$$

пресликава целу праву $u = 0$ (v -осу) у тачку $(0, 0)$, а на комплементу је бијекција. Посматрајмо пресликавање

$$\psi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}P^1$$

које свакој тачки придружује праву $y = vx$ која ту тачку спаја са координатним почетком (подсетимо се да смо пројективне просторе $\mathbb{R}P^n$ дефинисали у Глави 1; видети (140) на стр. 86). График

$$\Gamma(\psi) \subset (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}) \times \mathbb{R}P^1$$

можемо да схватимо и као подскуп у $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1$. Ако означимо са Σ његово затворење у топологији производа $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1$, онда је

$$\Sigma = \Gamma(\psi) \cup \{0\} \times \mathbb{R}P^1.$$

Задатак: Доказати да је Σ хомеоморфно Мебијусовој траци.

Пројекција

$$\sigma : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^2$$

површи Σ на прву координату назива се *сигма процесом* (у литератури на енглеском језику чешћи је термин *blow up*) и представља један од метода *разрешавања сингуларитета кривих* у Алгебарској геометрији. Једна примена сигма процеса не мора увек да разреши сингуларитет, али је познато да сваки сингуларитет алгебарске криве у равни (тј. криве која је скуп нула полинома две променљиве) може да се разреши коначном композицијом сигма процеса.

Задатак: Разрешити сингуларитет криве $x^2 = y^3$.

(47) *Изводи вишег реда.* Видели смо да је извод пресликавања $f : V \rightarrow Y$, које је диференцијабилно на отвореном подскупу нормираног векторског простора X , пресликавање⁸

$$Df : V \rightarrow \mathcal{L}(X; Y).$$

У Глави 1 смо видели да је и $\mathcal{L}(X; Y)$ нормирани векторски простор, па има смисла говорити и о изводу пресликавања Df (уколико он постоји). Извод тог пресликавања је, по дефиницији, *други извод* пресликавања f ; пресликавање које има други извод назива се *двапут диференцијабилним* пресликавањем, а његов други извод је пресликавање

$$D^2f : V \rightarrow \mathcal{L}(X; \mathcal{L}(X; Y)).$$

⁸Сетимо се да ово не важи у случају да f посматрамо као пресликавање афиних простора (видети стр. 187), што ствара невоље у дефиницији другог извода у афиним просторима. Сличну ситуацију ћемо имати и код извода на многострукостима.

У Глави 1 је показано да постоји идентификација

$$\mathcal{L}(X; \mathcal{L}(X; Y)) \cong \mathcal{L}(X, X; Y),$$

где је простор на десној страни простор билинеарних пресликавања $X \times X \rightarrow Y$ (видети (148) на стр. 90), па други извод може да се схвати и као пресликавање скупа V у скуп билинеарних пресликавања из $X \times X$ у Y .

Индуктивно се дефинише n -ти извод као пресликавање

$$D^n f = DD^{n-1} f : V \rightarrow \mathcal{L}(X, \dots, X; Y)$$

скупа V у скуп n -линеарних пресликавања простора $X \times \dots \times X$ у Y (када оно постоји). Пресликавања која имају n -ти извод називамо n пута диференцијабилним.

Приметимо да из постојања n -тог извода $D^n f(a)$ у тачки a имплицитно (или „по дефиницији“) следи да $(n-1)$ извод $D^{n-1} f$ постоји у некој околини тачке a , пошто смо извод дефинисали за функције дефинисане на отвореном скупу.

Пресликавање $f : V \rightarrow Y$ је пресликавање класе C^n ако је n пута диференцијабилно и ако је

$$D^n f : V \rightarrow \mathcal{L}(X, \dots, X; Y)$$

непрекидно пресликавање. Скуп пресликавања класе C^n на скупу V означавамо са $C^n(V)$, овај скуп је векторски простор. Простор

$$C^\infty(V) := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C^n(V)$$

називамо простором *бесконечно диференцијабилних функција*.⁹

Задатак: Нека је $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ непрекидна функција и

$$F(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t) dt.$$

Доказати да је $D^n F(x) = f(x)$ (видети (40)).

(48) Нека је пресликавање f два пута диференцијабилно у тачки a . Тада је

$$D^2 f(a) \in \mathcal{L}(X; \mathcal{L}(X; Y)),$$

па је, за вектор $h_1 \in X$, $D^2 f(a)(h_1) \in \mathcal{L}(X; Y)$. За вектор $h_2 \in X$ је

$$D^2 f(a)(h_1, h_2) = (D^2 f(a)(h_1))(h_2) \in Y,$$

при чему је, као што је објашњено у (47), на левој страни једнакости други извод схваћен као билинеарно пресликавање, тј. елемент простора $\mathcal{L}(X, X; Y)$ изоморфног простору $\mathcal{L}(X; \mathcal{L}(X; Y))$.

Из диференцијабилности пресликавања Df и особина извода у правцу вектора (18) примењених на пресликавање Df следи

$$D^2 f(a)(h_1) = D_{h_1}(Df)(a).$$

⁹У Комплексној анализи се доказује да је, у случају кад је поље скалара $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, свако \mathbb{C} -диференцијабилно пресликавање (видети (14)) класе C^∞ . Када говоримо о томе да је неко пресликавање класе C^k , имаћемо на уму да је тај услов увек испуњен у случају комплексно диференцијабилних (тј. холоморфних) функција.

Обе стране ове једнакости су линеарна пресликавања на X ; израчунавањем вредности у тачки $h_2 \in X$ добијамо

$$D^2 f(a)(h_1, h_2) = (D_{h_1}(Df)(a))(h_2).$$

Пошто је

$$L : \mathcal{L}(X; Y) \rightarrow Y, \quad S \mapsto S(h_2)$$

линеарно пресликавање, применом (26) на $S = Df(a)$ израз на десној страни последње једнакости можемо да напишемо као

$$(D_{h_1}(Df)(a))(h_2) = D_{h_1}(Df(a)(h_2)).$$

Пошто је $D_{h_1}(Df(a)(h_2)) = D_{h_1}D_{h_2}f(a)$, овиме смо доказали формулу

$$D^2 f(a)(h_1, h_2) = D_{h_1}D_{h_2}f(a).$$

Из ње се индукцијом лако изводи

$$D^n f(a)(h_1, h_2, \dots, h_n) = D_{h_1}D_{h_2} \cdots D_{h_n}f(a).$$

- (49) *Симетричност извода вишег реда.* Нека је $V \subset X$ отворен подскуп нормираног простора X , $a \in V$ и Y нормирани простор. Ако пресликавање $f : V \rightarrow Y$ има n -ти извод $D^n f(a)$ у тачки $a \in V$, онда је $D^n f(a)$ симетрично n -линеарно пресликавање.

Доказ: Да $D^n f(a)$ можемо да схватимо као n -линеарно пресликавање смо видели раније (47), па остаје само да докажемо да је оно симетрично. Довољно је да докажемо тврђење за $n = 2$; општи случај се изводи индукцијом.

Нека је пресликавање f два пута диференцијабилно у тачки a . Нека су $h_1, h_2 \in X$ произвољни вектори. Посматрајмо помоћну функцију реалне променљиве $t \in [0, 1]$

$$g(t) = f(a + th_1 + h_2) - f(a + th_1).$$

Пошто је скуп V отворен, ова функција је дефинисана за $h_1, h_2 \in B]0; \rho/2[$, где је $\rho > 0$ довољно мало, тако да је лопта $B]a; \rho[$ садржана у V .

Из (27) следи

$$\|g(1) - g(0) - g'(0)\|_Y \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \|g'(t) - g'(0)\|_Y.$$

Нека је $\varepsilon > 0$. По претпоставци, f је двапут диференцијабилно, па постоји $\delta < \rho$, тако да за $h_1, h_2 \in B]0; \delta/2[$ важи

$$\|Df(a + th_1 + h_2) - Df(a) - D^2 f(a)(th_1 + h_2)\|_{\mathcal{L}(X; Y)} \leq \varepsilon(\|h_1\|_X + \|h_2\|_X),$$

и

$$\|Df(a + th_1) - Df(a) - D^2 f(a)(th_1)\|_{\mathcal{L}(X; Y)} \leq \varepsilon\|h_1\|_X \leq \varepsilon(\|h_1\|_X + \|h_2\|_X).$$

Пошто је

$$g'(t) = (Df(a + th_1 + h_2) - Df(a + th_1))(h_1),$$

односно

$$g'(t) = (Df(a + th_1 + h_2) - Df(a) - (Df(a + th_1) - Df(a)))(h_1),$$

из претходних неједнакости, уз примену неједнакости троугла, следи

$$\|g'(t) - (D^2 f(a)(h_2))(h_1)\|_Y \leq 2\varepsilon(\|h_1\|_X + \|h_2\|_X)\|h_1\|_X,$$

а одатле

$$\begin{aligned} \|g(1) - g(0) - (D^2f(a)(h_1))(h_2)\|_Y &\leq \|g(1) - g(0) - g'(0)\|_Y + \\ &\quad + \|g'(0) - (D^2f(a)(h_1))(h_2)\|_Y \\ &\leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \|g'(t) - g'(0)\|_Y + \\ &\quad + 2\varepsilon \|h_1\|_X (\|h_1\|_X + \|h_2\|_X). \end{aligned}$$

Пошто је f двапут диференцијабилно у a , Df је непрекидно у a па је, за мало h_1 и h_2

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \|g'(t) - g'(0)\|_Y \leq \varepsilon \|h_1\|_X,$$

па је

$$\|g(1) - g(0) - (D^2f(a)(h_1))(h_2)\|_Y \leq 3\varepsilon \|h_1\|_X (\|h_1\|_X + \|h_2\|_X).$$

Међутим, из дефиниције функције g следи да је израз $g(1) - g(0)$ симетричан у односу на h_1 и h_2 , па последња неједнакост важи и ако векторима h_1 и h_2 заменимо места. Из те две неједнакости добијамо, уз помоћ неједнакости троугла,

$$\|(D^2f(a)(h_1))(h_2) - (D^2f(a)(h_2))(h_1)\|_Y \leq 6\varepsilon (\|h_1\|_X + \|h_2\|_X)^2.$$

Ову неједнакост смо доказали уз претпоставку да су h_1 и h_2 довољно мали; али обе стране неједнакости су хомогене степена 2 по (h_1, h_2) , па ако она важи за (h_1, h_2) , онда важи и за $(\lambda h_1, \lambda h_2)$, за све скаларе λ . Другим речима, она важи за све $h_1, h_2 \in X$. Пошто је $\varepsilon > 0$ произвољно, одатле следи да је десна страна једнака нули, што је и требало доказати.

- (50) **Задатак:** Доказати да је свако непрекидно билинеарно пресликавање $L : X \times X \rightarrow Y$ класе C^∞ и израчунати $D^n L$ за све $n \in \mathbb{N}$.
- (51) Нека је пресликавање $f : V \rightarrow Y$ дефинисано на отвореном подскупу $V \subset X_1 \times \cdots \times X_r$. Из (30) и индукције следи да ако су у тачки $a \in V$ за све $k \leq n$ сви парцијални изводи

$$D_{i_1} D_{i_2} \cdots D_{i_k} f, \quad \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, r\}$$

непрекидни у тачки a , онда је f класе C^n у тој тачки. Заједно са (49) ово даје *довољан* услов комутативности парцијалних извода: ако су сви парцијални изводи n -тог реда непрекидни у тачки a , онда они комутирају, тј. онда је

$$D_{i_1} D_{i_2} \cdots D_{i_n} f(a) = D_{\sigma(i_j)} D_{\sigma(i_2)} \cdots D_{\sigma(i_n)} f$$

за сваку пермутацију σ скупа $\{i_1, \dots, i_n\}$.

Комутативност се може обезбедити и под слабијим претпоставкама; формулишимо то тврђење за изводе по прве две променљиве (пошто је група пермутација генерисана групом транспозиција, ово ограничење не умањује општост): Ако су парцијални изводи $D_1 D_2 f$ и $D_2 D_1 f$ непрекидни у тачки $a = (a_1, \dots, a_n)$, онда је $D_1 D_2 f(a) = D_2 D_1 f(a)$. Приметимо да ово тврђење не укључује непрекидност осталих парцијалних извода, већ само оних за које се тврди да комутирају. Доказ може да се изведе из (49): скуп

$$W := V \cap \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_3 = a_3, \dots, x_n = a_n\}$$

може да се схвати као подскуп скупа $X_1 \times X_2$. Рестрикција пресликавања f на W је класе C^2 има друге парцијалне изводе који непрекидни у тачки (a_1, a_2) . Одатле следи да је та рестрикција двапут диференцијабилна у (a_1, a_2) , па јој је други извод симетричан.

Задатак: (а) Доказати да не постоји функција $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ чији је диференцијал $df(x, y) = (x^2 + y^2)dx - 2xydy$.

(б) Наћи функцију $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ чији је диференцијал $df(x, y) = (x^2 + y^2)dx + 2xydy$.

(в) Да ли постоји функција $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ чији је диференцијал $df(x, y) = (\log y + 2x + ye^x)dx + (xy^{-1} + e^x)dy$?

Задатак: Функција $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана је са

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Доказати да су f , $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрекидне функције. Доказати да су функције $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ дефинисане на целој равни \mathbb{R}^2 и непрекидне на $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Доказати да је

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0).$$

Задатак: Доказати да функција $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, дефинисана са

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2}}, & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0, \end{cases}$$

има све парцијалне изводе n -тог реда за произвољно n , који не зависе од поретка диференцирања, али да је f прекидна у $(0, 0)$.

(52) Ако су x_1, \dots, x_n Декартове координате у \mathbb{R}^n , оператор

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

назива се *Лапласовим оператором* или *лапласијаном*, а једначина $\Delta u = 0$ *Лапласовом једначином* по функцији u . Функције које задовољавају Лапласову једначину називају се *хармонијским функцијама*.

Задатак: (а) Доказати да је функција

$$u : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad u(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$$

хармонијска.

(б) Доказати да је функција

$$u : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

хармонијска.

(в) Доказати да је свака хармонијска функција $u : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ која зависи само од $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ облика $u(\rho) = a + b\rho^{-1}$.

- (53) **Задатак:** Нека је $D \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ отворена околина тачке $\zeta_0 = (x_0, y_0)$ и нека је

$$f : D \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$$

функција класе C^1 .

- (а) Доказати да f задовољава Коши–Риманов услов (видети (14)) ако и само ако је

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Ове једначине се називају *Коши–Римановим једначинама*.

- (б) Нека f задовољава Коши–Риманов услов. Доказати импликацију

$$\det [Df(\zeta_0)] \Rightarrow Df(\zeta_0) = 0.$$

Ако је при томе f класе C^2 , доказати да су функције u и v хармонијске¹⁰.

- (54) *Хесијан*. Нека је $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ двапут диференцијабилно пресликавање. Тада билинеарна форма другог извода у тачки a може да се представи матрицом

$$[D^2 f(a)] = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right]_{i,j \in \{1, \dots, n\}},$$

која се назива *Хесијаном функције f* .

Задатак: Нека је $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ два пута диференцијабилна и позитивно хомогена функција степена хомогености 1 (видети (46)). Доказати да је њен Хесијан $[D^2 f(x)]$ сингуларна матрица за свако $x \in \mathbb{R}^n$.

- (55) Следеће тврђење може да се сматра глатком верзијом Урисонове леме (69) на стр. 64 за еуклидске просторе: Нека је $F \subset \mathbb{R}^n$ затворен и $K \subset \mathbb{R}^n$ компактан скуп, и нека је $F \cap K = \emptyset$. Тада постоји функција $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ класе C^∞ таква да је

$$f(\mathbb{R}^n) = [0, 1], \quad f \equiv 1 \text{ на } K, \quad f \equiv 0 \text{ на } F.$$

Доказ: У (283) на стр. 140 смо видели да је функција

$$\psi(t) = \begin{cases} 0 & \text{за } t \leq 0 \\ e^{-1/t} & \text{за } t > 0 \end{cases}$$

класе C^∞ . Одатле следи да је функција

$$h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{\psi(\varepsilon^2 - \|x\|^2)}{\psi(\varepsilon^2 - \|x\|^2) + \psi(\|x\|^2 - \varepsilon^2/4)}$$

класе C^∞ (именилац је увек различит од нуле). Лако се види да је

$$h(x) \equiv 1 \text{ на } B[0; \varepsilon/2], \quad h(x) \equiv 0 \text{ на } \mathbb{R}^n \setminus B]0; \varepsilon[.$$

¹⁰Може да се докаже и да је претпоставка да је f класе C^2 сувишна (видети (15)).

Из компактности скупа K следи да постоји коначна фамилија лопти $B]a_1; \varepsilon[, \dots, B]a_k; \varepsilon[$, таква да је

$$K \subset \bigcup_{j=1}^k B]a_j; \varepsilon/2[\subset \bigcup_{j=1}^k B]a_j; \varepsilon[\subset \mathbb{R}^n \setminus F.$$

Нека је $g_j(x) = h(x - a_j)$. Тада функција

$$f(x) = 1 - \prod_{j=1}^k (1 - g_j)$$

задовољава услове теореме.

Задатак: Нека је $U \subset \mathbb{R}^n$ отворен скуп, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ функција класе C^∞ и $a \in U$. Доказати да постоји отворена околина $V \ni a$ таква да је $V \subset U$ и функција $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ класе C^∞ таква да је

$$F(x) = f(x) \text{ за } x \in V \text{ и } F(x) = 0 \text{ за } x \notin U.$$

(56) Приметимо да из Теореме јединствености (293) на стр. 147 следи да тврђење (55) нема аналогију у класи аналитичких функција, а самим тим, због напомене у (15), ни у класи комплексно диференцијабилних.

(57) *Тејлорова формула.* Нека је $f : V \rightarrow Y$ пресликавање отвореног скупа $V \subset X$ нормираног простора X у нормирани простор Y које је n пута диференцијабилно у тачки $x \in V$ (имплицитно, то значи да је оно и $(n-1)$ пута диференцијабилно у некој околини те тачке). Тада је

$$f(x+h) = f(x) + Df(x)h + \dots + \frac{1}{n!} D^n f(x)h^n + o(\|h\|_X^n) \text{ кад } h \rightarrow 0,$$

где је $D^k f(x)h^k := D^k f(x)(h, \dots, h)$ вредност k -линеарног пресликавања $D^k f(x)$ у $(h, \dots, h) \in X^k$.

Доказ: за $n = 1$ тврђење је дефиниција првог извода. Претпоставимо да тврђење важи за $n-1$. Тада из Теореме о средњој вредности примењене на функцију

$$X \ni k \mapsto f(x+k) - (f(x) + Df(x)k + \dots + \frac{1}{n!} D^n f(x)k^n)$$

на сегменту $[0, h]$ следи

$$\begin{aligned} & \|f(x+h) - (f(x) + Df(x)h + \dots + \frac{1}{n!} D^n f(x)h^n)\|_Y \leq \\ & \leq \sup_{0 \leq \theta \leq 1} \|Df(x+\theta h) - (Df(x) + D^2 f(x)(\theta h) + \dots + \\ & \quad + \frac{1}{(n-1)!} D^n f(x)(\theta h)^{n-1})\|_{\mathcal{L}(X;Y)} \cdot \|h\|_X \end{aligned}$$

(овде смо користили правило диференцирања вишелинеарног пресликавања, видети (9)). Доказ следи из индуктивне хипотезе примењене на Df .

(58) Нека је у (57) $X = \mathbb{K}^p$. Тада Тејлорова формула може да се напише у виду

$$f(x+h) = \sum_{|\alpha| \leq n} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(x)h^\alpha + o(\|h\|_X^n) \text{ кад } h \rightarrow 0,$$

где је $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$, $\alpha_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (овакво α се назива *мултииндексом*), $h = (h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{K}^p$ и

$$\alpha! := \prod_{k=1}^p \alpha_k!, \quad |\alpha| := \sum_{k=1}^p \alpha_k, \quad h^\alpha := \prod_{k=1}^p h_k^{\alpha_k}, \quad D^\alpha f := D_1^{\alpha_1} \dots D_p^{\alpha_p} f.$$

Ако је $Y = \mathbb{K}$ онда је, уз уобичајену ознаку за парцијалне изводе скаларне функције,

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_p^{\alpha_p}}.$$

(59) **Задатак:** Развити функције

$$f(x, y) = \log(1 + x + y) \quad \text{и} \quad g(x, y) = \frac{1}{1 - x - y + xy}$$

у Тејлоров полином степена 3 у тачки $(0, 0)$.

(60) *Локалне екстремне вредности функција.* Нека је $V \subset X$ отворен подскуп нормираног простора X и $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ реална функција на V која је n пута диференцијабилна у тачки $a \in V$. Нека је

$$Df(a) = 0, \dots, D^{n-1}f(a) = 0 \quad \text{и} \quad D^n f(a) \neq 0.$$

Тада важе следећа тврђења:

- (а) Ако је a тачка локалног екстремума функције f , онда је n паран број, а n -линеарна форма $D^n f(a)$ је позитивно семидефинитна (тј. $D^n f(a)(h^n) \geq 0$ за све¹¹ $h \in X$) ако је a тачка локалног минимума, а негативно семидефинитна (тј. $D^n f(a)(h^n) \leq 0$ за све $h \in X$) ако је a тачка локалног максимума.
- (б) Ако је за неко $\delta > 0$

$$D^n f(a)h^n \geq \delta,$$

на јединичној сфери $\|h\|_X = 1$, онда је a тачка локалног минимума. Ако је за неко $\delta > 0$

$$D^n f(a)h^n \leq -\delta,$$

онда је a тачка локалног максимума.

Доказ: Из Тејлорове формуле и претпоставке о првих n извода функције f у тачки a следи

$$f(a + h) - f(a) = \frac{1}{n!} D^n f(a)h^n + \phi(h) \|h\|_X^n$$

за неку функцију $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ такву да $\phi(h) \rightarrow 0$ кад $h \rightarrow 0$.

По претпоставци о n -том изводу функције f , за неко $h_0 \in X$ је $D^n f(a)h_0^n \neq 0$, па је

$$f(a + th_0) - f(a) = \left(\frac{1}{n!} D^n f(a)h_0^n + \phi(th_0) \|h_0\|_X^n \right) t^n.$$

Пошто $\phi(th_0) \rightarrow 0$ кад $t \rightarrow 0$, за мало $\varepsilon > 0$ израз у загради има исти знак за све $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, па знак целог израза зависи само од знака t^n . Ако је a тачка локалног екстремума, онда се знак израза на десној

¹¹Довољно је рећи „за све h на јединичној сфери $\|h\|_X = 1$ ”, јер је $D^n f(a)$ вишелинеарно, па тиме и хомогено пресликавање.

страни не мења са променом знака t , а то је могуће само ако је t паран број. Сем тога, за свако h_0 за које је $D^n f(a)h_0^n \neq 0$ знак израза на десној страни је једнак знаку $t^n D^n f(a)h_0^n$, што значи да је и знак форме $D^n f(a)h^n$ сталан. Тиме је доказано (а).

Ако је испуњен први услов из (б), из Тејлорове формуле следи

$$f(a+h) - f(a) \geq \left(\frac{1}{n!} \delta + \phi(h) \right) \|h\|_X^n.$$

Пошто $\phi(h) \rightarrow 0$ кад $h \rightarrow 0$, израз на десној (а тиме и на левој) страни је позитиван за све h у довољно малој околини нуле. Тиме је доказано да из првог услова у (б) следи да је a тачка минимума. Слично се доказује да из другог следи да је a тачка максимума.

- (61) Ако је X простор коначне димензије, онда је, као што смо видели у Глави 1, јединична сфера $\|h\| = 1$ компактан скуп. У том случају, ако је f функција која задовољава услове (60), онда непрекидна функција

$$h \mapsto D^n f(a)h^n$$

на јединичној сфери достиже максимум и минимум. Ако су ове две вредности супротног знака, из (60) следи да a није тачка локалног екстремума функције f . Ако су ове вредности истог знака, онда, опет из (60), следи да је a тачка локалног екстремума, пошто је, због $Df^n(a) \neq 0$ и компактности сфере у том случају услов (б) испуњен.

- (62) Ако је у (60) $X = \mathbb{R}$ онда је $D^n f(a)h^n$ множење реалних бројева $f^{(n)}(a)$ и h^n . Ово n -линеарно пресликавање по h је за парно n увек семидефинитно кад је $f^{(n)}(a) \neq 0$, тако да се услов (а) у (60) у том случају своди само на парност броја n . У случају функција више променљивих, могуће је да и за парно n тачка a не буде тачка локалног екстремума, јер билинеарна форма у вишедимензионом случају може да буде индефинитна (тј. да не буде ни позитивно ни негативно семидефинитна).
- (63) **Задатак:** Нека је $f(x, y) = (y-x^2)(y-2x^2)$ за $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Доказати да рестрикција функције f на сваку праву кроз координатни почетак има строги минимум у координатном почетку, а да координатни почетак није тачка локалног екстремума функције f .
- (64) **Задатак:** Доказати да функције $f(x, y) = x^2 - y^2$ и $g(x, y) = x^3 - 3xy^2$ немају локалне екстремуме.
- (65) **Задатак:** Наћи максимум функције $f(x, y) = xye^{-2x-3y}$ у првом квадранту.
- (66) **Задатак:** Наћи највишу и најнижу тачку на површи $x^2 + xy + 3x + 2y + z + 5 = 0$ (z -оса је вертикална).
- (67) **Задатак:** Скицирати криву $x^2 + 3y^2 + 2xy = 9$ у \mathbb{R}^2 . Која тачка ове криве је најближа координатном почетку? Која тачка ове криве је најудаљенија од координатног почетка?
- (68) *Ојлер-Лагранжеве једначине.* Нека је X нормирани векторски простор, $L : X \times X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ пресликавање класе C^1 и $C_X^1([0, 1]; x_0, x_1)$ простор глатких (класе C^1) кривих $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ кривих које спајају тачке $x_0, x_1 \in X$, тј. таквих да је $\gamma(i) = x_i$ за $i \in \{0, 1\}$. Посматрајмо

функцију

$$S : C_X^1([0, 1]; x_0, x_1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad S(\gamma) = \int_0^1 L(\gamma(t), \gamma'(t), t) dt.$$

Претпоставимо да је $\gamma \in C_X^1([0, 1]; x_0, x_1)$ тачка локалног екстремума функције S . Тада, на основу (60), за сваку глатку фамилију кривих $\gamma_\tau(t)$, $-\varepsilon < \tau < \varepsilon$ у $C_X^1([0, 1]; x_0, x_1)$ (тј. за сваку глатку криву $(-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow C_X^1([0, 1]; x_0, x_1)$) такву да је¹² $\gamma_0 = \gamma$ важи

$$\left. \frac{dS(\gamma_\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0} = 0$$

Слично као у (40) извод на десној страни се израчунава диференцирањем под знаком интеграла, уз примену правила за извод сложеног пресликавања:

$$\frac{dS(\gamma_\tau)}{d\tau} = \int_0^1 \left(D_1 L(\gamma_\tau(t), \gamma'_\tau(t), t) \frac{\partial \gamma_\tau(t)}{\partial \tau} + D_2 L(\gamma_\tau(t), \gamma'_\tau(t), t) \frac{\partial \gamma'_\tau(t)}{\partial \tau} \right) dt.$$

Нека је

$$h(t) = \frac{\partial \gamma_\tau(t)}{\partial \tau}.$$

Из $\gamma_\tau(i) \equiv x_i$ следи $h(0) = h(1) = 0$, па применом парцијалне интеграције на други сабирак добијамо

$$\left. \frac{dS(\gamma_\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0} = \int_0^1 \left(D_1 L(\gamma(t), \gamma'(t), t) - \frac{d}{dt} D_2 L(\gamma(t), \gamma'(t), t) \right) h(t) dt,$$

где $\frac{d}{dt}$ означава тотални извод по t (не само по трећој променљивој у L). Овај израз је једнак нули за сваку варијацију γ_τ криве γ (и из ње изведену функцију h), па је

$$D_1 L(\gamma(t), \gamma'(t), t) - \frac{d}{dt} D_2 L(\gamma(t), \gamma'(t), t) = 0$$

Ово су тзв. *Ојлер–Лагранжеве једначине* варијационог рачуна.

- (69) *Права као најкраће растојање.* Нека је γ крива у равни $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$; претпоставимо, ради једноставности, да је она задата као график функције $y = f(x)$. Њена дужина је једнака

$$l(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt.$$

Применом Ојлер–Лагранжевих једначина на функцију дужине l добијамо

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{f'(t)}{\sqrt{1 + (f'(t))^2}} \right) = 0,$$

¹²Ова фамилија кривих назива се *варијацијом криве* γ у простору $C_X^1([0, 1]; x_0, x_1)$; метод о коме је овде реч спада у област *варијационог рачуна*. Овде примењујемо (60) на пресликавање $\tau \mapsto S(\gamma_\tau)$ за сваку глатку фамилију γ_τ . То пресликавање је реална функција реалне променљиве, која се факторише кроз простор $C_X^1([0, 1]; x_0, x_1)$ као композиција два пресликавања. Простор $C_X^1([0, 1]; x_0, x_1)$ није нормирани простор, али ипак на овом месту можемо да комутирамо извод и интеграл; више детаља о тој операцији рећи ћемо у Глави 4.

одакле следи да је израз у загради константан. Пошто функција $s \mapsto s(1 + s^2)^{-1/2}$ није константна ни на једном интервалу, следи да је $f' \equiv \text{const}$, тј. да је γ права.

- (70) **Задатак:** За коју функцију $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ је површина обртне површи добијене ротацијом криве $y = f(x)$ око x -осе најмања међу површинама обртних површи са фиксираним полупречницима r_0, r_1 попречних пресека са равнима $x = 0$ и $x = 1$?

- (71) Нека је $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функција класе C^1 . Питање да ли једначина

$$f(x, y) = 0$$

има јединствено решење по y је еквивалентно питању да ли постоји функција $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ таква да је крива $C = \{(x, y) \mid f(x, y) = 0\}$ њен график, односно таква важи

$$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \phi(x).$$

Знамо да таква функција не постоји ако крива C сече неку вертикалну праву два или више пута.

Претпоставимо да тангента на криву C у тачки $(x_0, y_0) \in C$ није вертикална. У (43) смо видели да је једначина тангенте у тој тачки

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0,$$

па услов да ова тангента није вертикална можемо да запишемо као

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Пошто је тангента најбоља линеарна апроксимација у околини тачке додира, можемо да очекујемо да постоји довољно мали квадрат око тачке (x_0, y_0) такав да је део криве који се у њему налази график неке функције $y = \phi(x)$.

Формулисано алгебарски, ако пар (x_0, y_0) задовољава једначину $f(x, y) = 0$, можемо да очекујемо да та једначина има јединствено решење по y у неком квадрату око (x_0, y_0) уколико линеарна једначина

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

има решење по y .

На тај начин, ако проблем решавања једначине $f(x, y) = 0$ локализујемо (тј. ограничимо на мали квадрат, или околину, око тачке (x_0, y_0)), онда можемо да очекујемо да можемо и да га *линеаризујемо*.

На пример, ако је $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, онда је крива C круг \mathbb{S}^1 , а њега можемо да представимо као график функције $y = \varphi(x)$ у околини било које тачке сем $(\pm 1, 0)$, јер је у свим осталим тачкама

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \neq 0.$$

Слично, у околини тачке (x_0, y_0) у којој је

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$$

можемо да очекујемо да је крива график функције $x = \psi(y)$. Тачке криве $f(x, y) = 0$ у којима је бар један парцијални извод функције f

различит од нуле називамо *регуларним тачкама*; у (43) смо већ рекли да тачке у којима су оба парцијална извода једнака нули називамо *сингуларним тачкама*. Крива је *регуларна* ако су све њене тачке регуларне (видети (153) на стр. 91 и (154) на стр. 92).

Ова, донекле неформална, разматрања ћемо сада да изложимо прецизније и општије.

(72) *Теорема о имплицитној функцији.* Нека су $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$, $(Z, \|\cdot\|_Z)$ нормирани векторски простори, при чему је Y Банахов. Нека је

$$Q = \{(x, y) \in X \times Y \mid \|x - x_0\|_X < \alpha, \|y - y_0\|_Y < \beta\}$$

околина тачке $(x_0, y_0) \in X \times Y$. Претпоставимо да је

1 пресликавање $f : Q \rightarrow Z$ непрекидно¹³ у тачки (x_0, y_0) и

$$f(x_0, y_0) = 0;$$

2 постоји парцијални извод $D_2f : Q \rightarrow \mathcal{L}(Y; Z)$ и непрекидан је у тачки (x_0, y_0) ;

3 $D_2f(x_0, y_0)$ има инверз¹⁴ $(D_2f(x_0, y_0))^{-1} \in \mathcal{L}(Z; Y)$

Тада постоје околина $U \subset X$ тачке x_0 и околина $V \subset Y$ тачке y_0 такве да је $U \times V \subset Q$ и пресликавање $\phi : U \rightarrow V$ такво да је

(а) $y_0 = \phi(x_0)$;

(б) ϕ непрекидно у тачки x_0 ;

(в) $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \phi(x)$ за $(x, y) \in U \times V$.

Ако је при томе, уз услове 1-3 испуњен и услов

♠ функција f и D_2f су, осим у тачки (x_0, y_0) непрекидни и у некој околини те тачке,

онда је и функција ϕ непрекидна у некој околини тачке x_0 у X .

Ако је уз услове 1-3 испуњен и услов

♣ у некој околини тачке (x_0, y_0) постоји парцијални извод D_1f и непрекидан је у тачки (x_0, y_0) ,

онда је функција ϕ диференцијабилна у тачки x_0 и њен извод је

$$\phi'(x_0) = -(D_2f(x_0, y_0))^{-1} \cdot D_1f(x_0, y_0).$$

Ако је уз то f функција класе C^k у некој околини тачке (x_0, y_0) , онда је и ϕ функција класе C^k у некој околини тачке x_0 .

Доказ: По претпоставци је $D_2f(x_0, y_0)$ линеарни хомеоморфизам простора Y и Z , па је једначина $f(x, y) = 0$ еквивалентна једначини

$$y = y - (D_2f(x_0, y_0))^{-1}(f(x, y)).$$

Ако десну страну означимо са $g(x, y)$, тј.

$$g(x, y) := y - (D_2f(x_0, y_0))^{-1}(f(x, y))$$

онда је решавање једначине $f(x, y) = 0$ еквивалентно тражењу фиксне тачке пресликавања $y \mapsto g(x, y)$ (фиксна тачка овог пресликавања, наравно, као и решење једначине $f(x, y) = 0$, зависи од x). Овај

¹³За норму на производу $X \times Y$ узимамо било коју од (тополошки еквивалентних) норми $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$ дефинисаних у Глави 1.

¹⁴Овај услов уопштава услов $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0$ из (71). Специјално, из њега следи $Y \cong Z$ (Y и Z су изоморфни као тополошки и као векторски простори).

проблем ћемо да решимо применом Банахове теореме о фиксној тачки (видети стр. 60).

Пресликавање g може да се напише као композиција

$$g = \text{Id}_Y \circ \pi_Y - L \circ f,$$

где је $\text{Id}_Y : Y \rightarrow Y$ идентичко пресликавање, $\pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$ пројекција и $L = (D_2f(x_0, y_0))^{-1} : Z \rightarrow Y$. Ова три пресликавања су непрекидна линеарна пресликавања (па су једнака свом изводу). Одатле следи да је парцијални извод пресликавања g по другој променљивој

$$D_2g(x, y) = (D_2f(x_0, y_0))^{-1}(D_2f(x_0, y_0) - D_2f(x, y)),$$

одакле добијамо неједнакост

$$\|D_2g(x, y)\|_{\mathcal{L}(Y)} \leq \|(D_2f(x_0, y_0))^{-1}\|_{\mathcal{L}(Z; Y)} \|D_2f(x_0, y_0) - D_2f(x, y)\|_{\mathcal{L}(Y; Z)}$$

Пошто је, по претпоставци, пресликавање $D_2f : Q \rightarrow \mathcal{L}(Y; Z)$ непрекидно у тачки (x_0, y_0) , постоји околина $B_X]x_0; \rho[\times B_Y]y_0; \rho[$ на којој је

$$\|D_2g(x, y)\|_{\mathcal{L}(Y)} < \frac{1}{2}.$$

Одатле, на основу Теореме о средњој вредности, следи да је, за свако $x \in B_X]x_0; \rho[$,

$$\|g(x, y_1) - g(x, y_2)\|_Y < \frac{1}{2} \|y_1 - y_2\|_Y$$

за $y_1, y_2 \in B]y_0; \rho[$. Тиме смо доказали да је, за фиксирано $x, y \mapsto g(x, y)$ контракција на $B]y_0; \rho[$. Да би смо могли да применимо Банахову теорему о фиксној тачки, остаје још да пажљивије проучимо домен и кодомен пресликавања g и докажемо да нека његова рестрикција слика комплетан метрички простор у себе.

Нека је ε произвољан број из интервала $]0, \rho[$. Пошто је

$$\begin{aligned} \|y_0 - g(x, y_0)\|_Y &= \|(D_2f(x_0, y_0))^{-1}(f(x, y_0))\|_Y \\ &\leq \|(D_2f(x_0, y_0))^{-1}\|_{\mathcal{L}(Z; Y)} \|f(x, y_0)\|_Z, \end{aligned}$$

из непрекидности пресликавања f у (x_0, y_0) следи да постоји број $\delta \in]0, \rho[$ такав да за $x \in B_X]x_0; \delta[$ важи

$$\|y_0 - g(x, y_0)\|_Y < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из ове неједнакости и из доказане чињенице да је g контракција на $B]y_0; \rho[$ (са коефицијентом контракције мањим од $1/2$) следи да за $x \in B_X]x_0; \delta[$ и $y \in B_Y]y_0; \varepsilon[$ важи

$$\begin{aligned} \|y_0 - g(x, y)\|_Y &\leq \|g(x, y) - g(x, y_0)\|_Y + \|y_0 - g(x, y_0)\|_Y \\ &< \frac{1}{2} \|y - y_0\|_Y + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

односно, да за $x \in B_X]x_0; \delta[$ пресликавање $y \mapsto g(x, y)$ пресликава лопту $B_Y]y_0; \varepsilon[$ у њен подскуп $B_Y]y_0; \varepsilon[$. Пошто је затворена лопта $B_Y]y_0; \varepsilon[$ затворен подскуп Банаховог простора Y , она је комплетан метрички простор, па из Банахове теореме о фиксној тачки следи да за свако $x \in B_X]x_0; \delta[$ постоји јединствена фиксна тачка $y = \phi(x)$ пресликавања $y \mapsto g(x, y)$.

Непрекидност пресликавања ϕ следи из доказане чињенице да за свако ε постоји δ тако да за $x \in B_X[x_0, \delta[$ пресликавање $y \mapsto g(x, y)$ пресликава лопту $B_Y[y_0; \varepsilon]$ у њен подскуп $B_Y[y_0; \varepsilon[$.

Претпоставимо да је, уз услове 1-3, испуњен и услов \spadesuit . Тада доказ теореме можемо да поновимо узимајући, уместо тачке (x_0, y_0) произвољну тачку (x_1, y_1) у околини у којој је f непрекидна. Приметимо да је инвертибилност линеарног пресликавања *отворено својство* (видети аргумент у (303) на стр. 153), па одатле следи да је D_2f инвертибилно и у некој околини тачке (x_0, y_0) ; пошто је тврђење локалног карактера можемо да претпоставимо да је (x_1, y_1) у тој околини. Тиме су испуњени сви услови теореме са тачком (x_1, y_1) уместо (x_0, y_0) , што нам даје решење $y = \phi_1(x)$ непрекидно у x_1 . Али, због јединствености, важи $\phi = \phi_1$, па је ϕ непрекидно у x_1 .

Ако је уз 1-3 испуњен услов \clubsuit , из (30) следи да је функција f диференцијабилна у (x_0, y_0) . Одатле, користећи $f(x, \phi(x)) \equiv 0$, добијамо¹⁵

$$\|D_1f(x_0, \phi(x_0))(h) + D_2f(x_0, \phi(x_0))(k)\|_Z \leq \delta(\|h\|_X + \|k\|_Y),$$

где је $k = \phi(x_0 + h) - \phi(x_0)$. Претходна неједнакост важи за довољно мало $\|h\|_X$ (што због непрекидности ϕ у x_0 обезбеђује и довољно мало $\|k\|_Y$) за које је $(x_0 + h, y_0 + k)$ унутар околине у којој важе претпоставке и доказани закључци теореме.

Пошто је $D_2f(x_0, y_0)$ линеарни хомеоморфизам, одавде следи

$$\begin{aligned} & \| (D_2f(x_0, \phi(x_0)))^{-1} \cdot D_1f(x_0, \phi(x_0))(h) + k \|_Y \leq \\ & \leq \delta \| (D_2f(x_0, \phi(x_0)))^{-1} \|_{\mathcal{L}(Z; Y)} (\|h\|_X + \|k\|_Y). \end{aligned}$$

Претпоставимо да је δ изабрано тако да је

$$\delta \| (D_2f(x_0, \phi(x_0)))^{-1} \|_{\mathcal{L}(Z; Y)} \leq 1/2$$

и уведемо ознаку $a = 2 \| (D_2f(x_0, \phi(x_0)))^{-1} \cdot D_1f(x_0, \phi(x_0)) \|_{\mathcal{L}(Z; Y)}$. Из претходне неједнакости добијамо

$$\|k\|_Y - \frac{a}{2} \|h\|_X \leq \frac{1}{2} (\|h\|_X + \|k\|_Y), \quad \text{односно} \quad \|k\|_Y \leq (a + 1) \|h\|_X.$$

Одатле следи да (за довољно мало $\|h\|_X$) важи

$$\begin{aligned} \|k + (D_2f(x_0, \phi(x_0)))^{-1} \cdot D_1f(x_0, y_0)(h)\|_Y & \leq \\ & \leq \delta(a + 2) \| (D_2f(x_0, \phi(x_0)))^{-1} \|_{\mathcal{L}(Z; Y)} \|h\|. \end{aligned}$$

Пошто је $k = \phi(x_0 + h) - \phi(x_0)$, последња неједнакост доказује диференцијабилност¹⁶ пресликавања ϕ . Доказ непрекидне диференцијабилности следи из непрекидности (и непрекидне диференцијабилности) операција $(A, B) \mapsto A \cdot B$ и $A \mapsto A^{-1}$ у простору ограничених линеарних оператора.

¹⁵Ради једноставности и одређености, овде ћемо на $X \times Y$ користити норму $\|(x, y)\|_1 := \|x\|_X + \|y\|_Y$; то не смањује општост у односу на употребу било које норме $\|\cdot\|_p$ за $1 \leq p \leq \infty$, јер се ради о еквивалентним нормама.

¹⁶Сам доказ диференцијабилности је сложенији од извођења формуле за извод пресликавања ϕ – када бисмо унапред знали да је пресликавање ϕ диференцијабилно, формулу за његов извод извели бисмо диференцирањем идентитета $f(x, \phi(x)) \equiv 0$ и применом правила за извод сложене функције.

- (73) У случају простора коначне димензије $X = \mathbb{K}^r$, $Y = Z = \mathbb{K}^s$, и пресликавања

$$f = (f_1, \dots, f_s) : \mathbb{K}^r \times \mathbb{K}^s \rightarrow \mathbb{K}^s$$

услов инвертибилности линеарног пресликавања $D_2f(x_0, y_0)$ своди се на услов инертибилности матрице

$$\left[\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x_0, y_0) \right]_{i,j \in \{1, \dots, s\}}.$$

Специјално, ако је $s = 1$, тај услов се своди на $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$, као у (71).

- (74) **Задатак:** Нека је функција $z = z(x, y)$ имплицитно дефинисана једначином

$$x + e^{x+y} + e^{y+z} = 2.$$

Израчунати $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0, 0)$.

- (75) **Задатак:** Нека је функција $y = y(x)$ имплицитно задата једначином $f(x, y) = 0$, где је f функција класе C^2 . Наћи $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

- (76) **Задатак:** Доказати да је у некој околини тачке $(0, -1)$ крива

$$(x^2 + y^2)^2 = 3x^2y - y^3$$

график неке глатке функције $y = f(x)$ и да је њена тангента у тој тачки паралелна x -оси.

- (77) **Задатак:** Доказати да је у некој околини тачке $(1, 2) \in \mathbb{R}^2$ системом једначина

$$x_1 e^{y_1 + y_2} + 2y_1 y_2 = 1, \quad x_2 e^{y_1 - y_2} - \frac{y_1}{1 + y_2} = 2x_1$$

дефинисано јединствено пресликавање $f = (f_1, f_2)$ које тачку $(1, 2)$ слика у $(0, 0)$ и које је непрекидно диференцијабилно у тој околини. Израчунати диференцијале $df_1(1, 2)$ и $df_2(1, 2)$.

- (78) Претпоставимо да желимо, слично као у претходним задацима, да израчунамо парцијални извод $\frac{\partial z}{\partial x}$, где је

$$x^2 + y^2 + t^2 - 2z = 0, \quad x^2 + y^2 - t = 0.$$

Ако другу једначину решимо по t и добијени израз $t = x^2 + y^2$ убацимо у прву, добијамо $z = x^2 + y^2 + x^4 + 2x^2y^2 + y^4$, па је

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 4x^3 + 4xy^2.$$

Међутим, ако другу једначину решимо по y^2 и добијени израз $y^2 = t - x^2$ убацимо у прву, добијамо $z = x^2 + (t - x^2) + t^2 = t + t^2$, па је

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Ово значи да проблем налажења парцијалног извода $\frac{\partial z}{\partial x}$ у овом случају није добро постављен. Наиме, две једначине по x, y, z, t задају, у случају да су одговарајуће матрице парцијалних извода недегенерисане, две од тих величина као функције од преостале две. Да би проблем био добро постављен, неопходно је прецизирати које су од дате четири величине функције, а које променљиве. У првом случају,

посматрали смо величине x и y , а у другом x и t као променљиве. За парцијални извод у првом случају користи се ознака

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = 2x + 4x^3 + 4xy^2.$$

Ознака y у индексу на десној страни означава да је y променљива (уз, наравно, променљиву x по којој се диференцира) функције z . Слично, други добијени израз пишемо у облику

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_t = 0.$$

Задатак: Величине x, y, z, t, u су повезане једначинама

$$x^2 + y = u + z + \sin t, \quad x + y + t = 0.$$

Израчунати

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{x,z}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{y,z}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{x,z}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{z,t}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{y,t}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{x,y}.$$

- (79) *Теорема о инверзној функцији.* Нека су X и Y Банахови простори, $V \subset X$ отворен скуп и $f : V \rightarrow Y$ пресликавање класе C^k . Нека је у тачки $x_0 \in V$ пресликавање $Df(x_0) : X \rightarrow Y$ линеарни хомеоморфизам¹⁷. Тада постоји отворена околина $U \subset V$ тачке x_0 таква да је рестрикција $f : U \rightarrow Y$ хомеоморфизам скупа U на неку отворену околину тачке $y_0 = f(x_0) \in Y$. При томе је инверзно пресликавање $f^{-1} : f(U) \rightarrow U$ класе C^k и важи

$$D(f^{-1}(y)) = (Df(x))^{-1}.$$

Доказ: Применимо Теорему о имплицитној функцији на функцију $g(x, y) = f(x) - y$, мењајући улоге x и y . Пошто је

$$D_1g(x_0, y_0) = Df(x_0)$$

линеарни хомеоморфизам, из (72) следи да постоји отворена лопта $B_Y \subset Y$ са центром y_0 и непрекидно пресликавање $\psi : B_Y \rightarrow X$ такво да је $\psi(B_Y) \subset V$ и $f(\psi(y)) = y$ за $y \in B_Y$, тј. $\psi = f^{-1}$ на B_Y . При томе, ако је f класе C^k , онда је такво и g , а на основу (72) и ψ . Из $f(\psi(y)) = y$ следи да је ψ инјективно на B_Y , па је $\psi : B_Y \rightarrow \psi(B_Y)$ непрекидна бијекција. Сем тога, $\psi(B_Y) = f^{-1}(B_Y)$ је отворен скуп и f је хомеоморфизам скупа $U = \psi(B_Y)$ на $f(U)$.

- (80) У случају $X = Y = \mathbb{K}^r$, услов да је $Df(x_0)$ линеарни хомеоморфизам своди се на питање инвертибилности Јакобијеве матрице (видети (7))

$$J_f(x_0) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]_{i,j \in \{1, \dots, r\}},$$

односно на услов да је Јакобијан $\det J_f(x_0)$ различит од нуле.

- (81) **Задатак:** Нека је $V \subset \mathbb{R}^n$ отворен подскуп и $m < n$. Доказати да не постоји инјективно пресликавање $f : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ класе C^1 .

¹⁷Другим речима, $Df(x_0)$ има непрекидно инверзно пресликавање. Специјално, одатле следи да је $X \cong Y$ у тополошком и алгебарском смислу.

- (82) Хомеоморфизам $f : V \rightarrow W$ је *дифеоморфизам* ако су f и f^{-1} диференцијабилна пресликавања.

Задатак: Нека су $V \subset \mathbb{R}^n$ и $W \subset \mathbb{R}^m$ отворени скупови и $f : V \rightarrow W$ дифеоморфизам класе C^1 . Доказати да је $n = m$.

- (83) **Задатак:** Доказати да је пресликавање

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$$

локално инјективно (тј. да свака тачка (x_0, y_0) има околину у којој је оно инјективно), али да није инјективно на \mathbb{R}^2 .

- (84) *Локалне координате.* Пресликавање $f : [0, +\infty[\times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^2$ дефинисано са

$$f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

је дифеоморфизам у околини сваке унутрашње тачке домена (јер је Јакобијан овог пресликавања једнак r), али није дифеоморфизам на целом домену. Њиме су дефинисане *поларне координате* у некој довољно малој околини сваке тачке $x_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Поларне координате нису дефинисане глобално на целој равни. Ово је пример *локалних координата*; сваки локални дифеоморфизам дефинише локалне координате.

Слично, у $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ пресликавање

$$f(\rho, \theta, z) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z)$$

има Јакобијан једнак r ; њиме дефинисане локалне координате називају се *цилиндричним координатама*. Пресликавање

$$g(\rho, \theta, \phi) = (\rho \cos \theta \sin \phi, \rho \sin \theta \sin \phi, \rho \cos \phi)$$

у $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ има Јакобијан једнак $\rho^2 \sin \phi$, па задаје локалне координате у околини сваке тачке у којој је $\rho > 0$, $\sin \phi \neq 0$. Ове координате називају се *сферним координатама*. Општије, у $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ систем

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho \cos \phi_1 \\ x_2 &= \rho \sin \phi_1 \cos \phi_2 \\ &\dots\dots\dots \\ x_{n-1} &= \rho \sin \phi_1 \sin \phi_2 \cdots \sin \phi_{n-2} \cos \phi_{n-1} \\ x_n &= \rho \sin \phi_1 \sin \phi_2 \cdots \sin \phi_{n-2} \sin \phi_{n-1} \end{aligned}$$

има Јакобијан једнак $\rho^{n-1} \sin^{n-2} \phi_1 \sin^{n-3} \phi_2 \cdots \sin \phi_{n-1}$ и дефинише *уопштене сферне координате*.

- (85) Вратимо се кривој из (71), која је задата једначином $f(x, y) = 0$, где је f функција класе C^1 која задовољава услов $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ у тачки (x_0, y_0) (а самим тим, због непрекидности, и у некој околини те тачке). Јакобијева матрица пресликавања $(x, y) \mapsto (x - x_0, f(x, y))$ је

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

У околини у којој је $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ ова матрица је инвертибилна, па су са

$$X = x - x_0, \quad Y = f(x, y)$$

задате локалне координате у околини тачке (x_0, y_0) . У тим координатама, једначина криве је $Y = 0$. То значи да у новим координатама крива има веома једноставну параметризацију

$$t \mapsto (t, 0).$$

Ово опажање о кривама сада ћемо да уопштимо на вишедимензионе објекте.

- (86) *Теорема о рангу.* Следећа теорема показује како, под одређеним условима, пресликавање може *локално* (у околини неке тачке) да се представи као пројекција у погодну изабраним „локалним координатним системима” у домену и кодомену. Пресликавања φ и ψ о којима је реч у теорему играју улогу *локалне смене координата*, сличне преласку са x, y на X, Y у (85):

Нека је $X = \mathbb{K}^n$, $Y = \mathbb{K}^m$, $E \subset X$ отворена околина тачке x_0 и

$$f : E \rightarrow Y$$

пресликавање класе C^k (за неко $k \geq 1$), такво да је ранг линеарног пресликавања $Df(x)$ константан на E , тј.

$$\text{rang } Df(x) = r \quad \text{за све } x \in E.$$

Тада постоје

- отворена околина U тачке x_0 и дифеоморфизам класе C^k

$$\psi : U \rightarrow I^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid (\forall j) |x_j| < 1\};$$

- отворена околина $V \supset f(U)$ тачке $y_0 = f(x_0)$ и дифеоморфизам класе C^k

$$\varphi : V \rightarrow I^m = \{(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{K}^m \mid (\forall j) |y_j| < 1\};$$

такви да је

$$\varphi \circ f \circ \psi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0).$$

Доказ: Нека је $f = (f_1, \dots, f_m)$. Можемо, заменивши $f(x)$ са $f(x + x_0) - y_0$, да претпоставимо да је $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$. Слично, компонујући f са пермутацијом координата (која је бијективно линеарно пресликавање), можемо да претпоставимо да је горњи леви $r \times r$ минор детерминанте линеарног пресликавања $Df(0)$ несингуларан, тј. да је

$$\det \left[\frac{\partial f_i}{\partial u_j}(0) \right]_{1 \leq i, j \leq r} \neq 0.$$

Дефинишимо пресликавање $\psi : E \rightarrow \mathbb{K}^n$ са

$$\psi(u_1, \dots, u_n) = (f_1(u), \dots, f_r(u), u_{r+1}, \dots, u_n),$$

где је $u = (u_1, \dots, u_n)$. Матрица линеарног пресликавања

$$D\psi(0) = \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial f_i}{\partial u_j}(0) \right]_{1 \leq i, j \leq r} & \star \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}$$

је несингуларна, па по Теорему о инверзној функцији (79) постоји околина $U_0 \subset E$ таква да је

$$\psi : U_0 \rightarrow \psi(U_0)$$

хомеоморфизам класе C^k , заједно са инверзним пресликавањем ψ^{-1} . Пошто су \det и $D\psi$ непрекидна пресликавања, можемо да претпоставимо (смањујући скуп U_0 ако је потребно) да је $D\psi(x)$ линеарни изоморфизам за свако $x \in U_0$.

Из дефиниције пресликавања ψ следи да је $f \circ \psi^{-1}(0) = 0$. Нека је $x = (x_1, \dots, x_n) \in \psi(U_0)$. Тада је $x = \psi(u)$ за јединствено u (пошто је ψ инјективно), односно $x_j = f_j(u)$ за $1 \leq j \leq r$. Одатле следи да је

$$f \circ \psi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r, g_{r+1}(x), \dots, g_m(x)),$$

где је $g_j = f_j \circ \psi^{-1}$. Из последњег израза следи да је

$$[D(f \circ \psi^{-1})(x)] = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ \star & \left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x) \right]_{\substack{r+1 \leq i \leq m \\ r+1 \leq j \leq n}} \end{bmatrix}.$$

Пошто је $D\psi^{-1}(x)$ линеарни изоморфизам, из

$$D(f \circ \psi^{-1})(x) = Df(\psi^{-1}(x)) \cdot D\psi^{-1}(x),$$

следи

$$\text{rang } D(f \circ \psi^{-1})(x) = \text{rang } Df(\psi^{-1}(x)) = r,$$

па је доњи десни минор у $[D(f \circ \psi^{-1})(x)]$ идентички једнак нули, тј.

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \equiv 0$$

за све $r+1 \leq i \leq m$, $r+1 \leq j \leq n$. Одатле следи да на довољно малој конвексној околини нуле функције g_{r+1}, \dots, g_m зависе само од x_1, \dots, x_r .

Дефинишимо сада у некој околини нуле $V_0 \subset \mathbb{K}^m$ пресликавање

$$S(y_1, \dots, y_m) = (y_1, \dots, y_r, y_{r+1} + g_{r+1}(y_1, \dots, y_r), \dots, y_m + g_m(y_1, \dots, y_r)).$$

Матрица његовог извода

$$[DS(y)] = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ \star & I_{m-r} \end{bmatrix}$$

је несингуларна, па је, према Теорему о инверзној функцији, S хомеоморфизам класе C^k у некој околини нуле. Нека је $\varphi = S^{-1}$. Пошто је $S(0) = 0$, φ је дифеоморфизам класе C^k у некој околини нуле.

У довољно малој околини нуле пресликавање $\varphi \circ f \circ \psi^{-1}$ је добро дефинисано. Можемо, компонујући сваки од дифеоморфизама φ^{-1} и ψ^{-1} са хомотетијом уколико је потребно, да претпоставимо да су она дефинисана на скуповима I^n и I^m као у формулацији теореме; отворене скупе U и V дефинишемо као њихове слике.

Из дефиниције пресликавања ψ следи да је

$$f \circ \psi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r, g_{r+1}(x_1, \dots, x_r), \dots, g_m(x_1, \dots, x_r)).$$

Пошто је

$$S(x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0) = (x_1, \dots, x_r, g_{r+1}(x_1, \dots, x_r), \dots, g_m(x_1, \dots, x_r)),$$

а $S = \varphi^{-1}$ је бијекција, одатле следи да је

$$\varphi \circ f \circ \psi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0),$$

што је и требало доказати.

- (87) *Зависност функција.* Нека је $E \subset \mathbb{K}^n$ отворен подскуп и

$$f_1, \dots, f_m : E \rightarrow \mathbb{K}$$

непрекидне функције и нека је $f = (f_1, \dots, f_m)$. Кажемо да су ове функције *функционално зависне у тачки* $x_0 \in E$ ако постоји непрекидна функција

$$F : V \rightarrow \mathbb{K}$$

дефинисана у некој околини $V \subset \mathbb{K}^m$ тачке $y_0 = f(x_0)$, која није идентички једнака нули ни у једној околини те тачке, таква да је

$$F(f_1(x), \dots, f_m(x)) \equiv 0$$

у некој околини тачке x_0 . Специјално, ако постоји *линеарна* функција F са тим својством, онда говоримо о *линеарној зависности* функција f_1, \dots, f_m ; у том случају ова дефиниција је еквивалентна дефиницији линеарне зависности вектора f_1, \dots, f_m у векторском простору $C(E)$.

Ако функције нису функционално зависне, кажемо да су оне *функционално независне*.

- (88) Из Линеарне алгебре је познато да је систем вектора f_1, \dots, f_m линеарно зависан, ако и само ако сваки од њих може да се представи као линеарна комбинација осталих. Аналогија тог тврђења за случај функционалне независности *глатких* функција је следећа теорема:

Нека су $f_1, \dots, f_m : U \rightarrow \mathbb{K}$ функције класе C^1 , дефинисане у некој околини $U \subset \mathbb{K}^n$ тачке x_0 и нека је ранг матрице

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

једнак r у U .

- (а) Ако је $r = m$, онда су функције f_1, \dots, f_m функционално независне у околини тачке x_0 .
 (б) Ако је $r < m$, онда постоји r функција система f_1, \dots, f_m (рецимо, ради једноставности записа, да су то функције f_1, \dots, f_r), такве да остале функције тог система могу да се представе као

$$f_j(x) = g_j(f_1(x), \dots, f_r(x)), \quad j = r + 1, \dots, m$$

где су $g_j : V \rightarrow \mathbb{K}$ функције класе C^1 дефинисане у некој околини $V \subset \mathbb{K}^r$ тачке $y_0 = (f_1(x_0), \dots, f_r(x_0))$. Специјално, функције f_1, \dots, f_m су функционално зависне.

Доказ: Нека је $r = m$. Из Теореме о рангу (86), примењене на пресликавање $f = (f_1, \dots, f_m)$, следи да је за неку околину U_0 тачке x_0 скуп $V_0 = f(U_0)$ отворена околина тачке $f(x_0)$. Тада, ако у некој околини U_1 тачке x_0 важи

$$F(f_1(x), \dots, f_m(x)) \equiv 0,$$

онда је $F \equiv 0$ у околини $f(U_0 \cap U_1)$. Тиме је (а) доказано.

Нека важе претпоставке у (б). Можемо, компонујући f са трансляцијама ако је неопходно, да претпоставимо да је $x_0 = 0$ и $f(0) = 0$.

Тада функције $-g_j$ дефинишемо као решења једначине

$$S(f_1, \dots, f_m) = (f_1, \dots, f_r, 0, \dots, 0),$$

где је S пресликавање конструисано у доказу Теореме о рангу (86), при чему егзистенција решења у довољно малој околини нуле следи из непрекидности функција f_j и чињенице да је S хомеоморфизам у некој околини нуле. Тако добијамо функције g_j , $j \geq r + 1$, такве да је

$$(f_1, \dots, f_r, f_{r+1} - g_{r+1}(f_1, \dots, f_r), \dots, f_m - g_m(f_1, \dots, f_r)) = (f_1, \dots, f_r, 0, \dots, 0).$$

Закључак о функционалној зависности под претпоставкама у (6) следи из посматрања функције

$$F(y_1, \dots, y_m) = (0, \dots, 0, y_{r+1} - g_{r+1}(y_1, \dots, y_r), \dots, y_m - g_m(y_1, \dots, y_r)) :$$

свака од координатних функција $F_j(y_1, \dots, y_m) = y_j - g_j(y_1, \dots, y_r)$ за $j \geq r + 1$ задовољава $F_j(f_1, \dots, f_m) = 0$.

Приметимо да F није идентички једнака нули ни у једној околини нуле зато што g_j не зависи од y_j за $j > r$.

- (89) *Разлагање дифеоморфизма на композицију простих.* Нека је $U \subset \mathbb{K}^n$ отворен скуп. Дифеоморфизам $g : U \rightarrow g(U) \subset \mathbb{K}^n$ се назива *простим*, ако он мења само једну координату, тј. ако је

$$g(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{j-1}, g_j(x_1, \dots, x_n), x_{j+1}, \dots, x_n).$$

Сваки дифеоморфизам може локално да се представи као композиција простих. Прецизније, важи следеће тврђење. Нека је $f : V \rightarrow f(V)$ дифеоморфизам отвореног подскупа $V \subset \mathbb{R}^n$ на $f(V) \subset \mathbb{R}^n$. Тада свака тачка $x_0 \in V$ има околину $U \ni x_0$ такву да рестрикција $f : U \rightarrow f(U)$ може да се напише као

$$f = g_1 \circ \dots \circ g_n,$$

где су g_1, \dots, g_n прости дифеоморфизми.

Доказ: Претпоставимо да f мења само k координата, тј. да је

$$f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x), \dots, f_k(x), x_{k+1}, \dots, x_n).$$

Доказ изводимо индукцијом по k . За $k = 1$ тврђење је тривијално, јер је у том случају f већ прост дифеоморфизам. Претпоставимо да тврђење важи за дифеоморфизме који мењају само првих $k - 1$ координата и нека је f такав да мења првих k координата. Јакобијева матрица таквог дифеоморфизма је

$$\begin{bmatrix} \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]_{1 \leq i, j \leq k} & \star \\ 0 & I_{n-k} \end{bmatrix}.$$

Ова матрица је несингуларна у тачки x_0 , а њена детерминанта је једнака детерминанти матрице

$$\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]_{1 \leq i, j \leq k}.$$

То значи да је бар један од $(k - 1) \times (k - 1)$ минора ове матрице несингуларан; претпоставимо (не умањујући општост) да је то главни

минор (састављен од првих $(k-1)$ врста и колона). Тада је Јакобијан пресликавања g , дефинисаног са

$$g(x) = (f_1(x), \dots, f_{k-1}(x), x_k, \dots, x_n),$$

различит од нуле у x_0 . По Теореме о инверзној функцији (79) g је дифеоморфизам у некој околини тачке x_0 . Нека је $h = f \circ g^{-1}$. Из дефиниције пресликавања g следи да је

$$h(y_1, \dots, y_n) = (y_1, \dots, y_{k-1}, f_k \circ g^{-1}(y), y_{k+1}, \dots, y_n),$$

тј. h је прост дифеоморфизам. Пошто је $f = h \circ g$, а g задовољава индуктивну претпоставку, тиме је доказ завршен.

- (90) *Површи у \mathbb{K}^n .* Подскуп $M \subset \mathbb{K}^n$ је d -димензиона глатка површ, или глатка d -димензиона подмногострукост у \mathbb{K}^n ако за сваку тачку $p \in M$ постоји околина $U \ni p$ у \mathbb{K}^n и дифеоморфизам

$$\psi : U \rightarrow I^n := \{(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{K}^n \mid (\forall j) |t_j| < 1\}$$

такав да је

$$\psi(U \cap M) = \{(t_1, \dots, t_d, 0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^n \mid (\forall j) |t_j| < 1\}.$$

Кажемо да је M површ класе C^k ако је дифеоморфизам ψ класе C^k .

Рестриција пресликавања ψ^{-1} на d -димензиону коцку

$$I^d \cong \{(t_1, \dots, t_d, 0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^n \mid (\forall j) |t_j| < 1\}$$

назива се *локалном параметризацијом* површи M у околини тачке p , а рестриција пресликавања ψ на $M \cap U$ *локалним координатама* или *локалним координатним системом* на површи M у околини тачке p . Некад координатама називамо и d -торке (t_1, \dots, t_d) из претходне дефиниције.

Број d називамо *димензијом* површи, а број $n-d$ њеном *кодимензијом*. Напоменимо да у случају када је $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ говоримо о *комплексним површима* или *комплексним многострукостима*, које су истовремено и *реалне површи* два пута веће димензије (видети (14)). Другим речима, за комплексну површ M важи

$$\dim_{\mathbb{R}} M = 2 \dim_{\mathbb{C}} M.$$

- (91) Најједноставнији пример глатке површи је еуклидски простор: \mathbb{K}^n је површ димензије n . График $\Gamma(f)$ глатке функције

$$f : \mathbb{K}^{n-1} \rightarrow \mathbb{K}$$

је површ кодимензије 1 у \mathbb{K}^n (површи кодимензије 1 називамо *хиперповршима*), при чему је координатно пресликавање из дефиниције у (90) дато са

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n - f(x_1, \dots, x_{n-1})),$$

односно

$$t_1 = x_1, \dots, t_{n-1} = x_{n-1}, t_n = x_n - f(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

У овим координатама површ $M = \Gamma(f)$ има једначину $t_n = 0$.

Задатак: Доказати да је регуларна крива (видети (71)) без самопресека једнодимензиона подмногострукост у равни \mathbb{R}^2 .

- (92) Задатак из (91) може да се уопшти на следећи начин. Нека је $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ пресликавање ранга r (тј. такво да је ранг линеарног пресликавања Df константан и једнак r у свакој тачки) и класе C^k . Претпоставимо да је скуп $M = f^{-1}(0)$ непразан. Тада је M глатка $(n - r)$ -димензиона површ класе C^k .

Заиста, из Теореме о рангу (86) следи да за $p \in M$ постоје околине $U \ni p$ у \mathbb{K}^n и $V \ni 0$ у \mathbb{K}^m и дифеоморфизми

$$\psi : U \rightarrow I^n, \quad \varphi : V \rightarrow I^m$$

такви да је

$$\varphi \circ f \circ \psi^{-1}(t_1, \dots, t_n) = (t_1, \dots, t_r, 0, \dots, 0).$$

Очигледно је да је у координатама (t_1, \dots, t_n) скуп $M \cap U$ дат са

$$t_1 = \dots = t_r = 0,$$

односно да је $\psi(M \cap U) = \{(0, \dots, 0, t_{r+1}, \dots, t_n) \in I^n\}$, што по дефиницији из (90), али са измењеном улогом првих r и последњих $n - r$ координата, значи да је M глатка површ димензије $n - r$.

Пример: Сфера $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ је глатка подмногострукост у \mathbb{R}^3 , јер је градијент функције $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$

$$\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$$

различит од нуле у свим тачкама сфере \mathbb{S}^2 .

- (93) Тврђење у (92) даје довољан услов под којим је једначином

$$f(x_1, \dots, x_n) = 0$$

или, општије, системом једначина

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad f_2(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad \dots \quad f_m(x_1, \dots, x_n) = 0$$

задата глатка подмногострукост у \mathbb{K}^n . Тај услов није и неопходан. На пример, једначина $x^2 = 0$ задаје подмногострукост $\{x = 0\}$ (тј. y -осу) у \mathbb{K}^2 , иако функција $f(x, y) = x^2$ нема константан ранг.

- (94) **Задатак:** Нацртати криве

$$C_1 := \{x^2 - y^2 = 1\}, \quad C_2 := \{x^2 - y^2 = 0\}, \quad C_3 := \{x^2 = y^3\}$$

Које од њих су глатке једнодимензионе подмногострукости у \mathbb{R}^2 ?

- (95) **Задатак:** Нацртати криве (задате у поларним координатама)

$$S_1 := \{r = \cos 2\theta\}, \quad S_2 := \{r = 2 \cos \theta\}, \quad S_3 := \{r^2 = \sin 2\theta\} \\ S_4 := \{r = 1 - \sin \theta\}, \quad S_5 := \{r = \theta\}, \quad S_6 := \{r(1 - \cos \theta) = 2\}$$

Које од њих су глатке једнодимензионе подмногострукости у \mathbb{R}^2 ?

- (96) **Задатак:** Које површи другог реда су глатке дводимензионе подмногострукости у \mathbb{R}^3 ?

- (97) *Тангентни простор.* Нека је $M \subset \mathbb{K}^n$ глатка површ димензије d и нека је

$$u : I^d \rightarrow M, \quad I^d := \{(t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{K}^d \mid (\forall j) |t_j| < 1\}$$

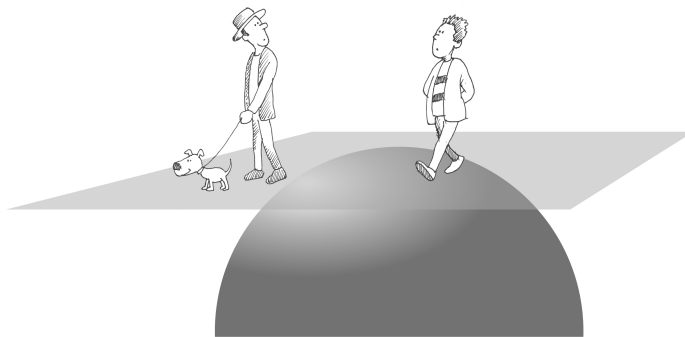
њена глатка параметризација у околини тачке $p = u(0) \in M$. Тада је

$$Du(0) : \mathbb{K}^d \rightarrow \mathbb{K}^n$$

линеарно пресликавање ранга d . Његова слика је d -димензиони потпростор $Du(0)(\mathbb{K}^d)$. Афини простор

$$p + Du(0)(\mathbb{K}^d)$$

назива се *тангентним простором* на површ M у тачки p и означава се T_pM (видети слику). Димензија тангентног простора једнака је димензији површи d . Из теореме о изводу сложене функције и чињенице да је извод дифеоморфизма линеарни хомеоморфизам следи да ова дефиниција не зависи од избора параметризације u .



Ако је координатни запис параметризације u дат са

$$I^d \ni (t_1, \dots, t_d) \mapsto (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in M$$

онда вектори

$$v_j := p + \left(\frac{\partial x_1}{\partial t_j}(0), \dots, \frac{\partial x_n}{\partial t_j}(0) \right)$$

чине базу простора T_pM . Ово се лако види из матричног представљања пресликавања $Du(0)$ Јакобијевом матрицом у стандардним координатама. Одатле следи да је параметарска једначина тангентног простора T_pM

$$r(t) = p + Du(0)(t),$$

или, записано у координатама,

$$\begin{aligned} x_1 - p_1 &= \frac{\partial x_1}{\partial t_1}(0)t_1 + \dots + \frac{\partial x_1}{\partial t_d}(0)t_d \\ &\dots \dots \\ x_n - p_n &= \frac{\partial x_n}{\partial t_1}(0)t_1 + \dots + \frac{\partial x_n}{\partial t_d}(0)t_d. \end{aligned}$$

- (98) Ако је $u : I^d \rightarrow M$ локална параметризација површи M у околини тачке $p \in M$ и $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, онда је

$$Du(0)(e_1) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} u(te_1)$$

тангентни вектор на криву $t \mapsto u(te_1)$.

Произвољни вектор $v \in T_p M$ може да се напише као

$$v = \lambda_1 Du(0)(e_1) + \cdots + \lambda_d Du(0)(e_d) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} u(\lambda_1 t e_1 + \cdots + \lambda_d t e_d),$$

где је e_1, \dots, e_d стандардна база у \mathbb{K}^d . Одатле можемо да закључимо да $T_p M$ може да се дефинише и као скуп свих тангентних вектора у тачки p на глатке криве које леже у M и пролазе кроз ту тачку.

- (99) У случају комплексног поља скалара, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, криве о којима је реч у (98) су *комплексне криве*, тј. објекти реалне димензије 2, а u комплексно диференцијабилни дифеоморфизам. Параметризација

$$\mathbb{C}^d \supset I^d \ni (t, 0, \dots, 0) \mapsto u(t e_1) = u(t, 0, \dots, 0)$$

може да се напише и у реалним координатама $t_j = \tau + i\sigma$. Ако израз $u(\tau + i\sigma, 0, \dots, 0)$ диференцирамо по τ и добијени вектор означимо са a_1 , и ако га диференцирамо по σ и добијени вектор означимо са b_1 , тада је, у ознакама из (98),

$$Du(0)(e_1) = a_1 + i b_1.$$

Тако добијамо базу $a_1, \dots, a_d, b_1, \dots, b_d$ векторског простора $T_p M$ посматраног као *реални* векторски простор. Вектори a_1, \dots, a_d тада чине базу *комплексног* векторског простора $T_p M$ (претпоставља се да је u \mathbb{C} -диференцијабилно пресликавање, па је $i a_j = b_j$).

Ако је $M \subset \mathbb{C}^n$ комплексна површ, множење са $i = \sqrt{-1}$ је линеарно пресликавање $T_p M \rightarrow T_p M$ *реалних* векторских простора. Приметимо да за произвољну *реалну* површ димензије $2d$ у \mathbb{C}^n њен тангентни простор није обавезно затворен у односу на множење са i , јер је реална површ, по дефиницији, задата \mathbb{R} -диференцијалним пресликавањем, које не мора обавезно да буде и \mathbb{C} -диференцијабилно.

- (100) Нека је површ M локално задата, као у (92), једначином $f(x) = 0$, где је $f = (f_1, \dots, f_m) : V \rightarrow \mathbb{K}^m$ глатка функција на отвореном подскупу $V \subset \mathbb{K}^n$ ранга $r = n - d$ дефинисана у некој околини $V \ni p$, таква да је $M \cap V = f^{-1}(0)$. Тада је, за сваку локалну параметризацију u као у (97), $f \circ u \equiv 0$. Диференцирањем овог идентитета добијамо

$$Df(u(0)) \cdot Du(0) \equiv 0.$$

Одатле следи да је $\text{im } Du(0)(\mathbb{K}^d) \subset \ker Df(p)$ (пошто је $u(0) = p$). Из претпоставки о рангу пресликавања f и u следи да је ова инклузија заправо једнакост, тј. важи $Du(0)(\mathbb{K}^d) = \ker Df(p)$. Одатле добијамо једначину тангентног простора у облику

$$Df(p)(x - p) = 0,$$

или, у координатама,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p)(x_1 - p_1) + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p)(x_n - p_n) &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p)(x_1 - p_1) + \cdots + \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(p)(x_n - p_n) &= 0. \end{aligned}$$

- (101) Специјални случај за $m = 1$ у (100) је хиперповрш M , задата само једном једначином $f(x) = 0$, где је $f : V \rightarrow \mathbb{K}$ глатко пресликавање

такво да је $df \neq 0$ на M . Тада једначина тангентног простора

$$df(p)(x - p) = 0$$

може да се напише у векторском облику као

$$\nabla f(p) \cdot (x - p) = 0, \quad \text{односно} \quad \nabla f(p) \perp T_p M.$$

Другим речима, тангентни простор површи је ортогонални комплемент градијента. Специјални случај ове ортогоналности смо видели у (44).

(102) **Задатак:** Наћи тачке на површи $(x+z)^2 + (z-x)^2 = 16$ у \mathbb{R}^3 у којима су нормалне линије на ту површ паралелне zx -равни.

(103) **Задатак:** Наћи $\lambda \in \mathbb{R}$ за које су тангентне равни сфера

$$\begin{aligned} S_1 &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1\} \\ S_2 &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + (z-\lambda)^2 = 3\} \end{aligned}$$

ортогоналне у свакој тачки пресека $S_1 \cap S_2$.

(104) *Тангентни простор $T_p \mathbb{R}^n$.* Посматрајмо сада специјални случај $M = \mathbb{R}^n$. Тада је, наравно, за тачку $p \in \mathbb{R}^n$ тангентни простор $T_p \mathbb{R}^n$ изоморфан векторском простору \mathbb{R}^n (прелаз са \mathbb{R}^n на $T_p \mathbb{R}^n$ одговара премештању координатног почетка у тачку p , односно translацији). Међутим, у дискусији која следи погодно је ове просторе формално разликовати (тј. заборавити школско правило „вектори су исти ако имају исти интензитет, правац и смер”), да бисмо, када кажемо „извод у правцу вектора $v \in T_p \mathbb{R}^n$ ”, знали да се ради о изводу у тачки p , тј. о $df(p)(v)$.

Нека је $C^\infty(p)$ скуп свих функција класе C^∞ чији домен садржи тачку p , при чему су функције које се поклапају у некој околини тачке p идентификоване. Другим речима, $C^\infty(p)$ је количнички простор у односу на класу еквиваленције у којој су функције $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ и $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ еквивалентне ако је

$$f|_{U \cap V} = \mathcal{F}_p g|_{U \cap V},$$

где су $f|_{U \cap V}$ и $g|_{U \cap V}$ рестрикције функција f и g на $U \cap V$, а \mathcal{F}_p филтер околина тачке p .

Скуп $C^\infty(p)$ је векторски простор над \mathbb{R} . Сваки тангентни вектор $X_p \in T_p \mathbb{R}^n$ дефинише линеарно пресликавање

$$C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto df(p)(X_p)$$

(извод у правцу вектора X_p). Пошто је ово пресликавање добро дефинисано избором вектора X_p , да бисмо избегли непотребно увођење нових ознака, означимо и само пресликавање истим симболом X_p . Пресликавање

$$X_p : C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}, \quad X_p(f) := df(p)(X_p)$$

има следећа два својства:

(а) *Линеарност:* $X_p(\lambda f + \mu g) = \lambda X_p(f) + \mu X_p(g)$ за $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

(б) *Лајбницово правило:* $X_p(fg) = g(p)X_p(f) + f(p)X_p(g)$.

Важи и обрнуто: за свако пресликавање $L : C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}$ које има својства (а) и (б) постоји тангентни вектор $X_p \in T_p \mathbb{R}^n$ такав да је $L = X_p$ (као што смо напоменули, вектор X_p схватамо и као линеарно

пресликавање – извод у правцу). Да бисмо доказали ово тврђење, потребна нам је следећа лема: Ако је $V \subset \mathbb{R}^n$ отворен скуп, $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ функција класе C^∞ и $p = (p_1, \dots, p_n) \in V$, онда постоји лопта $B]p; \delta[$ у V и функције g_1, \dots, g_n класе C^∞ дефинисане на $B]p; \delta[$ такве да је

$$g_j(p) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) \quad \text{и} \quad f(x) = f(p) + \sum_{j=1}^n (x_j - p_j)g_j(x).$$

Доказ ове леме следи из

$$\begin{aligned} f(x) &= f(p) + \int_0^1 \frac{d}{dt} f(p + t(x - p)) dt \\ &= f(p) + \sum_{j=1}^n (x_j - p_j) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(p + t(x - p)) dt. \end{aligned}$$

Из (40) следи да су функције

$$g_j(x) := \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(p + t(x - p)) dt.$$

класе C^∞ , пошто је таква f .

Нека је сада $L : C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}$ пресликавање које има својства (а) и (б). Нека је $\pi_j(x_1, \dots, x_n) = x_j$ пројекција и $a_j := L(\pi_j)$. Тада за вектор

$$X_p = (a_1, \dots, a_n)$$

важи $X_p(f) = L(f)$ за све $f \in C^\infty(p)$. Заиста, нека је f функција класе C^∞ у околини тачке p . По претходној лемџ, њу можемо да напишемо као

$$f(x) = f(p) + \sum_{j=1}^n (x_j - p_j)g_j(x),$$

где је $g_j(p) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(p)$. Пошто је $f(p)$ константа, из (а) и (б) следи¹⁸ $L(f(p)) = 0$, па је

$$\begin{aligned} L(f) &= \sum_{j=1}^n (L(x_j - p_j)g_j(p) + (p_j - p_j)Lg_j) \\ &= \sum_{j=1}^n a_j g_j(p) \\ &= \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) = df(p)(X_p) = X_p(f). \end{aligned}$$

Ово тврђење нам омогућава да тангентни простор $T_p\mathbb{R}^n$ дефинишемо као простор свих пресликавања $C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}$ која задовољавају (а) и (б). Ова, еквивалентна дефиниција тангентног простора $T_p\mathbb{R}^n$ ће нам бити корисна када будемо дефинисали тангентне просторе нешто општијих објеката од површи.

Према томе, тангентни простор $T_p\mathbb{R}^n$ може да се схвати као векторски простор генерисан векторима

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x_n} \right|_p,$$

јер је сваки извод у правцу линеарна комбинација извода по координатама (видети (31), (32)).

¹⁸ $L(1) = L(1 \cdot 1) = 1(L(1)) + (L(1))1$, тј. $2L(1) = L(1)$, па је $L(1) = 0$, а одатле $L(c) = cL(1) = 0$.

- (105) Нека је $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ глатка функција ранга 1 (тј. таква да је $\nabla f \neq 0$) и M хиперповрш у \mathbb{R}^n задата једначином $f(x) = 0$. Нека је g глатка функција дефинисана у некој отвореној околини површи M . Претпоставимо да желимо да нађемо екстремне вредности рестрикције $g : M \rightarrow \mathbb{R}$.

Наравно, овај проблем не можемо да решимо методом тражења нула парцијалних извода (60) којим тражимо локалне екстремуме функције на *отвореном скупу*. На пример, функција $g(x, y) = x + y$ свакако има минимум и максимум на кругу $\mathbb{S}^1 = \{x^2 + y^2 = 1\}$ (јер је \mathbb{S}^1 компактан скуп, а g непрекидна функција), али парцијални изводи функције g нису једнаки нули ни у једној тачки.

Овај проблем можемо да решимо помоћу следећег геометријског опажања. Ако је $p \in M$ локални екстремум функције g , онда је за сваку глатку криву

$$\gamma :]-\delta, \delta[\rightarrow M, \quad \gamma(0) = p$$

тачка 0 локални екстремум функције једне променљиве $t \mapsto g \circ \gamma$. То значи да је

$$0 = \frac{d}{dt}(g \circ \gamma)(0) = \nabla g(p) \cdot \frac{d\gamma}{dt}(0),$$

односно, да је вектор $\nabla g(p)$ ортогоналан на сваку криву у M , па тиме (због (98)) и на $T_p M$. Али, ортогонални комплемент хиперповрши $M = \{f = 0\}$ је генерисан вектором $\nabla f(p)$ (видети (101)), што значи да је

$$\nabla g(p) = \lambda \nabla f(p)$$

за неко $\lambda \in \mathbb{R}$. Ова векторска једначина има n координата; заједно са једначином $f(p) = 0$ добијамо систем од $n + 1$ једначине са $n + 1$ непознатих $\lambda, p = (p_1, \dots, p_n)$. Његово решење је потенцијални локални екстремум функције g на M .

Сада ћемо да уопшtimo ова разматрања на случај када је M произвољна површ (не обавезно хиперповрш).

- (106) *Условни екстремуми*. Нека је M површ у \mathbb{R}^n задата једначином $f(x) = 0$, где је

$$f = (f_1, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

прсликавање ранга $n - d$. Нека је $V \supset M$ отворен скуп и

$$g : V \rightarrow \mathbb{R}$$

диференцијабилна функција. Проблем тражења екстремних вредности рестрикције функције g на M може да се реши на следећи начин. Нека је p тачка локалног екстремума те рестрикције и нека је $u : I^d \rightarrow M$ локална параметризација површи M таква да је $u(0) = p$. Тада је 0 тачка локалног екстремума функције

$$g \circ u : I^d \rightarrow \mathbb{R},$$

па је

$$dg(p) \cdot Du(0) = D(g \circ u)(0) = 0, \quad \text{односно} \quad T_p M \subset \ker dg(p).$$

Пошто је, као што смо видели у (100), слика линеарног пресликавања $Du(0)$ језгро пресликавања $Df(p)$, одатле следи да је

$$\ker Df(p) \subset \ker dg(p).$$

Преласком на ортогонални комплемент добијамо

$$(\ker Df(p))^\perp \supset (\ker dg(p))^\perp.$$

Пошто је, на основу (101),

$$\ker df_j(p) \perp \nabla f_j(p), \quad (1 \leq j \leq m), \quad \ker dg(p) \perp \nabla g(p),$$

одатле следи да је

$$\nabla g(p) = \lambda_1 \nabla f_1(p) + \cdots + \lambda_m \nabla f_m(p).$$

Ова векторска једначина је систем од n координатних једначина по $n + m$ непознатих $p_1, \dots, p_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$. Заједно са

$$f_1(p) = 0, f_2(p) = 0, \dots, f_m(p) = 0$$

добијамо систем од $m + n$ једначина са $m + n$ непознатих.

(107) Метод налажења условних екстремума изложен у (106) назива се *методом Лагранжевих множитеља*. Он може да се формулише и на следећи начин. Нека су f_1, \dots, f_m и g као у (106). Уведимо помоћну функцију

$$L(x, \lambda) = g(x) - \sum_{j=1}^m \lambda_j f_j(x),$$

где је $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ (ова функција се назива *Лагранжевом функцијом* и домен јој је подскуп у \mathbb{R}^{n+m}). Тада је неопходан услов да тачка $p = (p_1, \dots, p_n) \in M$ буде локални екстремум функције g на глаткој површи M – да је за неко $\lambda \in \mathbb{R}^m$

$$\nabla L(p, \lambda) = 0.$$

Заиста, првих n компоненти градијента (x -компоненте) на левој страни дају првих n једначина система из (106), а преосталих m компоненти (λ -компоненте) преосталих m једначина тог система.

Овај неопходни услов није и довољан. Као и код обичних екстремума, довољан услов формулишемо на језику других извода, али на тангентном простору $T_p M$. Претпоставимо да пар (p, λ) задовољава неопходан услов постојања условног екстремума. Да би p заиста била тачка условног локалног екстремума, довољно је да билинеарна форма

$$\left[\frac{\partial L}{\partial x_i \partial x_j}(p, \lambda) \right]$$

буде дефинитна на $T_p M$, тј. да

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial L}{\partial x_i \partial x_j}(p, \lambda) \xi_i \xi_j$$

буде истог знака за све $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in T_p M$. При томе, ако је ова форма позитивно дефинитна, p је тачка условног локалног минимума, а ако је негативно дефинитна, p је тачка условног локалног максимума.

Ако горња сума узима и позитивне и негативне вредности на $T_p M$, p није тачка условног локалног екстремума.

Доказ, слично доказу за обичне локалне екстремуме, следи из Тејлорове формуле за Лагранжеву функцију L у околини тачке (p, λ) (и остављамо га као задатак!).

- (108) **Задатак:** Доказати да функција $g(x, y) = x^2 - y^2$ има локални максимум на правој $l := \{2x - y - 3 = 0\} \subset \mathbb{R}^2$ и наћи тачку у којој се он достиже. Да ли је та тачка тачка глобалног максимума функције g на правој l ? Да ли је та тачка тачка локалног екстремума функције g на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$?
- (109) **Задатак:** Урадити Задатак (67) методом Лагранжевих множитеља.
- (110) **Задатак:** Наћи најмању и највећу запремину тела ограниченог равнинама $x = 0, y = 0, z = 0$ и равни тангентној на елипсоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ у тачки на елипсоиду која лежи у првом октанту $(x, y, z > 0)$.
- (111) **Задатак:** Дато је n позитивних бројева $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Наћи максимум израза $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ ако су бројеви x_1, \dots, x_n такви да је $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$.
- (112) **Вектор набла.** Вектор

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_r} \right)$$

чије су координате линеарни оператори парцијалног диференцирања назива се *набла вектором*. Ако је $f : V \rightarrow \mathbb{K}$ диференцијабилна функција задата на отвореном подскупу $V \subset \mathbb{K}^r$, онда њен градијент (у Декартовим координатама и у односу на еуклидски скаларни производ) може да се посматра и као „множење вектора скаларом”

$$\text{grad } f = \nabla \cdot f,$$

при чему улогу множења $(v_k, \lambda) \mapsto v_k \lambda$ у стандардном множењу вектора (v_1, \dots, v_r) скаларом λ игра диференцирање $(\frac{\partial}{\partial x_k}, f) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_k}$, које је, као и множење, дистрибутивна и асоцијативна операција, али не и комутативна.

Ако је $\xi : V \rightarrow \mathbb{K}^r$ диференцијабилно пресликавање дефинисано на отвореном подскупу $V \subset \mathbb{K}^r$ (оваква пресликавања називају се *векторским пољима* на V), „скаларни производ” (са множењем одговарајућих координата као код обичног скаларног производа, али схваћеним као код градијента)

$$\text{div}(\xi) := \nabla \cdot \xi$$

се назива *дивергенцијом векторског поља* ξ .

Ако је $r = 3$ и $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, „векторски производ”

$$\text{rot}(\xi) := \nabla \times \xi$$

се назива *ротором векторског поља* ξ ; користи се и ознака $\text{curl}(\xi)$.

Дивергенција векторског поља је скаларна функција, а ротор је векторско поље: ако је

$$\xi = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$$

за глатке функције P, Q, R , онда је

$$\nabla \cdot \xi = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

а

$$\nabla \times \xi = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix},$$

односно

$$\nabla \times \xi = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

Приметимо да има смисла посматрати и објекте као што су

$$\xi \times \nabla \quad \text{или} \quad \xi \cdot \nabla,$$

који су линеарни оператори (оператори диференцирања), за разлику од дивергенције и ротора који су векторска поља – „множење”

$$\frac{\partial}{\partial x_k} f(x_1, \dots, x_r)$$

даје као резултат функцију, а

$$f(x_1, \dots, x_r) \frac{\partial}{\partial x_k}$$

линеарни оператор диференцирања.

Задатак: Доказати да је

$$\operatorname{div} \circ \operatorname{rot} = 0, \quad \text{тј.} \quad \nabla \cdot (\nabla \times \xi) = 0 \quad \text{за свако векторско поље } \xi.$$

Доказати да се овај закључак може извести из геометријског аргумента $\eta \perp \eta \times \xi$ (иако ∇ није вектор у правом смислу речи), јер овај геометријски аргумент има алгебарски запис који се преноси и кад η заменимо са ∇ . Доказати исто за релацију

$$\operatorname{rot} \circ \operatorname{grad} = 0, \quad \text{тј.} \quad \nabla \times \nabla f = 0.$$

Нека је $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ векторско поље у \mathbb{R}^3 (вектор положаја тачке (x, y, z)) и

$$J = \mathbf{r} \times \nabla.$$

Доказати да је $J \times J = -J$. Објаснити зашто би у овом случају претходна геометријска аргументација дала погрешан закључак $J \times J = 0$. Уопште, када на векторске идентитете који укључују вектор набла може да се примени геометријско закључивање, а када не?

(113) **Задатак:** Доказати да је Лапласијан (видети (52)) једнак композицији $\Delta = \operatorname{div} \circ \operatorname{grad}$, односно

$$\Delta f = \nabla \cdot \nabla f.$$

То оправдава ознаку ∇^2 која се некад користи за Лапласијан уместо Δ .

- (114) *Потенцијална и соленоидна векторска поља.* Векторско поље $\xi : V \rightarrow \mathbb{K}^n$ дефинисано на отвореном подскупу $V \subset \mathbb{K}^n$ је *потенцијално*, ако је оно градијент неке функције, тј. ако постоји диференцијабилна функција $f : V \rightarrow \mathbb{K}$, таква да је

$$\xi = \nabla f.$$

Ако таква функција f постоји, она се назива *потенцијалом поља* ξ . Није свако поље потенцијално: из релације $\text{rot} \circ \text{grad} = 0$ у \mathbb{R}^3 из (112) следи да је

$$\nabla \times \xi = 0$$

неопходан услов потенцијалности поља ξ у тродимензионом реалном простору; глатко поље које не задовољава тај услов (нпр. $\xi(x, y) = x\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ у \mathbb{R}^2) није потенцијално.

Нека је $V \subset \mathbb{R}^3$ отворен подскуп. Векторско поље $\xi : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ је *соленоидно* ако постоји векторско поље $\eta : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ такво да је ξ његов ротор, тј.

$$\xi = \nabla \times \eta.$$

Поље η назива се *векторским потенцијалом* поља ξ . Из $\text{div} \circ \text{rot} = 0$ следи да је неопходан услов соленоидности поља ξ

$$\nabla \cdot \xi = 0.$$

У општем случају, ови неопходни услови потенцијалности и соленоидности нису довољни. У Глави 3 ћемо видети да је питање када је неки од тих услова и довољан везано за топологију домена V .

- (115) *Диференцијалне форме у \mathbb{K}^n .* Три оператора grad , div , rot изведена из три врсте множења у еуклидском простору \mathbb{R}^3 могу да се обједине у дуалном простору следећом конструкцијом. Израз

$$P dx + Q dy + R dz,$$

где су $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ диференцијабилне реалне функције три реалне променљиве дефинисане на отвореном скупу $V \subset \mathbb{R}^3$ назива се *диференцијалном 1-формом* на V . Као што смо видели у (41), у свакој тачки $(x, y, z) \in V$ 1-форма је линеарни функционал $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, тј. елемент дуалног простора $(\mathbb{R}^3)^*$, а dx , dy , dz је база тог простора, дуална канонској бази \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} простора \mathbb{R}^3 . Дакле, свакој тачки $p \in V$ придружимо линеарни функционал, па диференцијална 1-форма α може да се посматра као пресликавање

$$\alpha : V \rightarrow (\mathbb{R}^3)^*.$$

Вредност овог пресликавања у тачки p је линеарни функционал на \mathbb{R}^3 ; означимо га са α_p . За тачку $p \in V$, вектор $\xi \in \mathbb{R}^3$ и 1-форму α ,

$$\alpha_p(\xi)$$

је вредност функционала $\alpha_p \in (\mathbb{R}^3)^*$ у $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

Задатак: Нека је $p = (1, -1, \pi)$,

$$\alpha = xy dx + (x^2 + y^3) dy + \cos(xy) dz$$

и $\xi = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Израчунати $\alpha_p(\xi)$.

Нека су α, β две 1-форме. Дефинишемо њихов *спољашњи производ* $\alpha \wedge \beta$ као билинеарно пресликавање

$$\alpha \wedge \beta(\xi, \eta) := \begin{vmatrix} \alpha(\xi) & \beta(\xi) \\ \alpha(\eta) & \beta(\eta) \end{vmatrix}.$$

Из елементарних својстава детерминанте следи да је пресликавање $\alpha \wedge \beta$ антисиметрично, тј. да важи

$$\alpha \wedge \beta(\xi, \eta) = -\alpha \wedge \beta(\eta, \xi)$$

и да је множење \wedge антикомутативно, тј. да је

$$\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$$

(специјално, $dx \wedge dx = 0, dy \wedge dy = 0, dz \wedge dz = 0$). Множење \wedge назива се *спољашњим производом*.

Димензија векторског простора свих антисиметричних билинеарних форми је једнака димензији векторског простора антисиметричних матрица (видети (362) на стр. 183). У случају \mathbb{R}^3 ради се о 3×3 матрицама, па је ова димензија једнака 3 (на главној дијагонали су нуле, а елементи испод дијагонале одређени су елементима изнад, којих има 3). Пошто су антисиметрични билинеарни функционали

$$dx \wedge dy, \quad dy \wedge dz, \quad dz \wedge dx$$

линеарно независни, они су база простора свих антисиметричних билинеарних функционала на \mathbb{R}^3 .

Изразе облика

$$P dx \wedge dy + Q dy \wedge dz + R dz \wedge dx,$$

где су $P = P(x, y, z), Q = Q(x, y, z), R = R(x, y, z)$ диференцијабилне реалне функције три реалне променљиве дефинисане на отвореном скупу $V \subset \mathbb{R}^3$ називамо *диференцијалним 2-формама* на V . У свакој тачки $(x, y, z) \in V$ овај израз је антисиметрично билинеарно пресликавање.

Задатак: Нека је $p = (1, -1, \pi)$, тачка у \mathbb{R}^3 ,

$$\alpha = xy dx + (x^2 + y^3) dy + \cos(xy) dz, \quad \beta = (x - y) dx + dy - x dz,$$

две диференцијалне 1-форме и

$$\xi = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k} \quad \eta = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

два вектора. Израчунати $\alpha_p \wedge \beta_p(\xi, \eta)$.

На крају, дефинишимо *диференцијалне 3-форме* V као изразе облика

$$f dx \wedge dy \wedge dz,$$

где је $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ диференцијабилна функција, а

$$dx \wedge dy \wedge dz(\xi, \eta, \zeta) = \begin{vmatrix} dx(\xi) & dy(\xi) & dz(\xi) \\ dx(\eta) & dy(\eta) & dz(\eta) \\ dx(\zeta) & dy(\zeta) & dz(\zeta) \end{vmatrix}.$$

Задатак: Израчунати $dx \wedge dy \wedge dz(\mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{i} - \mathbf{j})$.

Скуп свих диференцијалних k -форми на отвореном скупу $V \subset \mathbb{R}^3$ означавамо са $\Omega^k(V)$. Елементи овог простора су пресликавања скупа V у скуп антисиметричних k -линеарних пресликавања. Због антисиметричности, свако k -линеарно пресликавање за $k > 3$ је тривијално (нула-пресликавање), тако да је $\Omega^k(V) = \{0\}$ за $k > 3$. По договору је $\Omega^0(V)$ простор диференцијабилних функција.¹⁹ Ако је $\alpha \in \Omega^k(V)$ кажемо да је α диференцијална форма степена k и пишемо

$$k = \deg \alpha.$$

Спољашње множење је пресликавање

$$\Omega^r(V) \otimes \Omega^s(V) \rightarrow \Omega^{r+s}(V).$$

Кад је $r = 0$, тј. f функција, уместо $f \wedge \beta$ пишемо $f\beta$; овде се ради о обичном множењу функционала β реалним бројем $f(x, y, z)$.

Диференцијална 1-форма $Pdx + Qdy + Rdz$ је *класе* C^n ако су такве функције P, Q, R . Слично, 2-форма $Pdx \wedge dy + Qdy \wedge dz + Rdx \wedge dz$ је *класе* C^n ако су такве функције P, Q, R , форма $f dx \wedge dy \wedge dz$ је *класе* C^n ако је таква функција f . На сличан начин дефинишу се n -пута диференцијабилне форме, форме *класе* C^∞ , непрекидне форме итд.

Уопштење диференцијала функције је *диференцијал форме* или *спољашњи диференцијал*. Он се дефинише као пресликавање

$$d : \Omega^k(V) \rightarrow \Omega^{k+1}(V)$$

које има следећа својства:

- (а) d је линеарно пресликавање векторских простора над \mathbb{R} ;
- (б) за $k = 0$ пресликавање $d : \Omega^0(V) \rightarrow \Omega^1(V)$ је диференцијал функције;
- (в) *Лајбницово правило*: $d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge d\beta$.
- (г) $d(dx) = 0, d(dy) = 0, d(dz) = 0$.

Из услова (б) следи да је диференцијал једнозначно одређен на $\Omega^0(V)$. Пошто свака 1-форма може да се напише као

$$\eta = Pdx + Qdy + Rdz,$$

из (а)–(г) следи

$$d\eta = dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz,$$

па је диференцијал једнозначно одређен и на 1-формама. Слично је и за форме произвољног степена.

На пример, ако је $\eta = y dx + zx dy, \xi = (x + y) dx \wedge dz$, онда је

$$d\eta = (z - 1)dx \wedge dy + xdz \wedge dy, \quad d\xi = -dx \wedge dy \wedge dz.$$

Приметимо да из (г) и симетричности парцијалних извода (49) следи да је

$$d \circ d = 0 \quad \text{на формама класе } C^2,$$

тј. да важи

$$d(d\eta) = 0$$

¹⁹Када радимо у класи функција одређене глаткости C^k , дефинишемо као простор функција те класе, тј. $\Omega^0(V) = C^k(V)$. Ако посебно не нагласимо степен глаткости k , подразумеваћемо да се ради о C^∞ .

за сваку k -форму η класе C^2 . На пример, ако је $f \in \Omega^0(V)$, онда је

$$\begin{aligned} d(df) &= d\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz\right) \\ &= d\frac{\partial f}{\partial x} \wedge dx + d\frac{\partial f}{\partial y} \wedge dy + d\frac{\partial f}{\partial z} \wedge dz. \end{aligned}$$

После израчунавања диференцијала добијамо исте мешовите изводе $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ уз $dx \wedge dy$ и $dy \wedge dx$ па се, због $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$ ти сабирци скраћују. Исто важи и за остале сабирке.

Задатак: Доказати да је $d(d\eta) = 0$ ако је η 1-форма класе C^2 .

Свакој функцији три променљиве $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ природно могу да се придруже две диференцијалне форме:

$$f \in \Omega^0(V) \quad \text{и} \quad \omega_f := f dx \wedge dy \wedge dz.$$

Слично, сваком векторском пољу $\xi = (f_1, f_2, f_3)$ могу да се придруже две диференцијалне форме:

$$\alpha_\xi := f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz \quad \text{и} \quad \beta_\xi := f_3 dx \wedge dy + f_1 dy \wedge dz + f_2 dz \wedge dx.$$

Упоредимо дејство оператора ∇ на f и ξ са дејством диференцијала на одговарајуће форме. Дуалност градијента и диференцијала функције (тј. 0-форме) већ нам је позната:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}, \quad df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz.$$

Ове једнакости можемо да запишемо као

$$\alpha_{\text{grad } f} = df.$$

Дивергенција векторског поља ξ и диференцијал њему придружене 2-форме β_ξ су

$$\nabla \cdot \xi = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}, \quad d\beta_\xi = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz.$$

Другим речима,

$$d(\beta_\xi) = \omega_{\text{div } \xi}.$$

Ова релација успоставља дуалност између дивергенције и диференцијала 2-форме.

Диференцијал 1-форме α_ξ израчунавамо, користећи (а)-(г) из дефиниције диференцијала:

$$d\alpha_\xi = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right) dz \wedge dx.$$

Ротор векторског поља ξ је

$$\nabla \times \xi = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix},$$

одакле, после израчунавања вредности детерминанте, добијамо

$$d\alpha_\xi = \beta_{\text{rot } \xi}.$$

Ова релација успоставља дуалност између ротора и диференцијала 1–форме.

Одавде закључујемо да при преласку са векторских поља на диференцијалне форме диференцијалне форме обједињује операторе grad , div и rot .

Приметимо да смо приликом дефинисања оператора grad , div , rot користили додатне структуре скаларног и векторског производа, док нам је за дефиницију диференцијала потребна само векторска и тополошка структура. Сем тога, векторски производ је специфичност тродимензионог простора \mathbb{R}^3 , тако да ротор нема аналогију у просторима других димензија. Са друге стране, диференцијалне форме и диференцијале можемо да дефинишемо у општем случају, за отворен подскуп $V \subset \mathbb{K}^n$. Тиме се „дуална тачка гледишта” показује као општија и богатија.

Дефиниција диференцијалне форме за произвољан отворен подскуп $V \subset \mathbb{K}^n$ је директно уопштење претходног, специјалног случаја. Диференцијална k –форма је линеарна комбинација

$$\eta := \sum f_J dx_J,$$

где је $J = \{j_1, \dots, j_k\} \subset \{1, \dots, n\}$ скуп са k елемената, $f_J : V \rightarrow \mathbb{K}$, а

$$dx_J := dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k},$$

формално дефинисано антикомутативно множење диференцијала dx_j .

Скуп диференцијалних k –форми на V означава се са $\Omega^k(V)$. Диференцијална форма је глатка класе C^r ако су такве све функције f_J . Скуп глатких форми класе²⁰ C^r је модул над прстеном $C^r(V)$ са генераторима $\{dx_J\}$. Другим речима, нека је Ω^k векторски простор над пољем \mathbb{K} са генераторима

$$\{dx_J | J = \{j_1, \dots, j_k\} \subset \{1, \dots, n\}\}.$$

Онда је модул C^r –глатких k –форми

$$\Omega^k(V) = C^r(V) \otimes \Omega^k.$$

Задатак: Доказати да је $\dim \Omega^k = \binom{n}{k}$.

Множење \wedge је антикомутативно и преноси се са генератора dx_j на

$$\wedge : \Omega^r(V) \times \Omega^s(V) \rightarrow \Omega^{r+s}(V)$$

уз захтев дистрибутивности (односно преноси се на произвољне форме помоћу билинеарности). Из антикомутативности на генераторима (тј. постулата $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$) следи

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{\deg \alpha \cdot \deg \beta} \beta \wedge \alpha.$$

Структура $(\Omega^*(V), +, \wedge, \cdot)$, где је

$$\Omega^*(V) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Omega^k(V)$$

²⁰Ако не напоменемо другачије, под диференцијалном формом подразумевамо C^∞ –глатку форму. Због тога и користимо једноставну ознаку $\Omega^k(V)$ за скуп диференцијалних форми, без ознаке о степену глаткости.

има структуру алгебре над пољем \mathbb{K} . Директна сума на десној страни је коначна јер је, због антикомутативности, $\Omega^k(V) = \{0\}$ за $k > n$.

Дефиниција диференцијала

$$d : \Omega^k(V) \rightarrow \Omega^{k+1}(V)$$

је потпуно иста као у случају простора \mathbb{R}^3 . Исто као и у том случају, из симетричности других парцијалних извода следи да је $d \circ d = 0$ на формама класе C^2 .

- (116) Као и у случају простора \mathbb{R}^3 , k -линеарне диференцијалне форме на отвореном скупу $V \subset \mathbb{K}^n$ можемо да схватимо као антисиметричне k -линеарне функционале на \mathbb{K}^n ако дефинишемо

$$dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k}(v_1, \dots, v_k) := \det(dx_{j_r}(v_s))_{r,s \in \{1, \dots, k\}}.$$

Упоредивањем димензија простора свих антисиметричних k -линеарних функционала и простора Ω^k закључујемо да су ови простори изоморфни.

- (117) Диференцијална једначина

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)}$$

назива се *диференцијалном једначином која раздваја променљиве*. Поступак за њено решавање је следећи: напишимо је у облику

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}.$$

Раздвајањем променљивих добијамо

$$g(y) dy = f(x) dx,$$

а одатле, интеграцијом обе стране, решење

$$\int g(y) dy = \int f(x) dx.$$

Поступак „раздвајања променљивих” можемо да оправдамо у терминима диференцијалних форми на следећи начин. Помножимо обе стране једначине $y' = \frac{f(x)}{g(y)}$ диференцијалном формом $g(y) dx \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$. Добијамо

$$g(y)y' dx = f(x) dx.$$

Пошто је 1-форма $y' dx$ диференцијал функције y , израз на левој страни је $g(y) dy$.

- (118) *Тачне и затворене форме*. Нека је $V \subset \mathbb{K}$ отворен скуп $\omega \in \Omega^k(V)$ диференцијална k -форма. Ако је

$$\omega = d\eta$$

за неку $(k-1)$ -форму $\eta \in \Omega^{k-1}(V)$, кажемо да је форма ω *тачна*, а η њена *примитивна форма*. Овај појам уопштава појам примитивне функције – ако је $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна функција, њена примитивна функција $F(x) = c + \int_0^x f(t) dt$ је примитивна 0-форма тачне форме $\omega = f(x) dx$.

Није свака форма тачна. Из $d \circ d = 0$ следи да је $d\omega = 0$ неопходан услов тачности форме ω , јер, ако је $\omega = d\eta$, онда је

$$d\omega = d(d\eta) = 0.$$

У (115) смо видели како оператор d уопштава оператор ∇ . Одатле следи да тачне форме уопштавају потенцијална и соленоидна поља, а услов $d\omega = 0$ неопходне услове потенцијалности и соленоидности поља (114). Као и у (114), услов $d\omega = 0$ није довољан за тачност форме; другим речима, инклузија

$$\text{im} \{d : \Omega^{k-1}(V) \rightarrow \Omega^k(V)\} \subset \ker \{d : \Omega^k(V) \rightarrow \Omega^{k+1}(V)\}$$

може да буде и строга (форме из скупа на левој страни су тачне, форме из скупа на десној страни називамо *затвореним*). Као што смо нагостили и у (114), питање да ли је ова инклузија строга у вези је са топологијом домена V . На ово ћемо се вратити и у Глави 3. Напоменимо сада само да је питање да ли је претходна инклузија строга најгрубља инваријанта везана за топологију домена V која се може видети из модула диференцијалних форми. Може се направити и ова, финија алгебарска конструкција. Приметимо да су оба скупа у претходној инклузији Абелове групе у односу на сабирање диференцијалних форми. Количничка група

$$H_{dR}^k(V) := \ker \{d : \Omega^k(V) \rightarrow \Omega^{k+1}(V)\} / \text{im} \{d : \Omega^{k-1}(V) \rightarrow \Omega^k(V)\}$$

назива се *k-там де Рамовом кохомолошком групом* тополошког простора V . Ове групе су алгебарске инваријанте тополошког простора V ; више о томе ћемо рећи касније, за сада дајемо следећи задатак.

Задатак: Нека је V отворен подскуп у \mathbb{R}^n . Доказати да је V повезан²¹ ако и само ако је $H_{dR}^0(V) \cong \mathbb{R}$. Општије: $\dim H_{dR}^0(V)$ је број компоненти (путне) повезаности отвореног скупа V .

Касније ћемо видети да је проста повезаност (видети (122) на стр. 78) у вези са $H_{dR}^1(V)$ и, општије, n -повезаност у вези са H_{dR}^n . Та веза, међутим, није тако директна и експлицитна као она коју у случају повезаности установљава претходни задатак.

Задатак: Испитати тачност и затвореност форми

$$\begin{aligned} \eta &= yz \, dx + xz \, dy + xy \, dz, \\ \xi &= x \, dx + (xy)^2 \, dy + yz \, dz, \\ \omega &= 2xy^2 \, dx \wedge dy + z \, dy \wedge dz \end{aligned}$$

у \mathbb{R}^3 .

(119) *Оријентација еуклидског простора.* Из Линеарне алгебре нам је познато да је оријентација векторског простора \mathbb{R}^n избор једне од две класе еквиваленције његових база, при чему се базе

$$v_1, \dots, v_n \quad \text{и} \quad w_1, \dots, w_n$$

²¹У (120) на стр. 78 смо видели да је отворен подскуп еуклидског простора (а из истог разлога и произвољне многострукости) повезан ако и само ако је путно повезан.

сматрају еквивалентним ако матрица преласка A са једне на другу ($Av_j = w_j$) има позитивну детерминанту.

Дуално, оријентацију можемо да задамо као избор базе дуалног простора $(\mathbb{R}^n)^*$, што је еквивалентно избору n 1-форми η_1, \dots, η_n или једне n -форме $\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_n$. Пошто у n -димензионом векторском простору $\dim \Omega^n = 1$, две n -форме α и β можемо да сматрамо еквивалентним ако је $\alpha = c\beta$ за неко $c > 0$. Избор једне од две класе еквиваленције нетривијалних (различитих од нуле) n -форми можемо да узмемо као дефиницију избора оријентације.

Показаћемо да су ове две дефиниције оријентације еквивалентне. Нека је

$$A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

линеарно пресликавање и μ нетривијална n -форма. Тада је

$$A^* \mu = \det(A) \mu.$$

Заиста, довољно је проверити ову једнакост на некој бази v_1, \dots, v_n простора \mathbb{R}^n . Пошто је

$$\frac{A^* \mu(v_1, \dots, v_n)}{\mu(v_1, \dots, v_n)} := \frac{\mu(Av_1, \dots, Av_n)}{\mu(v_1, \dots, v_n)}$$

антисиметрична n -линеарна форма по колонама матрице A , која је једнака 1 за $A = \text{Id}$, закључак следи из познатог става из Линеарне алгебре о јединствености репрезентације антисиметричних n -линеарних форми.

Одатле следи да су две дефиниције оријентације, помоћу избора базе и помоћу избора n -форме, еквивалентне. Заиста, ако је оријентација задата избором n -форме μ , онда можемо да кажемо да база v_1, \dots, v_n задаје исту оријентацију ако је $\mu(v_1, \dots, v_n) > 0$. Из $A^* \mu = \det(A) \mu$ следи да еквивалентним формама одговарају еквивалентне базе и обрнуто.

Из истих разлога важи општије тврђење: ако су U и V отворени скупови у \mathbb{R}^n , μ нетривијална n -форма на V и $f : U \rightarrow V$ глатко пресликавање, онда је

$$f^* \mu = \det(f_*) \mu,$$

где је $\det(f_*)$ Јакобијан пресликавања f . Ако је f дифеоморфизам, онда је $f^* \mu$ нетривијална форма, пошто је Јакобијан диференцијала различит од нуле. Ако је тај Јакобијан позитиван, онда μ и $f^* \mu$ дефинишу исту оријентацију, па тада кажемо да дифеоморфизам f *чува оријентацију*.

(120) **Задатак:** Нека је $U \subset \mathbb{R}^n$ отворен скуп, X глатко векторско поље на U и $\mu_0 = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$. Доказати да је

$$d(X \lrcorner \mu_0) = \text{div } X \mu_0,$$

где је $(n-1)$ -форма $X \lrcorner \mu_0$ дефинисана са

$$X \lrcorner \mu_0(Y_1, \dots, Y_{n-1}) = \mu_0(X, Y_1, \dots, Y_{n-1}).$$

Некада се уместо $X \lrcorner \mu$ користи и ознака $i(X)\mu$. Форма $i(X)\mu$ назива се *контракцијом* форме μ помоћу векторског поља X или њеним *унутрашњим изводом* у правцу векторског поља X .

(121) **Задатак:** Израчунати извод функције f у правцу вектора v ако је

$$(a) f(x, y) = \int_{xy}^{x+y^2} e^{t^2} dt, v = (1, 1).$$

(б)

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}, \quad v = (1, \dots, 1).$$

Решење: 0.

(122) **Задатак:** Испитати непрекидност, диференцијабилност и равномерну непрекидност функције $f(x_1, \dots, x_n) = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k}$.

Решење: За $\prod_{k=1}^n x_k \neq 0$ парцијални изводи су непрекидни, па је f диференцијабилна, за $\prod_{k=1}^n x_k = 0$ не постоји извод у сваком правцу.

(123) **Задатак:** Нека је A симетрична несингуларна реална $n \times n$ матрица, u, v вектори у \mathbb{R}^n и $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ функција дефинисана са $f(x) = u + x \cdot v + xAx^T$. Доказати да је $x_0 = -\frac{1}{2}vA^{-1}$ јединствена критична тачка функције f и да су следећи услови еквивалентни:

- (a) x_0 је тачка локалног минимума (максимума);
- (б) x_0 је тачка апсолутног минимума (максимума);
- (в) матрица A је позитивно (негативно) дефинитна.

Решење: Ако је A позитивно дефинитна, онда је $xAx^T \geq c\|x\|^2$, па $f(x) \rightarrow +\infty$ кад $\|x\| \rightarrow +\infty$, што због компактности лопте у \mathbb{R}^n значи да f има апсолутни минимум. Ланац импликација завршава чињеница да је A други извод функције f .

(124) **Задатак:** Нека је $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ пресликавање класе C^1 , такво да је за неко $c > 0$

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}^n) \|f(x) - f(y)\| \geq c\|x - y\|.$$

Доказати да је f бијекција и да је $f^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ класе C^1 .

Решење: $f(\mathbb{R}^n)$ је повезан, затворен и (због Теореме о инверзној функцији) отворен скуп.

(125) **Задатак:** Наћи екстремне вредности функције $f(x, y)$ имплицитно задате са

$$\int_0^{f(x,y)} e^{t^2} dt = x^2 + y^2.$$

Решење: Минимум у тачки $(0, 0)$.

(126) **Задатак:** У лопту полупречника r уписати цилиндар највеће запремине.

Решење: Висина цилиндра је $2r/\sqrt{3}$.

(127) **Задатак:** У елипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ уписати правоугаоник чије су стране паралелне координатним осама тако да му је површина највећа.

(128) **Задатак:** Нека су x_1, \dots, x_n позитивни бројеви, такви да је $\sum_{k=1}^n x_k = 1$ и $a > 0, b > 0$. Доказати неједнакости

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{1-x_k} \geq \frac{n^2}{n-1}, \quad \prod_{k=1}^n x_k(1-x_k) \leq \frac{(n-1)^n}{n^{2n}}, \quad \prod_{k=1}^n \left(a + \frac{b}{x_k}\right) \geq (a+nb)^n.$$

2. Диференцирање на многострукостима

(1) *Глатке многострукости.* У Глави 1 смо дефинисали тополошку многострукост, као Хаусдорфов простор са пребројивом базом топологије који је локално хомеоморфан еуклидском простору (видети (94) на стр. 72). Важна класа тополошких многострукости су *глатке многострукости*. Глатка многострукост је тополошка многострукост M , таква да постоји фамилија

$$\mathcal{U} = \{(U_\lambda, \varphi_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\},$$

где је $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ отворено покривање простора M , а

$$\varphi_\lambda : U_\lambda \rightarrow \varphi_\lambda(U_\lambda) \subset \mathbb{R}^n$$

фамилија хомеоморфизама, таква да је испуњен следећи услов:

(♣) Ако је $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, онда је

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

дифеоморфизам класе C^k отворених скупова у \mathbb{R}^n .

За многострукост M тада кажемо да је *глатка многострукост класе C^k* . Ако другачије не напоменемо, термином глатка многострукост, или само многострукост, од сада ћемо називати многострукости класе C^∞ . У извесном смислу (који овде нећемо прецизирати), ова претпоставка не смањује општост разматрања.

Број n из претходне дефиниције назива се *димензијом* многострукости M . Пар $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ називамо *локалним координатама* или *координатном картом*, а пресликавање φ_α^{-1} *локалном параметризацијом*. Услов (♣) се назива *условом сагласности карата*.

Кажемо да је фамилија \mathcal{U} *максимална* ако свака карта која је сагласна са картама из \mathcal{U} и сама припада фамилији \mathcal{U} . Другим речима, фамилија је максимална ако је испуњен следећи услов – ако је V отворен скуп у M а $\psi : V \rightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$ хомеоморфизам такав да је

$$\psi \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap V) \rightarrow \psi(U_\alpha \cap V)$$

дифеоморфизам за све $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{U}$ такве да је $U_\alpha \cap V \neq \emptyset$, онда је $(V, \psi) \in \mathcal{U}$. Сваку фамилију \mathcal{U} можемо да комплетирамо до максималне, додајући јој сагласне карте. Максималну фамилију сагласних карата називамо *атласом* многострукости M или њеном *диференцијабилном структуром*.

Свака фамилија \mathcal{V} сагласних карата која покрива многострукост може да се допуни до максималне, тј. до атласа. Због тога ћемо често говорити и о *атласу* \mathcal{V} и кад ова фамилија није максимална, подразумевајући под тиме њено максимално допуњење.

- (2) Глатке површи у \mathbb{R}^n су глатке многострукости. Еуклидски простор \mathbb{R}^n је глатка многострукост, стандардна глатка структура (атлас) на њој је максимална фамилија сагласних карата која садржи пар (\mathbb{R}^n, ψ) , где је $\psi(x) = x$. Ако је M глатка многострукост, онда је сваки отворен подскуп $U \subset M$ глатка многострукост.
- (3) *Производ многострукости.* Нека је M глатка многострукост димензије m са атласом \mathcal{U} , а N глатка многострукост димензије n са атласом \mathcal{V} . Тада је $M \times N$ глатка многострукост димензије $m + n$ са атласом који садржи све карте

$$\{(U \times V, \phi \times \psi) \mid (U, \phi) \in \mathcal{U}, (V, \psi) \in \mathcal{V}\}.$$

- (4) *Подмногострукости.* Нека је M многострукост димензије m са атласом \mathcal{U} . Подскуп $S \subset M$ је *подмногострукост димензије $s \leq m$* многострукости M ако за сваку тачку $p \in S$ постоји карта $(U, \varphi) \in \mathcal{U}$ таква да је

$$S \cap U = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^s \times \{0\}).$$

Ова дефиниција уопштава дефиницију глатких површи као подмногострукости у еуклидском простору. Подмногострукост S је и сама глатка многострукост (димензије s), са картама

$$(S \cap U, \varphi|_{S \cap U}), \quad (U, \varphi) \in \mathcal{U}.$$

Број $m - s$ назива се *кодимензијом подмногострукости S* .

- (5) *Глатка пресликавања.* Услов сагласности карата (\clubsuit) нам омогућава да дефинишемо појам глатког пресликавања на глатким многострукостима. Нека су M и N глатке многострукости. Пресликавање

$$f : M \rightarrow N$$

је *глатко у тачки $p \in M$* ако постоје координатне карте (U, φ) на M и (V, ψ) на N такве да је $p \in U$, $f(p) \in V$ и

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$$

глатко (у тачки $\varphi(p)$) пресликавање отвореног скупа $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^{\dim M}$ у $\psi(V) \subset \mathbb{R}^{\dim N}$. Пресликавање је *глатко* ако је глатко у свакој тачки. Скуп глатких пресликавања $f : M \rightarrow N$ означавамо са $C^\infty(M; N)$. Специјално, скуп глатких функција $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ означавамо са $C^\infty(M)$.

Из сагласности карата следи да ова дефиниција не зависи од избора карата (U, φ) и (V, ψ) . Заиста, ако су (U_1, φ_1) и (V_1, ψ_1) друге карте, онда је и

$$\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1} = (\psi_1 \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \varphi_1^{-1})$$

глатко пресликавање, као композиција глатких.

Одавде видимо да на глаткој многострукости класе C^k можемо да дефинишемо пресликавања класе C^j за $j \leq k$. Ако не напоменемо другачије, под глатким пресликавањем на многострукости класе C^∞ подразумеваћемо пресликавање класе C^∞ .

Ако су M и N глатке многострукости, хомеоморфизам $f : M \rightarrow N$ је *дифеоморфизам* класе C^k ако су f и $f^{-1} : N \rightarrow M$ пресликавања класе C^k . Ако другачије не напоменемо, под дифеоморфизмом ћемо убудиће да подразумевамо дифеоморфизам класе C^∞ .

Специјално, координатне карте $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ и локалне параметризације $\varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow U$ су дифеоморфизми.

- (6) **Задатак:** Нека је $M_1 = \mathbb{R}$ и \mathcal{U}_1 атлас на M_1 који садржи пар (M_1, ψ) , где је $\psi(x) = x$. Нека је $M_2 = \mathbb{R}$ и \mathcal{U}_2 атлас на M_2 који садржи пар (M_2, φ) , где је $\varphi(x) = \sqrt[3]{x}$. Доказати да се појам глаткости функција на M_1 у односу на глатку структуру \mathcal{U}_1 подудара са стандардном појмом глаткости реалних функција реалне променљиве. Доказати да функција $f(x) = x^{2/3}$ није глатка у стандардном смислу, али да јесте у односу на структуру \mathcal{U}_2 на M_2 . Доказати да је

$$h : M_2 \rightarrow M_1, \quad h(x) = \sqrt[3]{x}$$

дифеоморфизам.

Овај задатак показује да на истој тополошкој многострукости са две дифеоморфне глатке структуре може да постоји функција која је глатка на једној, а није глатка на другој. Међутим, важи следеће тврђење.

Задатак: Нека је $h : M_1 \rightarrow M_2$ дифеоморфизам глатких многострукости. Доказати да је

$$h^* : C^\infty(M_2) \rightarrow C^\infty(M_1), \quad h^*(f) = f \circ h$$

изоморфизам алгебри глатких функција.

- (7) *Тангентни простор.* Нека је M глатка многострукост и $p \in M$. Појам глатке функције на M дозвољава нам да дефинишемо векторски простор $C^\infty(p)$ и тангентни простор $T_p M$ на исти начин као и у (104) на стр. 230. Дакле, $T_p M$ је простор свих линеарних пресликавања $X_p : C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}$ која задовољавају Лајбницево правило

$$X_p(fg) = g(p)X_p(f) + f(p)X_p(g).$$

- (8) *Извод пресликавања.* Нека су M и N глатке многострукости и $F : M \rightarrow N$ глатко пресликавање. Тада је, за $p \in M$, пресликавање

$$F^* : C^\infty(F(p)) \rightarrow C^\infty(p)$$

хомоморфизам алгебри. Дуални хомоморфизам векторских простора

$$F_* : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N, \quad F_*(X_p)(f) = X_p(F^*(f)) \quad \text{за } f \in C^\infty(F(p))$$

назива се *изводом пресликавања* F у тачки p . Користе се још и ознаке $F_*(p)$, $DF(p)$, $F'(p)$.

Задатак: Доказати да ова дефиниција уопштава дефиницију извода у афиним просторима²².

Задатак: Ако је φ локална карта на M , а ψ на N , доказати да је

$$D(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})(x) = D\psi(F(\varphi^{-1}(x))) \circ DF(\varphi^{-1}(x)) \circ D\varphi^{-1}(x)$$

²²Наравно, уз идентификацију различитих афиних простора помоћу translације, ова дефиниција самим тим уопштава и дефиницију извода у векторским просторима. Међутим, на многострукостима немамо translацију (нити било какво канонско пресликавање које идентификује различите тачке), тако да на многострукостима извод морамо да посматрамо као линеарно пресликавање чији домен зависи од тачке у којој се диференцира, слично као у (6) на 187. страни.

- (9) Нека је $F : M \rightarrow N$ глатко пресликавање, и нека је ранг пресликавања $F_*(p)$ (тј. димензија потпростора $F_*(T_p M)$) једнак r за свако p , дакле константан. Тада је за свако $q \in F(M)$ скуп $F^{-1}(q) \subset M$ подмногострукост кодимензије r . Пошто је дефиниција многострукости локалног карактера, доказ овог тврђења је исти као у (92) на стр. 227.
- (10) *Сингуларне и регуларне вредности.* Тачка $p \in N$ је *сингуларна тачка* глатког пресликавања $F : M \rightarrow N$ ако извод

$$DF(p) : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$$

није сурјективан. Ако је $p \in M$ сингуларна тачка, кажемо да је тачка $F(p) \in N$ *сингуларна вредност* пресликавања F . Тачка $q \in N$ је *регуларна вредност* пресликавања F ако она није сингуларна вредност. То значи да је $q \in N$ регуларна вредност у два случаја: или $q \notin F(M)$, или $q \in F(M)$ и за свако $p \in F^{-1}(q)$ пресликавање $DF(p)$ је сурјективно.

Једна варијанта тврђења (9) је следеће тврђење: Ако је $q \in F(M)$ регуларна вредност пресликавања F , онда је $F^{-1}(q) \subset M$ подмногострукост. При томе је кодимензија подмногострукости $F^{-1}(q)$ једнака димензији многострукости N . Читаоцу препуштамо да доказ изведе из (9) или директно из Теореме о рангу.

- (11) **Задатак:** Нека је $\mathcal{S}_n \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ простор симетричних $n \times n$ матрица. Доказати да је је јединична матрица регуларна вредност пресликавања

$$\mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathcal{S}_n, \quad A \mapsto AA^*$$

којим је дефинисана група ортогоналних матрица $O(n)$ и закључити из (10) да је $O(n)$ подмногострукост у $\mathbb{R}^{n \times n}$. Израчунати њену димензију. Доказати да су операције у овој групи глатке (за множење се ради о глаткости у односу на структуру производа (3) на $O(n) \times O(n)$).

Група (G, \star) која је глатка многострукост, таква да су груповне операције глатка пресликавања, назива се *Лијевом групом*. Разне матричне групе су основни примери Лијевих група.

- (12) *Имерзије и улагања.* Нека су M и N глатке многострукости. Глатко пресликавање $F : M \rightarrow N$ се назива *имерзијом* ако је за свако $p \in M$ ранг извода

$$DF(p) : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$$

једнак димензији многострукости M . Ако је F имерзија и ако је

$$F : M \rightarrow F(M)$$

хомеоморфизам (у релативној топологији на $F(M)$ наслеђеној из N), онда кажемо да је F *улагање*.

Задатак: Скицирати криву $r^2 = \sin 2\theta$ у xy -координатној равни. Доказати да ова крива може да се реализује као имерзија интервала у \mathbb{R}^2 , али не и као улагање.

Задатак: Дати пример повезане многострукости M и *инјективне* имерзије $F : M \rightarrow N$ која није улагање.

Задатак: Скицирати криву $r\theta = 1$ у xy -координатној равни (θ узима све вредности из $]0, +\infty[$). Да ли ова крива може да се реализује као имерзија? Да ли ова крива може да се реализује као улагање?

- (13) Следећа два тврђења следе из Теореме о рангу ((86) на стр. 222):

Задатак: Нека је $F : M \rightarrow N$ имерзија. Доказати да свака тачка $p \in M$ има отворену околину $U \ni p$ такву да је рестрикција

$$F|_U : U \rightarrow N$$

улагање.

Задатак: Нека је $F : M \rightarrow N$ улагање. Доказати да је $F(M)$ подмногострукост у N . Обрнуто, нека је $S \subset N$ подмногострукост. Доказати да је

$$i_S : S \rightarrow N, \quad i_S(x) = x$$

улагање.

- (14) *Диференцијал функције.* Ако је M глатка многострукост, онда се извод функције $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ означава са df и назива и *диференцијалом*. Присуство векторске структуре на \mathbb{R} обезбеђује канонску идентификацију $T_{f(p)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$, па диференцијал функције f у тачки p можемо да схватимо и као пресликавање $df(p) : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$. Пошто је ово пресликавање линеарно, диференцијал $df(p)$ је елемент дуалног простора $T_p^* M$. Простор $T_p^* M$ називамо *котангентним простором* многострукости M у тачки p .

- (15) Пресликавање $F_* : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ индукује дуално пресликавање

$$F^* : T_{F(p)}^* N \rightarrow T_p^* M, \quad F^*(\eta)(X) := \eta(F_* X).$$

Овде смо користили исти симбол F^* као за пресликавање $f \mapsto f \circ F$ из задатка у (6). Тај избор је конзистентан из следећег разлога. Ако је η r -линеарно пресликавање на $T_{F(p)}^* N$, онда дефинишемо r -линеарно пресликавање $F^* \eta$ на $T_p^* M$ са

$$F^*(\eta)(X_1, \dots, X_r) := \eta(F_*(X_1), \dots, F_*(X_r)).$$

Ако функције схватимо као 0-линеарна пресликавања (сетимо се да смо управо то урадили кад смо их звали 0-формама), онда је дефиниција пресликавања F^* у задатку у (5) специјални случај ове коју дајемо сада.²³

Задатак: Нека су $F : M \rightarrow N$ и $G : N \rightarrow S$ глатка пресликавања глатких многострукости. Доказати

$$(G \circ F)^* = F^* \circ G^*, \quad (G \circ F)_* = G_* \circ F_*$$

²³Ако је $f : M \rightarrow N$ пресликавање између неких објеката M и N (то могу да буду скупови, многострукости, тополошки простори, пингвини, жирафе или било шта друго) и ако се објектима M и N придружују објекти $O(M)$ и $O(N)$ а пресликавању f пресликавање између $O(M)$ и $O(N)$, онда је уобичајено да придружено пресликавање означавамо са f_* ако стрелица иде у истом смеру као за f ($f_* : O(M) \rightarrow O(N)$), а f^* ако иде у супротном ($f^* : O(N) \rightarrow O(M)$).

Задатак: Нека је $f = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ глатко пресликавање и (y_1, \dots, y_n) Декартове координате у \mathbb{R}^n . Доказати да је

$$f^* dy_1 = df_1$$

и извести одатле општу формулу

$$f^* \left(\sum_J a_J dy_J \right) = \sum_J (a_J \circ f) df_J,$$

где је, као и у тачки (115) (стр. 236), за $J = \{j_1, \dots, j_k\} \subset \{1, \dots, n\}$

$$dy_J := dy_{j_1} \wedge \dots \wedge dy_{j_k}, \quad df_J := df_{j_1} \wedge \dots \wedge df_{j_k}.$$

Задатак: Израчунати $f^*(dx \wedge dy)$ у координатама (r, θ) , ако је

$$f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Задатак: Израчунати $f^*\eta$ ако је $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ пресликавање дато са

$$f(x, y, z, t) = (xyz, xyz^2, xy + z^2),$$

а η диференцијална 3-форма у \mathbb{R}^3 задата са

$$\eta(X, Y, Z) = X \cdot (Y \times Z)$$

(мешовити производ у \mathbb{R}^3).

(16) Унија свих тангентних простора

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_p M$$

назива се *тангентним раслојењем* многострукости M . Унија свих котангентних простора

$$T^*M := \bigcup_{p \in M} T_p^*M$$

назива се *котангентним раслојењем* многострукости M . На тангентном раслојењу је дефинисана пројекција

$$\pi_{TM} : TM \rightarrow M, \quad \pi(X_p) = p \quad \text{за све } X_p \in T_p M.$$

Инверзна слика отвореног скупа $U \subset M$ у односу на ову пројекцију је

$$\pi_{TM}^{-1}(U) = \bigcup_{p \in U} T_p M =: TU,$$

тангентно раслојење многострукости U .

Тангентно раслојење је многострукост димензије

$$\dim TM = 2 \dim M;$$

топологију глатку структуру на TM дефинишу карте $(TU, (\varphi, \varphi_*))$, где су (U, φ) карте на M и

$$(\varphi, \varphi^*)(X_p) = (\varphi(p), \varphi_*(p)(X_p)) \in \varphi(U) \times \mathbb{R}^{\dim M} \subset \mathbb{R}^{2 \dim M}.$$

Слично, карте

$$(T^*U, (\varphi, (\varphi^{-1})^*))$$

дефинишу структуру глатке многострукости на T^*M .

(17) У (104) смо видели да је тангентни простор $T_q\mathbb{R}^n$ генерисан векторима

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_q, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x_n} \right|_q.$$

Ако је (U, ψ) локална карта на многострукости M и $p \in U$, онда је тангентни простор T_pM генерисан векторима

$$\psi_*^{-1}(p) \left(\left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_{\psi(p)} \right), \dots, \psi_*^{-1}(p) \left(\left. \frac{\partial}{\partial x_n} \right|_{\psi(p)} \right).$$

Дуално, котангентни простор $T_q^*\mathbb{R}^n$ је генерисан векторима

$$dx_1(q), \dots, dx_n(q),$$

па је T_p^*M генерисан векторима

$$\psi^* dx_1, \dots, \psi^* dx_n,$$

где је $\psi^* dx_j$ скраћена ознака²⁴ за $(\psi(p))^*(dx_j(\psi(p)))$.

Приметимо да је $T_pU = T_pM$ и $T_p^*U = T_p^*M$, пошто су дефиниције тангентног и котангентног простора локалног карактера (зависе само од неке околине тачке p).

(18) Пресликавање $X : M \rightarrow TM$ које задовољава $X(p) \in T_pM$ назива се (*тангентним*) *векторским пољем* на M . Уместо $X(p)$ пишемо и X_p . *Комутатор* тангентних векторских поља $X, Y : M \rightarrow TM$ је векторско поље $[X, Y]$ које дејствује на функције из $C^\infty(p)$ по правилу

$$[X, Y]_p(f) := X_p(Yf) - Y_p(Xf).$$

Приметимо да су Yf и Xf функције, па изрази $XY(f)(p) = X_p(Yf)$ и $YX(f)(p) = Y_p(Xf)$ имају смисла. Другим речима, могуће је дефинисати само комутатор *векторских поља*, а не вектора.

Задатак: Доказати да је $[X, Y]$ заиста векторско поље (тј. да је линеарно и задовољава Лајбницово правило), а да XY и YX , у општем случају, нису, јер други изводи не задовољавају Лајбницово правило.

(19) *Диференцијалне форме на многострукости.* Ако је (V, ψ) координатна карта на многострукости M и η_0 диференцијална форма на $\psi(V) \subset \mathbb{R}^n$, онда је са $\eta_V := \psi^*\eta_0$ дефинисано антисиметрично више-линеарно пресликавање на T_pV за свако $p \in V$. Ово пресликавање називамо *диференцијалном формом на V* .

Претпоставимо да је (U, φ) друга карта, $U \cap V \neq \emptyset$, и да је на њој дефинисана форма η_U . Ако су i и j инклузије

$$i : U \cap V \rightarrow U, \quad j : U \cap V \rightarrow V$$

и ако је $i^*\eta_U = j^*\eta_V$, кажемо да су форме η_U и η_V *сагласне*.

Диференцијална k -форма η на многострукости M је фамилија сагласних форми η_U на целом атласу. За свако $p \in M$ η је антисиметрично k -линеарно пресликавање на T_pM .

²⁴Овакве скраћене ознаке, у којима изостављамо или подразумевамо тачку $p \in M$, а заграде изостављамо и пишемо $\psi^*\eta$ уместо $\psi^*(\eta)$ ћемо убудуће користити без упозорења и извињења.

Пошто је диференцијал форме у \mathbb{R}^n дефинисан локално, његову дефиницију можемо да пренесемо на диференцијалне форме на многострукости: диференцијал форме η на M је довољно дефинисати у свакој координатној карти (U, φ) . Нека је у тој карти $\eta_U = \varphi^* \eta_0$, онда дефинишемо

$$d\eta_U = \varphi^*(d\eta_0).$$

Из дефиниције следи да, ако је $f : M \rightarrow N$ глатко пресликавање и ξ диференцијална форма на N , онда је $f^*(d\xi) = d(f^*\xi)$, односно, пресликавање f^* комутира са диференцијалом:

$$f^* \circ d = d \circ f^*.$$

Као и у (118), стр. 241, дефинишемо де-Рамову кохомологију као количнички простор тачних и затворених форми. Приметимо да из $f^* \circ d = d \circ f^*$ следи да глатко пресликавање

$$f : M \rightarrow N$$

индукује хомоморфизме

$$f^* : H_{dR}^k(N) \rightarrow H_{dR}^k(M) \quad \text{за све } k \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

Задатак: Нека је

$$H_{dR}^*(M) := \bigoplus_{k \geq 0} H_{dR}^k(M).$$

Доказати да је $(H^*(M), +, \wedge)$ прстен са јединицом.

Задатак: Доказати да је

$$f^* : (H_{dR}^*(N), +, \wedge) \rightarrow (H_{dR}^*(M), +, \wedge)$$

хомоморфизам прстена.

- (20) Затвореност форме је *локално*, а тачност *глобално* својство. Илустрираћемо то следећим примером.

Нека је $M = \mathbb{S}^1$ јединични круг $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Поларна координата θ није глобално дефинисана на M као једнозначна функција, него само до на адитивну константу $2k\pi$. Ако желимо да изаберемо једну грану за θ (нпр. изаберемо $k = 0$), добићемо непрекидну функцију дефинисану *локално*, тј. на неком интервалу око сваке тачке на кругу, али не и глобално непрекидну функцију, јер при обиласку пуног круга (тј. при приближавању почетној тачки са друге стране) имамо скок функције θ за 2π , дакле нарушаваће непрекидности.

Међутим, $d\theta$ добро дефинисана 1-форма, јер је $d(\theta + 2\pi) = d\theta$. Другим речима, $d\theta$ је 1-форма дефинисана са

$$d\theta := d(\arctan(y/x)) = \frac{x}{x^2 + y^2} dy - \frac{y}{x^2 + y^2} dx.$$

Пошто је диференцијал локално дефинисан објекат, и пошто је θ локално дефинисана функција, форма $d\theta$ је затворена²⁵: $d(d\theta) =$

²⁵Да је $d\theta$ затворена на \mathbb{S}^1 се види и из димензије, јер је то 2-форма на многострукости димензије 1. Међутим, дајемо још један аргумент који показује да је $d\theta$ затворена форма и на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

$d \circ d(\theta) = 0$ (јер је $d \circ d = 0$). Међутим, форма $d\theta$ није тачна²⁶. Да бисмо то показали, претпоставимо супротно – да је

$$d\theta = df$$

за неку функцију (0–форму) $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$. Нека је $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{S}^1$ стандардна параметризација круга

$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = \sin t.$$

Из једнакости $df = d\theta$ на горњем полукругу и чињенице да је θ добро дефинисана глатка функција на доњем полукругу следи да је

$$\begin{aligned} f(\gamma(2\pi)) - f(\gamma(\pi)) &= \int_0^{2\pi} \frac{d}{ds}(f \circ \gamma)(s) ds \\ &= \int_\pi^{2\pi} df \circ \gamma(s) \gamma'(s) ds \\ &= \int_\pi^{2\pi} d\theta \circ \gamma(s) \gamma'(s) ds \\ &= \int_\pi^{2\pi} \frac{d}{ds}(\theta \circ \gamma(s)) ds \\ &= \theta(\gamma(2\pi)) - \theta(\gamma(\pi)) = \pi. \end{aligned}$$

Слично, на горњем полукругу је θ добро дефинисана, па је

$$f(\gamma(\pi)) - f(\gamma(0)) = \theta(\gamma(\pi)) - \theta(\gamma(0)) = \pi.$$

Одатле следи

$$f(\gamma(2\pi)) - f(\gamma(0)) = 2\pi,$$

што је контрадикција, пошто је $\gamma(2\pi) = \gamma(0)$, па је и $f(\gamma(2\pi)) = f(\gamma(0))$.

Овиме смо доказали да је $d\theta$ затворена 1–форма која није тачна, па је њена класа $[d\theta]$ нетривијална у де Рамојој кохомологији $H_{dR}^1(\mathbb{S}^1)$.

Нека је α 1–форма на \mathbb{S}^1 . Тада је $\gamma^*\alpha$ 1–форма на $[0, 2\pi]$, па је облика $h(t) dt$. Нека је

$$c = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(t) dt$$

и нека је $\tilde{f} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ функција дефинисана на следећи начин²⁷

$$\tilde{f}(t) = \int_0^t (d\theta(\gamma(s))(\gamma'(s)) - c^{-1}h(s)) ds.$$

Ова функција задовољава $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(2\pi)$, па дефинише функцију $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$, такву да је $\gamma^*f = \tilde{f}$. Из Њутн–Лајбницевог формуле следи

$$df = d\theta - \frac{1}{c}\alpha,$$

²⁶Не заборавимо да је $d\theta$ само ознака за форму $\frac{x}{x^2+y^2} dy - \frac{y}{x^2+y^2} dx$, а не диференцијал глобално дефинисане функције.

²⁷Први сабирак је вредност диференцијалне форме $d\theta$ на тангентном вектору γ' у тачки $\gamma(s)$; тај сабирак може да се напише и као $\gamma^*d\theta(\frac{d}{ds})$, где је $\frac{d}{ds}$ тангентни вектор на $[0, 2\pi]$; видети (104). Дакле, тај сабирак је функција $[0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$.

тј. $[\alpha] = c[d\theta]$, где $[\cdot]$ означава де Рамову кохомолошку класу. Овине смо доказали да $[d\theta]$ генератор за $H_{dR}^1(\mathbb{S}^1)$, тј. да је $H_{dR}^1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{R}$. Из путне повезаности круга следи да је и $H_{dR}^0(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{R}$, јер је димензија нулте де Радове кохомологије многострукости једнака броју његових компоненти путне повезаности (видети (118) на стр. 241). Пошто су за $k > 1$ све k -форме на \mathbb{S}^1 тривијалне, закључујемо

$$H_{dR}^k(\mathbb{S}^1) = \begin{cases} \mathbb{R}, & k \in \{0, 1\} \\ 0, & k > 1. \end{cases}$$

- (21) Де Рамова кохомологија $H_{dR}^j(M)$ је векторски простор над пољем \mathbb{R} . Број

$$\chi(M) := \sum_{j=0}^{\dim M} (-1)^j \dim H_{dR}^j(M)$$

назива се *Ојлеровом карактеристиком* многострукости M .

- (22) *Векторско поље на многострукости* је пресликавање

$$X : M \rightarrow TM$$

са вредностима у тангентном раслојењу, које задовољава $X(p) \in T_p$. Другим речима, векторско поље свакој тачки $p \in M$ придружује вектор који је тангентан на M у тој тачки. Уместо $X(p)$ користимо и ознаку X_p за вредност векторског поља у тачки p . На тангентном раслојењу је дефинисана канонска пројекција (16)

$$\pi_{TM} : TM \rightarrow M, \quad \pi(X_p) = p \quad \text{за све } X_p \in T_p M,$$

па векторско поље можемо да дефинишемо и као пресликавање $X : M \rightarrow TM$ за које важи $\pi_{TM} \circ X = \text{Id}_M$.

Приметимо да је ова дефиниција дуална дефиницији диференцијалне 1-форме, која је пресликавање

$$\eta : M \rightarrow T^*M$$

које задовољава $\eta(p) \in T_p^*M$, тј. $\pi_{T^*M} \circ \eta = \text{Id}_M$.

- (23) *Диференцирање векторских поља*. Пошто на M и на TM имамо глатку структуру (видети (16)), можемо да говоримо о *глатким векторским пољима*. Међутим, за разлику од раније разматраног случаја $M = \mathbb{R}^n$, не постоји *канонски* начин да идентификујемо тангентне просторе у различитим тачкама, па вредности векторског поља леже у различитим просторима²⁸. Последично, израз којим дефинишемо извод векторског поља у \mathbb{R}^n

$$X(p+h) - X(p) = DX(p) + o(h), \quad h \rightarrow 0$$

нема смисла за векторска поља на многострукости, пошто су на левој страни вектори из различитих простора, па не могу да се сабирају.

Уместо тога, векторско поље $X : M \rightarrow TM$ можемо да диференцирамо као пресликавање између две многострукости. Али онда је, за $Y_p \in T_p M$, извод векторског поља X у правцу вектора Y

$$DX(Y_p) \in T_{X_p}(TM),$$

²⁸Ова ситуација је слична ситуацији у (6) на стр 187.

тако да сада X и DX нису објекти из истих простора. Међутим, некада је zgodно посматрати векторско поље и његов извод као елементе истог векторског простора (као што можемо у случају еуклидских простора).

Претпоставимо да је наша многострукост M смештена у еуклидски простор (тј. да је она подмногострукост у \mathbb{R}^n за неко $n \geq \dim M$), онда X можемо да посматрамо као пресликавање

$$X : M \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

а његов извод у правцу вектора $Y_p \in T_p M$, захваљујући постојању канонске идентификације паралелних вектора истог интензитета и смера у \mathbb{R}^n као

$$DX(Y_p) \in \mathbb{R}^n.$$

Овај вектор не мора да припада тангентном простору површи M . Али простор \mathbb{R}^n је снабдевен скаларним производом, па постоји природна пројекција на потпростор – ортогонална пројекција. Ортогоналну пројекцију вектора $DX(Y_p)$ на $T_p M$ називамо *коваријантним изводом* векторског поља X у правцу вектора Y_p .

У општем случају, ако многострукост није површ у векторском простору, не постоји *канонска* пројекција

$$\pi_p : T_{X_p}(TM) \rightarrow T_p M,$$

тј. можемо да изаберемо произвољну такву пројекцију, и сви ти избори су равноправни.

Сваку такву пројекцију називамо *конексијом* на TM . Ако је изабрана конексија π , онда је са

$$\nabla_{Y_p} X = \pi_p(D_{Y_p}(X)) \in T_p M$$

дефинисан *коваријантни извод* векторског поља X у правцу вектора Y_p . Различити избори конексије дају различите коваријантне изводе. Некада се термини *конексија* и *коваријантни извод* користе за исти објекат $\nabla_Y X$ и то има оправдања, пошто су та два објекта у извесном смислу еквивалентна (сваки од њих одређује други, што је тема за себе на којој се нећемо задржавати).

- (24) *Картанова формула.* Нека је $\phi_t : M \rightarrow M$ глатка (по t) фамилија глатких (по $x \in M$) пресликавања, $X(\phi_t(x)) = \frac{d}{dt}\phi_t(x)$ и α k -форма на M . Тада је

$$\frac{d}{dt}\phi_t^*\alpha = \phi_t^*(d(i(X)\alpha) + i(X)d\alpha),$$

где је $i(X)$ оператор дефинисан у (120) на стр. 243.

Доказ: Индукцијом по k . За $k = 0$ Картанова формула

$$\frac{d}{dt}\phi_t^*f = \phi_t^*df(X),$$

што је само реформулација дефиниције извода функције f у правцу вектора X . Нека је β $(k+1)$ -форма. Она може да се запише као $\beta = df \wedge \alpha$, па коришћењем индуктивне претпоставке и особина диференцирања добијамо:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \phi_t^*(df \wedge \alpha) &= \frac{d}{dt} \phi_t^* df \wedge \phi_t^* \alpha + \phi_t^* df \wedge \frac{d}{dt} \phi_t^* \alpha = \\ &= \phi_t^* [di(X)df \wedge \alpha + df \wedge i(X)d\alpha + df \wedge di(X)\alpha] \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} &\phi_t^* [i(X)d(df \wedge \alpha) + di(X)(df \wedge \alpha)] \\ &= \phi_t^* [-i(X)(df \wedge d\alpha) + d(i(X)df \wedge \alpha - df \wedge i(X)\alpha)] \\ &= \phi_t^* [di(X)df \wedge \alpha + df \wedge i(X)d\alpha + df \wedge di(X)\alpha]. \end{aligned}$$

Задатак: Нека је α_t глатка фамилија диференцијалних форми. Доказати да је

$$\frac{d}{dt} \phi_t^* \alpha_t = \phi_t^* \left(d(i(X)\alpha_t) + i(X)d\alpha_t + \frac{\partial \alpha_t}{\partial t} \right).$$

- (25) Нека је $\phi_t : M \rightarrow M$ глатко дејство групе $(\mathbb{R}, +)$ на M , тј. глатка фамилија дифеоморфизама која задовољава

$$\phi_{s+t} = \phi_s \circ \phi_t, \quad \text{односно} \quad \phi_{s+t}(x) = \phi_s(\phi_t(x)).$$

Тада је

$$X := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t(x)$$

тангентно векторско поље. Ако је α диференцијална k -форма, њен Лијев извод у правцу векторског поља X је

$$L_X \alpha := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t^* \alpha.$$

Картанова формула (24) може да се напише у облику

$$L_X = d \circ i(X) + i(X) \circ d,$$

из кога се види веза између Лијевог, спољашњег и унутрашњег извода.

- (26) *Хомотопија.* Пресликавања $h_0, h_1 : M \rightarrow N$ су *хомотопна* (или *хомотопски еквивалентна*) ако постоји непрекидно пресликавање

$$H : M \times [0, 1] \rightarrow N$$

такво да је $H(x, 0) = h_0(x)$ и $H(x, 1) = h_1(x)$. Пресликавање H се назива *хомотопијом* која спаја h_0 и h_1 . Глатка пресликавања h_0 и h_1 су *глатко хомотопна* ако постоји глатка хомотопија H која их спаја. Релација хомотопске еквиваленције је релација еквиваленције, означавамо је са \simeq ; чињеницу да су h_0 и h_1 хомотопски еквивалентна пресликавања записујемо са

$$h_0 \simeq h_1.$$

Ако је $M = [a, b]$, говоримо о *хомотопски еквивалентним путевима* у M . Ако у дефиницији захтевамо да при деформацији H крајеви буду фиксирани, тј. да је

$$H(a, t) \equiv h_0(a) = h_0(b), \quad H(b, t) \equiv h_0(b) = h_1(b),$$

кажемо да су путеви $h_0, h_1 : [a, b] \rightarrow N$ *хомотопски еквивалентни са фиксираним крајевима*.

На пример, свака два пута

$$h_0, h_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$$

у комплексној равни су хомотопски еквивалентни са фиксираним крајевима, али путеви

$$h_0, h_1 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad h_0(s) = e^{is}, \quad h_1(s) = e^{-is}$$

(горњи и доњи полукруг) нису хомотопски еквивалентни са фиксираним крајевима, јер се не могу деформисати један до другог, без проласка кроз координатни почетак који је избачен.

Задатак: Нека је $d\theta$ форма из (20); посматрајмо поларна координата θ је дефинисана $\text{mod } 2\pi\mathbb{Z}$, тј. можемо да је посматрамо као *вишезначну функцију* на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Фиксирајмо њену вредност у тачки 1 на x -оси са $\theta(1) = 0$. За $z \in \mathbb{C}$ и за непрекидан пут γ у $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ који спаја тачке 1 и z дефинишимо $\Theta(z, \gamma)$ као вредност вишезначне функције θ која се добија њеним непрекидним (тј. без скокова $\text{mod } 2\pi\mathbb{Z}$) мењањем од $\theta(1) = 0$ до $\theta(z)$ дуж криве γ . Доказати да је

$$\Theta(z, \gamma_1) = \Theta(z, \gamma_2) \Leftrightarrow \gamma_1 \simeq \gamma_2 \text{ са фиксираним крајевима.}$$

На овај начин поларна координата може да се схвати као *једнозначна* функција на количничком простору непрекидних путева који полазе из фиксиране тачке (у задатку је то била тачка 1) у односу на релацију хомотопске еквиваленције са фиксираним крајевима. Овакав количнички простор може да се придружи произвољном путно повезаном и локално путно повезаном тополошком простору X (уместо простора $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ из претходног задатка) и назива се његовим *универзалним наткривањем*.²⁹

Тополошки простори M и N су *хомотопни* (или *хомотопски еквивалентни*) ако постоје пресликавања

$$f : M \rightarrow N \quad \text{и} \quad g : N \rightarrow M$$

таква да је

$$g \circ f \simeq \text{id}_M \quad \text{и} \quad f \circ g \simeq \text{id}_N.$$

Чињеницу да су M и N хомотопски еквивалентни простори записујемо са $M \simeq N$.

Задатак: Доказати да је кружни прстен $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z| \leq 2\}$ хомотопски еквивалентан кругу $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

Задатак: Да ли су цилиндар и Мебијусова трака хомотопски еквивалентни?

²⁹Ако је \tilde{X} универзално наткривање тополошког простора X , онда постоји природна пројекција $\Pi : \tilde{X} \rightarrow X$ која класу $[\gamma]$ пута γ пресликава у његову крајњу тачку. Скуп \tilde{X} може да се снабде топологијом, тако да је Π непрекидно пресликавање (видети (92) на стр. 70).

Хомеоморфни простори су хомотопски еквивалентни, али не и обрнуто: на пример, еуклидски простор \mathbb{R}^n је хомотопски еквивалентан простору који се састоји од једне тачке. Просторе који су хомотопски еквивалентни тачки називамо *контрактибилним просторима*.

Задатак: Доказати да је сваки конвексан подскуп тополошког векторског простора контрактибилан.

(27) Из Картанове формуле следи да глатко хомотопски еквивалентна пресликавања $h_0, h_1 : M \rightarrow N$ индукују исто пресликавање

$$h_0^* = h_1^* : H_{dR}^k(N) \rightarrow H_{dR}^k(M).$$

Доказ: Означимо $H(x, t)$ са $H_t(x)$. Из Картанове формуле следи

$$h_1^* \alpha - h_0^* \alpha = \int_0^1 \frac{d}{dt} H_t^* \alpha dt = \int_0^1 H_t^* (d(i(X)\alpha) + i(X)d\alpha) dt.$$

Оба сабирка су једнака нули у кохомологији: први због тога што је

$$\int_0^1 H_t^* (d(i(X)\alpha)) dt = d \int_0^1 H_t^* i(X)\alpha dt$$

тачна форма (овде смо применили $H^* \circ d = d \circ H^*$ и правило диференцирања интеграла (40) на стр. 200), па је једнака нули у кохомологији (припада слици $\text{im } d$), а други због тога што је $d\alpha = 0$ за форме којима је дефинисана кохомологија.

(28) Из (27) следи

$$M \simeq N \Rightarrow H_{dR}^k(M) \cong H_{dR}^k(N) \quad \text{за све } k.$$

Доказ: Ако су

$$f : M \rightarrow N \quad \text{и} \quad g : N \rightarrow M$$

пресликавања таква да је

$$g \circ f \simeq \text{id}_M \quad \text{и} \quad f \circ g \simeq \text{id}_N,$$

онда је

$$f^* \circ g^* = \text{id}_{H_{dR}^k(M)} \quad \text{и} \quad g^* \circ f^* = \text{id}_{H_{dR}^k(N)},$$

па су линеарна пресликавања f^* и g^* изоморфизми, јер имају леви и десни инверз.

Задатак: Доказати да је реална права \mathbb{R} контрактибилна и извести одатле да је

$$H_{dR}^k(\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 0 \\ 0, & k \geq 1. \end{cases}$$

Као последицу, уз помоћ (20) закључити да права и круг нису хомотопни (а самим тим ни хомеоморфни) простори.

- (29) *Поенкареова лема.* Еуклидски простор \mathbb{R}^n је контрактибилан простор. Из (28) следи да је

$$H_{dR}^k(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 0 \\ 0, & k \geq 1. \end{cases}$$

Другим речима, свака затворена форма у \mathbb{R}^n је тачна. Специјално, неопходни услови потенцијалности и соленидности векторских поља у еуклидском простору (114) су уједно и довољни. У (114) смо видели да они нису довољни у областима са сложенијом топологијом; следећи задатак је још једну илустрација истог феномена на језику диференцијалних форми.

Задатак: Доказати да је

$$H_{dR}^k(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & k \in \{0, 1\} \\ 0, & k > 1. \end{cases}$$

- (30) Де Рамове кохомологије су само једна од алгебарских тополошких (или хомотопских) инваријанти. До њих смо стигли аналитичким путем. Следећа директнија, геометријска конструкција, даје нам алгебарске инваријанте сличне (и у извесном смислу дуалне) де Рамовим кохомологијама.

Нека је Δ^n конвексни омотач³⁰ тачака

$$a_0 = (0, 0, \dots, 0), \quad a_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad a_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$$

у \mathbb{R}^n . Скуп Δ^n називамо *стандардним n -симплексом*.

Стандардни 0-симплекс је тачка, 1-симплекс је дуж, 2-симплекс троугао, 3-симплекс тетраедар. Граница 1-симплекса се састоји од два 0-симплекса, граница 2-симплекса се састоји од три 1-симплекса, граница 3-симплекса се састоји од четири 2-симплекса. У општем случају, граница n -симплекса се састоји од $(n-1)$ -симплекса (њих има $(n+1)$), које зовемо његовим *странама*. Страну која не садржи теме a_k називамо *k -том страном*.

Глатко преликавање $\sigma : \Delta^n \rightarrow M$ стандардног n -симплекса у многострукост M називамо *глатким сингуларним симплексом у M* . Формалну коначну линеарну комбинацију $\sum_k a_k \sigma_k$, где су a_k реални бројеви а σ_k сингуларни n -симплекси у M називамо *n -ланцем у M* . У скупу свих n -ланаца у M уведемо релацију еквиваленције $\sigma_1 \sim \sigma_2$ ако постоји дифеоморфизам $\psi : \Delta^n \rightarrow \Delta^n$ који чува оријентацију, такав да је $\sigma_1 = \sigma_2 \circ \psi$, и $\sigma_1 \sim -\sigma_2$ ако постоји дифеоморфизам $\phi : \Delta^n \rightarrow \Delta^n$ који мења оријентацију, такав да је $\sigma_1 = \sigma_2 \circ \phi$. Количнички простор у односу на ову релацију је векторски простор, који означавамо са $C_n(M)$ и називамо *ланчастим комплексом*.

Граница n -симплекса σ је ланац

$$\partial\sigma := \sum_{k=0}^n (-1)^k F_k(\sigma) \in C_{n-1}(M),$$

³⁰ Конвексни омотач скупа A у векторском простору је најмањи конвексан скуп C такав да је $C \supset A$.

где је $F_k(\sigma)$ рестрикција пресликавања σ на k -ту страницу. Оператор ∂ је овиме дефинисан на генераторима векторског простора $C_n(M)$, по линеарности га продужујемо до линеарног пресликавања

$$\partial : C_n(M) \rightarrow C_{n-1}(M).$$

Из дефиниције овог оператора директном провером закључујемо да важи $\partial \circ \partial = 0$, па је

$$\text{im}(\partial : C_{k+1}(M) \rightarrow C_k(M)) \subset \ker(\partial : C_k(M) \rightarrow C_{k-1}(M)).$$

Због тога су добро дефинисани количнички простори

$$H_k(M) := \frac{\ker(\partial : C_k(M) \rightarrow C_{k-1}(M))}{\text{im}(\partial : C_{k+1}(M) \rightarrow C_k(M))}$$

које називамо *сингуларним хомологијама* многострукости M . Ако је $f : M \rightarrow N$ непрекидно пресликавање и $\sigma : \Delta^k \rightarrow M$ сингуларни симплекс у M , онда је $f \circ \sigma$ сингуларни симплекс у N . На тај начин је добро дефинисано пресликавање $f_* : H_k(M) \rightarrow H_k(N)$. Може да се докаже да важи

$$f \simeq g \Rightarrow f_* = g_*,$$

а одатле да (28) важи и за хомологију, тј. да је и хомологија хомотопска инваријанта.

Приметимо да је $\dim H_0(M)$ број компоненти путне повезаности многострукости M (јер су $C_0(M)$ путеви у M).

(31) *Паракомпактност.* Нека је \mathcal{U} отворено покривање тополошког простора X . Фамилија отворених скупова \mathcal{V} је *локално коначно профињење* фамилије \mathcal{U} ако су испуњени следећи услови:

- \mathcal{V} је отворено покривање простора X ;
- сваки скуп из фамилије \mathcal{V} је садржан у неком скупу из фамилије \mathcal{U} ;
- свака тачка $p \in M$ припада само коначном броју скупова из фамилије \mathcal{V} .

Тополошки простор X је *паракомпактан* ако свако његово отворено покривање \mathcal{U} има *локално коначно профињење* \mathcal{V} .

Стандардан резултат из Опште топологије је да је сваки локално компактан Хаусдорфов простор са пребројивом базом топологије паракомпактан. Специјално, свака многострукост је паракомпактна. Доказаћемо једну верзију тог тврђења, у следећој форми. Нека је \mathcal{U} отворено покривање многострукости M . Тада постоји пребројиво локално коначно профињење \mathcal{V} које се састоји од координатних карата (V_j, φ_j) , таквих да је $\varphi_j(V_j) = B]0; 3[$ лопта полупречника 3, такво да скупови $W_j = \varphi_j^{-1}(B]0; 1])$ такође покривају M .

Доказ: Ако је M компактна, тврђење је тривијално. Препоставимо да M није компактна. Пошто је M локално еуклидски (дакле и локално компактан) простор и има пребројиву базу топологије, на M постоји пребројива база топологије

$$\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots\},$$

таква да је за свако S_j скуп $\overline{S_j}$ компактан. Дефинишимо низ компактних скупова $\{K_j\}$ на следећи начин. Нека је $K_1 = \overline{S_1}$. Претпоставимо

затим да су K_1, \dots, K_j дефинисани. Нека је d најмањи природан број такав да је $d > j$ и

$$K_j \subset S_1 \cup \dots \cup S_d.$$

Дефинишимо

$$K_{j+1} = \overline{S_1 \cup \dots \cup S_d}.$$

Нека је $U_\lambda \in \mathcal{U}$. Посматрајмо отворене скупове

$$P_{j,\lambda} := (\text{Int}(K_{j+2}) \setminus K_{j-1}) \cap U_\lambda$$

где је Int унутрашњост скупа и $K_{-1} = K_0 = \emptyset$. Око сваке тачке $p \in P_{j,\lambda}$ постоји координатна карта $(V_{p,\lambda}, \varphi_{p,\lambda})$ таква да је $V_{p,\lambda} \subset P_{j,\lambda}$, $\varphi_{p,\lambda}(p) = 0$ и

$$\varphi_{p,\lambda}(V_{p,\lambda}) = B]0; 3[.$$

Нека је $W_{p,\lambda} = \varphi_{p,\lambda}^{-1}(B]0; 1[) \subset \text{Int}(P_{j,\lambda})$. Фамилија отворених скупова $W_{p,\lambda}$ је отворено покривање компактног скуп $K_{j+1} \setminus \text{Int}(K_j)$, па постоји њено коначно потпокривање. Означимо њега са $W_{j,1}, \dots, W_{j,k_j}$, а одговарајуће скупове фамилије \mathcal{V} са $V_{j,1}, \dots, V_{j,k_j}$. Фамилије

$$\mathcal{W} = \{W_{j,1}, \dots, W_{j,k_j} \mid j \in \mathbb{N}\}, \quad \mathcal{V} = \{V_{j,1}, \dots, V_{j,k_j} \mid j \in \mathbb{N}\}$$

задовољавају услове тврђења.

(32) *Разлагање јединице* на многострукости M је фамилија глатких функција $\rho_\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \in \Lambda$, таквих да

- $0 \leq \rho_\lambda \leq 1$ за све $\lambda \in \Lambda$ и све $x \in M$;
- свака тачка $p \in M$ има околинУ $U \ni p$ такву да је $\rho_\lambda \equiv 0$ на U за све сем коначно много $\lambda \in \Lambda$;
- $\sum_{\lambda \in \Lambda} \rho_\lambda(x) = 1$ за све $x \in M$.

Друго својство је својство *локалне коначности*; из њега следи да је сума у трећем својству коначна.

За свако покривање $\mathcal{U} = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ многострукости M постоји разлагање јединице $\{\rho_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ такво да

$$(\forall \gamma \in \Gamma)(\exists \lambda \in \Lambda) \text{supp } \rho_\gamma \subset U_\lambda,$$

где је $\text{supp } \rho_\lambda$ *носач* функције ρ_λ , тј.

$$\text{supp } \rho_\lambda := \overline{\{x \in M \mid \rho_\lambda(x) \neq 0\}}.$$

Доказ: Нека су $\mathcal{V} = \{(V_j, \varphi_j)\}$ и \mathcal{W} пребројиве фамилије конструисане као у тврђењу (31). У (55) на стр. 210 смо видели да постоји функција h класе C^∞ таква да је $h \equiv 1$ на $B]0; 1[$ и $h \equiv 0$ ван $B]0; 2[$. Нека је $h_j := h \circ \varphi_j$. Тада је са

$$\rho_j = \frac{h_j}{\sum_j h_j}$$

дефинисано тражено разлагање јединице.

(33) Ако је $\mathcal{O} = \{V_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ отворено покривање многострукости M , кажемо да је разлагање јединице ρ_λ *потчињено покривању* \mathcal{O} ако је

$$\text{supp } \rho_\lambda \subset V_\lambda$$

за све $\lambda \in \Lambda$. Са мало више пажње, могу да се докажу следеће верзије тврђења (32):

- (а) За свако отворено покривање многострукости M координатним картама $\mathcal{U} := \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ постоји разлагање јединице $\{\rho_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ које му је потчињено.
- (б) За свако отворено покривање многострукости M координатним картама $\mathcal{U} := \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ постоји разлагање јединице $\{\rho_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ састављено од функција са компактним носачем, такво да

$$(\forall \gamma)(\exists \lambda) \operatorname{supp} \rho_\gamma \subset U_\lambda.$$

У општем случају, за дато покривање \mathcal{U} није могуће конструисати разлагање јединице које истовремено задовољава (а) и (б). На пример, нека је $M = \mathbb{R}^n$ и \mathcal{U} покривање које се састоји само од једне карте $U = \mathbb{R}^n$. Очигледно је да тада не постоји разлагање јединице потчињено покривању \mathcal{U} које се састоји од функција са компактним носачем.

Разлагање јединице је важан инструмент који нам некад омогућава да пређемо са локалних на глобалне објекте, тј. да глобализујемо неке локалне конструкције. Пошто је многострукост локално еуклидска, то значи да неке појмове из еуклидских простора можемо да пренесемо на многострукости. Даћемо неколико примера.

- (34) **Задатак:** Користећи Разлагање јединице и Вајерштрасову теорему о апроксимацији непрекидних функција полиномима (видети Главу 1), доказати да свака непрекидна функција $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ на глаткој многострукости M може униформно да се апроксимира глатком функцијом.
- (35) *Риманова метрика* на многострукости M је фамилија скаларних производа

$$g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

која глатко зависи од $p \in M$ у смислу да је, за свака два глатка векторска поља $X, Y : M \rightarrow TM$ функција

$$M \ni p \mapsto g_p(X_p, Y_p) \in \mathbb{R}$$

глатка.

На свакој глаткој многострукости постоји Риманова метрика.

Доказ: Нека су $\mathcal{V} = \{(V_j, \varphi_j)\}$, \mathcal{W} као у (31). На сваком од скупова V_j је дефинисана Риманова метрика са

$$g_p^j := \varphi_j^*(p) \langle \cdot, \cdot \rangle,$$

где је $\langle \cdot, \cdot \rangle$ стандардни скаларни производ у еуклидском простору. Тиме је Риманова метрика дефинисана локално, тј. у свакој координатној карти. Глобално је дефинишемо као

$$g_p = \sum_j \rho_j(p) g_p^j.$$

Задатак: Доказати да је претходној дефиницији заиста добро дефинисана Риманова метрика, тј. да фамилија g_p глатко зависи од p и да је g_p скаларни производ за све p .

Присуство Риманове метрике нам омогућава да концепт мерења дужине криве из еуклидских простора пренесемо на многострукости:

дужина глатке криве $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ је

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g\left(\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}\right)} dt.$$

- (36) *Оријентабилне многострукости.* Упоредимо живот на Мебијусовој траци са животом на Земљи, која је елипсоид. На Мебијусовој траци је могућ следећи догађај. Два учесника у експерименту се састану у тачки p . Један од њих може да пређе пут који ће га опет довести до тачке p , али са друге стране. Ако и он и његов другар који га је чекао у тачки p у тренутку када се сретну (само са супротних страна) имају џепне сатове, и ако их у тренутку сусрета спусте на Мебијусову траку, казаљке ће на површи да описују кругове у супротним смеровима. На елипсоиду је ова часовничарска компликација немогућа, што знатно поједностављује, и без тога довољно компликован, живот на Земљи.

Правац кретања казаљки на сату одређује оријентацију површи у тачки у којој стоји сат. Путник намерник може да пропутује целу Земљу (или било коју планету истог, елипсоидног, облика) и нацрта координатни систем на земљи тако што повуче произвољно једну полуправу и назове је x -осом, а y -осу под правим углом у смеру супротном од смера кретања казаљки на сату. Ако се после извесног времена опет врати у исту тачку и уради исто, добиће еквивалентну оријентацију. Путник на Мебијусовој траци то не може, његов други цртеж у истој тачки зависиће од тога куда је у међувремену лутао, тј. неће бити исти ако је направио пар корака и вратио се истим путем, и ако је направио велики пут око света после кога му се свет окренуо наглавачке.

Овај оглед можемо да формализујемо на следећи начин. Цртање координатних оса на песку одговара оријентацији векторског простора, која нам је позната из Линеарне алгебре. Ако путник не изађе из координатне карте, он се заправо креће по \mathbb{R}^n и не примећује да није у еуклидском простору, дакле савршено је оријентисан у том малом делу многострукости. Ако пређе у другу карту, његов сат му и даље служи као помоћ у оријентацији, и он и даље успешно црта своје координатне системе по песку. Чињеница да и другу карту и даље третира као \mathbb{R}^n (јер нико нема способност да сагледа цео Свемир, па ни наш путник, који се у свакој карти осећа као да је у еуклидском простору) и оријентише је на исти начин, помоћу свог сата, може да се изрази овако: кад је спустио сат на тло, сат је за њега био диск у еуклидском простору, а мали део тла који је сат покрио било је отворен скуп U_α . Тачка p на тлу додирнула је тачку $\varphi_\alpha(p)$ на сату; тако је формирана карта $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$. На другом месту је на исти начин настала карта (U_β, φ_β) . Композиција $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ пресликава сат у сат, али то је један исти сат, сат нашег путника, чије казаљке иду стално у истом смеру (време неумољиво тече). Другим речима, $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ чува оријентацију (сата). Ако путник настави свој пут и застане у трећој карти $(U_\gamma, \varphi_\gamma)$, спусти сат на земљу, нацрта координатни систем, настави даље и, после извесног времена, поново се врати у карту $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, ту може да га сачека изненађење – координатни систем који је сад нацртао је

оријентисан супротно од онога који је нацртао када је пошао (а ни у једном тренутку током путовања није приметио да је његов сат почео да иде уназад)! Тако нешто може да се деси на Мебијусовој траци, али не и на елипсоиду.

Тако смо дошли до дефиниције: многострукост је *оријентабилна* ако постоји њено покривање фамилијом карата \mathcal{U} , таквом да за сваке две карте

$$(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta) \in \mathcal{U}$$

дифеоморфизам $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ чува оријентацију еуклидских простора (тј. има позитиван Јакобијан; видети (119) на стр.242). Избор таквог покривања \mathcal{U} називамо *оријентацијом* многострукости. Многострукост је *оријентисана* ако је оријентабилна и ако је на њој задата оријентација.

Као и у (119), дефиницију оријентације многострукости можемо да дамо у терминима диференцијалних форми: многострукост M димензије n је оријентабилна ако на њој постоји глатка n -форма која ни у једној тачки није једнака нули. Оријентација је избор једне такве форме, коју називамо *формом оријентације*. Оријентабилна многострукост има две различите оријентације.

Покажимо да су ове две дефиниције оријентабилности, помоћу фамилије карата \mathcal{U} и помоћу n -форме, еквивалентне. Нека је на M задата глатка n -форма μ која ни у једној тачки није једнака нули. Нека је \mathcal{U} произвољно покривање многострукости M картама и нека је

$$\mu_0 = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

n -форма у \mathbb{R}^n . Изаберимо неко $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{U}$. Пошто је $\dim \Omega^n = 1$, тада је

$$\varphi_\alpha^* \mu_0 = f_\alpha \mu$$

за неку глатку функцију $f_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ која нигде није једнака нули, па је или увек позитивна, или увек негативна. Ако је f_α негативна, заменимо ϕ_α са $\phi_\alpha \circ \sigma$, где је

$$\sigma : (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (-x_1, x_2, \dots, x_n)$$

дифеоморфизам који мења оријентацију у \mathbb{R}^n ; тако добијемо ново покривање картама које дефинишу оријентацију.

Обрнуто, ако је на M задата оријентација помоћу покривања \mathcal{U} , за сваку карту $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{U}$ можемо да дефинишемо форму

$$\mu_\alpha := \varphi_\alpha^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)$$

на U_α . Из чињенице да \mathcal{U} дефинише оријентацију следи да су ове форме позитивно пропорционалне на пресецима, тј. да је $\mu_\alpha = f \mu_\beta$ за неку *позитивну* функцију f на $U_\alpha \cap U_\beta$. Нека је $\{\rho_\alpha\}$ разлагање јединице потчињено покривању \mathcal{U} . Тада је

$$\mu := \sum_{\alpha} \rho_\alpha \mu_\alpha$$

добро дефинисана глатка n -форма на M . Пошто су у свакој тачки у којој су дефинисане форме μ_α позитивно пропорционалне и $\rho_\alpha \geq 0$, следи да μ нигде није једнака нули.

- (37) **Задатак:** Нека је $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ глатка површ димензије 2. Доказати да је Σ оријентисана ако и само ако постоји глатко векторско поље $\vec{n} : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ такво да је

$$(\forall p \in \Sigma) \quad \vec{n}(p) \perp T_p \Sigma \text{ и } \|\vec{n}(p)\| = 1.$$

У том случају кажемо да је Σ оријентисана *задавањем поља јединичних нормалних вектора*. Доказати да је тада са

$$\mu(X_p, Y_p) := \vec{n} \cdot X_p \times Y_p \quad \text{за } X_p, Y_p \in T_p \Sigma$$

- (мешовити производ вектора) задата једна форма оријентације на Σ .
(38) *Градијент, дивергенција, Лапласијан.* Ако је g Риманова метрика на многострукости M , онда можемо да дефинишемо *градијент функције* $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, слично дефиницији (42) градијента у Хилбертовом простору, као јединствено векторско поље $\text{grad } f$ које задовољава

$$df(p)(X_p) = g_p(\text{grad } f(p), X_p) \quad \text{за све } X_p \in T_p M,$$

Напоменимо да дефиниција градијента зависи од Риманове метрике, различите метрике дефинишу различите градијенте.

Ако је M оријентисана многострукост, онда, имајући у виду Задатак (120) на стр. 243, можемо да дефинишемо *дивергенцију глатког векторског поља*³¹ X са

$$d(X \lrcorner \mu) = \text{div } X \mu.$$

Кад имамо претходне две дефиниције, *Лапласијан* функције $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ класе C^2 дефинишемо³² уопштавајући (113):

$$\Delta f = \text{div}(\text{grad } f).$$

Ова дефиниција зависи од избора Риманове метрике и оријентације³³. Лапласијани функције f у односу на различите метрике и(ли) форме оријентације могу да се разликују.

- (39) Нека је M компактна глатка многострукост димензије n . Због компактности, постоји *коначно* покривање \mathcal{V} као у (31) које се састоји од k координатних карата

$$(V_1, \varphi_1), \dots, (V_k, \varphi_k)$$

таквих да је $\varphi_j(V_j) = B]0; 3[$ лопта полупречника 3, и које има особину да скупови $W_j = \varphi_j^{-1}(B]0; 1[)$ такође покривају M . Нека су, као у (32), h_j глатке функције, такве да је $h_j \equiv 1$ на W_j и $h_j \equiv 0$ ван V_j .

Задатак: Доказати да је пресликавање

$$F : M \rightarrow \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_k \times \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_k$$

³¹Постоји и други начин да се дефинише дивергенција, без оријентације.

³²Наравно, Лапласијан на многострукости не можемо да дефинишемо као у (52), будући да немамо координате (x_1, \dots, x_n) , чак ни локално, јер не постоји нека специјална координатна карта која би играла тих улогу координата – све координатне карте атласа су равноправне.

³³Имајући у виду претходну фусноту, напомињемо да је могуће дефинисати Лапласијан и без форме оријентације, само уз помоћ Риманове метрике. У општем случају, ове дефиниције дају различите објекте.

дефинисано са

$$F(p) = (h_1(p)\varphi_1(p), \dots, h_k(p)\varphi_k(p), h_1(p), \dots, h_k(p))$$

инјективна имерзија. Одатле и из компактности M извести закључак да је F улагање.

- (40) Из задатка у (39) следи да свака компактна многострукост може да се уложи у еуклидски простор, односно да се реализује као глатка површ (видети (13) на стр.249 и дефиницију глатке површи (90) на стр.226). Ово тврђење важи и без претпоставке о компактности и познато је као *Витнијева теорема о улагању*: Свака глатка многострукост димензије n може да се уложи као глатка подмногострукост у еуклидски простор \mathbb{R}^{2n} .

Приметимо да помоћу Витнијеве теореме можемо да дамо други доказ постојања Риманове метрике на свакој глаткој многострукости: ако је $F : M \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ улагање и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ стандардни скаларни производ у \mathbb{R}^{2n} , онда је са $g := F^*\langle \cdot, \cdot \rangle$ дефинисана једна Риманова метрика на M . Наравно, метрика која је конструисана у (35) на други начин може да буде сасвим другачија од ове.

Ако је $F : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ улагање многострукости M у еуклидски простор (тј. ако је M реализована као површ у еуклидском простору), метрика $F^*\langle \cdot, \cdot \rangle$ се назива још и *првом квадратном формом* површи M .

- (41) **Задатак:** Наћи једначину тангентне равни површи $x^2 + 2xy - y^2 + z^2 = 7$ у тачки $(1, -1, 3)$ и једначину праве ортогоналне на површ у тој тачки.
- (42) **Задатак:** Наћи све тројке (a, b, c) за које су сфере
- $$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = 1 \quad \text{и} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$
- међусобно ортогоналне.
- (43) **Задатак:** Наћи $\lambda \in \mathbb{R}$ тако да су у свакој тачки пресека сфера
- $$(x - \lambda)^2 + y^2 + z^2 = 3 \quad \text{и} \quad x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 1$$
- њихове тангентне равни међусобно ортогоналне.
- (44) **Задатак:** Наћи тачку криве $y = e^x$ у којој је полупречник кривине (видети (154) на стр. 92) најмањи.
- (45) **Задатак:** Дата је крива

$$x = \int_0^\theta \cos\left(\frac{1}{2}\pi t^2\right) dt, \quad y = \int_0^\theta \sin\left(\frac{1}{2}\pi t^2\right) dt.$$

Наћи кривину κ као функцију дужине лука мерене од тачке $(0, 0)$ на кривој.

- (46) **Задатак:** Дата је крива $x = t, y = t, z = \frac{2}{3}t^{3/2}$. Наћи једначину равни која пролази кроз тачку $(1, 1, 2/3)$ и ортогонална је на тангенту криве у тој тачки.
- (47) **Задатак:** Наћи једначину нормалне и оскулаторне равни криве $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ у тачки $(1, 1, 1)$ (видети (154) на стр. 92).
- (48) **Задатак:** Одредити под којим углом се секу криве
- (а) $y^2 = 4x, x^2 = 4y$
- (б) $y = \sin x, x = \sin y$.

Интеграција

1. Интеграција у еуклидском простору

(1) Декартов производ n интервала

$$J = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$$

назива се n -*димензионом квадром*. Његова *запремина* (или n -*димензиона мера*) је број

$$\mu(J) := \prod_{j=1}^n (b_j - a_j).$$

Запремина n -димензионог квадра има следећа својства:

- $\mu(\alpha J) = \alpha^n \mu(J)$ за $\alpha \geq 0$;
- ако су J, J_1, \dots, J_k квадрати такви да је $J = \bigcup_{i=1}^k J_i$, онда је $\mu(J) \leq \sum_{i=1}^k \mu(J_i)$;
- ако су J, J_1, \dots, J_k квадрати такви да је $J = \bigcup_{i=1}^k J_i$ и квадрати J_i немају заједничких унутрашњих тачака, онда је $\mu(J) = \sum_{i=1}^k \mu(J_i)$.

(2) *Простор подела*. Нека је $J = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$. Нека су дате поделе координатних интервала $[a_j, b_j]$ (видети (31) на стр. 56):

$$a_j = x_j^0 < x_j^1 < \cdots < x_j^{k_j} = b_j$$

Декартови производи интервала тих подела дефинишу поделу квадра J на мање квадре. Тачке x_j^i називамо *подеоним тачкама* поделе P . Подела P_1 је *финија* од поделе P_2 ако су све подеоне тачке поделе P_2 истовремено и подеоне тачке поделе P_1 . Ако су P_1 и P_2 произвољне поделе, подела добијена обједињавањем свих њихових подеоних тачака је финија од подела P_1 и P_2 .

Нека је P подела квадра J . *Параметар поделе* P , са ознаком $\lambda(P)$, је максимални дијаметар квадрара поделе. Другим речима, ако је $J = J_1 \cup \cdots \cup J_k$ подела квадра на мање квадре са дисјунктним унутрашњостима, онда је

$$\lambda(P) := \max \{ \text{diam}(J_i) \mid 1 \leq i \leq k \}.$$

Ако је у сваком квадрцу поделе J_i изабрана тачка c_i , пар (P, \vec{c}) , где је $\vec{c} = (c_1, \dots, c_k)$ називамо *поделом са уоченим тачкама*.

Скуп свих подела квадра J са уоченим тачкама означимо са \mathcal{P}_J . На њему дефинишемо филтер \mathcal{F}_J на следећи начин: $X \in \mathcal{F}_J$ ако и само ако за неко $d > 0$ важи

$$\lambda(P) < d \Rightarrow P \in X.$$

- (3) *Риманов интеграл.* Нека је дата функција $f : J \rightarrow \mathbb{C}$ дефинисана на n -димензионом квадру $J \subset \mathbb{R}^n$. Функција

$$\Phi_f : \mathcal{P}_J \rightarrow \mathbb{C}, \quad \Phi_f(P, \vec{c}) := \sum_{i=1}^k f(c_i) \mu(J_i),$$

свакој подели P са уоченим тачкама (c_1, \dots, c_k) придружује комплексни број.

Кажемо да је функција f *интеграбилна по Риману* ако постоји лимес функције Φ_f по филтеру \mathcal{F}_J . Комплексни број

$$\int_J f(x) dx := \lim_{\mathcal{F}_J} \Phi_f$$

називамо *Римановим интегралом* функције f по квадру J . Ако желимо у да ознаци интеграла наведемо и димензију n домена, уместо $\int_J f(x) dx$ пишемо

$$\underbrace{\int \cdots \int}_n f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

- (4) **Задатак:** Доказати да је рестриција Римановог интеграла на скуп $C_c(\mathbb{R}^n)$ непрекидних реалних функција на \mathbb{R}^n са компактном носачем специјалан случај Радоновог интеграла (342) на стр. 170. Прецизније: доказати да је са

$$I : C_c(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}, \quad I(f) := \int_J f(x) dx,$$

где је J произвољни квадар који садржи носач функције f , добро дефинисан један Радонов интеграл.

- (5) **Задатак:** Доказати да је комплексна функција $f : J \rightarrow \mathbb{C}$ интеграбилна по Риману ако и само ако су интеграбилне $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$ и да тада важи

$$\int_J f(x) dx = \int_J \operatorname{Re} f(x) dx + i \int_J \operatorname{Im} f(x) dx,$$

чиме се интеграција комплексних функција своди на интеграцију реалних.

- (6) Ако је функција $f : J \rightarrow \mathbb{C}$ интеграбилна по Риману, онда је она ограничена.

Доказ: Нека је (P, \vec{c}) подела квадра J и нека је f неограничена у квадру J_i те поделе. Нека је (P, \vec{v}) подела која се разликује од поделе (P, \vec{c}) само у избору уочене тачке у квадру J_i . Другим речима, ако је $\vec{c} = (c_1, \dots, c_{i-1}, c_i, c_{i+1}, \dots, c_k)$ онда је $\vec{v} = (c_1, \dots, c_{i-1}, v_i, c_{i+1}, \dots, c_k)$. Тада је

$$|\Phi_f(P, \vec{c}) - \Phi_f(P, \vec{v})| = |f(c_i) - f(v_i)| \mu(J_i)$$

Ако фиксирамо тачку c_i и варирамо v_i , десну страну ове једнакости можемо да направимо произвољно великом, пошто је функција f неограничена на квадру J_i . Међутим, то противречи Кошијевом услову егзистенције лимеса по филтеру \mathcal{F}_J , по коме би лева страна могла да се направи произвољно малом ((32) на стр. 57).

- (7) *Горњи и доњи Дарбуов интеграл.* Нека је $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ ограничена функција дефинисана на n -димензионом квадру J . Нека је P подела квадра J и нека су J_1, \dots, J_k квадрати поделе. Нека је

$$m_i := \inf\{f(x) \mid x \in J_i\}, \quad M_i := \sup\{f(x) \mid x \in J_i\}.$$

Доња и горња Дарбуова сума функције f које одговарају подели P су величине

$$s(f; P) := \sum_{i=1}^k m_i \mu(J_i), \quad S(f; P) := \sum_{i=1}^k M_i \mu(J_i).$$

Као и у случају Дарбуових сума функције једне променљиве, ако је подела P_1 финаја од поделе P_2 онда је

$$s(f; P_2) \leq s(f; P_1) \leq S(f; P_1) \leq S(f; P_2).$$

Одатле следи да за произвољне две поделе P_1, P_2 важи

$$s(f; P_1) \leq S(f; P_2),$$

јер је подела P добијена обједињавањем подеоних тачака подела P_1 и P_2 финаја од P_1 и P_2 , па је

$$s(f; P_1) \leq s(f; P) \leq S(f; P) \leq S(f; P_2).$$

Горњим и доњим Дарбуовим интегралом ограничене функције f називају се величине

$$\overline{\int}_J f(x) dx := \inf_P S(f; P), \quad \underline{\int}_J f(x) dx := \sup_P s(f; P).$$

Из претходне неједнакости за доње и горње Дарбуове суме следи

$$\underline{\int}_J f(x) dx \leq \overline{\int}_J f(x) dx.$$

- (8) Функција $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ је интегрална по Риману ако и само ако је

$$\underline{\int}_J f(x) dx = \overline{\int}_J f(x) dx$$

Тада је

$$\int_J f(x) dx = \underline{\int}_J f(x) dx = \overline{\int}_J f(x) dx.$$

Доказ: (\Rightarrow) Претпоставимо да је f интегрална по Риману, тј. да постоји лимес

$$I := \lim_{\mathcal{F}_J} \Phi_f$$

као у (3). Нека је $\varepsilon > 0$. Тада постоји $\delta > 0$ такво да за $\lambda(P) < \delta$ важи

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < \Phi_f(P, \vec{c}) < I + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из (6) следи да је f ограничена, па преласком на супремум по \vec{c} у десној неједнакости и на инфимум по \vec{c} у левој добијамо

$$I - \frac{\varepsilon}{2} \leq s(f; P) \leq S(f; P) \leq I + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пошто је

$$s(f; P) \leq \int_J f(x) dx \leq \overline{\int_J f(x) dx} \leq S(f; P),$$

одатле следи

$$\overline{\int_J f(x) dx} - \int_J f(x) dx < \varepsilon.$$

Пошто је $\varepsilon > 0$ произвољно, одатле следи доказ прве импликације.

(\Leftarrow) Претпоставимо да је

$$\int_J f(x) dx = \overline{\int_J f(x) dx} = I.$$

Нека је $\varepsilon > 0$. Тада постоји подела P_0 квадрa J , таква да је

$$s(f; P_0) > I - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Нека је G скуп тачака квадрa J које не леже у унутрашњости неког квадрa поделе P_0 . Скуп G је компактан и унија скупова позитивне кодимензије. Пошто се сваки компактан подскуп хиперравни налази у квадрa произвољно мале запремине, постоји $\delta > 0$ са особиним да је за сваку поделу P такву да је $\lambda(P) < \delta$ збир запремина квадрa те поделе који нису дисјунктни са G мањи од ε .

Нека је P произвољна подела са $\lambda(P) < \delta$ и нека је P_1 подела добијена обједињавањем подеоних тачака подела P_0 и P . Тада је

$$I - \varepsilon < s(f; P_0) < s(f; P_1) < I.$$

Средња неједнакост следи из чињенице да је подела P_1 финаја од поделе P_0 . Сви сабирци у $s(f; P_1)$ и $s(f; P)$ који одговарају квадрима који се не секу са G су заједнички, па је

$$|s(f; P) - s(f; P_1)| \leq 2\|f\|_\infty \varepsilon.$$

Одатле добијамо да за сваку поделу P са $\lambda(P) < \delta$ важи

$$I - (2\|f\|_\infty + 1)\varepsilon < s(f; P).$$

Слична неједнакост важи за $S(f; P)$. Доказ тврђења сада следи из

$$s(f; P) \leq \Phi_f(P, \vec{c}) \leq S(f; P).$$

(9) **Задатак:** Доказати да је

$$\overline{\int_J f(x) dx} = \lim_{\mathcal{F}_J} S(f; P) \quad \text{и} \quad \int_J f(x) dx = \lim_{\mathcal{F}_J} s(f; P).$$

Извести одатле доказ тврђења (8) применом Теореме о три лимеса.

(10) Из (6) и (8) следи да је функција $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ интегрална ако и само ако су испуњена следећа два услова:

- f је ограничена;
- за свако $\varepsilon > 0$ постоји подела P , таква да је $S(f; P) - s(f; P) < \varepsilon$.

- (11) *Скупови мере нула.* Подскуп $A \subset \mathbb{R}^n$ је *скуп Лебегове мере нула* ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји *пребројива* фамилија n -димензионих квадрата $J_i \subset \mathbb{R}^n$ таква да је

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mu(J_i) < \varepsilon.$$

Напоменимо да смо у (256) на стр. 125 видели како се, помоћу комплетирања, конструише Лебегов интеграл функције једне променљиве (та конструкција се без икаквих измена преноси на случај функција више променљивих). Тада смо рекли да је скуп A мерљив у односу на интеграл I ако је његова карактеристична функција χ_A интегрална (тј. налази се у домену I) и његова *мера* је

$$m(A) := I(\chi_A).$$

Може да се покаже (нпр. формирањем опадајућег низа квадрата и применом тврђења о монотonoј конвергенцији (Е3) у (271) на 132 страни) да је дефиниција скупа Лебегове мере нула коју смо овде дали еквивалентна са $m(A) = 0$, где је m мера изведена из Лебеговог интеграла I .

- (12) Коначан скуп има Лебегову меру нула. Ако скуп A има непразну унутрашњост, онда он није скуп Лебегове мере нула (доказати!).
- (13) Пребројива унија скупова Лебегове мере нула је скуп Лебегове мере нула.

Доказ: Нека су A_k скупови мере нула. Тада за свако k постоји пребројива фамилија квадрата J_i^k таква да је

$$A_k \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i^k \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mu(J_i^k) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Фамилија A_i^k $i, k \in \mathbb{N}$ је пребројива и важи

$$\bigcup_{k=1}^n A_k \subset \bigcup_{i,k=1}^{\infty} J_i^k \quad \text{и} \quad \sum_{i,k=1}^{\infty} \mu(J_i^k) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon,$$

одакле следи да је $\bigcup_{k=1}^n A_k$ скуп Лебегове мере нула.

- (14) Нека је U отворен подскуп у \mathbb{R}^n , $A \subset U$ скуп Лебегове мере нула и $f : U \rightarrow V$ дифеоморфизам класе C^1 . Из Теореме о средњој вредности следи да је $f(A)$ скуп Лебегове мере нула.
- (15) Имајући у виду (13) и чињеницу да је многострукост паракомпактан простор (па може да се покрије пребројивом фамилијом координатних карата), дефиницију скупа Лебегове мере нула можемо да проширимо на глатке многострукости. Кажемо да је подскуп $A \subset M$ глатке n -димензионе многострукости M Лебегове мере нула ако је за сваку координатну карту (U, φ) скуп $\varphi(A \cap U)$ Лебегове мере нула у \mathbb{R}^n . Из (14) следи да ова дефиниција не зависи од избора координатних карата.
- (16) Нека су M и N глатке многострукости и $f : M \rightarrow N$ пресликавање класе C^1 . Ако је $\dim M < \dim N$, онда је $f(M)$ скуп Лебегове мере нула.

Доказ: Због (13) и паракомпактности, довољно је доказати тврђење за случај када је $M = \mathbb{B}^m$ лопта димензије m и $N = \mathbb{R}^n$, где је $m < n$. Пошто је

$$\mathbb{B}^m \subset [-a, a] \times \cdots \times [-a, a]$$

за неко $a > 0$, постоји константа $C_1 > 0$, таква да за свако $k \in \mathbb{N}$ скуп \mathbb{B}^m може да се покрије са $C_1 k^m$ коцки Q_j странице $\frac{1}{k}$. Из Теореме о средњој вредности следи да је слика $f(Q_j)$ сваке од тих коцки садржана у коцки R_j дијаметра мањег од $C_2 \|Df\|_\infty \frac{1}{k}$, за неку константу C_2 . Одатле следи да је укупна запремина коцки R_j мања од

$$\frac{C k^m \|Df\|_\infty^n}{k^n} \sim k^{m-n}.$$

за неку константу $C > 0$. Због $m < n$ последњи израз тежи нули кад $k \rightarrow \infty$, што значи да $f(M)$ може да се покрије коцкама произвољно мале укупне запремине.

- (17) Тврђење (16) је специјални случај *Сардове теореме*: Нека су M , N глатке многострукости $\dim M = m$, $\dim N = n$, и нека је $f : M \rightarrow N$ пресликавање класе C^r за неко $r > \max\{0, m - n\}$. Тада је скуп сингуларних вредности ((10) на стр. 248) скуп Лебегове мере нула у N . Скуп регуларних вредности је густ у N .

Специјално, скуп сингуларних вредности пресликавања класе C^∞ је скуп Лебегове мере нула, а скуп његових регуларних вредности је густ, без обзира на димензије многострукости M и N .

Доказ ове теореме изостављамо. Напоменимо само да су регуларне вредности, по дефиницији (10) на стр. 248, све тачке у N које нису слике сингуларних тачака, дакле и тачке из $N \setminus f(M)$ које нису слике ниједне тачке. Пошто је, у случају $m < n$ свака тачка многострукости M сингуларна, тврђење (16) је специјални случај Сардове теореме.

Чињеница да је скуп сингуларних вредности скуп Лебегове мере нула, а скуп регуларних вредности густ је значајна и из следећег разлога: ако је $f : M \rightarrow N$ глатко пресликавање, онда је, за скоро све $y \in N$ скуп $f^{-1}(y)$ или празан, или глатка подмногострукост у M (видети (10) на стр. 248).

- (18) *Лебегова теорема о интегралности*. Ограничена функција $f : J \rightarrow \mathbb{C}$ на квадру J је интегрална по Риману ако и само ако је скуп њених прекида скуп Лебегове мере нула.

Доказ: Довољно је доказати тврђење за реалне функције $f : J \rightarrow \mathbb{R}$. На основу (25) на стр. 54 треба да докажемо да је функција f интегрална ако и само ако је

$$A := \{x \in J \mid \omega(x; f) > 0\}$$

скуп Лебегове мере нула.

(\Leftarrow) Претпоставимо да је f интегрална функција. Скуп A можемо да представимо као унију

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

где је $A_n = \{x \in J \mid \omega(f, x) \geq \frac{1}{n}\}$. Из (13) следи да је довољно доказати да је сваки од скупова A_n Лебегове мере нула.

Посматрајмо скуп A_{n_0} . Нека је $\varepsilon > 0$. Пошто је f интегрална, из (10) следи да постоји подела P квадрата J таква да је

$$S(f, P) - s(f, P) < \frac{\varepsilon}{n_0}.$$

Нека су J_i квадрати поделе P и нека је

$$K := \{k \in \mathbb{N} \mid J_k \cap A_{n_0} \neq \emptyset\}.$$

Уз ознаке

$$M_k = \sup_{x \in J_k} f(x), \quad m_k = \inf_{x \in J_k} f(x),$$

за $k \in K$ важи

$$M_k - m_k \geq \frac{1}{n_0},$$

одакле следи

$$\frac{1}{n_0} \sum_{k \in K} \mu(J_k) \leq \sum_{k \in K} (M_k - m_k) \mu(J_k) < S(f, P) - s(f, P) < \frac{\varepsilon}{n_0}.$$

Одатле добијамо

$$\sum_{k \in K} \mu(J_k) < \varepsilon.$$

Пошто квадрати $\{J_k\}_{k \in K}$ покривају скуп $V = A_{n_0} \setminus T$, где је T скуп тачака из A_{n_0} које су рубне тачке квадрата поделе P , из последње неједнакости следи да је V скуп Лебегове мере нула. Пошто је и T скуп Лебегове мере нула, следи да је и $A_{n_0} = V \cup T$ скуп Лебегове мере нула.

(\Rightarrow) Претпоставимо да је A скуп Лебегове мере нула. У (100) на стр. 73 смо видели да је скуп

$$A_\varepsilon = \{x \in J \mid \omega(x; f) \geq \frac{\varepsilon}{2\mu(J)}\}$$

затворен, дакле и компактан, подскуп квадрата J .

Из $A_\varepsilon \subset A$ следи да је A_ε скуп Лебегове мере нула. Због компактности постоји коначна фамилија J_1, \dots, J_k квадрата таква да је

$$A_\varepsilon \subset J_1 \cup \dots \cup J_k \quad \text{и} \quad \mu(J_1) + \dots + \mu(J_k) < \frac{\varepsilon}{4\|f\|_\infty}.$$

Пошто је за $t \in J \setminus \bigcup_{i=1}^k J_i$

$$\omega(t; f) < \frac{\varepsilon}{2\mu(J)},$$

за свако $t \in J \setminus \bigcup_{i=1}^k J_i$ постоји квадрат I_t такав да је $t \in I_t$ и

$$\sup_{x \in I_t} f(x) - \inf_{x \in I_t} f(x) < \frac{\varepsilon}{2\mu(J)}.$$

Пошто је скуп $J \setminus \bigcup_{i=1}^k J_i$ затворен подскуп квадрата J , из покривања

$$\mathcal{J} = \{I_t \mid t \in J \setminus \bigcup_{i=1}^k J_i\}$$

можемо да издвојимо коначно потпокривање I_{t_1}, \dots, I_{t_r} .

Нека је P подела квадра J таква да сваки квадар

$$J_1, \dots, J_k, I_{t_1}, \dots, I_{t_r}$$

може да се представи као унија квадрата те поделе.

Раздвајајући суму $S(f, P) - s(f, P) = \sum (M_i - m_i) \mu(J_i)$ на две суме, од којих прва одговара квадратима J_i а друга квадратима I_{t_j} , применом неједнакости $\mu(J_1) + \dots + \mu(J_k) < \frac{\varepsilon}{4\|f\|_\infty}$ и $\sup_{I_t} f - \inf_{I_t} f < \frac{\varepsilon}{2\mu(J)}$ добијамо

$$S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon.$$

Одатле и из (10) следи да је функција f интегрална по Риману.

- (19) Нека је $A \subset \mathbb{R}^n$ ограничен подскуп и χ_A његова карактеристична функција,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}.$$

Скуп прекида функције χ_A је руб ∂A скупа A . Из Лебегове теореме (18) следи да је функција χ_A интегрална ако и само ако је ∂A скуп Лебегове мере нула. У том случају, кажемо да је скуп A мерљив у Жордановом смислу (или мерљив по Жордану), а величину

$$\mu(A) := \int_J \chi_A(x) dx,$$

где је J произвољни квадар који садржи скуп A , називамо Жордановом мером скупа A . Из дефиниције интеграла следи да је Жорданова мера квадра његова запремина, па зато за Жорданову меру употребљавамо исти симбол μ који смо користили за запремину квадра.

- (20) **Задатак:** Нека је $A \subset \mathbb{R}^n$ ограничен скуп. Доказати да је $\mu(A) = 0$ ако и само ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји коначан скуп квадрата J_1, \dots, J_k такав да је

$$J_1 \cup \dots \cup J_k \supset A \quad \text{и} \quad \mu(J_1) + \dots + \mu(J_k) < \varepsilon.$$

Одатле следи да је (ограничен¹) скуп Жорданове мере нула скуп Лебегове мере нула.

Задатак: Доказати да је $A = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ скуп Лебегове мере нула, а да није мерљив у Жордановом смислу.

- (21) **Задатак:** Нека је $f : J \rightarrow \mathbb{C}$ интегрална функција и нека је

$$\{x \in J \mid f(x) \neq 0\}$$

скуп Лебегове мере нула. Доказати да је тада $\int_J f(x) dx = 0$. Као последицу, извести закључак да вредност интеграла функције не зависи од понашања те функције на скупу Лебегове мере нула.

¹За дефиницију Жорданове мере неограниченог скупа потребан нам је несвојствени интеграл. Нпр, за $n = 1$, тј. за случај реалне праве, лако је видети да неограничени подскуп \mathbb{Z} има Жорданову меру нула у \mathbb{R} – то је последица чињенице да вредност (несвојственог) Римановог интеграла не зависи од вредности подинтегралне функције у изолованим тачкама. За случај $n > 1$ видети (36) на 278. страни.

- (22) *Интеграција по скупу.* Нека је $A \subset \mathbb{R}^n$ ограничен скуп мерљив по Жордану. Функција $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ је *интеграбилна по Риману на скупу* A ако је функција

$$(f\chi_A)(x) := \begin{cases} f(x), & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

интеграбилна на неком (еквивалентно: сваком) квадрату $J \supset A$. Величина

$$\int_A f(x) dx := \int_J (f\chi_A)(x) dx$$

назива се *Римановим интегралом функције f по скупу A* .

Скуп прекида функције $f\chi_A$ подскуп уније скупа прекида функције f на A и руба ∂A . Пошто је A мерљив по Жордану, па је ∂A скуп Лебегове мере нула, из Лебегове теореме (18) следи да је функција f интеграбилна на A ако и само ако је скуп прекида функције f на A скуп Лебегове мере нула.

- (23) *Линеарност интеграла.* Ако су функције $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ и $g : A \rightarrow \mathbb{C}$ интеграбилне по Риману на скупу A који је мерљив у Жордановом смислу и $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, онда је и функција $\alpha f + \beta g$ интеграбилна по Риману и

$$\int_A (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_A f(x) dx + \beta \int_A g(x) dx.$$

Доказ: Скуп прекида функције $\alpha f + \beta g$ је подскуп уније скупа прекида функција f и g , па интеграбилност функције $\alpha f + \beta g$ следи из Лебегове теореме о интеграбилности. Ако је J квадар који садржи скуп A , за сваку његову поделу (P, \vec{c}) са уоченим тачкама важи

$$\Phi_{\alpha f\chi_A + \beta g\chi_A}(P, \vec{c}) = \alpha \Phi_{f\chi_A}(P, \vec{c}) + \beta \Phi_{g\chi_A}(P, \vec{c}).$$

После преласка на $\lim_{\mathcal{F}_J}$ добијамо линеарност интеграла.

- (24) Ако је скуп A мерљив по Жордану и $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ интеграбилне функције такве да је $f \leq g$, онда је

$$\int_A f(x) dx \leq \int_A g(x) dx.$$

Доказ: Из $f \leq g$ следи $f\chi_A \leq g\chi_A$, па за поделу P квадрата који садржи A важи $s(f\chi_A; P) \leq s(g\chi_A; P)$. Неједнакост интеграла се добија преласком на супремум.

- (25) *Теорема о средњој вредности за интеграле.* Ако је $A \subset \mathbb{R}^n$ повезан скуп, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ интеграбилна функција која задовољава

$$m \leq f(x) \leq M \quad \text{за све } x \in A$$

и $g : A \rightarrow [0, +\infty[$ ненегативна интеграбилна функција, из (24) следи

$$m \int_A g(x) dx \leq \int_A f(x)g(x) dx \leq M \int_A g(x) dx.$$

Ако је при томе f непрекидна, онда постоји $\xi \in A$ за које важи

$$\int_A f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_A g(x) dx.$$

Специјално, за $g \equiv 1$ добијамо

$$m\mu(A) \leq \int_A f(x) dx \leq M\mu(A),$$

односно, ако је f непреклина,

$$\int_A f(x) dx = f(\xi)\mu(A)$$

за неко $\xi \in A$.

- (26) *Неједнакост троугла за интеграле.* Ако је скуп A мерљив по Жордану и функција $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ интегрална по Риману, онда је и $|f| : A \rightarrow \mathbb{R}$ интегрална и

$$\left| \int_A f(x) dx \right| \leq \int_A |f(x)| dx.$$

Доказ: Скуп прекида функције $|f|$ је подскуп скупа прекида функције f , па из Лебегове теореме о интегралности следи да је $|f|$ интегрална. Тражена неједнакост следи из неједнакости троугла за суме и (3).

- (27) *Адитивност по скупу интеграције.* Нека су A и B дисјунктни скупови, мерљиви у Жордановом смислу. Ако је функција $f : A \cup B \rightarrow \mathbb{C}$ интегрална по Риману, онда су и рестрикције $f|_A$ и $f|_B$ интегралне по Риману и важи

$$\int_{A \cup B} f(x) dx = \int_A f(x) dx + \int_B f(x) dx.$$

Доказ: Интегралност рестрикција следи из Лебегове теореме о интегралности, а тражена једнакост из $f\chi_{A \cup B} = f\chi_A + f\chi_B$ и (23).

- (28) *Фубинијева теорема.* Нека је I n -димензиони и J m -димензиони квадар и $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ функција интегрална по Риману. Тада су и функције

$$x \mapsto \int_J f(x, y) dy \quad \text{и} \quad x \mapsto \overline{\int_J f(x, y) dy}$$

интегралне по Риману и важи

$$\int_{I \times J} f(x, y) dx dy = \int_I \left(\int_J f(x, y) dy \right) dx = \int_I \left(\overline{\int_J f(x, y) dy} \right) dx.$$

Слично, функције

$$y \mapsto \int_I f(x, y) dx \quad \text{и} \quad y \mapsto \overline{\int_I f(x, y) dx}$$

су интегралне по Риману и важи

$$\int_{I \times J} f(x, y) dx dy = \int_J \left(\int_I f(x, y) dx \right) dy = \int_J \left(\overline{\int_I f(x, y) dx} \right) dy.$$

Доказ: Доказаћемо прву једнакост, остале се доказују на исти начин. Нека су P_I и P_J поделе квадрата I и J и нека је P подела

квадра $I \times J$ коју сачињавају Декартови производи квадрара подела P_I и P_J . Из дефиниције запремине квадрара следи

$$\mu(I_k \times J_l) = \mu(I_k) \cdot \mu(J_l),$$

где смо истом ознаком μ означили k -димензиону, l -димензиону и $(k + l)$ -димензиону запремину. Користећи ову једнакост и неједнакост

$$\inf_{I_k \times J_l} f \leq \inf_{y \in J_l} f(x, y) \quad \text{за све } x \in I_k,$$

добивамо

$$\begin{aligned} s(f; P) &= \sum_{k,l} \inf_{I_k \times J_l} f \mu(I_k \times J_l) \\ &= \sum_k \left(\sum_l \inf_{I_k \times J_l} f \mu(J_l) \right) \mu(I_k) \\ &\leq \sum_k \inf_{x \in J_k} \left(\sum_l \inf_{y \in J_l} f(x, y) \mu(J_l) \right) \mu(I_k) \\ &\leq \sum_k \inf_{x \in J_k} \int_J f(x, y) dy \mu(I_k). \end{aligned}$$

Последњи израз је доња Дарбуова сума $s(\psi; P_I)$ за функцију

$$\psi(x) := \int_J f(x, y) dy.$$

Слично се доказује да је

$$S(f; P) \geq S(\phi; P_I)$$

за функцију

$$\phi(x) := \overline{\int_J f(x, y) dy}.$$

Пошто је $\psi \leq \phi$, имамо

$$s(f; P) \leq s(\psi; P_I) \leq s(\phi; P_I) \leq S(\phi; P_I) \leq S(f; P).$$

Пошто је f интегрална, за свако $\varepsilon > 0$ подела P може да се изабере тако да буде $S(f; P) - s(f; P) < \varepsilon$. Одатле следи да су и ψ и ϕ интегралне и да важи тражена једнакост.

(29) Ако су, уз остале претпоставке Фубинијеве теореме, функције

$$y \mapsto f(x, y)$$

интегралне по Риману за свако x , онда је

$$\int_{I \times J} f(x, y) dx dy = \int_I \left(\int_J f(x, y) dy \right) dx.$$

Фубинијева теорема се у овом облику на очигледан начин уопштава на функције са вредностима у \mathbb{C} .

(30) **Задатак:** Извести доказ Фубинијеве теореме за непрекидне функције применом Стоун–Вајерштрасове теореме (видети стр. 154) и конструкције (345) на стр. 171.

- (31) Нека је
- $A \subset \mathbb{R}^n$
- ограничен скуп и

$$S = \{(x, y) \in A \times \mathbb{R} \mid a(x) \leq y \leq b(x)\}.$$

Ако је скуп S мерљив у Жордановом смислу, а функција $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ интегрална на S , онда је

$$\int_S f(x, y) dx dy = \int_A \left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Доказ: Нека је

$$\pi : A \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \pi(x, y) = x$$

пројекција и $S_x := \pi^{-1}(x) \cap S$. Тада је

$$\chi_S(x, y) = \chi_A(x) \cdot \chi_{S_x}(y),$$

па доказ следи из дефиниције интеграла по скупу (22) и Фубинијеве теореме.

- (32)
- Задатак:**
- Нека је функција
- $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$
- интегрална по Риману. Доказати једнакост

$$\int_0^1 \left(\int_x^1 f(t) dt \right) dx = \int_0^1 t f(t) dt.$$

- (33)
- Задатак:**
- Изменити поредак интеграције, а затим израчунати:

$$(a) \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 dy dx \quad (б) \int_0^4 \int_{-\sqrt{4-y}}^{(y-4)/2} dx dy \quad (в) \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{2-\sqrt{y}} xy dx dy.$$

- (34) Нека је у (31)
- A
- отворен
- \mathbb{R}^{n-1}
- скуп и
- a, b
- непрекидне функције. Тада је скуп
- S
- мерљив у Жордановом смислу и његова Жорданова мера је

$$\mu(S) = \int_A (b(x) - a(x)) dx.$$

Доказ овог тврђења следи из (31) за $f \equiv 1$.

- (35) Специјални случај Фубинијеве теореме је
- Кавалијеријев принцип*
- : Нека је ограничен скуп
- $S \subset \mathbb{R}^n$
- мерљив у Жордановом смислу. Нека је
- J
- квадар који садржи
- S
- и нека је
- $J = J_0 \times I$
- , где је
- J_0
- квадар у
- \mathbb{R}^{n-1}
- а
- I
- интервал у
- \mathbb{R}
- . Нека је

$$p : J_0 \times I \rightarrow \mathbb{R}, \quad p(x, y) = y$$

пројекција и нека је $S_y = p^{-1}(y) \cap S$. Тада су скупови S_y мерљиви у Жордановом смислу и

$$\mu(S) = \int_I \mu(S_y) dy,$$

где је $\mu(S)$ n -димензиона Жорданова мера скупа S , а $\mu(S_y)$ $(n-1)$ -димензиона Жорданова мера скупа S_y .

Доказ следи из Фубинијеве теореме за $f = \chi_S$ и једнакости

$$\chi_S(x, y) = \chi_{S_y}(x) \cdot \chi_{J_0}(y).$$

- (36)
- Несвојствени интеграл.*
- Нека је
- $A \subset \mathbb{R}^n$
- . Фамилија мерљивих (по Жордану) скупова
- A_k
- се назива
- монотоним покривањем*
- скупа
- A
- ако је

$$A_k \subset A_{k+1} \subset A \text{ за све } k \text{ и } A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Нека је дата функција $f : A \rightarrow \mathbb{C}$. Ако за свако монотono покривање A_k скупа A постоји лимес

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A_k} f(x) dx$$

који не зависи од избора покривања A_k , онда његову вредност називамо *несвојственим интегралом* функције f по скупу A :

$$\int_A f(x) dx := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A_k} f(x) dx.$$

Тада кажемо да $\int_A f(x) dx$ *конвергира*; у супротном кажемо да овај интеграл *дивергира*.

- (37) Дефиниција (36) се своди на дефиницију својственог Римановог интеграла у случају да је скуп A мерљив по Жордану, а функција f интегрална. Прецизније, у том случају важи

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) = \mu(A) \quad \text{и} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A_k} f(x) dx = \int_A f(x) dx.$$

Доказ: по претпоставци, A је мерљив по Жордану и, специјално, ограничен. Руб ∂A је скуп Лебегове мере нула, па постоји унија отворених квадрата (означимо је са V) која покрива ∂A , таква да је $\mu(V) < \varepsilon$. Одатле следи

$$\mu(A \cup V) \leq \mu(A) + \mu(V) < \mu(A) + \varepsilon.$$

Слично, за свако k постоји унија V_k отворених квадрата која покрива ∂A_k , таква да је $\mu(V_k) < \varepsilon/2^k$.

$$\mu(A_k \cup V_k) \leq \mu(A_k) + \mu(V_k) < \mu(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Скупови $V, A_1 \cup V_1, A_2 \cup V_2, \dots$ су, по конструкцији, отворени и покривају компактан скуп \bar{A} . Нека је

$$V, A_{i_1} \cup V_{i_1}, \dots, A_{i_r} \cup V_{i_r}, \quad i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_r.$$

коначно потпокривање скупа \bar{A} . Тада и скупови $V, V_{i_1}, \dots, V_{i_r}, A_{i_r}$ покривају скуп \bar{A} , па је

$$\mu(A) \leq \mu(\bar{A}) \leq \mu(V) + \mu(V_{i_1}) + \dots + \mu(V_{i_r}) + \mu(A_{i_r}) < 2\varepsilon + \mu(A_{i_r}),$$

одакле следи

$$\mu(A) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k).$$

Пошто из $A_k \subset A$ следи да важи и обрнута неједнакост, овиме је доказана прва једнакост тврђења.

Да бисмо доказали другу једнакост, приметимо прво да је f интегрална на сваком од скупова A_k (то следи из Лебегове теореме о интегралности и интегралности функције f на A) и ограничена на A , па је

$$\left| \int_A f(x) dx - \int_{A_k} f(x) dx \right| = \left| \int_{A \setminus A_k} f(x) dx \right| \leq \|f\|_{\infty} \mu(A \setminus A_k).$$

Овиме се једнакост

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A_k} f(x) dx = \int_A f(x) dx$$

своди на доказану једнакост

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) = \mu(A).$$

- (38) За функцију $f : [a, \beta[\rightarrow \mathbb{C}$ једне променљиве смо, користећи специфичност реалне праве, дефинисали несвојствени интеграл као

$$\int_a^\beta f(x) dx := \lim_{b \rightarrow \beta-0} \int_a^b f(x) dx.$$

Дефиниција (36) се *не своди* на ову дефиницију у случају $n = 1$. На пример, нека је функција $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана на следећи начин. Нека је c_n низ у \mathbb{R} , такав да је $\sum c_n$ *неапсолутно конвергентан* ред. Нека је

$$f(x) = c_n \quad \text{за } x \in [n-1, n[.$$

Тада је

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n.$$

Међутим, пошто ред $\sum c_n$ неапсолутно конвергира, на основу Риманове теореме (видети (181) на стр. 103) следи да за произвољно $\alpha \in \mathbb{R}$ постоји пермутација $c_{\sigma(n)}$ низа c_n таква да ред конвергира ка α . Нека је A_k монотono покривање интервала $[0, +\infty[$ дефинисано са

$$A_1 = [\sigma(1) - 1, \sigma(1)], \quad A_k = A_{k-1} \cup [\sigma(k) - 1, \sigma(k)].$$

Тада је

$$\int_{A_k} f(x) dx = \sum_{j=1}^k c_{\sigma(j)},$$

па је

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A_k} f(x) dx = \alpha.$$

Пошто је α произвољно, интеграл $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ не конвергира у смислу дефиниције (36), иако конвергира у смислу у коме се обично дефинише конвергенција интеграла функције једне реалне променљиве.

Можемо да дефинишемо појам конвергенције вишеструког интеграла и на други начин, сличан дефиницији главне вредности несвојственог интеграла функција једне променљиве (и некада ће нам баш та дефиниција бити згоднија, нпр. при разматрању интеграла са параметром у Глави 4) – ако је $x_0 \in A$ *сингуларна тачка*, тј. тачка у околини које је функција f неограничена или „бесконечно далека тачка”, онда можемо да дефинишемо

$$\int_A f(x) dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{A \setminus B]x_0, \varepsilon[} f(x) dx$$

ако је x_0 коначна тачка, односно

$$\int_A f(x) dx := \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{A \cap B[0; r]} f(x) dx$$

за случај бесконачно далеке тачке (тј. случај неограничене области A). Као што смо видели, ова дефиниција није еквивалентна дефиницији (36).

- (39) *Несвојствени интеграл ненегативних функција.* Нека је $f : A \rightarrow [0, +\infty[$ ненегативна функција дефинисана на скупу $A \subset \mathbb{R}^n$. Ако за неко монотono покривање A_k скупа A постоји

$$I_A := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A_k} f(x) dx,$$

онда тај лимес постоји за свако монотono покривање; другим речима, онда $\int_A f(x) dx$ конвергира.

Доказ: Нека је B_m друго монотono покривање скупа A . Тада је за свако k фамилија скупова $A_k \cap B_m$, $k = 1, 2, \dots$ монотono покривање скупа B_m . Из (37) следи да је

$$\int_{B_m} f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A_k \cap B_m} f(x) dx \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A_k} f(x) dx \leq I_A.$$

Последње две неједнакости следе из ненегативности функције f . Из истог разлога следи да је низ $\int_{B_m} f(x) dx$ растући, па постоји

$$I_B := \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{B_m} f(x) dx \leq I_A.$$

Изменом улога A_k и B_m добијамо обрнуту неједнакост $I_A \leq I_B$, што значи да $\int_A f(x) dx$ конвергира ка $I_A = I_B$.

- (40) *Поредбени принцип.* Нека су $f, g : A \rightarrow [0, +\infty[$ ненегативне функције, такве да је $f(x) \leq g(x)$ за све $x \in E$.

- Ако $\int_A g(x) dx$ конвергира, онда конвергира и $\int_A f(x) dx$.
- Ако $\int_A f(x) dx$ дивергира, онда дивергира и $\int_A g(x) dx$.

Доказ: Нека је A_k монотono покривање скупа A . Ако $\int_A g(x) dx$ конвергира, онда је низ $\int_{A_k} g(x) dx$ Кошијев, па из

$$\int_{A_{k+m}} f(x) dx - \int_{A_k} f(x) dx \leq \int_{A_{k+m}} g(x) dx - \int_{A_k} g(x) dx$$

следи да је и низ $\int_{A_k} f(x) dx$ Кошијев, што заједно са (39) доказује прво тврђење. Друго тврђење је контрапозиција првог.

- (41) Интеграл $\int_A f(x) dx$ конвергира у смислу дефиниције (36) ако и само ако он апсолутно конвергира; другим речима

$$\int_A f(x) dx \text{ конвергира} \Leftrightarrow \int_A |f(x)| dx \text{ конвергира.}$$

Доказ: Довољно је доказати тврђење за реалне функције.

(\Leftarrow) Претпоставимо да $\int_A |f(x)| dx$ конвергира. Нека су f_+ и f_- позитивни и негативни део функције f , односно

$$f_+(x) = \max\{f(x), 0\}, \quad f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}.$$

Тада је

$$f_+(x) \leq |f(x)|, \quad f_-(x) \leq |f(x)|,$$

па из поредбеног принципа (40) следи да интеграл $\int_A f_{\pm}(x) dx$ конвергирају. Али тада конвергира и $\int_A f(x) dx$ јер је

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x).$$

(\Rightarrow) Овај смер подвлачи специфичност дефиниције (36); сетимо се да он не важи за уобичајену дефиницију конвергенције интеграла функције једне променљиве. Претпоставимо да $\int_A |f(x)| dx$ дивергира. Тада постоји монотono покривање A_k скупа A , такво да је

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A_k} |f(x)| dx = +\infty.$$

Прелазећи на подниз низа A_k ако је неопходно, можемо да претпоставимо да је

$$\int_{A_{k+1}} |f(x)| dx > 3 \int_{A_k} |f(x)| dx + 2k.$$

Тада је

$$\int_{A_{k+1} \setminus A_k} |f(x)| dx > 2 \int_{A_k} |f(x)| dx + 2k.$$

Пошто је $|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$, одатле следи

$$\int_{A_{k+1} \setminus A_k} f_+(x) dx + \int_{A_{k+1} \setminus A_k} f_-(x) dx > 2 \int_{A_k} |f(x)| dx + 2k.$$

Претпоставимо, не умањујући општост, да први интеграл на десној страни није мањи од другог (резоновање које следи било би исто и у обрнутом случају). Тада је

$$\int_{A_{k+1} \setminus A_k} f_+(x) dx > \int_{A_k} |f(x)| dx + k,$$

Ова неједнакост важи и ако интеграл на левој страни заменимо доњом Дарбуовом сумом функције f_+ , за довољно добру поделу неког квадра који садржи $A_{k+1} \setminus A_k$:

$$\sum_i m_i \mu(J_i) > \int_{A_k} |f(x)| dx + k, \quad m_i := \inf_{J_i} f_+$$

Нека је B_k унија свих квадрата те поделе на којима је $m_i > 0$. Тада је

$$\int_{B_k} f(x) dx = \int_{B_k} f_+(x) dx > \int_{A_k} |f(x)| dx + k.$$

Сабирањем ове неједнакости и неједнакости

$$\int_{A_k} f(x) dx \geq - \int_{A_k} |f(x)| dx$$

добијамо

$$\int_{A_k \cup B_k} f(x) dx > k.$$

Одатле следи да $\int_A f(x) dx$ дивергира. Тиме је доказ завршен.

- (42) **Задачак:** Користећи (41) и идеју из (38) доказати да је ред $\sum c_n$ (где је c_n низ у \mathbb{R}) апсолутно конвергентан ако и само ако свака његова пермутација конвергира ка истој вредности (тврђење које смо у (182) на стр. 103 доказали на други начин).
- (43) *Смена променљиве у интегралу.* Нека је $D_t \subset \mathbb{R}^n$ ограничен отворен подскуп и

$$\varphi : D_t \rightarrow D_x = \varphi(D_t)$$

дифеоморфизам класе C^1 . Нека је $f : D_x \rightarrow \mathbb{C}$ интегрална функција са компактним носачем $\text{supp } f \subset D_x$. Тада је функција

$$(f \circ \varphi) \cdot |\det D\varphi| : D_t \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto f(\varphi(t))|\det D\varphi(t)|,$$

где је $|\det D\varphi(t)|$ апсолутна вредност Јакобијана, интегрална и важи

$$\int_{D_x} f(x) dx = \int_{D_t} f \circ \varphi(t) |\det D\varphi(t)| dt.$$

Доказ: Функција f је интегрална, па је скуп њених прекида скуп Лебегове мере нула, на основу Лебегове теореме о интегралности. Пошто је φ дифеоморфизам класе C^1 , из (14) следи и да је скуп прекида функције $(f \circ \varphi) \cdot |\det D\varphi|$ скуп Лебегове мере нула, па је и ова функција интегрална.

Ако је $n = 1$ тврђење теореме је тачно, на основу правила смене променљиве интеграла функције једне променљиве. Заиста, у том случају је Јакобијан дифеоморфизма φ скаларна функција φ' , а теорема о смени променљиве се обично формулише без апсолутне вредности, у облику

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f \circ \varphi(t) \cdot \varphi'(t) dt.$$

Али, у случају једне променљиве, дифеоморфизам φ је монотона функција. Ако је она растућа, апсолутна вредност првог извода је непотребна, јер је он позитиван. Ако φ опада, онда је $\varphi^{-1}(b) < \varphi^{-1}(a)$, па измена улога доње и горње границе интеграла даје

$$\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f \circ \varphi(t) \cdot \varphi'(t) dt = - \int_{[\varphi^{-1}(b), \varphi^{-1}(a)]} f \circ \varphi(t) \cdot \varphi'(t) dt,$$

тако да минус испред интеграла помножен са негативним $\varphi'(t)$ даје $|\varphi'(t)|$.

Претпоставимо сада да је $n > 1$, а дифеоморфизам φ прост у смислу (89) на стр. 225, тј. да мења само једну координату. Не умањујући општост (односно, нумеришући координате на други начин ако је потребно) можемо да претпоставимо да φ мења само n -ту координату:

$$\varphi(t_1, \dots, t_n) = (t_1, \dots, t_{n-1}, \varphi_n(t_1, \dots, t_n)).$$

Тада је Јакобијева матрица $D\varphi$ дијагонална, а Јакобијан је

$$\det D\varphi = \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}.$$

Сада из Фубинијеве теореме и случаја $n = 1$ следи да тврђење важи за прост дифеоморфизам φ .

Ако тврђење о смени променљиве важи за дифеоморфизме φ и ψ , онда оно важи и за $\varphi \circ \psi$. Специјално, оно важи за композицију простих дифеоморфизама.

Претпоставимо на крају да је φ произвољан дифеоморфизам класе C^1 . Из (89) на стр. 225 следи да он може *локално* да се напише као композиција простих. То значи да за сваку тачку $a \in D_t$ постоји лопта $B]a; \delta_a[$ таква да је на њој дифеоморфизам φ композиција простих. Носач функције $(f \circ \varphi) \cdot |\det D\varphi|$ је компактан и покривен лоптама $B]a; \delta_a/2[$. Одатле следи да он може да се покрије коначном фамилијом лопти $B]a_1; \delta_{a_1}/2[, \dots, B]a_r; \delta_{a_r}/2[$. Нека је

$$\delta = \min\{\delta_{a_1}/2, \dots, \delta_{a_r}/2\}.$$

Тада је сваки скуп дијаметра мањег од δ садржан у некој од лопти $B]a_1; \delta_{a_1}[, \dots, B]a_r; \delta_{a_r}[$. Нека је d растојање носача функције $(f \circ \varphi) \cdot |\det D\varphi|$ до руба области D_t . Из компактности носача следи да је $d > 0$. Нека је J квадар који садржи скуп D_t и нека је $P = \{J_1, \dots, J_s\}$ подела квадрата J са параметром

$$\lambda(P) < \min\{\delta, d\}.$$

Тада је

$$\int_{D_t} (f \circ \varphi)(t) \cdot |\det D\varphi(t)| dt = \sum_i \int_{J_i} (f \circ \varphi)(t) \cdot |\det D\varphi(t)| dt,$$

где у последњој суми учествују само квадрати J_i који имају непразан пресек са носачем функције $(f \circ \varphi) \cdot |\det D\varphi|$. На сваком од њих дифеоморфизам φ је композиција простих, па на сваком од њих важи теорема о смени променљиве. Закључак да она важи на целом скупу сада следи из адитивности по скупу интеграције (27).

- (44) Теорема о смени променљиве (43) може да се формулише на језику диференцијалних форми на следећи начин. Нека је

$$\mu := f(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

диференцијална n -форма у \mathbb{R}^n са компактним носачем садржаним у ограниченем отвореном и повезаном скупу D_x (тј. $\text{supp } f \subset D_x$). Дефинишимо

$$\int_{D_x} \mu := \int_{D_x} f(x) dx,$$

Нека је $\varphi : D_t \rightarrow D_x$ дифеоморфизам. У (119) на стр. 242 смо видели да је

$$\varphi^* \mu = \det D\varphi \cdot \mu.$$

Из експлицитног израза $\mu = f(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ следи

$$\varphi^* \mu = f(\varphi(t)) \det D\varphi dt_1 \wedge \dots \wedge dt_n.$$

Имајући у виду овај запис, Теорему о смени променљиве (43) можемо да напишемо у облику

$$\int_{D_x} \mu = \text{sign}(\det D\varphi) \int_{D_t} \varphi^* \mu.$$

Приметимо да је $\text{sign}(\det D\varphi(x))$ исти у свакој тачки x , пошто је φ дифеоморфизам и D_x повезан.

Ако скуп D_x није повезан, ова формулација важи у свакој његовој компоненти повезаности, али знак испред интеграла на десној страни не мора да буде исти у свим компонентама.

- (45) Из (44) следи да је некад природно диференцијалну форму, а не функцију, сматрати објектом интеграције. Ово опажање ћемо касније искористити када будемо говорили о интеграцији на многострукостима.
- (46) *Пуасонов интеграл*. Неодређени интеграл $\int e^{-x^2} dx$ није елементарна функција, али несвојствени одређени интеграл

$$I := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

можемо да израчунамо на следећи начин. Из Фубинијеве теореме (28) и дефиниције несвојственог интеграла (36) следи да је

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \right) = \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

Подинтегрална функција је позитивна, па смо, на основу (39), слободни да изаберемо произвољно монотono покривање равни $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Изаберимо низ кругова

$$A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 \leq n^2\}.$$

Смена променљиве $\varphi(r, \theta) = (x, y)$, где је

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

(поларне координате), са јакобијаном $\det D\varphi(r, \theta) = r$ и Фубинијева теорема дају

$$\iint_{A_n} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^n e^{-r^2} r dr d\theta = \pi(1 - e^{-n^2}).$$

Преласком на лимес кад $n \rightarrow \infty$ добијамо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Овај интеграл се назива *Пуасоновим* или *Ојлер–Пуасоновим* интегралом.

Задатак: (а) Израчунати

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2 - \mu y^2} dx dy,$$

где су λ и μ позитивни реални бројеви.

(б) Нека је $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ симетрична позитивно дефинитна реална матрица. Израчунати

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax, x \rangle} dx.$$

- (47) **Задатак:** Израчунати $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + x^2 + y^2)^{-3/2} dx dy$.

- (48) **Задатак:** Израчунати $\iint_D (1 + x^2 + y^2)^{-2} dx dy$ ако је D :

(а) троугао са теменима $(0, 0)$, $(1, \sqrt{3})$ и $(2, 0)$;

(б) унутрашњост криве $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$.

(49) **Задатак:** Израчунати запремину дела лопте $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ унутар цилиндра $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.

(50) **Задатак:** Израчунати запремину тела ограниченог површима:

(а) $z = x^2 + y^2$ и $2z = x^2 + y^2 + 1$;

(б) $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ и $z = x^2 + y^2$;

(в) $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + z = 1$ и $z = 0$.

(51) **Задатак:** Запремина тела које се налази испод параболоида $z = x^2 + y^2$ и изнад области D у xy -равни је

$$V = \int_0^1 \int_0^y (x^2 + y^2) dx dy + \int_1^2 \int_0^{2-y} (x^2 + y^2) dx dy.$$

(а) Скицирати област D . (б) Изменити поредак интеграције у V .

(52) **Задатак:** Нека је $V_n(r)$ запремина еуклидске лопте димензије n и полупречника r , тј.

$$V_n(r) := \mu(\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq r^2\}),$$

где је μ Жорданова мера у \mathbb{R}^n .

(а) Користећи (34) доказати да је $V_2(r) = \pi r^2$.

(б) Користећи (35) и (а) доказати индукцијом да је $V_n(r) = c_n r^n$, где је

$$c_n = c_{n-1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt.$$

(в) Доказати да је

$$V_{2k+1}(r) = 2 \frac{(2\pi)^k}{(2k+1)!!} r^{2k+1}, \quad V_{2k}(r) = \frac{(2\pi)^k}{(2k)!!} r^{2k}.$$

(г) Чему тежи запремина $V_n(1)$ јединичне лопте кад $n \rightarrow \infty$?

(д) У којој димензији n је запремина јединичне лопте највећа?

(53) **Задатак:** Доказати формулу

$$\frac{1}{x}(e^{-ax} - e^{-bx}) = \int_a^b e^{-xy} dy,$$

а затим израчунати

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}(e^{-ax} - e^{-bx}) dx.$$

(54) **Задатак:** Да ли постоје константе $a, b, c \in \mathbb{R}$ за које важи

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2 + 2bxy + cy^2)} dx dy = 1?$$

(55) **Задатак:** Израчунати

$$\iiint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1} |xyz| dx dy dz.$$

(56) **Задатак:** Испитати конвергенцију интеграла

$$\iint_{\{x^2 + y^2 < 1\}} (1 - x^2 - y^2)^p dx dy$$

у зависности од параметра $p \in \mathbb{R}$.

(57) **Задатак:** Израчунати

$$\int_{[0,1]^n} \cos^2 \left(\frac{\pi}{2n} (x_1 + \dots + x_n) \right) dx_1 \dots dx_n.$$

Решење: $1/2$.

(58) **Задатак:** Нека је $f : [0, 1] \rightarrow (0, +\infty)$ непрекидна функција. Израчунати

$$\int_{[0,1]^n} \frac{f(x_1) + \dots + f(x_k)}{f(x_1) + \dots + f(x_n)} dx_1, \dots, dx_n$$

за $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Решење: k/n .

(59) **Задатак:** Израчунати

$$\iint_{[0,1]^2} \min\{x, y\} dx dy \quad \text{и} \quad \iint_{[0,1]^2} \max\{x, y\} dx dy.$$

Решење: $1/3$ и $2/3$.

(60) **Задатак:** Нека је

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 2y, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Доказати да

$$\iint_{[0,1] \times [0,1]} f(x, y) dx dy$$

не постоји, а да је

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx = 1.$$

(61) **Задатак:** Доказати

$$\frac{d}{dt} \iint_{[0,t] \times [0,t]} f(x, y) dx dy = \int_0^t f(x, t) dx + \int_0^t f(t, y) dy.$$

(62) **Задатак:** Израчунати

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-3/2} \iint_{[0,t] \times [0,t]} \frac{dx dy}{1 + \sqrt{x+y}}.$$

Решење: $8(\sqrt{2} - 1)/3$.

(63) **Задатак:** Израчунати

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log t} \iint_{[0,t] \times [0,t]} \frac{dx dy}{1 + x^2 + y^2}.$$

Решење: $\pi/2$.

(64) **Задатак:** Израчунати

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{2\lambda-2} \iint_{x^2+y^2 \leq t^2, x \geq 0, y \geq 0} \frac{dx dy}{1 + (x+y)^\lambda}$$

за $0 < \lambda < 1$.

Решење: $\pi/(4 - 4\lambda)$.

(65) **Задатак:** Испитати функцију

$$f(x) = \int_{x^2 \leq s^2 + t^2 \leq 4x^2} |st| ds dt$$

и нацртати њен график.

Решење следи из $f'(x) = 30x^3$.

(66) **Задатак:** Нека је $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ непрекидна функција. Доказати да је

$$\int_{[0,1]^n} \max\{x_1, \dots, x_n\} \prod_{k=1}^n f(x_k) dx_1 \dots dx_n = n \int_0^1 s \left(\int_0^s f(t) dt \right)^{n-1} f(s) ds.$$

Решење следи из чињенице да је, због симетричности по свим x_k , интеграл на левој страни једнак

$$n! \int_{0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq 1} x_1 \prod_{k=1}^n f(x_k) dx_1 \dots dx_n.$$

(67) **Задатак:** Доказати да је

$$\int_{[0,1]^n} (x_1 x_2 \dots x_n)^{x_1 x_2 \dots x_n} dx_1 dx_2 \dots dx_n = \frac{1}{(n-1)!} x^x \log^{n-1} \frac{1}{x} dx$$

за све $n \geq 1$.

(68) **Задатак:** Нека је $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ непрекидна функција и $t > 0$.

Доказати да је

$$\int_0^t \int_{x_1}^t \dots \int_{x_{n-1}}^t f(x_n) dx_n dx_{n-1} \dots dx_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t f(s) s^{n-1} ds$$

и

$$\int_0^t \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_{n-1}} \prod_{k=1}^n f(x_k) dx_n dx_{n-1} \dots dx_1 = \frac{1}{n!} \left(\int_0^t f(s) ds \right)^k.$$

Решење: Фубинијева теорема или диференцирање по t (у другом случају и индукција по n).

(69) **Задатак:** Нека је $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ непрекидна функција. Доказати да је

$$\int_{[0,1]^n} \frac{x_1 + \dots + x_k}{x_1 + \dots + x_n} \prod_{j=1}^n f(x_j) dx_1 \dots dx_n = \frac{k}{n} \left(\int_0^1 f(t) dt \right)^n$$

за $k \in \{1, \dots, n\}$.

2. Интеграција на многострукостима

(1) Нека је V глатка многострукост димензије n која је покривена само једном картом (V, φ) (видети (1) на стр. 245). Нека је $\alpha \in \Omega^n(V)$ глатка диференцијална n -форма на V са компактним носачем. Тада је $(\varphi^{-1})^* \alpha$ глатка диференцијална n -форма на \mathbb{R}^n са компактним носачем, тј.

$$(\varphi^{-1})^* \alpha = a(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

за неку глатку функцију $a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ са компактним носачем. Са

$$\int_V \alpha := \int_{\mathbb{R}^n} a(x) dx$$

је добро дефинисан *интеграл диференцијалне форме* α . Заиста, десна страна је добро дефинисан Риманов интеграл, пошто је домен интеграције компактан скуп (носач функције a), а из (44) на стр. 284 следи дефиниција не зависи од дифеоморфизма *који чува оријентацију*. Другим речима, ако је (V, ψ) друга координатна карта, таква да дифеоморфизам $\psi \circ \varphi^{-1}$ чува оријентацију еуклидског простора (има позитиван Јакобијан) и

$$(\psi^{-1})^* \alpha = b(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

за неку глатку функцију $b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ са компактним носачем, онда је са

$$\int_V \alpha := \int_{\mathbb{R}^n} b(x) dx$$

дефинисан исти објекат.

Значајно је подвући улогу оријентације у претходној дефиницији – ако дифеоморфизам мења оријентацију, онда интеграл диференцијалне форме мења знак.

- (2) Нека је $J \subset \mathbb{R}$ интервал и $\mathbf{r} : J \rightarrow \mathbb{R}^k$ параметризована глатка регуларна крива. Нека је $C = \mathbf{r}(J)$ одговарајућа непараметризована крива и $\mathbf{F} : C \rightarrow \mathbb{R}^k$ векторско поље (не обавезно тангентно) дуж криве C . Векторско поље \mathbf{F} дефинише 1-форму $\alpha \in \Omega^1(C)$:

$$\alpha(\mathbf{X}(p)) := \mathbf{X}(p) \cdot \mathbf{F}(p) \quad \text{за } \mathbf{X}(p) \in T_p C$$

где је множење на десној страни стандардни скаларни производ у \mathbb{R}^k . Интеграл ове форме (као специјални случај интеграла (1) за $n = 1$) некад се назива и *криволинијским интегралом друге врсте* или *интегралом векторског поља \mathbf{F} дуж криве C* и означава са

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Ако је крива C *затворена* (тј. слика пресликавања $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ таквог да је $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$), онда некад користимо и ознаку

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Подразумева се да је оријентација на кривој дата параметризацијом \mathbf{r} – пошто је параметризована крива специјални случај многострукости која је покривена једном картом као у (1), оријентација је задата избором те карте (U, φ) или, еквивалентно, избором параметризације $(\varphi(U), \varphi^{-1})$ (координатна пресликавање су инверз параметризације; видети (1) на стр. 245). Имајући то у виду, претходни интеграл се своди на

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_J \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt.$$

Интеграл на десној страни је обични Риманов интеграл функције једне променљиве.

- (3) **Задатак:** Израчунати $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ако је C круг $x^2 + y^2 = 1$ у \mathbb{R}^2 , а
 (а) $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ (б) $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ (в) $\mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j}$.

- (4) **Задатак:** Израчунати $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ако је C елипса по којој раван $2x+3y = z$ пресеца цилиндар $x^2 + y^2 = 12$, а
- (а) $\mathbf{F} = \nabla(xy^2z^3)$ (б) $\mathbf{F} = \nabla \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$ (в) $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.
- (5) **Задатак:** Израчунати $\int_C (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \cdot d\mathbf{r}$ ако је C дуж која спаја тачке $(1, 1, 1)$ и $(2, 1, -1)$.
- (6) Ако је $\sum_{j=1}^k a_j dx_j$ (где су $a_j = a_j(x_1, \dots, x_k)$ глатке функције k променљивих) 1-форма у \mathbb{R}^k и C регуларна крива дата параметризацијом

$$\mathbf{r}(t) = (x_1(t), \dots, x_k(t)),$$

онда је

$$\int_C a_1 dx_1 + \dots + a_k dx_k = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

где је $\mathbf{F} = (a_1, \dots, a_k)$. Доказ следи из свођења оба интеграла на Риманов интеграл функције једне променљиве.

- (7) **Задатак:** Израчунати
- (а) $\oint_C 3y dx + 2x dy$ где је C руб скупа $\{0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \sin x\} \subset \mathbb{R}^2$.
- (б) $\oint_C y^2 dx + x^2 dy$ где је C граница троугла са теменима $(0, 0)$, $(0, 1)$, и $(1, 0)$.
- (8) *Гринова формула.* Нека је C глатка затворена проста крива² у равни \mathbb{R}^2 која ограничава област D (тј. $C = \partial D$) и нека су $P, Q : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ функције класе C^1 . Тада је

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_{\bar{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

где је у интегралу на левој страни крива оријентисана тако да при обилажењу криве област D остаје са леве стране.

Доказ: Пошто ћемо ускоро да докажемо општију теорему, сада ћемо да докажемо Гринову формулу само за случај области D_0 која је ограничена графицима непрекидних функција, тј:

$$\begin{aligned} D_0 &= \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\} \\ &= \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\}, \end{aligned}$$

а читаоцу остављамо да доказ уопшти на сложеније области D , делећи их на једноставније области облика D_0 .

Пођимо од интеграла на десној страни. Примењујући Фубинијеву теорему (28) добијамо

$$\begin{aligned} \iint_{\bar{D}} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx \\ &= \int_a^b (P(x, f_2(x)) - P(x, f_1(x))) dx = - \oint_C P dx. \end{aligned}$$

На исти начин добијамо

$$\iint_{\bar{D}} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_C Q dx.$$

- (9) **Задатак:** Решити задатак (7) помоћу Гринове формуле.

²Другим речима, крива C нема *самопресека*, тј. има параметризацију $\mathbf{r} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ која је инјективна.

- (10) Из Гриневог формуле следи да површина области $D \subset \mathbb{R}^2$ може да се изрази формулом

$$\mu(D) = \frac{1}{2} \oint_{\partial D} x dy - y dx,$$

или једном од формула

$$\mu(D) = \oint_{\partial D} x dy, \quad \mu(D) = - \oint_{\partial D} y dx.$$

Задатак: Доказати да је површина области унутар елипсе $x = a \cos \theta$, $y = b \sin \theta$ једнака $ab\pi$.

- (11) *Изопериметријска неједнакост.* Нека је γ проста³ крива класе C^1 и дужине L , и нека је површина унутар ње A . Тада је

$$4\pi A \leq L^2.$$

Доказ: повуцимо две паралелне праве у равни, тако да је крива γ између њих, и транслирајмо их једну ка другој, док обема не додирнемо криву γ . Означимо тако добијене праве са p_- и p_+ . Уведимо координатни систем тако да су ове праве ортогоналне на x -осу и секу је у тачкама $(-r, 0)$ и $(r, 0)$ и да се крива γ налази у горњој полуравни $y > 0$. Нека је C круг $x^2 + y^2 = r^2$. Нека је

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad 0 \leq s \leq L$$

параметризација криве γ природним параметром (тј. дужином лука) s (видети (154) на стр. 92). Нека крива γ сече праве p_- и p_+ у тачкама $\gamma(s_-)$ и $\gamma(s_+)$, и претпоставимо да је параметризација уведена тако да је $s_- < s_+$. Тада је

$$x = x(s), \quad y = h(s) := \begin{cases} \sqrt{r^2 - x^2(s)} & s_- \leq s \leq s_+ \\ -\sqrt{r^2 - x^2(s)} & s_+ \leq s \leq s_- + L \end{cases}$$

параметризација круга C . Из (10) следи

$$\begin{aligned} A + \pi r^2 &= \oint_{\gamma} x dy - \oint_C y dx = \int_0^L x(s)y'(s) ds - \int_0^L h(s)x'(s) ds \\ &= \int_0^L (x(s)y'(s) - h(s)x'(s)) ds \leq \int_0^L \sqrt{(x(s)y'(s) - h(s)x'(s))^2} ds. \end{aligned}$$

Из Коши-Шварцове неједнакости следи

$$\begin{aligned} (x(s)y'(s) - h(s)x'(s))^2 &= \langle (x(s), -h(s)), (y'(s), x'(s)) \rangle \\ &\leq (x^2(s) + h^2(s))((y'(s))^2 + (x'(s))^2) \\ &= x^2(s) + h^2(s), \end{aligned}$$

јер је, због природне параметризације, $(x'(s))^2 + (y'(s))^2 = \|T\|^2 = 1$ (видети (154) на стр. 92). Одатле следи да је

$$A + \pi r^2 \leq \int_0^L \sqrt{x^2(s) + h^2(s)} ds = Lr.$$

³тј. без тачака самопресека – параметризована *инјективним* пресликавањем $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Одатле, на основу неједнакости аритметичке и геометријске средине, следи

$$\sqrt{A\pi r^2} \leq \frac{A + \pi r^2}{2} \leq \frac{Lr}{2},$$

односно $4\pi A \leq L^2$, што је и требало да се докаже.

(12) Из (11) следи:

- Међу свим простим кривама које ограничавају задату површину A круг има најмању дужину.
- Међу свим простим кривама дате дужине круг ограничава највећу површину.

Проблеми ове врсте називају се *изопериметријским проблемима* или *Дидониним проблемима*⁴. Једна верзија ових проблема је тражење максималне површине ограничене сегментом праве и кривом са крајевима на том сегменту. Постоје и вишедимензионе аналогије ових проблема, оне се изучавају у теорији минималних површи и варијационом рачуну.

(13) Нека је $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ дводимензиона површ, дата глатком параметризацијом

$$\mathbf{S} : D \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

где је $D \subset \mathbb{R}^2$ област у равни. Нека је

$$d\mathbf{S} := \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v} dudv,$$

где су (u, v) координате на D , а множење \times стандардни векторски производ у \mathbb{R}^3 . Површ је *регуларна* ако је $d\mathbf{S} \neq 0$ у свакој њеној тачки. У том случају, избором

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v} \quad \text{уместо} \quad \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}$$

изабрали смо једну од две могуће оријентације на Σ (видети (37) на стр. 265).

Нека је $\mathbf{F} : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ векторско поље (не обавезно тангентно) на Σ и нека је $\alpha \in \Omega^2(\Sigma)$ 2-форма дефинисана са

$$\alpha(\mathbf{X}(p), \mathbf{Y}(p)) := \mathbf{F}(p) \cdot (\mathbf{X}(p) \times \mathbf{Y}(p)) \quad \text{за} \quad \mathbf{X}(p), \mathbf{Y}(p) \in T_p\Sigma,$$

где је на десној страни стандардни мешовити производ у \mathbb{R}^3 . Интеграл ове форме по Σ је специјални случај интеграла (1) за $n = 2$; овај интеграл се некад назива *површинским интегралом друге врсте* или *интегралом векторског поља \mathbf{F} по површи Σ* и означава са

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Овај интеграл се своди на двоструки Риманов интеграл:

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v} \right) dudv.$$

⁴Према легенди, оснивачица и прва краљица Картагине, феничанска принцеза Дидона, се обрела у Северној Африци, где је побегла или била протерана из родног града Тира, због политичких сплетки. Староседеоци су јој дозволили да се насели на површини коју може да ограничи кожа једног бика. Она је исекла кожу на танке траке и окружила њима пространу област, на којој је настала Картагина.

- (14) *Гринова формула у векторском облику.* Специјални случај површинског интеграла је двоструки Риманов интеграл. Ако област $D \subset \mathbb{R}^2$ посматрамо као површ у \mathbb{R}^3 задату параметризацијом

$$D \ni (x, y) \mapsto (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3,$$

онда Гринову формулу (8) можемо да напишемо у векторском запису

$$\oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}.$$

Ако је на десној страни $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$, онда, записујући Гринову формулу у векторском облику за векторско поље $\mathbf{G} = Q\mathbf{i} - P\mathbf{j}$, добијамо још један векторски запис Гринове формуле:

$$\oint_{\partial D} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{N} = \iint_D \nabla \cdot \mathbf{G} \, dx dy,$$

где је $d\mathbf{N}$ дефинисано помоћу вектора нормале на криву и њене оријентације (аналогно дефиницији $d\mathbf{S}$ на површима), тј.

$$d\mathbf{N} = \left(\frac{dy}{dt} \mathbf{i} - \frac{dx}{dt} \mathbf{j} \right) dt = dy \mathbf{i} - dx \mathbf{j}$$

за позитивно (супротно кретању казаљки на сату) оријентисану криву.

- (15) *Теорема о дивергенцији* или *Формула Гауса–Остроградског*. Нека је $V \subset \mathbb{R}^3$ област коју ограничава глатка површ $\Sigma = \partial V$. Тада је

$$\iint_{\Sigma} P \, dy \wedge dz + Q \, dz \wedge dx + R \, dx \wedge dy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz,$$

где је површ σ оријентисана помоћу спољашње (у односу на V) нормале (видети (37) на стр. 265). У векторском облику, ова формула има запис

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} \, dx \, dy \, dz.$$

Доказ ове теореме се изводи из Фубинијеве теореме на исти начин (само са компликованијим записом) као Гринова формула (8). Касније ћемо и ову теорему, као и Гринову формулу, да изведемо из општијег тврђења.

- (16) Као што (10) следи из Гринове формуле, на сличан начин из Теореме о дивергенцији (15) следи да је запремина области V једнака

$$\mu(V) = \frac{1}{3} \iint_{\partial V} x \, dy \wedge dz + y \, dz \wedge dx + z \, dx \wedge dy,$$

или, у векторском облику,

$$\mu(V) = \frac{1}{3} \iint_{\partial V} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}.$$

- (17) Присуство форме оријентације μ на многострукости V димензије n омогућава нам да дефинишемо *интеграл функције* $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ као интеграл n -forme $f \cdot \mu$, тј. као величину

$$\int_V f \mu$$

и меру подскупа $A \subset V$ као величину

$$\int_V \chi_A \mu.$$

Једнодимензиону меру називамо *дужином*, дводимензиону *површином*, вишедимензионе најчешће *запремином*. Некад и у вишедимензионом случају употребљавамо термин *површина* када је то природно, нпр. *површина сфере* \mathbb{S}^{n-1} је природнији термин од *запремина сфере*.

Пошто форма оријентације на многострукости дефинише меру (запремину) на описани начин, зовемо је још и *формом запремине*.

- (18) Многострукост димензије нула је скуп тачака, које су њене компоненте повезаности. Форма оријентације (запремине) на њој је 0-форма, тј. функција, која нигде није једнака нули. Кажемо да је тачка (компонента повезаности) многострукости димензије нула позитивно оријентисана, ако је та функција у њој позитивна; у противном кажемо да је она негативно оријентисана.
- (19) Уколико је на V задата Риманова метрика g (видети (35) на 262. страни), природан је избор форме оријентације μ која задовољава

$$|\mu(E_1, \dots, E_n)| = 1$$

за неку (а тиме и сваку⁵) ортонормирану (у односу на Риманову метрику g) базу E_1, \dots, E_n тангентног простора. Овај услов је природан јер обезбеђује да је запремина јединичне коцке у тангентном простору једнака 1 и овакву форму називамо *канонском* формом запремине у присуству Риманове метрике.

У локалним координатама, оваква форма може да се конструише на следећи начин. Нека је φ координатна карта и $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ стандардна база у $T\mathbb{R}^n$. Тада је $X_j : \varphi_*^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 1, \dots, n$ база у TV . Нека је G детерминанта матрице $g_{rs} := g(X_r, X_s)$; G је скаларна функција на V . Тада је

$$\mu := \varphi^*(\sqrt{G} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)$$

тражена форма. Заиста, нека је E_1, \dots, E_n ортонормирана база и $A = (a_{jk})$ матрица преласка са те базе на базу X_1, \dots, X_n , тј.

$$X_j = \sum_{k=1}^n a_{jk} E_k.$$

Тада је $g_{rs} = \sum_{k=1}^n a_{rk} a_{sk}$, односно $(g_{rs}) = A^T A$, па пошто је $(\varphi^{-1})^* \mu = \det A dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, одатле следи $\mu := \varphi^*(\sqrt{G} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)$.

- (20) Размотримо неколико специјалних случајева интеграла функције на оријентисаној многострукости (17).

Нека је многострукост димензије нула; нумерисимо њене тачке природним бројевима: $M = \{1, 2, 3, \dots\}$. Нека је функција $\mu : M \rightarrow$

⁵Видети (119) на стр. 242; матрица преласка са једне ортонормиране базе на другу је ортогонална и њена детерминанта је ± 1 .

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ њена 0–форма оријентације (видети (18)). Тада је, за функцију $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ (која је у овом случају низ у \mathbb{C})

$$\int_M f \mu = \sum_n f(n) \mu(n),$$

што значи да интеграл по многострукости димензије нула уопштава суме (или редове, ако интеграл по некомпактној многострукости интерпретирамо као несвојствени).

У случају $n = 1$, тј. у случају криве $C \subset \mathbb{R}^k$ са параметризацијом $\mathbf{r}(t)$, $t \in [a, b]$, канонска форма у односу на Риманову метрику наслеђену из еуклидског простора \mathbb{R}^k је дата са

$$dl := \|d\mathbf{r}\| = \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\| dt,$$

где је $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_k^2}$ стандардна еуклидска норма. У том случају, интеграл функције f

$$\int_C f dl = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| dt$$

некад се назива и *криволинијским интегралом прве врсте*. Величина $\|\mathbf{r}'(t)\| dt$ одговара величини dx у Римановом интегралу функције једне променљиве – као што код Римановог интеграла dx указује на дужину Δx_j интервала поделе (односно њен инфинитезимални случај, тј. гранични случај у тачки), тако и израз $\|\mathbf{r}'(t)\| dt$ указује на дужину криве, апроксимирани дужином њеног тангентног вектора $\|\mathbf{r}'(t)\|$ у инфинитезималном случају.

У случају површи $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ задате параметризацијом $\mathbf{S}(u, v)$ канонска форма у односу на Риманову метрику наслеђену из \mathbb{R}^3 је дата са

$$dS := \|d\mathbf{S}\| = \left\| \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v} \right\| du \wedge dv.$$

Интеграл функције $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$

$$\iint_{\Sigma} f dS$$

некад се назива *површинским интегралом прве врсте*. Оно што смо у случају криволинијског интеграла прве врсте рекли о инфинитезималној апроксимацији дужине криве дужином тангенте, у случају површинског интеграла важи за апроксимацију површине површи паралелограма над тангентним векторима $\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}$ и $\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v}$ (која се израчунава као интензитет векторског производа).

Ако је параметризација задата у координатама

$$\mathbf{S}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in D$$

уобичајене су ознаке

$$\begin{aligned} E &= \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 \\ F &= \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \\ G &= \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2, \end{aligned}$$

па је

$$\iint_{\Sigma} f dS = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} dudv,$$

где је на десној страни обичан двоструки Риманов интеграл.

- (21) У терминима горе дефинисаних величина E , G , F , прва квадратна форма површи (односно Риманова метрика индукована скаларним производом у \mathbb{R}^3 (видети (40) на 266. страни) се некад записује са

$$ds^2 = E du^2 + 2F dudv + Gdv^2,$$

али је прецизније

$$ds^2 = E du \otimes du + F du \otimes dv + F dv \otimes du + G dv \otimes dv,$$

што значи да се ради о метрици чија је вредност на пару вектора ξ, η , тангентних на D , једнака

$$ds^2(\xi, \eta) = Edu(\xi)du(\eta) + Fdu(\xi)dv(\eta) + Fdv(\eta)dv(\xi) + Gdv(\xi)dv(\eta).$$

- (22) *Друга квадратна форма.* Пресликавање

$$\mathbf{n} : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{n} = \left\| \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v} \right\|^{-1} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v}$$

је векторско поље јединичних нормала на површ Σ . Билинеарно пресликавање

$$\Pi(X, Y) = -D\mathbf{n}(X) \cdot Y$$

назива се *другом квадратном формом* површи Σ . Приметимо да друга квадратна форма може да се дефинише и на хиперповрши⁶ у Римановој многострукости, ако се скаларни производ на десној страни замени Римановом метриком, а извод $D\mathbf{n}(X)$ коваријантним изводом $\nabla_X \mathbf{n}$.

Друга квадратна форма површи у \mathbb{R}^3 је дата матрицом

$$[\text{II}] = \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}$$

где је

$$L = \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial u^2} \cdot \mathbf{n}, \quad M = \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial u \partial v} \cdot \mathbf{n}, \quad N = \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial v^2} \cdot \mathbf{n},$$

што се некад записује у облику

$$\Pi = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2.$$

⁶Друга квадратна форма може да се дефинише и за подмногострукости произвољне кодимензије, али је дефиниција нешто компликованија.

Сопствене вредности ове форме у ортонормираној бази називају се *главним кривинама* површи. Оне су реалне, јер је Π симетрична форма. Може да се докаже да су главне кривине минимална и максимална кривина кривих које се добијају као пресек површи Σ и равни које садрже \mathbf{n} (тј. *нормалних равни* површи). *Гаусова кривина* K површи је производ главних кривина; она може да се израчуна као количник детерминати друге и прве квадратне форме:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

Доказе ових тврђења изостављамо.

- (23) **Задатак:** Израчунати површину дела сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ унутар цилиндра $(x-1)^2 + y^2 = 1$.
- (24) **Задатак:** Нека су S_1 и S_2 кружнице полупречника 1 и 2 редом, које леже у међусобно ортогоналним равнима у \mathbb{R}^3 , при чему центар кружнице S_1 лежи на кружници S_2 . Наћи параметарску једначину турса који се добија када се кружница S_1 ротира око праве која садржи центар кружнице S_2 и која је нормална на раван кружнице S_2 (тј. центар кружнице S_1 клизи по кружници S_2) и наћи његову површину и запремину.
- (25) **Задатак:** Израчунати површински интеграл прве врсте $\iint_{\Sigma} f \, dS$ функције f по површи $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ ако је
- (а) $f(x, y, z) = x + y$, $\Sigma = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$;
 - (б) $f(x, y, z) = z$, $\Sigma = \{x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0\}$;
 - (в) $f(x, y, z) = \sin z$, $\Sigma = \{x + y = z, x \geq 0, y \geq 0, z \leq \pi\}$.
- (26) **Задатак:** Израчунати $\iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, где је Σ део сфере $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ који лежи у првом октанту и
- (а) \mathbf{F} јединична нормала на Σ
 - (б) $\mathbf{F} = z\mathbf{k}$
 - (в) $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$
 - (г) $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.
- (27) **Задатак:** Нека је $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ функција класе C^1 и нека је $\nabla f \neq 0$ на скупу $\Sigma = f^{-1}(1)$. Доказати да је

$$\left| \iint_{\Sigma} \nabla f \cdot d\mathbf{S} \right| = \iint_{\Sigma} \|\nabla f\| \, dS.$$

- (28) Проширимо сада дефиницију интеграла диференцијалне форме на случај оријентисане многострукости која није покривена само једном картом.

Нека је M глатка оријентисана многострукост димензије n и нека је $\alpha \in \Omega^n(M)$ глатка n -форма са компактним носачем. Из компактности следи да постоји коначно покривање U_1, \dots, U_k носача $\text{supp } \alpha$ картама неког атласа који задаје оријентацију.

Нека је ρ_1, \dots, ρ_k разлагање јединице (видети (32) на стр. 261) такво да је $\text{supp } \rho_j \subset U_j$.

Дефинишимо *интеграл форме α на многострукости M* са

$$\int_M \alpha := \sum_{j=1}^k \int_{U_j} \rho_j \alpha,$$

где су интегрални на десној страни дефинисани у (1) (приметимо да свака од форми $\rho_j \alpha$ има компактан носач садржан у карти U_j).

Докажимо да ова дефиниција не зависи од покривања $\{U_j\}$ и разлагања јединице $\{\rho_j\}$. Нека је $\{V_i\}$ друго покривање које задаје исту оријентацију и σ_i њему придружено разлагање јединице. Пошто је $\sum_j \rho_j = \sum_i \sigma_i = 1$, важиће

$$\begin{aligned} \sum_j \int_{U_j} \rho_j \alpha &= \sum_{i,j} \int_{U_j} \rho_j \sigma_i \alpha = \sum_{i,j} \int_{U_j \cap V_i} \rho_j \sigma_i \alpha \\ &= \sum_{i,j} \int_{V_i} \rho_j \sigma_i \alpha = \sum_i \int_{V_i} \sigma_i \alpha \end{aligned}$$

Напоменимо да је, да би ова дефиниција била добра (тј. независна од локалних координата $\varphi_j : U_j \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $\psi_i : V_i \rightarrow \mathbb{R}^n$) неопходно да атлас U_j буде сагласан у смислу оријентације, као што је објашњено у (1).

(29) *Многострукости са границом.* Означимо са

$$\mathbb{H}^n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \leq 0\}$$

доњи полупростор еуклидског простора, са релативном топологијом наслеђеном из \mathbb{R}^n .

Многострукост са границом је Хаусдорфов простор M са пребројивом базом топологије и фамилијом $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, где су U_α отворени скупови и свако φ_α хомоморфизам скупа U_α на отворен⁷ подскуп у \mathbb{H}^n , такви да:

- фамилија $\{U_\alpha\}$ покрива M ;
- ако је $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ онда су $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ и $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ дифеоморфизми⁸ отворених подскупова $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ и $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ полупростора \mathbb{H}^n ;
- фамилија \mathcal{U} је максимална фамилија која има претходна два својства.

Из Теореме о инверзној функцији (стр. 220) следи да се унутрашње тачке скупа при дифеоморфизму сликају у унутрашње тачке, па ако се тачка $p \in M$ при неком координатном пресликавању слика у руб $\partial \mathbb{H}^n = \{x_1 = 0\}$, онда се она слика у руб при сваком координатном пресликавању. Скуп таквих тачака називамо *границом многострукости* M и означавамо са ∂M .

Из Теореме о рангу (стр. 222) следи да је ∂M подмногострукост многострукости M димензије $n - 1$ и да је инклузија

$$i : \partial M \rightarrow M$$

глатко улагање (видети (12) на стр. 248).

⁷у релативној топологији полупростора као потпростора еуклидског простора

⁸Пошто смо извод дефинисали само у унутрашњој тачки, с правом се поставља питање шта значи да је пресликавање глатко у тачкама границе. Одговор је следећи: ако је $X \subset \mathbb{R}^n$, пресликавање $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ је глатко ако свака тачка $x \in X$ има отворену околину $V \ni x$, такву да f може да се продужи до глатког пресликавања $f : V \rightarrow \mathbb{R}^m$.

- (30) Границу многострукости (која је сама многострукост кодимиензије 1 у M) означавамо са ∂M , истим симболом којим означавамо и руб скупа. Међутим, треба разликовати ова два појма. Нпр, диск без једне тачке

$$D_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$$

има (тополошки) руб $\partial D_0 = \{0\} \cup \mathbb{S}^1$, али тај скуп није граница многострукости D_0 ($\{0\}$ није кодимиензије 1 него 2), иако се (када нема опасности од забуне) означава истим симболом. Скуп D_0 је многострукост без границе, а

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| \leq 1\}$$

је многострукост са границом $\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Тополошки руб оба скупа, D_0 и D_1 , је исти: $\{0\} \cup \mathbb{S}^1$.

- (31) *Оријентација границе.* Нека је M оријентисана многострукост задата оријентисаним атласом $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$. Приметимо да смена карата на граници има облик

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(0, x_2, \dots, x_n) = (0, y_2(0, x_2, \dots, x_n), \dots, y_n(0, x_2, \dots, x_n)).$$

Одатле следи да је на граници

$$D(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Будући да је ова матрица несингуларна, мора да буде $\frac{\partial y_1}{\partial x_1} \neq 0$. Међутим, пошто $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ слика доњи полупростор на доњи полупростор, одатле следи да је $\frac{\partial y_1}{\partial x_1} > 0$ (другим речима, y_1 расте по x_1 дуж x_1 -координатне осе). Пошто је атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ оријентисан, тј. $\det D(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}) > 0$, одатле следи и да је доњи $(n-1) \times (n-1)$ минор већи од нуле. Другим речима, рестрикције $\varphi_\alpha|_{\partial M}$ дефинишу атлас на ∂M . Оријентацију дефинисану овим атласом називамо оријентацијом на ∂M *индуковану оријентацијом на M* .

У терминима оријентације помоћу диференцијалних форми то значи да, ако је оријентација на унутрашњости полупростора \mathbb{H}^n дата формом $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ и φ_α чувају оријентацију, онда је оријентација на ∂M задата тако да рестрикције $\varphi_\alpha|_{\partial M}$ чувају оријентацију, при чему је оријентација на рубу $\partial \mathbb{H}^n \cong \mathbb{R}^{n-1}$ задата формом $dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$.

- (32) Оријентацију краја можемо да формулишемо и у терминима оријентације тангентних простора. У дефиницији многострукости са границом (29) узимамо *доњи* полупростор, а за оријентацију границе узимамо форму $dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$ у којој је испуштена координата dx_1 која је дуална вектору $\frac{\partial}{\partial x_1}$. Овај вектор је *вектор спољашње нормале* на границу, па некад за овако оријентисан крај многострукости кажемо да је *оријентисан вектором спољашње нормале*.

Специјално, нека је $M = [a, b]$ компактна 1-димиензиона многострукост са крајем $\partial M = \{a, b\}$ и нека је оријентација на M дата 1-формом dt . Онда је оријентација границе задата 0-формом, тј. функцијом

$$f : \{a, b\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(a) = -1, \quad f(b) = 1.$$

Заиста, ако је $] - 1, 0]$ карта (у „доњем полупростору” димензије 1) која одговара околина тачке b , онда је оријентација у њој, која одговара оријентацији dt на M задата формом dx , јер дифеоморфизам који слика $] - 1, 0]$ на $]b - \varepsilon, b]$ чува оријентацију. Функција (0-форма) која се добија кад се из dx изостави dx је $f(b) = 1$. Нека је сада $] - 1, 0]$ карта у околина тачке a . Дифеоморфизам интервала $] - 1, 0]$ на $[a, a + \varepsilon[$ мења оријентацију, тј. у карти $] - 1, 0]$ оријентација која одговара оријентацији dt је дата формом $-dx$. Изостављањем dx из ове 1-форме добијамо 0-форму $f(a) = -1$.

Други начин да објаснимо зашто је оријентација тачке a негативна а тачке b позитивна је да кажемо да су вектори спољашње нормале на границу у тим тачкама супротно оријентисани (у смислу оријентације на $[a, b]$).

- (33) *Стоксова теорема.* Нека је M компактна оријентисана глатка многострукост димензије n са границом ∂M и нека је $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$ диференцијална форма. Тада је

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega,$$

где се на интегралу на десној страни подразумева индукована оријентација границе. Специјално,

$$\partial M = \emptyset \Rightarrow \int_M d\omega = 0.$$

Доказ: Пошто је интеграл дефинисан помоћу разлагања јединице ρ_α тако да свака форма $\rho_\alpha \omega$ има носач у координатној карти, довољно је доказати тврђење за сваку координатну карту појединачно.⁹ При томе треба разликовати карте око тачака границе и унутрашњих тачака. Другим речима, довољно је доказати тврђење за форму која има компактан носач у скупу

$$A := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 < x_j < 1, j \in \{1, \dots, n\}\}$$

(тј. једнака је нули у околина руба ∂A) и за форму чији је носач компактно садржан у скупу

$$B = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 < x_1 \leq 1, 0 < x_j < 1, j \in \{2, \dots, n\}\}$$

(тј. једнака је нули у близини свих тачака руба ∂B осим тачака хиперравни $x_1 = 1$), јер многострукост M може да се покрије картама облика A или B .

Свака $(n - 1)$ -форма на A или B има облик

$$\omega = \sum_{j=1}^n a_j(x) dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n,$$

⁹Као задатак, остављамо читаоцу да докаже да разлагање јединице на M индукује разлагање јединице на ∂M , и да одатле изведе да из тога што Стоксова теорема важи у свакој координатној карти следи да она важи и на M .

где симбол $\widehat{dx_j}$ (тзв. *узималица*) означава да је члан dx_j изостављен. Диференцијал ове форме је

$$d\omega = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \frac{\partial a_j}{\partial x_j} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Из Њутн–Лајбницевог формуле следи

$$\int_0^1 \frac{\partial a_j}{\partial x_j} dx_j = a_j(x_1, \dots, x_{j-1}, 1, x_{j+1}, \dots, x_n) - a_j(x_1, \dots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \dots, x_n).$$

Пошто је носач функције a_j компактно садржан у карти која се разматра, последњи израз је једнак нули ако се ради о скупу A (и тиме је уједно завршен доказ за случај $\partial M = \emptyset$), а ако се ради о скупу B он је једнак нули за $j \neq 1$, док је за $j = 1$ једнак $a_1(1, x_2, \dots, x_n)$. Доказ сада следи из Фубинијеве теореме, помоћу које се интеграл форме $d\omega$ у разматраној карти своди на поновљени интеграл

$$\begin{aligned} \int_B d\omega &= \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\partial a_1}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 \cdots dx_n \\ &= \int_0^1 \cdots \int_0^1 a_1(1, x_2, \dots, x_n) dx_2 \cdots dx_n = \int_{\partial B} \omega. \end{aligned}$$

- (34) Из Стоксове теореме (33) следе Гринова формула (8) и Теорема о дивергенцији (15) као специјални случајеви. Њутн–Лајбницова формула за функције једне променљиве

$$\int_a^b df = f(b) - f(a)$$

је специјални случај Стоксове теореме за $n = 1$.

Наводимо још један специјални случај – Стоксову теорему за површи у \mathbb{R}^3 . Нека је Σ глатка оријентисана површ у \mathbb{R}^3 са глатком границом $C = \partial\Sigma$, оријентисаном тако да приликом обилажења криве C површ остаје са леве стране. Нека су P, Q, R C^1 -функције три променљиве. Тада је

$$\begin{aligned} \oint_C P dx + Q dy + R dz &= \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \\ &+ \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

У векторском запису ова формула гласи

$$\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}.$$

- (35) Нека је M глатка многострукост и $N \subset M$ њена глатка компактна оријентисана подмногострукост без границе. Ако је $\dim N = k$, из Стоксове теореме следи да интеграл диференцијалне форме добро дефинише линеарни функционал (који означавамо истим симболом):

$$\int_N : H_{dR}^k(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \eta \mapsto \int_N j^* \eta,$$

где је $j : N \rightarrow M$, $j(x) = x$ улагање.

Специјално, ако је M компактна оријентабилна многострукост без границе и $\dim M = n$, онда је n -та де Рамова кохомологија $H_{dR}^n(M)$ нетривијална. Заиста, нека је $\mu \in \Omega^n(M)$ форма оријентације. Она је свакако затворена, јер је $\dim M = n$, па је $\Omega^{n+1}(M) = \{0\}$. Пошто μ није нигде једнака нули, следи да је

$$\int_M \mu \neq 0$$

на свакој компоненти повезаности у M . Одатле и из Стоксове теореме следи да μ није тачна форма, јер би у противном било

$$\int_M \mu = \int_M d\eta = 0 \quad \text{због} \quad \partial M = \emptyset.$$

То значи да је

$$\text{im} \left(\int_M : H_{dR}^n(M) \rightarrow \mathbb{R} \right) \neq \{0\},$$

па је

$$\frac{H_{dR}^n(M)}{\ker \int_M} \cong \mathbb{R}.$$

Важи и много јаче тврђење: компактна повезана многострукост без границе M је оријентабилна ако и само ако је

$$H_{dR}^{\dim M}(M) \cong \mathbb{R}.$$

- (36) Користећи (35) можемо да докажемо да еуклидски простори \mathbb{R}^n и \mathbb{R}^m нису хомеоморфни за $n \neq m$. Заиста, када би они били хомеоморфни, били би хомеоморфни и простори $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$. Пошто је

$$\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \simeq \mathbb{S}^{n-1}, \quad \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \simeq \mathbb{S}^{m-1},$$

одатле би следило, пошто је \simeq релација еквиваленције, да је $\mathbb{S}^{n-1} \simeq \mathbb{S}^{m-1}$. Међутим, ако је $m < n$, онда је $H_{dR}^{n-1}(\mathbb{S}^{m-1}) = 0$, пошто нема нетривијалних $(n-1)$ -форми на многострукости мање димензије $(m-1)$. Пошто је, због (35), $H_{dR}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \neq 0$, из хомотопске инваријантности де Радове кохомологије следи да не може да буде $\mathbb{S}^{n-1} \simeq \mathbb{S}^{m-1}$.

- (37) У Глави 2 смо видели да је услов $d\omega = 0$ неопходан, али не и довољан, да би форма ω била тачна (видети (118) на 241. страни). Уколико је ω форма у просто повезаној области (видети (122) на стр. 78), онда је за 1-форме тај услов и довољан. Заиста, нека је ω затворена 1-форма на просто повезаној многострукости M и нека је $p \in M$ произвољна тачка. Тада је са

$$f(x) := \int_{C_x} \omega,$$

где је C_x произвољна глатка крива која спаја p и x , добро дефинисана функција $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, тј. дефинисана је тако да не зависи од криве C_x , већ само од тачке x . Заиста, ако је B_x друга крива која спаја p и x , онда је унија $C_x \cup (-B_x)$ (где знак минус означава промену оријентације) затворена крива у M . Пошто је M просто повезана,

постоји дводимензиона област $D \subset M$ таква да је $C_x \cup (-B_x) = \partial D$, па је

$$\int_{C_x} \omega - \int_{B_x} \omega = \oint_{\partial D} \omega = \iint_D d\omega = 0,$$

па је $\int_{C_x} \omega = \int_{B_x} \omega$, тј. $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ је добро дефинисана функција. Из Њутн–Лајбницевог формуле следи $\omega = df$, па је ω тачна.

- (38) Нека су p, q две тачке на многострукости M . Из (37) видимо да ако је област просто повезана, онда је интеграл затворене 1–форме дуж криве која спаја тачке p и q исти за сваку такву криву. Другим речима, интеграл затворене форме дуж криве у просто повезаној многострукости зависи само од крајњих тачака те криве. Специјално, на језику векторских поља у \mathbb{R}^3 то значи да криволинијски интеграл векторског поља чији је ротор нула у просто повезаној области не зависи од пута који спаја крајње тачке: ако је $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ и $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$, онда је за такво поље \mathbf{F}

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

- (39) Нека је M повезана многострукост, $p \in M$ и $\pi_1(M, p)$ скуп класа хомотопски еквивалентних пресликавања $\mathbb{S}^1 \rightarrow M$ која сликају $1 \in \mathbb{S}^1$ у p (тј. класа хомотопски еквивалентних *петљи* у M са базном тачком p). Скуп $\pi_1(M, p)$, или, краће означено, $\pi_1(M)$, назива се *фундаменталном групом*¹⁰ многострукости M . У (37) смо видели да је свака затворена 1–форма у просто повезаној многострукости тачна. Другим речима

$$\pi_1(M) = 0 \Rightarrow H_{dR}^1(M) = 0.$$

Ово је веза прсте повезаности и прве де Рамове кохомологије коју смо нагостили у (118) на 241. страни.

Задатак: Нека је M повезана многострукост, \tilde{M} њено универзално наткривање (видети (26) на стр. 256) и $\Pi : \tilde{M} \rightarrow M$ пројекција која класи $[\gamma]$ пута γ придружује његову крајњу тачку. Доказати да за $p \in M$ надовезивање петље на пут дефинише дејство групе $\pi_1(M, p)$ на скупу $\Pi^{-1}(p)$. Да ли је ово дејство транзитивно? Каква је веза између кардиналности скупа $\Pi^{-1}(p)$ и $\pi_1(M, p)$?

Уопштења фундаменталне групе су *хомотопске групе* $\pi_n(M, p)$ – скуп класа хомотопски еквивалентних пресликавања $\mathbb{S}^n \rightarrow M$ која сликају тачку $(1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{S}^n$ у p . Ови скупови такође имају структуру групе, која је Абелова за $n \geq 2$. Међутим, за $n \geq 2$ не важи претходна импликација. Из $\pi_n(M) = 0$ не следи $H_{dR}^n(M) = 0$. На пример, може да се покаже да је свако пресликавање $\mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ дводимензионе сфере у дводимензиони торус $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ хомотопски еквивалентно константном пресликавању, па је $\pi_2(\mathbb{T}^2) = 0$. Међутим, форма $d\theta \wedge d\phi$, где су θ и ϕ поларне координате на \mathbb{S}^1 је добро дефинисана затворена форма која није тачна (упоредити са (20) на 252.

¹⁰Овај скуп заиста може да се снабде структуром групе.

страни), тако да је $H_{dR}^2(\mathbb{T}^2) \neq 0$. Штавише, из оријентабилности торуца и (35) следи да је $H_{dR}^2(\mathbb{T}^2) = \mathbb{R}$.

- (40) Нека је $\sigma : \Delta^k \rightarrow M$ сингуларни k -симплекс у M (видети (30) на стр. 259) и $\omega \in \Omega^k(M)$ диференцијална k -форма на M . Тада је $\sigma^*\omega$ диференцијална k -форма на $\Delta^k \subset \mathbb{R}^k$, па је са

$$\int_{\sigma} \omega := \int_{\Delta^k} \sigma^* \omega$$

добро дефинисан *интеграл форме по сингуларном симплексу*. Из дуалности хомолошког оператора ∂ и кохомолошког d установљене Стоксовом теоремом следи да интеграл по сингуларном симплексу индукује добро дефинисано билинеарно пресликавање

$$H_{dR}^k(M) \times H_k(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad ([\omega], [\sigma]) \mapsto \int_{\sigma} \omega,$$

тј. да то пресликавање не зависи од представника ω и σ класа $[\omega]$ и $[\sigma]$. Сем тога, ово билинеарно пресликавање је недегенерисано – ово тврђење је познато као *де Рамова теорема*.

- (41) Форма

$$\sigma = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} x_k dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

где $\widehat{dx_k}$ значи да је тај члан изостављен, дефинише нетривијалну класу $[\sigma] \in H_{dR}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$. Заиста, из Стоксове теореме следи

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \sigma = \int_{\mathbb{B}^n} d\sigma = \int_{\mathbb{B}^n} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \mu(\mathbb{B}^n) \neq 0,$$

где је $\mathbb{B}^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ јединична лопта у \mathbb{R}^n . Одатле, на основу Стоксове теореме, следи да σ није тачна форма на сфери. Ово је специјални случај тврђења (35). Може да се покаже да је

$$H_{dR}^k(\mathbb{S}^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & k \in \{0, n-1\} \\ 0, & k \notin \{0, n-1\}. \end{cases}$$

За $n = 2$, тј. за \mathbb{S}^1 , доказ је садржан у (20) на 252. страни; а може да се изведе и – за $k = 0$ из повезаности, а за $k = 1$ из оријентабилности круга.

За $n = 3$, тј. за дводимензиону сферу \mathbb{S}^2 , резултат за $k = 0$ следи из повезаности, за $k = 1$ из прости повезаности, а за $k = 2$ из оријентабилности.

За $n > 3$ доказ је мало сложенији и не наводимо га.

- (42) Пошто је лопта \mathbb{B}^n контрактибилна (јер је конвексна; видети (26) на стр. 256), из хомотопске инваријантности де Рамове хомологије (видети (27) на 258. страни) следи да је

$$H_{dR}^k(\mathbb{B}^n) = \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 0 \\ 0, & k > 0. \end{cases}$$

Ова кохомологија није изоморфна кохомологији сфере (41), па одатле закључујемо да лопта није хомотопски еквивалентна сфери.

- (43) Не постоји глатко¹¹ пресликавање $h : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ које не помера тачке сфере $\mathbb{S}^{n-1} = \partial\mathbb{B}^n$, тј. такво да је $h(x) = x$ на граници.

Доказ: Претпоставимо супротно, да постоји такво пресликавање h . Нека је

$$j : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{B}^n, \quad j(x) = x.$$

Тада је $h \circ j = \text{id}_{\mathbb{S}^{n-1}}$, па је

$$j^* \circ h^* = (h \circ j)^* = \text{id} : H_{dR}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow H_{dR}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$$

идентичко пресликавање $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Међутим, то је контрадикција, јер се композиција $j^* \circ h^*$ факторише кроз

$$H_{dR}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow H_{dR}^{n-1}(\mathbb{B}^n) = \{0\} \rightarrow H_{dR}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}).$$

- (44) *Брауерова теорема о фиксној тачки.* Свако непрекидно пресликавање $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$ затворене лопте на себе има фиксну тачку.

Доказ: Докажимо прво тврђење за глатка пресликавања. Претпоставимо да глатко пресликавање $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$ нема фиксну тачку. Тада су за све $x \in \mathbb{B}^n$ тачке x и $f(x)$ различите, па одређују јединствену праву. Нека је $h(x)$ тачка у којој та права сече руб \mathbb{S}^{n-1} лопте са оне стране са које је x ; експлицитно

$$h(x) = x + \lambda \|x - f(x)\|^{-1} (x - f(x)),$$

где је λ јединствени позитивни скалар такав да је $\|h(x)\| = 1$. Тиме је дефинисано пресликавање $h : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ које не помера тачке на граници, што је у контрадикцији са (43).

Претпоставимо сада да је f само непрекидно, а не глатко. Постоји низ глатких пресликавања f_n који равномерно конвергира ка f . По доказаном делу теореме за глатка пресликавања, за свако n постоји фиксна тачка x_n пресликавања f_n . Због компактности лопте, постоји конвергентан подниз x_{k_n} ; означимо његов лимес са x_∞ . Преласком на лимес у изразу $f(x_{k_n}) = x_{k_n}$ закључујемо (уз помоћ неједнакости троугла и униформне конвергенције f_{k_n}) да је x_∞ фиксна тачка пресликавања f .

- (45) **Задатак:** Показати примером да Брауерова теорема о фиксној тачки не важи за отворене лопте.

- (46) Ако је A тополошки простор хомеоморфан затвореној лопти у \mathbb{R}^n , онда свако непрекидно пресликавање $f : A \rightarrow A$ има фиксну тачку. Брауерова теорема се често формулише и у овом, општијем облику.

Доказ: Нека је $h : \mathbb{B}^n \rightarrow A$ хомеоморфизам. Из (44) следи да пресликавање $h^{-1} \circ f \circ h : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$ има фиксну тачку x . Тада је $h(x)$ фиксна пресликавања пресликавања f .

- (47) Нека је C конвексан компактан подскуп еуклидског простора. Из (46) следи да свако непрекидно пресликавање $f : C \rightarrow C$ има фиксну тачку.

- (48) Под одређеним условима, Брауерова теорема може да се прошири и на бесконачно димензионе просторе. То проширење је *Шаудерова теорема о фиксној тачки*: Нека је X Банахов простор¹² и $K \subset X$

¹¹Тврђење важи и за *непрекидна* пресликавања.

¹²Теорема важи и под слабијим претпоставкама – за локално конвексне тополошке векторске просторе.

непразан компактан и конвексан подскуп. Тада свако непрекидно пресликавање $f : K \rightarrow K$ има фиксну тачку.

Доказ може да се изведе свођењем на Брауерову теорему, тј. на коначно димензиони случај (47). Пошто је K компактан скуп, он има коначну ε -мрежу $F = \{p_1, \dots, p_n\}$ (видети (225) и (227) у Глави 1). Нека је K_ε конвексни омотач скупа F и нека је X_ε афини потпростор димензије $n - 1$ разапет тачкама скупа F . Очигледно је $K_\varepsilon \subset X_\varepsilon$. Посматрајмо пресликавање

$$f_\varepsilon := \pi_\varepsilon \circ f : K_\varepsilon \rightarrow K_\varepsilon,$$

где је $\pi_\varepsilon : X \rightarrow X_\varepsilon$ Шаудерова пројекција (видети (359) у Глави 1). Пресликавање f_ε је дефинисано на компактном конвексном подскупу K_ε коначно димензионог простора X_ε , па по Брауеровој теорему (47), има фиксну тачку x_ε . Из компактности скупа K следи да постоји низ $\varepsilon_k \rightarrow 0$ такав да низ x_{ε_k} конвергира ка неком $x_\infty \in K$. Преласком на лимес у изразу

$$f_{\varepsilon_k}(x_{\varepsilon_k}) = x_{\varepsilon_k}$$

закључујемо да $f_{\varepsilon_k}(x_{\varepsilon_k}) \rightarrow x_\infty$. Остаје да докажемо да је

$$f_{\varepsilon_k}(x_{\varepsilon_k}) \rightarrow f(x_\infty).$$

То следи из

$$\begin{aligned} \|f_{\varepsilon_k}(x_{\varepsilon_k}) - f(x_\infty)\| &\leq \|\pi_{\varepsilon_k}(f(x_{\varepsilon_k})) - f(x_{\varepsilon_k})\| + \|f(x_{\varepsilon_k}) - f(x_\infty)\| \\ &\leq \varepsilon_k + \|f(x_{\varepsilon_k}) - f(x_\infty)\|, \end{aligned}$$

где последња неједнакост важи зато што Шаудерова пројекција задовољава $\|\pi_\varepsilon(x) - x\| \leq \varepsilon$ за $x \in K$.

- (49) **Задатак:** Површина кружне површи је $r^2\pi$; диференцирање по r даје $2r\pi$, што је обим круга. Запремина лопте је $\frac{4}{3}r^3\pi$; њен извод по r је $4r^2\pi$ – површина лопте. Да ли ово правило важи у произвољној димензији n ? Да ли оно може да се изведе као последица дуалности између d и ∂ , установљене Стоксовом теоремом?

- (50) **Задатак:** Нека је $f(x, y, z) = 2x - 3y + e^z$. Доказати да је вредност интеграла

$$\int_C \nabla f \cdot dr,$$

где је C крива која спаја тачке $(0, 0, 0)$ и $(1, 2, \log 3)$ иста за сваку такву криву. Израчунати ту вредност.

- (51) **Задатак:** Израчунати

$$\iint_\Sigma \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} dS,$$

где је $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}$ извод функције f у правцу јединичног вектора \mathbf{n} нормалног на површ $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ ако је

- (а) Σ сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, \mathbf{n} вектор спољашње нормале;
(б) Σ сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $f(x, y, z) = 1/(x^2 + y^2 + z^2)$, \mathbf{n} вектор унутрашње нормале;
(в) Σ део сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ који лежи у првом октанту, $f(x, y, z) = \log \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, \mathbf{n} вектор унутрашње нормале;

- (г) $\Sigma = \{z = 2x + 3y, x \geq 0, y \geq 0, z \leq 5\}$, $f(x, y, z) = x + y + z$, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \geq 0$.
 (52) Нека је \mathbf{F} векторско поље класе C^2 на \mathbb{R}^3 .
 (а) Ако је $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ затворена оријентабилна површ, доказати да је

$$\iint_{\Sigma} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

- (б) Ако су $\Sigma_1, \Sigma_2 \subset \mathbb{R}^3$ оријентисане површи са заједничком границом, доказати да је

$$\iint_{\Sigma_1} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma_2} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

- (53) **Задатак:** Дата је крива $x = 32t$, $y = 16t^2 - 4$.
 (а) Наћи дужину лука криве између тачака $(0, -4)$ и $(32, 12)$.
 (б) Израчунати полупречник кривине криве у тачки $(96, 140)$.
 (54) **Задатак:** Нека је C крива $x = e^{2t} \cos t$, $y = e^{2t} \sin t$.
 (а) Написати једначину криве C у поларним координатама.
 (б) Наћи дужину лука криве C између тачака $(1, 0)$ и $(e^{4\pi}, 0)$.
 (55) **Задатак:** Наћи дужину лука криве
 (а) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(2t - \sqrt{2} \cos t)$, $z = 4a \sin(t/2)$ између два узастопна пресека са xy -равни.
 (б) $x^3 = 3a^2y$, $2xz = a^2$ између тачака пресека са равнима $y = a/3$, $y = 9a$.
 (в) $x = \sin^3 t$, $y = \cos^3 t$, $z = \cos 2t$.
 (56) **Задатак:** Затворена крива C дата је једначинама $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, где су $t \mapsto x(t)$ и $t \mapsto y(t)$ функције класе C^1 .
 (а) Доказати да је површина ограничена кривом C једнака

$$\frac{1}{2} \left| \int_{\alpha}^{\beta} \left(x(t) \frac{dy}{dt} - y(t) \frac{dx}{dt} \right) dt \right|.$$

- (б) Користећи резултат (а) израчунати површину области ограничене елипсом $x = a \cos \theta$, $y = b \sin \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
 (57) **Задатак:** Израчунати $\iint_{\mathbb{S}_{\pm}^2} z dS$ и $\iint_{\mathbb{S}_{\pm}^2} (x^2 + y^2) dS$, где је \mathbb{S}_{\pm}^2 горња полусфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$.
 (58) **Задатак:** Крива γ у \mathbb{R}^3 је дата параметризацијом

$$x = \cos \theta, \quad y = \sin \theta, \quad z = \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Нека је $\omega = 2xye^z dx + x^2e^z dy + x^2ye^z dz$. Израчунати

$$\int_{\gamma} \omega,$$

ако је крива γ оријентисана у смеру опадања параметра θ .

- (59) **Задатак:** Нека је $S_+(t) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = t^2, z \geq 0\}$ горња полусфера полупречника $t > 0$ и

$$f(t) = \int_{S_+(t)} xyz dy \wedge dz + ydz \wedge dx.$$

Израчунати $f'(t)$.

- (60) **Задатак:** Израчунати $\int_S \omega$, ако је

(а) $\omega = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx$, а S горња страна површи

$$x^2 + y^2 \leq 1, \quad z = x^2 + y^2;$$

(б) $\omega = xz dx \wedge dy$, а S унутрашња страна границе цилиндра

$$x^2 + y^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 4;$$

(в) $\omega = dx \wedge dz - z dy \wedge dz$, а S горња страна границе полулопте

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \quad z \geq 0;$$

(г) $\omega = z^2 dx \wedge dz$, а S горња страна површи

$$x^2 + y^2 = z^2, \quad 0 < z < 1;$$

(д) $\omega = x dx \wedge dy + xy dx \wedge dz$, а S унутрашња страна руба коцке $[0, 1]^3$;

(е) $\omega = x dx \wedge dy + xy dy \wedge dz + xz dx \wedge dz$, а S унутрашња страна руба симплекса

$$x + y + z \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0.$$

(61) **Задатак:** Наћи све функције $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ класе C^1 , такве да је форма $\omega = f(x, y, z) dx$ тачна.

(62) **Задатак:** Израчунати $\int_C (x + y^2) ds$ где је C дуж у \mathbb{R}^2 која спаја тачке $(0, 0)$ и $(1, 1)$.

(63) **Задатак:** Нека је $\mathbf{F} = (x^2 - y)\mathbf{i} + (y^2 - z)\mathbf{j} + (z^2 - x)\mathbf{k}$ векторско поље у \mathbb{R}^3 .

(а) Израчунати $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ако је C следећа крива која спаја тачке $(0, 0, 0)$ и $(1, 1, 1)$:

(а1) дуж

(а2) крива $x = t, y = t^2, z = t^3$.

Да ли је \mathbf{F} потенцијално поље? Да ли је \mathbf{F} соленоидално поље?

(б) Израчунати $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ако је S круг $x^2 + y^2 = 1, z = 0$.

(64) **Задатак:** Нека је

(а) $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$

(б) $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$

(в) $\mathbf{F} = (yz + e^x \cos y)\mathbf{i} + (xz - e^x \sin y)\mathbf{j} + (xy + z)\mathbf{k}$

(г) $\mathbf{F} = (5x^y - 4xy)\mathbf{i} + (3x^2 - 2y)\mathbf{j}$

(д) $\mathbf{F} = (y + z)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$.

Да ли постоји функција f таква да је $\mathbf{F} = \nabla f$? Ако постоји, наћи је, ако не постоји доказати да не постоји.

(65) **Задатак:** Нека је $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$. Израчунати $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, где је C нека крива на сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. (Да ли је, да би овај задатак имао смисла, потребно више информација о кривој C и зашто?)

(66) **Задатак:** Нека је C пут који спаја тачке (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) . Израчунати $\int_C z^2 dx + 2y dy + 2xz dz$. (Да ли је, да би овај задатак имао смисла, потребно више информација о путу C и зашто?)

(67) **Задатак:** Нека је $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ вектор положаја тачке $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, \mathbf{F} и \mathbf{G} векторска поља у \mathbb{R}^3 и $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ глатка функција. Доказати

(а) $\operatorname{div}(f\mathbf{F}) = f\nabla \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla f$

(б) $\nabla \times (f\mathbf{F}) = f\nabla \times \mathbf{F} + \nabla f \times \mathbf{F}$

(в) $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \nabla \times \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \nabla \times \mathbf{G}$

(г) $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$

(д) $\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$.

- (68) **Задатак:** Испитати соленоидалност векторског поља $f(r)\mathbf{r}$, где је $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $r = \|\mathbf{r}\|$ и $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ глатка функција.
- (69) **Задатак:** Нека је C троугао са теменима $(0, 0)$, $(0, 1)$ и $(1, 0)$. Израчунати интеграл $\int_C y^2 dx + x^2 dy$
- (а) помоћу Грине теореме
(б) без помоћи Грине теореме.
- (70) **Задатак:** Нека је $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ и нека је Σ сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, а Σ_+ полусфера $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$. Доказати да је
- (а) $\iint_{\Sigma_+} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -8\pi$
(б) $\iint_{\Sigma} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$.
- Да ли резултат (б) зависи од векторског поља \mathbf{F} ? Да ли резултат (б) зависи од површи Σ ?
- (71) **Задатак:** Нека су $\omega_1 = dx \wedge dy$, $\omega_2 = ydx \wedge dz$, $\omega_3 = dr \wedge dy$ (где је r сферна координата, тј. $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$) три диференцијалне форме у \mathbb{R}^3 . Израчунати њихове вредности на паровима вектора
- (а) $X = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $Y = \mathbf{j}$ у тачки $(0, 1, 0)$.
(б) $X = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, $Y = -\mathbf{i} - \mathbf{j}$ у тачки $(2, 2, 1)$.
- (72) **Задатак:** Пресликавање $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ задато је са $f(s, t) = (st, 1)$. Израчунати $f^*(dx + xdy)$.
- (73) **Задатак:** За векторско поље \mathbf{A} и функцију f у \mathbb{R}^3 дефинисане су диференцијалне форме

$$\omega_{\mathbf{A}}^1(\mathbf{X}) := \langle \mathbf{A}, \mathbf{X} \rangle, \quad \omega_{\mathbf{A}}^2(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) := (\mathbf{A}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}), \quad \omega_f^3 := f dV,$$

где је $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скаларни производ, (\cdot, \cdot, \cdot) мешовити производ и dV форма запремине у \mathbb{R}^3 .

- (а) Доказати да се свака диференцијална 1, 2 и 3 форма у \mathbb{R}^3 може представити на овај начин помоћу неког векторског поља \mathbf{A} или функције f .
(б) Доказати да је

$$\omega_{\mathbf{A}}^1 \wedge \omega_{\mathbf{B}}^1 = \omega_{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}^2, \quad \omega_{\mathbf{A}}^1 \wedge \omega_{\mathbf{B}}^2 = \omega_{\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle}^3.$$

- (74) **Задатак:** Конструисати диференцијалну 2-форму у $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ која је затворена, али није тачна. Израчунати затим $H_{dR}^*(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ за $* = 0, 1, 2, 3, \dots$
- (75) **Задатак:** Конструисати диференцијалне 1 и 2-форме на торусу \mathbb{T}^2 које су затворене, али нису тачне. Израчунати затим $H_{dR}^*(\mathbb{T}^2)$ за $* = 0, 1, 2, 3, \dots$
- (76) **Задатак:** Доказати да антиподално пресликавање

$$a : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n, \quad x \mapsto -x$$

сфере парне димензије није хомотопно идентичком пресликавању. Да ли исто важи за сфере непарне димензије?

- (77) **Задатак:** Нека је $\Omega^k(\mathbb{S}^2)/\sim$ скуп диференцијалних k -форми на сфери \mathbb{S}^2 које су инваријантне у односу на антиподално пресликавање $a : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$. Другим речима, $\Omega^k(\mathbb{S}^2)/\sim$ је количнички простор у односу на релацију еквиваленције $\eta \sim a^*\eta$. Доказати да за непрекидну функцију $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ важи импликација

$$f(x) - f(a(x)) = \text{const.} \Rightarrow f \equiv 0.$$

Посматрајући пројективну раван као количнички простор

$$\mathbb{R}P^2 = \mathbb{S}^2/x \sim a(x)$$

и природну пројекцију $\pi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ доказати:

- (а) да је $\Omega^k(\mathbb{R}P^2) \cong \Omega^k(\mathbb{S}^2)/\sim$;
 (б) да је

$$H_{dR}^k(\mathbb{R}P^2) = \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 0 \\ 0, & k \geq 1. \end{cases}$$

Закључити да пројективна раван није оријентабилна¹³.

- (78) **Задатак:** Доказати да је сфера \mathbb{S}^n просто повезана за свако $n \geq 2$, а да n -димензиони торус $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ није просто повезан ни за један природни број n .

- (79) **Задатак:** Нека је D област у $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ и $f : D \rightarrow \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ пресликавање класе C^1 . Нека је, за $x, y \in \mathbb{R}$ и $z = x + iy \in \mathbb{C}$ дефинисано $dz := dx + idy$ и $d\bar{z} := dx - idy$, где је $i := \sqrt{-1}$.

- (а) Из формуле за диференцијал $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$ изразити $\frac{\partial f}{\partial z}$ и $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ преко $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$.
 (б) Полазећи од

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$$

и Стоксове теореме у облику

$$\iint_V d(f dz) = \oint_{\partial V} f dz,$$

доказати да, ако је $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ у просто повезаној (видети (122) на стр. 78) области D (тј. ако је функција f холоморфна у D), онда за сваку затворену глатку криву γ у D важи $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$ (*Кошијева теорема*).

- (в) Нека је $h(z) = (z - \zeta)^{-1}$ за неко $\zeta \in \mathbb{C}$. Доказати да је $\frac{\partial h}{\partial \bar{z}} = 0$.
 (80) **Задатак:** Нека је $D \subset \mathbb{C}$ област и $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ пресликавање класе C^1 на D и непрекидно на \bar{D} . Нека је $\zeta \in D$.

- (а) Доказати да је $d((z - \zeta)^{-1} f(z) dz) = (z - \zeta)^{-1} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz$.
 (б) Применом Стоксове (тј. Гринове) теореме доказати да је

$$\iint_{D \setminus D_\epsilon} \frac{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}}{z - \zeta} d\bar{z} \wedge dz = \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz - \oint_{\partial D_\epsilon} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz.$$

- (в) Доказати да је

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \iint_{D \setminus D_\epsilon} \frac{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}}{z - \zeta} d\bar{z} \wedge dz = \iint_D \frac{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}}{z - \zeta} d\bar{z} \wedge dz, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \oint_{\partial D_\epsilon} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = 2\pi i f(\zeta).$$

- (г) Доказати да за свако $\zeta \in D$ важи

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz - \frac{1}{2\pi i} \iint_D \frac{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}}{z - \zeta} d\bar{z} \wedge dz.$$

¹³За разлику од пројективне равни, пројективни простор $\mathbb{R}P^3$ је оријентабилан. Разлог лежи у томе што антиподално пресликавање $a : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ мења оријентацију за парно, а не мења за непарно n . Ако је $\eta \in \Omega^n(\mathbb{R}P^n)$ и n парно, онда је $\int_{\mathbb{S}^n} \pi^* \eta = 0$ (па из де Радове теореме (40) следи $[\pi^* \eta] = 0$). То не важи ако је n непарно.

(д) Доказати да, ако је

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \quad \text{за свако } \zeta \in D$$

онда важи *Кошијева интегрална формула*

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz.$$

(ђ) Развити функцију $\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{z - \zeta}$ у степени (геометријски) ред по ζ и доказати да је у (д) оправдана замена поретка сумирања тог реда и интеграције. Извести закључак да је свака комплексно диференцијабилна (тј. холоморфна) функција аналитичка (видети 15 на стр. 193).

(81) **Задатак:** Лапласијан Δf функције f смо дефинисали са

$$\Delta f := \operatorname{div}(\operatorname{grad} f).$$

Функција је *хармонијска* ако је $\Delta f = 0$.

(а) Доказати да је у еуклидском простору \mathbb{R}^k $\Delta = \sum_{j=1}^k \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$.

(б) Доказати да је у еуклидском простору $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$

$$\Delta = 4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}.$$

(в) Доказати да су реални и имагинарни део функције $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z^{1389}$ хармонијске функције.

(г) Нека је f хармонијска функција у области $D \subset \mathbb{R}^3$ са глатком границом $\Sigma = \partial D$. Доказати да је

$$(г1) \iint_{\Sigma} D_{\mathbf{n}} f dS = 0$$

$$(г2) \iint_{\Sigma} f D_{\mathbf{n}} f dS = \iiint_D |\nabla f|^2 dx dy dz,$$

где је $D_{\mathbf{n}}$ извод у правцу јединичне нормале \mathbf{n} на Σ .

(д) Нека је $D \subset \mathbb{R}^3$ област са глатком границом $\Sigma = \partial D$ и u, v глатке функције на D . Доказати

$$(д1) \iint_{\Sigma} u \nabla v \cdot d\mathbf{S} = \iiint_D (u \Delta v + \nabla u \cdot \nabla v) dx dy dz$$

$$(д2) \iint_{\Sigma} (u D_{\mathbf{n}} v - v D_{\mathbf{n}} u) dS = \iiint_D (u \Delta v - v \Delta u) dx dy dz$$

$$(д3) \iint_{\Sigma} u D_{\mathbf{n}} u dS = \iiint_D (u \Delta u + \|\nabla u\|^2) dx dy dz$$

$$(д4) \iint_{\Sigma} D_{\mathbf{n}} u dS = \iiint_D \Delta u dx dy dz.$$

(ђ) Нека је u хармонијска функција у области $D \subset \mathbb{R}^3$ са глатком границом

(ђ1) Нека је $u|_{\partial D} \equiv 0$. Доказати да је $u \equiv \operatorname{const}$.

(ђ2) Нека је $D_{\mathbf{n}} u|_{\partial D} \equiv 0$. Доказати да је $u \equiv \operatorname{const}$.

(е) Доказати да *Лапласова једначина* $\Delta u = 0$ у области $D \subset \mathbb{R}^3$ са глатком границом има јединствено решење ако су задати гранични услови

(е1) $u|_{\partial D} = \phi(x, y, z)$ или

(е2) $D_{\mathbf{n}} u|_{\partial D} = \psi(x, y, z)$.

(ж) Доказати да је функција $K : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана са

$$K(x) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log \|x\|, & n = 2, \\ ((2-n)\omega_n)^{-1} \|x\|^{2-n}, & n > 2, \end{cases}$$

где је ω_n запремина јединичне сфере у \mathbb{R}^n , хармонијска. Ова функција назива се *фундаменталним решењем Лапласове једначине*.

- (82) **Задатак:** Нека је K фундаментално решење Лапласове једначине и D област у \mathbb{R}^n . Нека је $y \in D$ и B_ε лопта са центром у y и полупречником $\varepsilon > 0$. Уведимо ознаку $K_y(x) := K(x - y)$.

(а) Доказати да је

$$\int_{D \setminus B_\varepsilon} K_y \Delta u \, dV = \int_{\partial D} (K_y \nabla u - u \nabla K_y) \cdot d\mathbf{S} + \int_{\partial B_\varepsilon} (K_y \nabla u - u \nabla K_y) \cdot d\mathbf{S}$$

за произвољну глатку функцију u на D .

- (б) Доказати да је $K(x - y) = K(\|x - y\|)$ и одатле извести да је ∇K_y константно на сфери ∂B_ε и једнако $\nabla K_y(\varepsilon) = (n\omega_n \varepsilon^{n-1})^{-1}$.
 (в) Извести из (б) да $\int_{\partial B_\varepsilon} u \nabla K_y \cdot d\mathbf{S}$ тежи ка $-u(y)$ кад $\varepsilon \rightarrow 0_+$.
 (г) Доказати да је

$$\int_{\partial B_\varepsilon} K_y \nabla u \cdot d\mathbf{S} \leq n\omega_n \varepsilon^{n-1} K_y(\varepsilon) \sup_D \|\nabla u\|$$

и да последњи израз тежи нули кад $\varepsilon \rightarrow 0_+$.

- (д) Доказати *Гринову формулу репрезентације*

$$u(y) = \int_D K_y \Delta u \, dV - \int_{\partial D} (K_y \nabla u - u \nabla K_y) \cdot d\mathbf{S}.$$

- (ђ) Ако је u функција са *компактним носачем* у D , доказати да Гринова формула репрезентације гласи $u(y) = \int_D K_y \Delta u \, dV$.
 (е) Нека је f глатка функција са *компактним носачем*. Доказати да *Пуасонова једначина* $\Delta u = f$ има решење $u = K * f$, где звездаца означава *конволуцију функција*: $(\phi * \psi)(y) := \int_D \phi(x - y)\psi(x) \, dx$.

Низови и фамилије функција

- (1) *Фамилијом пресликавања* називамо пресликавање

$$f : X \times T \rightarrow Y,$$

када је друга променљива из било ког разлога издвојена и има неку посебну улогу. Ту променљиву називамо *параметром* фамилије; скуп T називамо *скупом параметара*. Некада уместо $f(x, t)$ пишемо $f_t(x)$, односно

$$f_t : X \rightarrow Y, \quad t \in T.$$

Један пример фамилије пресликавања је низ пресликавања

$$f_n : X \rightarrow Y;$$

овде је скуп параметара скуп природних бројева \mathbb{N} .

Наравно, сасвим равноправно можемо да сматрамо x параметром, а t променљивом функције $t \mapsto f(x, t)$.

- (2) Претпоставимо да је (Y, d) метрички простор, $f : X \times T \rightarrow Y$ фамилија пресликавања и \mathcal{F}_T филтер на скупу параметара T . Кажемо да је функција

$$f : X \rightarrow Y$$

лимес фамилије f_t по тачкама ако је

$$(\forall x \in X) f(x) = \lim_{\mathcal{F}_T} f_t(x),$$

односно, ако

$$(\forall x \in X) (\forall \varepsilon > 0) d(f_t(x), f(x)) <_{\mathcal{F}_T} \varepsilon.$$

Из Главе 1 знамо да је претходни исказ еквивалентан са

$$(\forall x \in X) (\forall \varepsilon > 0) \{t \in T \mid d(f_t(x), f(x)) < \varepsilon\} \in \mathcal{F}_T.$$

Пресликавање $f : X \rightarrow Y$ је *равномерни* (или *униформни*) *лимес* фамилије f_t ако

$$(\forall \varepsilon > 0) \sup_{x \in X} d(f_t(x), f(x)) <_{\mathcal{F}_T} \varepsilon,$$

односно

$$(\forall \varepsilon > 0) \{t \in T \mid (\forall x \in X) d(f_t(x), f(x)) < \varepsilon\} \in \mathcal{F}_T.$$

Из

$$(\forall x \in X) d(f_t(x), f(x)) \leq \sup_{x \in X} d(f_t(x), f(x)),$$

следи да је сваки униформни лимес уједно и лимес по тачкама. У Глави 1 смо видели примере лимеса (низова функција) по тачкама који нису униформни лимеси.

- (3) *Кошијев услов постојања равномерног лимеса.* Нека је Y метрички простори и нека је T метрички простор или скуп природних бројева \mathbb{N} . Нека је $f_t : X \rightarrow Y$ фамилија пресликавања са скупом параметара T и \mathcal{F}_T филтер околина, филтер пробушених околина или Фрешеов филтер на T . Фамилија f_t испуњава *Кошијев услов* ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји скуп $T_0 \in \mathcal{F}_T$ такав да

$$t_1, t_2 \in T_0 \Rightarrow \sup_{x \in X} d(f_{t_1}(x), f_{t_2}(x)) < \varepsilon.$$

Кошијев услов је неопходан услов постојања равномерног лимеса фамилије $f_t : X \rightarrow Y$. Ако је простор Y комплетан, онда је тај услов и довољан.

Доказ: Нека је f равномерни лимес фамилије f_t . Тада је

$$d(f_{t_1}(x), f_{t_2}(x)) \leq d(f_{t_1}(x), f(x)) + d(f(x), f_{t_2}(x)),$$

одакле следи да је Кошијев услов неопходан. Ако је Y комплетан и фамилија f_t задовољава Кошијев услов, онда из Кошијевог услова егзистенције обичног лимеса ((32) на 57. страни) следи да за свако $x \in X$ постоји

$$f(x) = \lim_{\mathcal{F}_T} f_t(x),$$

па преласком на лимес по t_2 у неједнакости $d(f_{t_1}(x), f_{t_2}(x)) < \varepsilon$ добијамо

$$d(f_{t_1}(x), f(x)) \leq \varepsilon \quad \text{за све } t_1 \in T_0,$$

што по дефиницији значи да је f равномерни лимес фамилије f_t .

- (4) *Комутирање лимеса.* Нека су X , T и \mathcal{F}_T као у (3),

$$f : X \times T \rightarrow Y, \quad t \in T$$

фамилија пресликавања у комплетан метрички простор Y и \mathcal{F}_X филтер на X . Ако постоји равномеран лимес

$$f := \lim_{\mathcal{F}_T} f_t : X \rightarrow Y$$

и ако за свако $t \in T$ постоји лимес

$$y_t := \lim_{\mathcal{F}_X} f_t(x),$$

онда постоје лимеси $\lim_{\mathcal{F}_X} (\lim_{\mathcal{F}_T} f_t(x))$ и $\lim_{\mathcal{F}_T} (\lim_{\mathcal{F}_X} f_t(x))$ и важи једнакост

$$\lim_{\mathcal{F}_X} (\lim_{\mathcal{F}_T} f_t(x)) = \lim_{\mathcal{F}_T} (\lim_{\mathcal{F}_X} f_t(x))$$

Доказ: Нека је $\varepsilon > 0$. Из постојања равномерног лимеса по филтеру \mathcal{F}_T и Кошијевог услова (3) следи да постоји скуп $T_0 \in \mathcal{F}_T$, такав да је за све $t_1, t_2 \in T_0$ и све $x \in X$

$$d(f_{t_1}(x), f_{t_2}(x)) < \varepsilon.$$

Преласком на лимес по филтеру \mathcal{F}_X добијамо

$$d(y_{t_1}, y_{t_2}) \leq \varepsilon \quad \text{за све } t_1, t_2 \in T_0.$$

Из Кошијевог услова следи да постоји $y = \lim_{\mathcal{F}_T} y_t$. Остаје још да докажемо да је $y = \lim_{\mathcal{F}_X} f(x)$.

Нека је $t_2 \in T_0$. Тада је

$$X_0 := \{x \in X \mid d(f_{t_2}(x), y_{t_2}) < \varepsilon\} \in \mathcal{F}_X$$

Ако у неједнакостима $d(f_{t_1}(x), f_{t_2}(x)) < \varepsilon$ и $d(y_{t_1}, y_{t_2}) < \varepsilon$ пређемо на лимес по филтеру \mathcal{F}_T у односу на t_1 , добијамо

$$d(f(x), f_{t_2}(x)) < \varepsilon \quad \text{и} \quad d(y, y_{t_2}) < \varepsilon.$$

Пошто је

$$d(f(x), y) \leq d(f(x), f_{t_2}(x)) + d(f_{t_2}(x), y_{t_2}) + d(y_{t_2}, y),$$

следи да је

$$X_1 := \{x \in X \mid d(f(x), y) < 3\varepsilon\} \supset X_0.$$

Пошто је $X_0 \in \mathcal{F}_X$, следи да је и $X_1 \in \mathcal{F}_X$, па је $y = \lim_{\mathcal{F}_X} f(x)$.

- (5) **Задатак:** Доказати да тврђење (4) важи (са незнатном модификацијом доказа) и ако простор Y није комплетан, уколико уместо тога претпоставимо да постоји $\lim_{\mathcal{F}_T} y_t$.
- (6) *Непрекидност лимеса.* Нека су X и Y метрички простори и нека је T скуп са филтером \mathcal{F}_T . Нека је

$$f_t : X \rightarrow Y, \quad t \in T$$

фамилија пресликавања са параметрима у T . Ако је за свако t функција f_t непрекидна у тачки $x_0 \in X$ и ако постоји равномеран лимес

$$f := \lim_{\mathcal{F}_T} f_t : X \rightarrow Y,$$

онда је и функција f непрекидна у тачки x_0 .

Доказ следи из неједнакости троугла

$$d(f(x), f(x_0)) \leq d(f(x), f_t(x)) + d(f_t(x), f_t(x_0)) + d(f_t(x_0), f(x_0)),$$

јер су први и трећи сабирак мањи од $\varepsilon/3$ за све x и за t из неког $T_0 \in \mathcal{F}_T$, а други је мањи од $\varepsilon/3$ за x довољно близу x_0 .

- (7) *Извод лимеса.* Нека је X нормирани векторски простор, $V \subset X$ ограничен, отворен и конвексан подскуп, T метрички простор или \mathbb{N} и \mathcal{F}_T филтер околина, филтер пробушених околина или (у случају да је $T = \mathbb{N}$) Фрешеов филтер на T . Нека је

$$f_t : V \rightarrow Y, \quad t \in T$$

фамилија диференцијабилних пресликавања у Банахов простор Y . Претпоставимо да фамилија извода (по $x \in V$)

$$Df_t(x) : V \rightarrow \mathcal{L}(X; Y)$$

има равномерни лимес

$$\psi := \lim_{\mathcal{F}_T} Df_t(x) : V \rightarrow \mathcal{L}(X; Y)$$

и да у бар једној тачки $x_0 \in V$ постоји лимес

$$\lim_{\mathcal{F}_T} f_t(x_0) \in Y.$$

Тада постоји равномерни лимес

$$f := \lim_{\mathcal{F}_T} f_t : V \rightarrow Y.$$

Функција f је диференцијабилна и важи $Df = \psi$.

Доказ: Показаћемо прво да фамилија f_t има равномерни лимес по \mathcal{F}_T . Применимо неједнакост троугла, а затим Теорему о средњој вредности на разлику

$$\begin{aligned} \|f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x)\| &\leq \| [f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x)] - [f_{t_1}(x_0) - f_{t_2}(x_0)] \| + \|f_{t_1}(x_0) - f_{t_2}(x_0)\| \\ &\leq \sup_{0 \leq \theta \leq 1} \|Df_{t_1}(x_0 + \theta(x - x_0)) - Df_{t_2}(x_0 + \theta(x - x_0))\| \|x - x_0\| + \\ &+ \|f_{t_1}(x_0) - f_{t_2}(x_0)\|. \end{aligned}$$

Пошто Df_t има равномерни лимес, а $f_t(x_0)$ обичан лимес, доказ да f_t има равномерни лимес f следи из Кошијевог услова (3).

Применимо сада неједнакост троугла и Теорему о средњој вредности на разлику

$$\begin{aligned} \| [f_{t_1}(x+h) - f_{t_1}(x) - Df_{t_1}(x)(h)] - [f_{t_2}(x+h) - f_{t_2}(x) - Df_{t_2}(x)(h)] \| &\leq \\ \leq [\sup_{0 \leq \theta \leq 1} \|Df_{t_1}(x+\theta h) - Df_{t_2}(x+\theta h)\| + \|Df_{t_1}(x) - Df_{t_2}(x)\|] \|h\|. \end{aligned}$$

Ова неједнакост важи кад год је $x, x+h \in V$ и из ње следи (на основу претпоставке о постојању равномерног лимеса фамилије Df_t и Кошијевог услова) да фамилија

$$Q_t(h) := \frac{f_t(x+h) - f_t(x) - Df_t(x)(h)}{\|h\|}$$

за свако $x \in V$ има у односу на филтер \mathcal{F}_T равномерни лимес по свим $h \neq 0$ таквим да је $x+h \in V$. Из диференцијабилности функција f_t следи да је

$$\lim_{h \rightarrow 0} Q_t(h) = 0,$$

а из $\lim_{\mathcal{F}_T} f_t = f$ и $\lim_{\mathcal{F}_T} Df_t = \psi$ следи

$$\lim_{\mathcal{F}_T} Q_t(h) = \frac{f(x+h) - f(x) - \psi(x)(h)}{\|h\|}.$$

Доказ тврђења сада следи из комутативности обичног и равномерног лимеса

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\mathcal{F}_T} Q_t(h) = \lim_{\mathcal{F}_T} \lim_{h \rightarrow 0} Q_t(h) = 0.$$

(8) *Интеграл лимеса.* Нека је $J \subset \mathbb{R}^n$ n -димензиони квадар и

$$f_t : J \rightarrow \mathbb{C}$$

фамилија интегралних функција. Нека је \mathcal{F}_T филтер на $T \subset \mathbb{C}^n$ и нека постоји равномерни лимес

$$f := \lim_{\mathcal{F}_T} f_t : J \rightarrow \mathbb{C}.$$

Тада је функција f интегрална на J и важи

$$\int_J f(x) dx = \lim_{\mathcal{F}_T} \int_J f_t(x) dx.$$

Доказ: Нека је \mathcal{P}_J простор подела квадра J са уоченим тачкама и $P := \{(J_i, c_i)\}_i \in \mathcal{P}_J$. Посматрајмо интегралне суме

$$\Phi_f(P, \vec{c}) := \sum_{i=1}^k f(c_i) \mu(J_i) \quad \text{и} \quad \Phi_{f_t}(P, \vec{c}) := \sum_{i=1}^k f_t(c_i) \mu(J_i).$$

Из постојања равномерног лимеса $f = \lim_{\mathcal{F}_T} f_t$ следи да је за свако $\varepsilon > 0$

$$T_\varepsilon = \{t \in T \mid (\forall x \in X) |f(x) - f_t(x)| < \varepsilon/\mu(J)\} \in \mathcal{F}_T.$$

За свако $t \in T_\varepsilon$ је

$$|\Phi_f(P, \vec{c}) - \Phi_{f_t}(P, \vec{c})| \leq \sum_{i=1}^k |f(c_i) - f_t(c_i)|\mu(J_i) < \varepsilon$$

за све $t \in T_\varepsilon$ и $P \in \mathcal{P}_J$. Одатле следи да је

$$\Phi_f(P, \vec{c}) = \lim_{\mathcal{F}_T} \Phi_{f_t}(P, \vec{c}),$$

па тврђење следи из (4) за случај $X = \mathcal{P}_J$ и $\mathcal{F}_X = \mathcal{F}_J$ (филтер на простору подела; видети (2) на стр. 267).

- (9) *Непрекидност интеграла по параметру.* Нека је X метрички простор, $J \subset \mathbb{R}^n$ n -димензиони квадар и

$$f : X \times J \rightarrow \mathbb{C}$$

непрекидна функција. Тада је и функција

$$F : X \rightarrow \mathbb{C}, \quad F(x) := \int_J f(x, t) dt$$

непрекидна.

Ако докажемо да је за фиксирано x_0 ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, t) = f(x_0, t)$$

равномеран лимес по $t \in J$, доказ непрекидности интеграла следиће из (8).

Нека је $\varepsilon > 0$, $x_0 \in X$, $t_0 \in J$. Тада постоји $\delta_{x_0, t_0} > 0$ са својством

$$d(x, x_0), d(t, t_0) < \delta_{x_0, t_0} \quad \Rightarrow \quad |f(x, t) - f(x_0, t_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Због компактности квадра J , из његовог покривања лоптама $B]t, \delta_{x_0, t}[$ може да се издвоји коначно потпокривање лоптама

$$B]t_1, \delta_{x_0, t_1}[, \dots, B]t_m, \delta_{x_0, t_m}[.$$

Нека је $\delta := \min\{\delta_1, \dots, \delta_m\}$. Ако је $d(x, x_0) < \delta$, онда за свако $t \in J$ постоји t_k за које је $t \in B]t_k, \delta_{x_0, t_k}[$, па је

$$|f(x, t) - f(x_0, t)| \leq |f(x, t) - f(x_0, t_k)| + |f(x_0, t_k) - f(x_0, t)| < \varepsilon,$$

чиме је доказана равномерност претходног лимеса.

- (10) *Диференцирање интеграла по параметру.* Нека је X нормирани векторски простор коначне димензије, $V \subset X$ отворен подскуп, $J \subset \mathbb{R}^n$ n -димензиони квадар и

$$f : V \times J \rightarrow \mathbb{C}$$

непрекидна функција са непрекидним парцијалним изводом $D_1 f$ по првој променљивој. Тада је функција

$$F : V \rightarrow \mathbb{C}, \quad F(x) := \int_J f(x, t) dt$$

класе C^1 и

$$DF(x) = \int_J D_1 f(x, t) dt.$$

Интеграл на десној страни је интеграл функције са вредностима у векторском простору коначне димензије, под тиме подразумевамо

$$\int_J (v_1(t), \dots, v_k(t)) dt := \left(\int_J v_1(t) dt, \dots, \int_J v_k(t) dt \right).$$

Доказ: Једну верзију ове теореме видели смо у (40) на стр. 200; доказаћемо је сада на мало директнији начин, без позивања на (39) на стр. 200. Из неједнакости троугла за интеграле и Теореме о средњој вредности следи да за произвољно $x_0 \in V$ важи

$$\begin{aligned} \left| F(x_0 + h) - F(x_0) - \left(\int_J D_1 f(x_0, t) dt \right) h \right| &\leq \\ &\leq \int_J \sup_{0 \leq \theta \leq 1} \|D_1 f(x_0 + \theta h, t) - D_1 f(x_0, t)\| dt \|h\|, \end{aligned}$$

где је $h \in X$ такво да је $x_0 + h \in V$. Из непрекидности $D_1 f$ и Канторове теореме (стр. 120) следи да подинтегрална функција равномерно тежи нули кад $h \rightarrow 0$, па резултат следи из (8).

- (11) *Несвојствени интеграл који зависи од параметра.* При разматрању несвојствених интеграла са параметром, тј. интеграла

$$\int_A f(x, t) dt$$

фамилија функција

$$f : X \times A \rightarrow \mathbb{C},$$

где је $A \subset \mathbb{R}^n$, разликоваћемо случајеве $n = 1$ и $n > 1$.

Размотримо прво случај $n = 1$. Нека је

$$f : X \times [a, \beta[\rightarrow \mathbb{C}$$

и нека је β сингуларна тачка, тј. или коначна тачка у чијој околини је нека од функција $t \mapsto f(x, t)$ неограничена, или тачка $+\infty$ (аналогно се разматра случај тачке $-\infty$). Тада кажемо да $\int_a^\beta f(x, t) dt$ *равномерно конвергира* ако постоји равномеран (по $x \in X$) лимес

$$\lim_{b \rightarrow \beta^-} \int_a^b f(x, t) dt.$$

У случају да је сингуларна тачка $\beta \in]a, b[$ унутрашња тачка, онда кажемо да интеграл $\int_a^b f(x, t) dt$ равномерно конвергира ако равномерно конвергирају интегрални

$$\int_a^\beta f(x, t) dt \quad \text{и} \quad \int_\beta^b f(x, t) dt.$$

У случају више сингуларних тачака $\beta_1, \dots, \beta_k \in [a, b]$ равномерна конвергенција се своди на равномерну конвергенцију свих интеграла

$$\int_{c_k}^{\beta_k} f(x, t) dt, \quad \int_{\beta_k}^{c_{k+1}} f(x, t) dt,$$

где су c_k несингуларне тачке. Специјално, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t) dt$ равномерно конвергира ако равномерно конвергирају интеграли

$$\int_{-\infty}^0 f(x, t) dt \quad \text{и} \quad \int_0^{+\infty} f(x, t) dt.$$

Под конвергенцијом за $n > 1$ ћемо да подразумевамо конвергенцију у смислу (38) на стр. 280, а не конвергенцију у смислу (36) на стр. 278.

Ако је $t_0 \in A$ коначна сингуларна тачка (тј. тачка у чијој околини су неке од функција $t \mapsto f(x, t)$ неограничене) и ако је то једина сингуларна тачка, онда кажемо да интеграл $\int_A f(x, t) dt$ *равномерно конвергира* ако постоји равномеран (по $x \in X$) лимес

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{A \setminus B]t_0; \varepsilon[} f(x, t) dt.$$

Слично, ако је област A неограничена и у њој нема коначних сингуларних тачака, онда $\int_A f(x, t) dt$ *равномерно конвергира* ако постоји равномеран (по $x \in X$) лимес

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{A \cap B[0; r]} f(x, t) dt.$$

- (12) *Кошијев услов равномерне конвергенције интеграла.* Нека је X произвољан скуп и

$$f : X \times [a, \beta[\rightarrow \mathbb{C}$$

функција која је за свако $x \in X$ интегрална по другој променљивој на сваком интервалу $[a, b] \subset [a, \beta[$. Интеграл

$$\int_a^\beta f(x, t) dt$$

равномерно конвергира ако и само ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји околина U тачка β таква да важи

$$b_1, b_2 \in U \Rightarrow \sup_{x \in X} \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x, t) dt \right| < \varepsilon.$$

Доказ следи из (3).

- (13) *Вајерштрасов критеријум.* Нека су

$$f : X \times [a, \beta[\rightarrow \mathbb{C}, \quad g : X \times [a, \beta[\rightarrow \mathbb{R}$$

функције, такве да су за свако $x \in X$ функције

$$t \mapsto f(x, t) \quad \text{и} \quad t \mapsto g(x, t)$$

интегралне на сваком интервалу $[a, b] \subset [a, \beta[$ и такве да за све $(x, t) \in X \times [a, \beta[$ важи

$$|f(x, t)| \leq g(x, t).$$

Ако интеграл

$$\int_a^\beta g(x, t) dt$$

равномерно конвергира, онда и интеграл

$$\int_a^\beta f(x, t) dt$$

равномерно конвергира.

Доказ следи из

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x, t) dt \right| \leq \int_{b_1}^{b_2} |f(x, t)| dt \leq \int_{b_1}^{b_2} g(x, t) dt$$

и (12).

(14) *Абелов и Дирихлеов став.* Нека су

$$f : X \times [a, \beta[\rightarrow \mathbb{C}, \quad g : X \times [a, \beta[\rightarrow \mathbb{R}$$

функције, такве да су за свако $x \in X$ функције

$$t \mapsto f(x, t) \quad \text{и} \quad t \mapsto g(x, t)$$

интеграбилне на сваком интервалу $[a, b] \subset [a, \beta[$, при чему је за свако x функција $t \mapsto g(x, t)$ функција ограничене варијације. Тада интеграл

$$\int_a^\beta f(x, t)g(x, t) dt$$

равномерно конвергира ако је испуњен било који од следећа два пара услова:

(A1) $\int_a^\beta f(x, t) dt$ равномерно конвергира;

(A2) $\sup_{(x,t) \in X \times [a, \beta[} |g(x, t)| < M$.

или

(Д1) $\sup_{x \in X, b \in [a, \beta[} \left| \int_a^b f(x, t) dt \right| < M$;

(Д2) $\lim_{b \rightarrow \beta^-} g(x, t) = 0$ равномерно по x .

Доказ: Довољно је доказати тврђење за реалну функцију f и монотону функцију g . Из Теореме за средњој вредности за интеграле следи

$$\int_{b_1}^{b_2} f(x, t)g(x, t) dt = g(x, b_1) \int_{b_1}^c f(x, t) dt + g(x, b_2) \int_c^{b_2} f(x, t) dt$$

за неко $c \in [b_1, b_2]$, па доказ тврђења следи из Кошијевог услова (12).

(15) *Несвојствени интеграл и лимес.* Нека је $A \subset \mathbb{R}^n$ и

$$f : X \times A \rightarrow \mathbb{C}$$

фамилија функција таквих да $\int_A f(x, t) dt$ равномерно конвергира. Нека је \mathcal{F}_X филтер на X и нека постоји равномерни лимес

$$f(t) := \lim_{\mathcal{F}_X} f(x, t).$$

Тада је

$$\lim_{\mathcal{F}_X} \int_A f(x, t) dt = \int_A f(t) dt.$$

Доказ следи из правила комутативности два лимеса (4) и комутативности лимеса и интеграла (8); изведимо га ради једноставности

записа за $n = 1$ (за $n > 1$ доказ је исти). По дефиницији је

$$\lim_{\mathcal{F}_X} \int_a^\beta f(x, t) dt = \lim_{\mathcal{F}_X} \lim_{b \rightarrow \beta^-} \int_a^b f(x, t) dt.$$

Пошто интеграл равномерно конвергира, други лимес на десној страни је равномерни лимес, па може да комутира са првим. Тако добијамо

$$\lim_{\mathcal{F}_X} \int_a^\beta f(x, t) dt = \lim_{b \rightarrow \beta^-} \lim_{\mathcal{F}_X} \int_a^b f(x, t) dt.$$

Сада други лимес на десној страни комутира са интегралом, на основу (8), тако да добијамо

$$\lim_{\mathcal{F}_X} \int_a^\beta f(x, t) dt = \lim_{b \rightarrow \beta^-} \int_a^b \lim_{\mathcal{F}_X} f(x, t) dt.$$

На крају, по дефиницији несвојственог интеграла, последњу једнакост записујемо у облику

$$\lim_{\mathcal{F}_X} \int_a^\beta f(x, t) dt = \int_a^\beta \lim_{\mathcal{F}_X} f(x, t) dt,$$

што је једнакост коју је требало доказати.

- (16) *Непрекидност несвојственог интеграла.* Нека је X метрички простор, $A \subset \mathbb{R}^n$ и

$$f : X \times A \rightarrow \mathbb{C}$$

непрекидна функција. Ако $\int_A f(x, t) dt$ равномерно конвергира, онда је

$$F(x) := \int_A f(x, t) dt$$

непрекидна функција.

Доказ следи из (6) и (9).

- (17) *Диференцирање несвојственог интеграла по параметру.* Нека је X нормирани векторски простор коначне димензије, $V \subset X$ отворен, ограничен и конвексан подскуп, $A \subset \mathbb{R}^n$ и

$$f : V \times A \rightarrow \mathbb{C}$$

непрекидна функција, таква да је парцијални извод $D_1 f$ непрекидан. Ако $\int_A f(x_0, t) dt$ конвергира за неко $x_0 \in V$ и $\int_A D_1 f(x, t) dt$ конвергира равномерно, онда и $\int_A f(x, t) dt$ конвергира равномерно и

$$D \int_A f(x, t) dt = \int_A D_1 f(x, t) dt.$$

Доказ следи из (10) и (7).

- (18) *Интеграл несвојственог интеграла.* Нека је $A \subset \mathbb{R}^n$, $J \subset \mathbb{R}^m$ m -димензиони квадар и

$$f : J \times A \rightarrow \mathbb{C}$$

непрекидна функција. Ако $\int_A f(x, t) dt$ равномерно конвергира, онда је функција

$$x \mapsto \int_A f(x, t) dt$$

интеграбилна на J и важи

$$\int_J \left(\int_A f(x, t) dt \right) dx = \int_A \left(\int_J f(x, t) dx \right) dt.$$

Доказ следи из Фубинијеве теореме и (8).

- (19) *Несвојствени интеграл несвојственог интеграла.* Нека је $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ и

$$f : A \times B \rightarrow \mathbb{C}$$

непрекидна функција. Претпоставимо да интеграл

$$\int_A f(x, y) dx \quad \text{и} \quad \int_B f(x, y) dy$$

равномерно конвергирају и то први равномерно по $y \in B_0$ за сваки компактан подскуп $B_0 \subset B$, а други по $x \in A_0$ за сваки компактан подскуп $A_0 \subset A$. Претпоставимо да постоји бар један од интеграла

$$\int_A \left(\int_B |f(x, y)| dy \right) dx, \quad \int_B \left(\int_A |f(x, y)| dx \right) dy.$$

Тада важи

$$\int_A \left(\int_B f(x, y) dy \right) dx = \int_B \left(\int_A f(x, y) dx \right) dy.$$

Доказ: Ради једноставности записа, доказаћемо тврђење за $m = n = 1$, $A = [a, \beta]$, $B = [c, \gamma]$.

Нека постоји

$$\int_c^\gamma \left(\int_a^\beta |f(x, y)| dx \right) dy$$

и нека је

$$F(b, y) = \int_a^b f(x, y) dx.$$

Пошто је $|F(b, y)| \leq \int_a^\beta |f(x, y)| dx$ и $\int_c^\gamma \left(\int_a^\beta |f(x, y)| dx \right) dy$ конвергира, из Вајерштрасовог става (13) следи да $\int_c^\gamma F(b, y) dy$ конвергира равномерно по b . Доказ сада следи из (18) и (15), преласком на лимес кад $b \rightarrow \beta^-$.

- (20) **Задатак:** Доказати да низ $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисан са

$$f_n(x) = \begin{cases} n^{-1}, & |x| \leq n \\ 0, & |x| > n \end{cases}$$

униформно конвергира ка 0, али да је

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx = 2.$$

- (21) У Глави 3 смо израчунали *Пуасонов интеграл*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

уз помоћ поларних координата и Фубинијеве теореме (видети (46) на стр. 285). Следећи задатак даје још један начин да се он израчуна.

Приметимо да је због парности подинтегралне функције довољно израчунати интеграл по интервалу $[0, +\infty[$.

Задатак: Уводећи смену $t = xy$ доказати да је

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = y \int_0^{+\infty} e^{-(xy)^2} dx.$$

Помножити обе стране са e^{-y^2} и интегралити их по y на $[0, +\infty[$.
Оправдати и извршити промену поретка интеграције на десној страни.
Прочитати одатле вредност Пуасоновог интеграла.

(22) **Задатак:** Нека је

$$I(t) = \left(\int_0^t e^{-x^2} dx \right)^2 \quad \text{за } t > 0.$$

Оправдати следеће кораке:

$$I'(t) = 2e^{-t^2} \int_0^t e^{-x^2} dx = \int_0^1 2te^{-(1+y^2)t^2} dy = -\frac{d}{dt} \int_0^1 \frac{e^{-(1+y^2)t^2}}{1+y^2} dy$$

и закључити да је

$$I(t) = C - \int_0^1 \frac{e^{-(1+y^2)t^2}}{1+y^2} dy,$$

за неку константу C . Преласком на лимес кад $t \rightarrow 0_+$ доказати да је $C = \pi/4$, а затим, преласком на лимес кад $t \rightarrow +\infty$ доказати да је

$$I(+\infty) = \frac{\pi}{4}, \quad \text{тј.} \quad \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Ово је још један начин да се израчуна Пуасонов интеграл.

(23) *Дирихлеов интеграл.* Неодређени интеграл $\int \frac{\sin x}{x} dx$ није елементарна функција, али је познато да је

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Природан покушај да се овај интеграл израчуна могао би да буде помоћу диференцирања интеграла $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x} dx$ по t , јер тако губимо x у бројиоцу. На жалост, диференцирањем се добија интеграл $\int_0^{+\infty} \cos x dx$ који дивергира. Међутим, мала модификација ове идеје доводи нас до правог метода:

Задатак: Нека је

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xt} dx \quad \text{за } t > 0.$$

Оправдати диференцирање под знаком интеграла и израчунати $F'(t)$, а одатле доказати да је $F(t) = -\operatorname{arctan} t + C$ за неку константу C .
Оправдати комутирање лимеса и интеграла и израчунати

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t).$$

Доказати одатле да је $F(0) = \pi/2$ тражена вредност Дирихлеовог интеграла.

Напомена: За свако $x > 0$ важи

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xt} = 0,$$

али овај лимес *није равномеран* по $x \in [0, +\infty[$ (доказати!). Зато комутирање лимеса и интеграла не може да се докаже директно. Уместо тога, треба доказати да $\frac{\sin x}{x} e^{-xt}$ тежи нули кад $t \rightarrow +\infty$ равномерно по $x \in [\delta, +\infty[$ за свако $\delta > 0$. Затим, за дато $\varepsilon > 0$ треба изабрати довољно мало $\delta > 0$, тако да је

$$\int_0^\delta \frac{\sin x}{x} e^{-xt} dt < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \int_\delta^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xt} dt < \frac{\varepsilon}{2}$$

за довољно велико t .

(24) *Гама функција* или *Ојлеров интеграл друге врсте* је функција

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Пошто из $t^z = e^{z \log t} = e^{x \log t} e^{iy \log t}$ за $z = x + iy$, следи да је $|t^{z-1}| = t^{x-1}$, функција $\Gamma(z)$ је дефинисана ако је дефинисана $\Gamma(x)$, где је $x = \operatorname{Re} z$. Интеграл којим је дефинисана Гама функција има два сингуларитета: 0 и $+\infty$. Пошто је

$$t^{x-1} e^{-t} \sim t^{x-1} \text{ кад } t \rightarrow 0+ \quad \text{и} \quad t^{x-1} e^{-t} \preceq t^{-x-1} \text{ кад } t \rightarrow +\infty,$$

следи да је $\Gamma(z)$ дефинисано за $\operatorname{Re} z > 0$.

(25) За комплексне бројеве z из десне полуравни $\operatorname{Re} z > 0$ важи

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Заиста, из $t^z = e^{z \log t}$ следи

$$\frac{d}{dt}(t^z) = e^{z \log t} \frac{z}{t} = z t^{z-1},$$

па применом формуле парцијалне интеграције добијамо

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} t^z e^{-t} dt = t^z (-e^{-t}) \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} z t^{z-1} (-e^{-t}) dt = z\Gamma(z).$$

Специјално, пошто је

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{+\infty} = 1,$$

из $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$ индукцијом добијамо

$$\Gamma(n) = (n-1)!,$$

што значи да Гама функција уопштава факторијел.

(26) За реалну функцију $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ следећа два услова су еквивалентна:

1. f има следећа својства:

(а) $f(x) > 0$ за све $x > 0$

(б) $f(x+1) = x f(x)$ за све $x > 0$

(в) $f(1) = 1$

(г) f је *логаритамски конвексна*, тј. $\log f$ је конвексна.

2. $f = \Gamma$.

Доказ: Докажимо прво ($2 \Rightarrow 1$), тј. да Гама функција има својства (а)–(г). Својство (а) следи из позитивности подинтегралне функције. Својства (б) и (в) смо доказали у (25). Остаје још да докажемо (г). Нека су $x_1, x_2 > 0$ реални бројеви из домена Гама функције и $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Тада је

$$\begin{aligned} \Gamma(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &= \int_0^{+\infty} t^{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 - 1} e^{-t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} (t^{x_1 - 1} e^{-t})^{\lambda_1} (t^{x_2 - 1} e^{-t})^{\lambda_2} dt \\ &\leq \left(\int_0^{+\infty} t^{x_1 - 1} e^{-t} dt \right)^{\lambda_1} \left(\int_0^{+\infty} t^{x_2 - 1} e^{-t} dt \right)^{\lambda_2} \\ &= \Gamma^{\lambda_1}(x_1) \Gamma^{\lambda_2}(x_2). \end{aligned}$$

Овде смо користили Хелдерову неједнакост

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \int_J |u(x)v(x)| dx \leq \left(\int_J |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_J |v(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

за $p = 1/\lambda_1$, $q = 1/\lambda_2$. Логаритмовањем обе стране доказане неједнакости

$$\Gamma(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \Gamma^{\lambda_1}(x_1) \Gamma^{\lambda_2}(x_2)$$

добивамо (г).

Задатак: Доказати да је функција $\log \Gamma$ строго конвексна.

Докажимо сада ($1 \Rightarrow 2$). Претпоставимо да функција f има особине (а)–(г). Тада је

$$f(x+n) = x(x+1) \cdots (x+n-1)f(x),$$

па је довољно одредити функцију f на интервалу $]0, 1[$ (својство (в) већ одређује $f(1)$). Функција $h(x) = \log f(x)$ је конвексна, па је њен нагиб растућа функција, одакле следи

$$\frac{h(n+1) - h(n)}{(n+1) - n} \leq \frac{h(n+1+x) - h(n+1)}{(n+1+x) - (n+1)} \leq \frac{h(n+2) - h(n+1)}{(n+2) - (n+1)}$$

за $0 < x < 1$. Из (б) следи $h(x+1) = h(x) + \log x$. Специјално, $h(n+1) = \log(n!)$ и $h(n+1+x) = h(x) + \log x(x+1) \cdots (x+n)$. Имајући то у виду, претходне неједнакости постају

$$x \log n \leq h(x) - \log \frac{n!}{x(x+1) \cdots (x+n)} \leq x \log(n+1),$$

односно

$$0 \leq h(x) - \log \frac{n^x n!}{x(x+1) \cdots (x+n)} \leq x \log(1 + n^{-1}).$$

Прелазећи на лимес кад $n \rightarrow \infty$ добијамо

$$h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{n^x n!}{x(x+1) \cdots (x+n)},$$

односно

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x n!}{x(x+1) \cdots (x+n)} \quad \text{за } 0 < x < 1.$$

Добили смо експлицитну формулу за функцију f , што значи да је она једнозначно одређена својствима (а)–(г). Дакле, постоји само једна функција која има та својства. Пошто Γ има та својства, мора да буде $f = \Gamma$.

(27) **Формула**

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x n!}{x(x+1) \cdots (x+n)}$$

коју смо доказали у (26) за $0 < x < 1$ важи за свако x (због $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ и $\Gamma(n+1) = n!$) и позната је под именом *Гаусова формула*.

(28) **Задатак:** Полазећи од

$$e^{-t} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n,$$

доказати да је

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$$

(користити $\int_0^n f(t) dt = \int_0^\infty f(t) \chi_{[0,n]}(t) dt$). Сменом $s = t/n$ у последњем интегралу извести други доказ Гаусове формуле (27).

(29) Ако на десној страни Гаусове формуле (27) напишемо

$$\frac{n!}{x(x+1) \cdots (x+n)} = \frac{1}{x} \frac{1}{(1+x)(1+x/2) \cdots (1+x/n)}$$

и искористимо асимптотске релације

$$n^x \sim (n+1)^x = e^{x \log(n+1)} \quad \text{кад } n \rightarrow \infty,$$

и

$$\begin{aligned} \log(n+1) &= \sum_{k=1}^n (\log(k+1) - \log k) = \sum_{k=1}^n \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \gamma + o(1), \quad \text{кад } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где је

$$\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n+1)\right)$$

Ојлерова константа, добијамо *Вајерштрасову формулу* за Гама функцију:

$$\Gamma(x) = e^{-\gamma x} \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{1 + \frac{x}{n}}.$$

(30) Помоћу $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ Гама функција може да се дефинише за све $x \in \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N} \cup \{0\})$.

Задатак: Доказати да Гаусова (27) и Вајерштрасова (29) формула важе за све $x \in \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N} \cup \{0\})$.

Задатак: Користећи Вајерштрасову формулу и правило диференцирања бесконачног реда доказати да је

$$D^k(\log \Gamma)(x) = (-1)^k(k-1)! \left(\frac{1}{x^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^k} \right).$$

Користећи $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ извести одатле закључак да је Γ функција класе C^∞ .

(31) За Гама функцију важи следећа *формула допуњавања*:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

Доказ: Из Вајерштрасове формуле (29) следи

$$\Gamma(x)\Gamma(-x) = -\frac{1}{x^2} \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)},$$

па је

$$\Gamma(x)(-x)\Gamma(-x) = \frac{\pi}{\pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{(\pi x)^2}{n^2 \pi^2}\right)}.$$

Коришћењем формуле $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$ добијамо

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{(\pi x)^2}{n^2 \pi^2}\right)}.$$

Остаје нам још да докажемо да је

$$\sin x = x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2 \pi^2}\right)$$

(овај израз познат је као *Ојлеров развој синуса*).

Појмимо од $2i \sin nx = e^{inx} - e^{-inx}$, тј.

$$e^{inx} 2i \sin nx = e^{2inx} - 1.$$

Пошто су $e^{-2ik\pi/n}$, $k = 0, \dots, n-1$, нуле полинома $z^n - 1$, па је

$$z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (z - e^{-2ik\pi/n}),$$

за $z = e^{2ix}$ добијамо

$$\begin{aligned} e^{inx} 2i \sin nx &= \prod_{k=0}^{n-1} (e^{2ix} - e^{-2ik\pi/n}) \\ &= \prod_{k=0}^{n-1} e^{i(x-k\pi/n)} (e^{i(x+k\pi/n)} - e^{-i(x+k\pi/n)}) \\ &= 2^n i e^{inx} \prod_{k=0}^{n-1} \sin(x + k\pi/n). \end{aligned}$$

Тиме смо доказали да је

$$\sin nx = 2^{n-1} \sin x \sin(x + \pi/n) \cdots \sin(x + (n-1)\pi/n).$$

Ако поделимо обе стране са $\sin x$ и пустимо да $x \rightarrow 0$ добијамо

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Нека је $n = 2r + 1$ за $r \in \mathbb{N}$. Користећи идентитете

$$\sin(x + k\pi/n) = \sin(\pi - x - k\pi/n) = -\sin(x - (n - k)\pi/n),$$

$$\sin(\alpha - \beta) \sin(\alpha + \beta) = \sin^2(\alpha) - \sin^2(\beta)$$

добијамо

$$\sin nx = (-1)^r 2^{n-1} \sin x \prod_{k=1}^r (\sin^2 x - \sin^2(k\pi/n)).$$

Користећи $\prod_{k=1}^r \sin^2 \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$ добијамо

$$\sin nx = n \sin x \prod_{k=1}^r \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2(k\pi/n)}\right),$$

односно

$$\sin x = n \sin(x/n) \prod_{k=1}^r \left(1 - \frac{\sin^2(x/n)}{\sin^2(k\pi/n)}\right) = n \sin(x/n) \prod_{k=1}^{\infty} (1 - s(n, k, x)),$$

где је

$$s(n, k, x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{\sin^2(k\pi/n)}, & k \leq r \\ 0 & k > r. \end{cases}$$

Преласком на $\lim_{n \rightarrow \infty}$ добијамо Ојлеров развој синуса.

(32) **Задатак:** Доказати да постоје развоји у производ, слични Ојлеровим развојима синуса,

$$\cos x = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right)$$

за косинус и

$$\sinh x = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right), \quad \cosh x = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right)$$

за хиперболички синус и косинус.

(33) Из Ојлеровог развоја синуса добијамо

$$\log |\sin x| = \log |x| + \sum_{n=1}^{\infty} \log \left|1 + \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right|,$$

одакле, диференцирањем обе стране и свођењем разломка на десној страни на збир простих, добијамо развој котангенса у ред

$$\cot x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x - n\pi} + \frac{1}{x + n\pi}\right).$$

Слично, из (32) добијамо развој хиперболичког котангенса у ред

$$\coth x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 + n^2\pi^2}.$$

(34) Из (31) следи да је $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Пошто сменом $s^2 = t$ добијамо

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds,$$

овиме смо још једном израчунали вредност Пуасоновог интеграла (21).

(35) **Задатак:** Доказати да је

$$\Gamma(x) = \frac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(x/2) \Gamma((x+1)/2).$$

Доказати *Лежандрову формулу*

$$\Gamma(x) \Gamma(x+1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}} \Gamma(2x).$$

Овај задатак може да се реши директно (сменама променљиве у интегралима који се у њему појављују) или помоћу (26).

(36) Осим (26), постоји и следећа функционална карактеризација Гама функције: то је јединствена функција $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ класе C^1 која има својства

- (а) $f(x+1) = x f(x)$;
- (б) $f(x) f(x+1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}} f(2x)$;
- (в) $f(x) f(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$.

Заиста, Γ функција задовољава својства (а)–(в): својство (а), као што смо видели и у (26), следи из парцијалне интеграције, својство (б) је формула допуњавања (31), а (в) Лежандрова формула (35).

Претпоставимо да функција f задовољава (а)–(в) и докажимо да је $f \equiv \Gamma$. Нека је функција $g :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана са

$$f(x) = g(x) \Gamma(x).$$

Тада је

$$g(x+1) = g(x) \quad \text{и} \quad g(x) g(x+1/2) = g(2x).$$

Сем тога, функција g је класе C^1 и њен десни лимес у нули је $g(0_+) = g(1)$, па g може да се продужи до непрекидне функције на интервалу $[0, +\infty[$. Нека је $L(x) = \log g(x)$ за $g \geq 0$. Тада је L класе C^1 и задовољава

$$L(x+1) = L(x) \quad \text{и} \quad L(x) + L(x+1/2) = L(2x).$$

Нека је $h(x) = L'(x)$ први извод функције L . Пошто је L класе C^1 , h је непрекидна функција. Сем тога, она задовољава

$$h(x+1) = h(x) \quad \text{и} \quad h(x) + h(x+1/2) = h(2x).$$

Ако у другом идентитету уместо x ставимо прво $x/2$, а затим $(x+1)/2$ и саберемо добијене једнакости, добијамо

$$h(x) = \frac{1}{4} [h(x/4) + h((x+1)/4) + h((x+2)/4) + h((x+3)/4)].$$

Понављањем овог поступка добијамо

$$h(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} h((x+k)/2^n).$$

Израз на десној страни је интегрална сума за $\int_0^1 h(t) dt$. Преласком на лимес, кад $n \rightarrow \infty$, добијамо

$$h(x) = \int_0^1 h(t) dt = L(1) - L(0) = 0$$

(због 1–периодичности функције L). Пошто је $h = L'$ одатле следи да је функција L , а самим тим и g , константа. Из $g(x)g(x+1/2) = g(2x)$ следи $g(1/2) = 1$, па је $g \equiv 1$, што значи $f \equiv \Gamma$.

- (37) *Бета функција* или *Ојлеров интеграл прве врсте* је функција две променљиве

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt.$$

Интеграл на десној страни има две сингуларне тачке -0 и 1 . Пошто је

$$t^{x-1}(1-t)^{y-1} \sim t^{x-1} \text{ кад } t \rightarrow 0+ \text{ и } t^{x-1}(1-t)^{y-1} \sim (1-t)^{y-1} \text{ кад } t \rightarrow 1-,$$

Бета функција је дефинисана за $x > 0$ и $y > 0$.

- (38) Сменом $s = 1 - t$ доказујемо симетричност Бета функције:

$$B(x, y) = B(y, x).$$

- (39) Из формуле парцијалне интеграције следи

$$B(x, y) = \frac{x-1}{x+y-1} B(x-1, y).$$

Заиста,

$$\begin{aligned} B(x, y) &= \frac{x-1}{y} \int_0^1 t^{x-2}(1-t)^y dt \\ &= \frac{x-1}{y} \int_0^1 t^{x-2}(1-t)^{y-1}(1-t) dt \\ &= \frac{x-1}{y} (B(x-1, y) - B(x, y)), \end{aligned}$$

одакле, решавањем по $B(x, y)$, добијамо тражену формулу.

Из симетричности Бета функције (38) закључујемо да важи и

$$B(x, y) = \frac{y-1}{x+y-1} B(x, y-1).$$

- (40) Ако је $n \in \mathbb{N}$, из (39) следи

$$B(x, n) = \frac{(n-1)!}{x(x+1) \cdots (x+n-1)}.$$

Специјално, за $m, n \in \mathbb{N}$ је

$$B(m, n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}.$$

- (41) **Задатак:** Сменом $t = \log \frac{1}{s}$ у интегралу којим се дефинише Гама функција доказати формулу

$$\Gamma(x) = \int_0^1 \log^{x-1} (1/s) ds.$$

Доказати да низ функција

$$f_n : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty[, \quad f_n(s) = n(1 - s^{1/n})$$

монотono конвергира ка $f_\infty(s) = \log s$. Применом Динијеве теореме (стр. 131) доказати да је

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{x-1} \int_0^1 (1 - s^{1/n})^{x-1} ds = \lim_{n \rightarrow \infty} n^x B(x, n).$$

Извести одатле, помоћу (40), други доказ Гаусове формуле (27).

- (42) Сменом променљиве $t = \frac{s}{1+s}$ у интегралу којим је дефинисана Бета функција добијамо још један израз за њу:

$$B(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{s^{x-1}}{(1+s)^{x+y}} ds.$$

- (43) *Веза између Гама и Бета функције.* Функције Гама и Бета су повезане следећом формулом:

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

Доказ: Нека је $y > 0$ фиксирано. Непосредно се проверава да функција

$$f(x) = \frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)} B(x, y)$$

задовољава (26).

- (44) **Задатак:** Доказати да је

$$B(x, 1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

за $0 < x < 1$. Специјално, извести одатле да је $B(1/2, 1/2) = \pi$.

- (45) Сменом $t = \sin^2 \theta$ у интегралу

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

добијамо израз

$$B(x, y) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1} \theta \cos^{2y-1} \theta d\theta.$$

Специјално, за $x = y = 1/2$ израчунавамо

$$B(1/2, 1/2) = \pi.$$

Одатле и из (43) следи

$$\Gamma^2(1/2) = B(1/2, 1/2) = \pi.$$

То је, уз (21), (34) и (46) на стр. 285, још један начин да се израчуна Пуасонов интеграл.

- (46) **Задатак:** Доказати да је

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{\lambda-1} \theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^{\lambda-1} \theta d\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(\lambda/2)}{\Gamma((\lambda+1)/2)}.$$

Задатак: Доказати Ојлерову формулу

$$\int_0^1 \frac{x^r dx}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^1 \frac{x^{r+s} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{s(r+1)} \frac{\pi}{2} \quad \text{за } s > 0.$$

Упутство: доказати да се сменом $x^s = \cos \theta$ Ојлерова формула своди на

$$\int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{(r+s)/s-1} d\theta \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{(r+1)/s} d\theta = \frac{s}{1+r} \frac{\pi}{2}.$$

Задатак: Доказати да је $1-x^{2s} \sim -2s \log x$ кад $s \rightarrow 0_+$ и одатле, користећи Ојлерову формулу из претходног задатка, доказати да је

$$\left(\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\log x}} \right)^2 = \pi.$$

Сменом $y = \sqrt{-\log x}$ у последњем интегралу доказати

$$\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

На овај начин је први пут израчунао Пуасонов интеграл – тако га је израчунао Лаплас 1774. године.

(47) **Задатак:** Нека су $a, b > 0$ и $-1 < c < 1$. Доказати:

(а) $\int_0^{\pi/2} \sin^{a-1} x \cos^{b-1} x dx = \frac{\Gamma(a/2)\Gamma(b/2)}{2\Gamma((a+b)/2)}$;

(б) $\int_0^{\pi/2} \sin^{a-1} x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{a-1} x dx$;

(в) $\int_0^{\pi/2} \tan^{c-1} x dx = \frac{1}{2} \Gamma((1+c)/2) \Gamma((1-c)/2) = \frac{\pi}{2 \sin(c\pi/2)}$.

(48) **Задатак:** Доказати

(а) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} = \frac{\pi}{n \sin(\pi/n)}$;

(б) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$;

(в) $\int_0^{+\infty} \frac{x^{\lambda-1}}{x+1} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi\lambda)}$ за $0 < \lambda < 1$.

(49) Интеграл

$$R(a) = \int_a^{a+1} \log \Gamma(x) dx$$

називају се Рабеовим интегралима. Ако у

$$R(0) = \int_0^1 \log \Gamma(x) dx$$

уведемо смену $t = 1 - x$ добијамо други израз за овај интеграл

$$R(0) = \int_0^1 \log \Gamma(1-x) dx.$$

Сабирањем последња два израза добијамо

$$2R(0) = \int_0^1 \log(\Gamma(x)\Gamma(1-x)) dx.$$

Применимо сада формулу допуњавања (31) и уведемо смену $\pi x = s$. Добијамо

$$R(0) = \frac{1}{2} \log \pi - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \log \sin s ds.$$

Интеграл

$$J = \int_0^{\pi/2} \log \sin s \, ds$$

назива се *Ојлеровим интегралом* и израчунава помоћу смене $s = 2t$:

$$J = 2 \int_0^{\pi/4} \log \sin(2t) \, dt = \frac{\pi}{2} \log 2 + 2 \int_0^{\pi/4} \log \sin t \, dt + 2 \int_0^{\pi/4} \log \cos t \, dt.$$

Ако у последњем интегралу уведемо смену $t = \frac{\pi}{2} - u$, добијамо

$$\int_0^{\pi/4} \log \cos t \, dt = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \log \sin t \, dt,$$

па закључујемо да је

$$J = \frac{\pi}{2} \log 2 + 2J,$$

односно $J = -\frac{\pi}{2} \log 2$.

Тако смо добили резултат

$$R(0) = \log \sqrt{2\pi}.$$

Задатак: Доказати да је $\frac{d}{da} R(a) = \log a$ и закључити да је

$$R(a) = a(\log a - 1) + \log \sqrt{2\pi}.$$

(50) Из (43) и $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ следи

$$\Gamma(y) - B(x, y) = \frac{\Gamma(y+1)}{\Gamma(x+y)} \cdot \frac{\Gamma(x+y) - \Gamma(x)}{y}.$$

Ако пређемо у овом изразу на лимес кад $y \rightarrow 0$, добијамо

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \lim_{y \rightarrow 0} (\Gamma(y) - B(x, y)).$$

Ако сада напишемо, као у (42), $B(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{y-1}}{(1+t)^{x+y}} dt$ и $\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} t^{y-1} e^{-t} dt$, добијамо

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \lim_{y \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} t^{y-1} \left(e^{-t} - \frac{1}{(1+t)^{x+y}} \right) dx.$$

Преласком на лимес под знаком интеграла добијамо *Кошијеву формулу* за логаритамски извод Гама функције:

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \int_0^{+\infty} \left(e^{-t} - \frac{1}{(1+t)^x} \right) \frac{dt}{t}.$$

Задатак: Оправдати овај гранични прелаз.

(51) Ако у дефиницији (37) Бета функције направимо смену $t = e^{-s}$ добијамо израз

$$B(x, y) = \int_0^{+\infty} e^{-xs} (1 - e^{-s})^{y-1} ds.$$

Користећи овај израз уместо (42) у извођењу у (50) добијамо још једну формулу за логаритамски извод Гама функције:

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{1 - e^{-t}} \right) dt.$$

Одатле, интеграцијом по x добијамо израз

$$\log \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \left((x-1)e^{-t} - \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{1 - e^{-t}} \right) \frac{dt}{t}.$$

(52) **Задатак:** Доказати да се Ојлерова константа (видети (29)) може изразити на следећи начин преко интеграла:

$$(a) \quad \gamma = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+t} - e^{-t} \right) \frac{dt}{t};$$

$$(б) \quad \gamma = \int_0^1 (1 - e^{-t}) \frac{dt}{t} - \int_1^{\infty} e^{-t} \frac{dt}{t}.$$

(53) Функција

$$\zeta(s, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^s}$$

је дефинисана за $s > 1$ и $x > 0$ и

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \zeta(s, x) = \zeta(s),$$

где је

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Риманова зета-функција.

(54) **Задатак:** Испитати функцију $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ и скицирати њен график.

(55) **Задатак:** Развијањем подинтегралне функције у ред доказати

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt = \Gamma(s)\zeta(s) \quad \text{за } s > 1$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t + 1} dt = \Gamma(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{за } s > 0.$$

Доказати одатле да за $s > 1$ важи

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t + 1} dt = (1 - 2^{1-s})\Gamma(s)\zeta(s).$$

Задатак: Доказати да је

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1} e^{-tx}}{1 - e^{-t}} dt = \Gamma(s)\zeta(s, x) \quad \text{за } s > 1, x > 0$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{xt^{s-1}}{e^t - x} dt = \Gamma(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^s} \quad \text{за } -1 \leq x < 1, s > 0 \quad \text{или } x = 1, s > 1.$$

Извести из овог задатка тврђење претходног.

Задатак: Користећи претходни задатак и релацију

$$\Gamma(s) = (s-1)\Gamma(s-1), \quad \text{тј.} \quad \frac{1}{s-1} = \frac{\Gamma(s-1)}{\Gamma(s)}$$

доказати

$$\zeta(s, x) - \frac{1}{s-1} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} t^{s-1} \left(\frac{e^{-xt}}{1 - e^{-t}} - \frac{e^{-t}}{t} \right) dt \quad \text{за } s > 1, x > 0.$$

Доказати да је оправдано израчунати лимес овог израза кад $s \rightarrow 1+0$ мењајући поредак лимеса и интеграла и закључити одатле да је

$$\lim_{s \rightarrow 1+0} \left(\zeta(s, x) - \frac{1}{s-1} \right) = -\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}$$

(упоредити са задатком у (30)).

- (56) **Задатак:** Користећи задатке у (52) и (53) доказати следећи израз за Ојлерову константу:

$$\gamma = \lim_{s \rightarrow 1+0} \left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1} \right)$$

- (57) Приметимо да је Риманова зета-функција дефинисана и за комплексне вредности променљиве s , ако је $\operatorname{Re} s > 1$.

Задатак: Доказати да функција $\zeta(s)$ може да се представи као Стилтјесов интеграл

$$\zeta(s) = \int_{1-\varepsilon}^{+\infty} \frac{d[x]}{x^s}, \quad \text{за } \operatorname{Re} s > 1,$$

где је $0 < \varepsilon < 1$ и $[x]$ цео део броја x . Применом парцијалне интеграције доказати да је

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^{+\infty} \frac{d\{x\}}{x^{s+1}},$$

где је $\{x\} = x - [x]$ разломљени део броја x . Приметимо да је десна страна добро дефинисана ако је $\operatorname{Re} s > 0$ и $s \neq 1$, па се може узети као дефиниција продужења функције ζ на десну полураван $\operatorname{Re} s > 0$ без тачке $s = 1$.

- (58) Ако израчунамо интеграл израза за $\log \Gamma$ (51) по интервалу $[a, a+1]$ и променимо поредак интеграције, добијамо нови израз за Рабеов интеграл (49) и

$$R(a) = \int_a^{a+1} \log \Gamma(x) dx = \int_{-\infty}^0 \left(\frac{e^{ax}}{x} - \frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{2a-1}{2} e^x \right) \frac{dx}{x}.$$

Ако овај израз одузмемо од израза (51) за $\log \Gamma$ и применимо формулу

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^{ax} - e^x}{2} \frac{dx}{x} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-ax}}{2} \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \log a$$

која следи из (53) на стр. 286, добијамо

$$\log \Gamma(a) - R(a) - \frac{1}{2} \log a = \int_{-\infty}^0 \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \right) \frac{e^{ax}}{x} dx.$$

Ако у развоју хиперболичког котангенса у ред (33) ставимо $\frac{x}{2}$ уместо x добијамо развој функције

$$\frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 4n^2\pi^2}$$

одакле следи да је подинтегрална функција у претходном интегралу

$$\left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \right) \frac{e^{ax}}{x} = 2e^{ax} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 4n^2\pi^2}.$$

Ред на десној страни можемо да интегралимо члан по члан. Сваки од интеграла

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^{ax}}{x^2 + 4n^2\pi^2} dx$$

можемо да израчунамо развијајући функцију $\frac{1}{x^2 + 4n^2\pi^2}$ у степени (геометријски ред) и интегралећи добијени ред члан по члан. Интеграл сваког члана се лако израчунава, пошто се ради о израчунавању интеграла

$$\int_{-\infty}^0 e^{ax} x^{2n} dx = \frac{2n!}{a^{2n+1}}.$$

Одатле добијамо формулу

$$\log \Gamma(a) = \log \sqrt{2\pi} + \frac{2a-1}{2} \log a - a + \sum_{n=1}^m \frac{B_{2n}}{(2n-1)2na^{2n-1}} + \theta \frac{B_{2(m+1)}}{(2m+1)2ma^{2m+1}},$$

за неко $\theta \in]0, 1[$, где је

$$B_{2n} = (-1)^{n-1} \frac{2(2n!)}{(2\pi)^{2n}} \zeta(2n).$$

(ови бројеви називају се *Бернулијевим бројевима*; ове бројеве смо већ сусрели у Глави 1, њих ћемо детаљније изучити у Глави 5). Формула коју смо добили назива се *Стирлингвом формулом*. Специјално, за $m = 0$ ова формула има облик

$$\log \Gamma(a) = \log \sqrt{2\pi} + \frac{2a-1}{2} \log a - a - \frac{\theta}{12a}.$$

Имајући у виду да је $\Gamma(n+1) = n!$, добијамо класичну Стирлингкову формулу за факторијел

$$n! = \sqrt{2n\pi} n^n e^{-n} (1 + O(n^{-1/2})) \quad \text{кад } n \rightarrow \infty.$$

- (59) Уопштење Риманове зета-функције је *Дирихлеов ред* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-s}$, где је c_n низ у \mathbb{C} и $s \in \mathbb{C}$.

Задатак: Доказати да постоји $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ са особиним да Дирихлеов ред апсолутно конвергира у полуравни $\operatorname{Re} z > x_0$, али не и у полуравни $\operatorname{Re} z < x_0$. Доказати да, за тако изабрано x_0 , Дирихлеов ред равномерно конвергира у полуравни $\operatorname{Re} z \geq x_0 + \varepsilon$ за свако $\varepsilon > 0$.

- (60) *Ојлеров производ.* Риманова зета-функција може да се искористи за доказ чињенице да постоји бесконачно много прости бројева¹. Претпоставимо супротно: да су p_1, \dots, p_k сви прости бројеви. Тада би из Основног става аритметике следило да сваки природан број n може да се напише у облику

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k},$$

¹Наравно, постоји и елементарни доказ, за који се знало још у античко доба: ако су p_1, p_2, \dots, p_k прости бројеви, онда је и $p_1 p_2 \dots p_k + 1$ прост, па их не може бити коначно много. Међутим, Ојлеров доказ који овде дајемо је поучан, јер доводи у везу просте бројеве са зета-функцијом.

где су $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ ненегативни цели бројеви. Одатле бисмо добили да за свако s важи

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_k=0}^{\infty} \frac{1}{(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k})^s} \\ &= \left(\sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \frac{1}{(p_1^{\alpha_1})^s} \right) \cdots \left(\sum_{\alpha_k=0}^{\infty} \frac{1}{(p_k^{\alpha_k})^s} \right) \\ &= \prod_{j=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_j^s} \right)^{-1}.\end{aligned}$$

У последњем кораку користили смо формулу за збир геометријског реда. Добијени израз је коначан производ, дакле коначан број за свако s , док ред $\zeta(s)$ дивергира за $s = -1$. Ова контрадикција показује да има бесконачно много простих бројева.

Да би добијена формула била тачна, морамо да пређемо на лимес кад $k \rightarrow \infty$. Другим речима, ако је $\operatorname{Re} s > 1$, из конвергенције реда $\sum \frac{1}{n^s}$ и производа² $\prod \left(1 - \frac{1}{n^s} \right)$, на основу претходног рачуна, следи да разлика

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \prod_{j=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_j^s} \right)^{-1} \right|,$$

где је p_1, \dots, p_k првих k простих бројева, тежи нули кад $k \rightarrow \infty$.

Тако добијамо *Ојлерову формулу*

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-1},$$

где је на десној страни бесконачни производ по свим простим бројевима p . Некада се она записује у облику

$$\log \zeta(s) = - \sum_p \log(1 - p^{-s}) = \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{-ns}}{n}.$$

(61) Нека је, за $x \in \mathbb{R}$, $\pi(x)$ број простих бројева који нису већи од x ; другим речима

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1,$$

²Из $\log(1+x) \sim x$ кад $x \rightarrow 0$ следи да, ако ред $\sum a_n$ апсолутно конвергира, онда и ред $\sum \log(1+a_n)$, а тиме и производ $\prod(1+a_n)$, конвергира.

где је на десној страни сума по свим простим бројевима p , $p \leq x$. Из Ојлерове формуле (60) следи да за $s > 1$ важи

$$\begin{aligned} \log \zeta(s) &= - \sum_p \log \left(1 - \frac{1}{p^s} \right) \\ &= - \sum_{n=2}^{\infty} (\pi(n) - \pi(n-1)) \log \left(1 - \frac{1}{n^s} \right) \\ &= - \sum_{n=2}^{\infty} \pi(n) \left[\log \left(1 - \frac{1}{n^s} \right) - \log \left(1 - \frac{1}{(n+1)^s} \right) \right] \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \pi(n) \int_n^{n+1} \frac{s}{x(x^s-1)} dx. \end{aligned}$$

Одатле добијамо следећу везу између функција ζ и π :

$$\log \zeta(s) = s \int_2^{+\infty} \frac{\pi(x)}{x(x^s-1)} dx.$$

(62) **Задатак:** Нека је $\operatorname{Re} s > 1$. Доказати да је

$$(\zeta(s))^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s},$$

где је $d(n)$ број делитеља природног броја n , укључујући и n и 1 и општије, да је

$$(\zeta(s))^k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_k(n)}{n^s},$$

где је $d_k(n)$ број начина да се природни број n напише као производ k природних бројева.

(63) Нека је $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ непрекидна функција и

$$I(f) = \int_0^x f(t) dt.$$

Пошто је интеграл непрекидна функција по горњој граници, I је линеарно пресликавање $I : C(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R})$, па је дефинисано пресликавање

$$I^n = \underbrace{I \circ \dots \circ I}_{n \text{ пута}} : C(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R}),$$

за $n \in \mathbb{N}$. Користећи индукцију, уз помоћ формуле парцијалне интеграције закључујемо да је

$$I^n(f) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t) dt.$$

Имајући у виду (47) на 206. страни, важи

$$D^n \circ I^n = \operatorname{Id} : C(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R}),$$

где је D^n n -ти извод, па је

$$I^n = (D^n)^{-1},$$

што оправдава дефиницију

$$D^{-n} := I^n \quad \text{за } n \in \mathbb{N}.$$

Тиме смо дефинисали *извод реда n* за свако $n \in \mathbb{Z}$.

Пошто Гама функција уопштава факторијел, израз за I^n можемо да уопштимо за произвољно $\nu > 0$:

$$I^\nu := \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt,$$

а тиме и

$$D^{-\nu} := I^\nu \quad \text{за } \nu \in \mathbb{Z} \cup [0, +\infty[.$$

На крају, за преостале вредности ν , дакле за $\nu < 0$, дефинишемо

$$D^{-\nu} = D^{-m}(D^{m-\nu}),$$

где је $m \in \mathbb{Z}$ и $m - \nu > 0$. Тако смо дефинисали *извод реда ν* за свако $\nu \in \mathbb{R}$. Оператор D^ν се назива *оператором разломљеног диференцирања*. Слично се дефинише и *оператор разломљене интеграције* I^ν за $\nu \in \mathbb{R}$.

(64) *Лапласова трансформација* интеграбилне функције $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ је функција

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad s \in \mathbb{C}.$$

Домен функције $\mathcal{L}(f)$ је скуп комплексних бројева s за које интеграл на десној страни конвергира. Некада се ова трансформација назива и *једностраном Лапласовом трансформацијом*, док се

$$\mathcal{B}(f)(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad s \in \mathbb{C}$$

назива *двостраном Лапласовом трансформацијом*. Уместо $\mathcal{L}(f)(s)$ некад пишемо и $\mathcal{L}(f(t))(s)$ уколико желимо да наведемо експлицитни облик функције f , при чему имамо на уму да се ради о изразу који зависи само од s , а не и од t ; нпр. $\mathcal{L}(e^{-t})(s)$ је Лапласова трансформација функције $f(t) = e^{-t}$.

Следећа својства Лапласове трансформације се лако проверавају (задатак!):

- $\mathcal{L}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{L}(f) + \mu \mathcal{L}(g)$ за комплексне константе λ, μ (линеарност);
- $\frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}(f)(s) = (-1)^n \mathcal{L}(t^n f(t))(s)$ (n -ти извод Лапласове трансформације);
- $\mathcal{L}(f^{(n)})(s) = s^n \mathcal{L}(f)(s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^j f^{(j)}(0)$ (Лапласова трансформација n -тог извода);

кад год су Лапласове трансформације које учествују у овим изразима дефинисане.

Лапласова трансформација има улогу у решавању диференцијалних једначина. Илустроваћемо то на једноставном примеру линеарне диференцијалне једначине

$$y'(t) + \lambda y(t) = q(t).$$

Ако означимо са Y Лапласову трансформацију (непознате) функције y , а са Q Лапласову трансформацију дате функције q , горња једначина се трансформише у

$$sY(s) + \lambda Y(s) = Q(s)$$

(користили смо правило диференцирања Лапласове трансформације, наведено више, за $n = 1$). Ово је сада алгебарска једначина по Y , коју лако можемо да решимо:

$$Y(s) = \frac{Q(s)}{s + \lambda},$$

тако да се решавање полазне диференцијалне једначине своди на тражење функције чија је Лапласова трансформација израз на десној страни, тј. тражење *инверзне Лапласове трансформације*

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}((s + \lambda)^{-1}Q(s)) = \mathcal{L}^{-1}((s + \lambda)^{-1}\mathcal{L}(q)(s)).$$

Тражење инверзне Лапласове трансформације некад укључује методе Комплексне анализе и није увек једноставан проблем, али често може да доведе до решења полазне диференцијалне једначине (јасно је да смо овде узели линеарну једначину првог реда само да бисмо илустровали метод на примеру са једноставним записом).

Задатак: Доказати да је

$$\mathcal{L}^{-1}((s^{-\nu}\mathcal{L}(q)(s))) = I^{\nu}(q),$$

где је I^{ν} оператор разломљене интеграције (63).

- (65) *Фуријеова трансформација.* Нека је $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$. *Фуријеова трансформација* или *Фуријеов интеграл* функције f је специјални случај двостране Лапласове трансформације (64) за чисто имагинарни аргумент $s = ix$

$$\widehat{f}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-itx} dt.$$

нормализоване³ мултипликативним фактором $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Под интегралом у овој дефиницији се подразумева $\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T$ (слично као за суме код Фуријеових редова у (355) у Глави 1).

Задатак: Доказати да је \widehat{f} непрекидна функција. Општије, доказати да из

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x^k f(x)| dx < +\infty$$

следи да је \widehat{f} функција класе C^k и да је

$$D^k \widehat{f}(x) = \widehat{M^k f},$$

³Ова нормализација је ствар договора. Некад се под Фуријеовом трансформацијом подразумева претходни интеграл без $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Неке формуле у Фуријеовој анализи се лепше записују уколико се усвоји нормализација, а неке без ње. Избор је, дакле, ствар укуса (видети такође (4) на стр. 357.)

где је $(Mf)(x) := -ixf(x)$ и $M^k = M \circ \dots \circ M$. Ова формула установљава дуалност множења и диференцирања (што је дуалност положаја и импулса у квантној физици).

Фуријеова трансформација се дефинише и за функције n променљивих:

$$\widehat{f}(x_1, \dots, x_n) := \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{-i(t_1 x_1 + \dots + x_n t_n)} dt_1 \dots dt_n.$$

Претходни задатак има следеће важно уопштење:

Задатак: За ненегативне целе бројеве $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ и $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ дефинишемо

$$D_\alpha := \left(\frac{1}{\sqrt{1}} \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{1}{\sqrt{1}} \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n}.$$

Полиному који зависи од n променљивих $\zeta := (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$

$$p(\zeta) = \sum_{\alpha} c_\alpha \zeta^\alpha, \quad \text{где је } \zeta^\alpha := \zeta_1^{\alpha_1} \dots \zeta_n^{\alpha_n}, \quad c_\alpha \in \mathbb{C}$$

придружимо *линеарни диференцијални оператор са константним коефицијентима*

$$p(D) = \sum_{\alpha} c_\alpha D_\alpha.$$

Ако је $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ функција за коју је

$$\sup_{\alpha, \beta} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|x^\beta D_\alpha f\| < +\infty,$$

доказати да је

$$\widehat{P(D)f} = P\widehat{f}(t), \quad \widehat{P}f = P(-D)\widehat{f}$$

И овај задатак показује да Фуријеова трансформација успоставља дуалност диференцирања и множења.

Важно је напоменути да је услов о ограничености $x^\beta D_\alpha f$ суштински. Наводимо следећи пример из [19]. Нека је $\mathbb{C}[\zeta_1, \dots, \zeta_n]$ прстен полинома n променљивих над пољем комплексних бројева. Овај прстен је изоморфан прстену $\mathbb{C}[D_1, \dots, D_n]$ линеарних диференцијалних оператора са константним коефицијентима (D_j је парцијални извод по ζ_j). Заиста, ова два прстена се формално разликују само у ознаци променљивих, па пресликавање $\zeta_j \mapsto D_j$ индукује изоморфизам.

Прстен $\mathbb{C}[\zeta_1, \dots, \zeta_n]$ може да се схвати и као модул над $\mathbb{C}[\zeta_1, \dots, \zeta_n]$ (сваки прстен је модул над самим собом), али и као модул над прстеном $\mathbb{C}[D_1, \dots, D_n]$. Ови модули нису изоморфни (иако одговарајући прстени јесу). Заиста, у другом модулу постоје $r \neq 0$ из прстена и $m \neq 0$ из модула такви да је $r \cdot m = 0$ (нпр. $D_1^3(\zeta_1^2) = 0$), док у првом модулу оваква релација не може да важи, пошто је прстен полинома прстен без делитеља нуле.

Простор функција које задовољавају услов претходног задатка назива се *Шварцовим простором* у \mathbb{R}^n и означава са \mathcal{S}_n . Претходни

задатак показује да је модул \mathcal{S}_n над прстеном $\mathbb{C}[\zeta_1, \dots, \zeta_n]$ изоморфан модулу \mathcal{S}_n над прстеном $\mathbb{C}[D_1, \dots, D_n]$ и да Фуријеова трансформација остварује тај изоморфизам.

- (66) **Задатак:** Доказати да је Фуријеова трансформација функције $t \mapsto f(\lambda t)$ функција $x \mapsto \lambda^{-1} \widehat{f}(\lambda^{-1}x)$.

Задатак: Доказати да је Фуријеова трансформација функције $t \mapsto f(t - t_0)$ за фиксирану константу $t_0 \in \mathbb{R}$ функција $x \mapsto e^{-t_0 x} \widehat{f}(x)$.

Задатак: Нека је $a > 0$. Наћи Фуријеову трансформацију функције

$$\Lambda_a(x) := \begin{cases} a^{-1}(1 - |x|a^{-1}), & |x| \leq a \\ 0, & x > a. \end{cases}$$

Задатак: Нека је $a > 0$. Наћи Фуријеову трансформацију функције

$$\chi_a(x) := \begin{cases} (2a)^{-1}, & |x| \leq a \\ 0, & x > a \end{cases}$$

и функција $\chi_a(x) \cos x$, $\chi_a(x+a) - \chi_a(x-a)$ и $\chi_a(x+2a) - \chi_a(x-2a)$.

- (67) **Конволуција** локално интегралних функција $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ и $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ дефинисана је са

$$u * v(x) := \int_{\mathbb{R}} u(t)v(x-t) dt,$$

када интеграл на десној страни постоји.

Задатак: Доказати да је конволуција добро дефинисана у сваком од следећих случајева

(а) Интеграл $\int_{\mathbb{R}} |u(t)|^2 dt$ и $\int_{\mathbb{R}} |v(t)|^2 dt$ конвергирају.

(б) Интеграл $\int_{\mathbb{R}} |u(t)| dt$ конвергира, а функција v је ограничена.

(в) Једна од функција u , v има компактан носач.

- (68) **Задатак:** Доказати следећу везу конволуције и Лапласове трансформације:

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g).$$

- (69) **Задатак:** Доказати следеће везе конволуције и Фуријеове трансформације (65):

$$\widehat{f * g} = \sqrt{2\pi} \widehat{f} \cdot \widehat{g}, \quad \widehat{f \cdot g} = \sqrt{2\pi} \widehat{f} * \widehat{g}.$$

- (70) **Задатак:** Нека је функција $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ локално интегрална, а $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ функција класе C^m са компактним носачем. Доказати да је

$$\frac{d^k}{dx^k}(u * v) = u * \frac{d^k}{dx^k}v$$

за $k \leq m$.

- (71) **Комутативност конволуције.** Ако је $u * v$ дефинисано, онда је $u * v = v * u$. Доказ је једноставна последица смене променљиве $y = x - t$.

- (72) **Апроксимација јединице.** Нека фамилија функција $K_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ задовољава следеће услове:

- $(\forall \lambda)(\forall x) K_\lambda(x) \geq 0$
- $(\forall \lambda) \int_{\mathbb{R}} K_\lambda(x) dx = 1$

- $\lim_{\lambda \rightarrow \omega} \int_V K_\lambda(x) dx = 1$ за произвољну околину V тачке $0 \in \mathbb{R}$.

Последњи услов еквивалентан је услову

- $\lim_{\lambda \rightarrow \omega} \int_{\mathbb{R} \setminus V} K_\lambda(x) dx = 0$ за произвољну околину нуле V .

Фамилија K_λ назива се *апроксимацијом јединице* или *језгром δ -типа* у тачки ω .

Нека је ограничена функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ равномерно непрекидна на интервалу $J \subset \mathbb{R}$ и нека је K_λ апроксимација јединице у тачки ω . Тада је

$$\lim_{\lambda \rightarrow \omega} f * K_\lambda(x) = f(x)$$

равномерно на J .

Доказ: Нека је $\varepsilon > 0$. Пошто је f равномерно непрекидна, постоји $\delta > 0$ са особиним

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Користећи комутативност конволуције (71) и особине апроксимације јединице добијамо

$$\begin{aligned} |f * K_\lambda(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(x-t)K_\lambda(t) dt - f(x) \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}} (f(x-t) - f(x))K_\lambda(t) dt \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x-t) - f(x)|K_\lambda(t) dt \\ &= \left(\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{+\delta} + \int_{+\delta}^{+\infty} \right) |f(x-t) - f(x)|K_\lambda(t) dt \\ &< \varepsilon \int_{-\delta}^{+\delta} K_\lambda(t) dt + 2\|f\|_\infty \int_{\mathbb{R} \setminus]-\delta, \delta[} K_\lambda(t) dt. \end{aligned}$$

Последњи сабирак тежи нули кад $\lambda \rightarrow \omega$, због трећег својства апроксимације јединице, одакле следи да, ако је λ у довољно малој околини тачке ω , за све x важи

$$|f * K_\lambda(x) - f(x)| < 2\varepsilon.$$

(73) **Задатак:** Применом Тврђења (72) на

$$K_n(x) = \begin{cases} c_n(1-x^2)^n, & \text{за } |x| \leq 1 \\ 0, & \text{за } |x| > 1, \end{cases}$$

за повољно изабрано c_n и $\omega = +\infty$ доказати Прву Вајерштрасову теорему о апроксимацији непрекидних функција полиномима.

(74) **Задатак:** Нека је

$$\phi(x) = \begin{cases} \alpha e^{-1/(1-x^2)}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad K_\lambda = \frac{1}{\lambda} \phi(x/\lambda).$$

Применом Тврђења (72) за повољно изабрано α и $\omega = +0$ доказати да свака непрекидна функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ са компактним носачем може да се равномерно апроксимира функцијама класе C^∞ са компактним носачем.

(75) **Задатак:** Нека је

$$K_y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$$

и нека је $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна и ограничена функција. Доказати да је $u(x, y) := f * K_y(x)$ решење *Лапласове једначине* $\Delta u = 0$ (где је $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ Лапласијан) са граничним условом $u(x, 0) = f(x)$.

(76) **Задатак:** Нека је

$$K_t(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)$$

и нека је $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна и ограничена функција. Доказати да је $u(x, t) := f * K_t(x)$ решење *једначине провођења топлоте* $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ са граничним условом $u(x, 0) = f(x)$.

(77) **Задатак:** Једначина

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

са почетним условом

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x),$$

где је $c \neq 0$ константа, назива се једнодимензионом *таласном једначином*.

(а) Доказати да се сменом

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct$$

ова једначина трансформише у

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

(б) Извести из (а) закључак да је опште решење таласне једначине облика

$$u(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta),$$

односно

$$u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct).$$

(в) Користећи почетне услове, доказати да је решење једнодимензионе таласне једначине

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds.$$

(78) **Задатак:** Нека је $a_{nm} = \frac{m}{n+m}$. Израчунати

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} a_{nm} \quad \text{и} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nm}.$$

(79) **Задатак:** Испитати равномерну конвергенцију следећих низова функција:

(а) $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = x^n;$

(б) $f : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = x^n;$

(в) $f : [0, 1 - \varepsilon^2] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = x^n;$

(г) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{\cos(n^2 x)}{n};$

$$(д) f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

(80) **Задатак:** Испитати равномерну конвергенцију редова

$$(а) \sum n^{-1}(-x)^{-n} \text{ на } [0, 1];$$

$$(б) \sum (-1)^n(n+x)^{-1} \text{ на } [0, +\infty[;$$

$$(в) \sum (-1)^n e^{-nx} n^{-1} \text{ на } [0, +\infty[.$$

(81) **Задатак:** Испитати равномерну конвергенцију редова

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x^2 + n)^{-1} \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^2 (x^2 + n)^{-1}.$$

(82) **Задатак:** Нека је $\sum a_n$ апсолутно конвергентан ред. Доказати да редови $\sum a_n \sin(nx)$ и $\sum a_n \cos(nx)$ равномерно конвергирају на \mathbb{R} .

(83) **Задатак:** Нека је a_n монотон низ који конвергира ка нули. Испитати равномерну конвергенцију редова $\sum a_n \sin(nx)$ и $\sum a_n \cos(nx)$.

(84) **Задатак:** Нека је $-1 < r < 1$. Израчунати

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(nx) \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(nx) a_n \cos(nx).$$

(85) **Задатак:** Испитати равномерну конвергенцију низа $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, ако је

$$(а) f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$$

$$(б) f_n(x) = 2n^2 x e^{-n^2 x^2}$$

$$(в) f_n(x) = n^2 x (1 - x^2)^n$$

$$(г) f_n(x) = x - x^n$$

$$(д) f_n(x) = \frac{1}{1+nx}.$$

(86) **Задатак:** Испитати равномерну конвергенцију низа $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ на отвореном интервалу $]0, 1[$. Закључити да Динијева теорема (стр. 131) не важи ако се из ње искључи претпоставка о компактности домена.

(87) **Задатак:** Испитати равномерну конвергенцију низа

$$f_n(x) = n^{-1} \sin(n^2 x)$$

на \mathbb{R} . Да ли конвергира низ $\frac{d}{dx} f_n(x)$?

(88) **Задатак:** Нека је

$$f_n(x) := \begin{cases} 0, & x \leq \frac{1}{n+1} \\ \sin^2 \frac{\pi}{x}, & \frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n} \\ 0, & x \leq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

(а) Доказати да је $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ непрекидна функција, иако низ f_n не конвергира равномерно.

(б) Доказати да је ред $\sum f_n(x)$ апсолутно конвергентан за свако x .

(в) Доказати да ред $\sum f_n(x)$ није униформно конвергентан.

(89) **Задатак:** Доказати да ред $\sum (-1)^n n^{-2} (x^2 + n)$ равномерно конвергира на сваком компактном интервалу, али да није апсолутно конвергентан ни за једну вредност $x \in \mathbb{R}$.

(90) **Задатак:** Испитати равномерну конвергенцију низа

$$f_n(x) = x(1 + nx^2)^{-1}$$

и наћи све тачке $x \in \mathbb{R}$ у којима је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n)'(x).$$

(91) **Задатак:** Дат је низ функција

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x(1 + n^2x^2)^{-1}.$$

Израчунати

(а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$ и $\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$.

(б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 n f_n(x) dx$ и $\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} n f_n(x) dx$.

Испитати обичну и равномерну конвергенцију низова $f_n(x)$ и $n f_n(x)$.

(92) **Задатак:** Нека је $f_n(x) = 2(n+1)x(1-x^2)^n$. Доказати да је за свако $x \in [0, 1]$ низ $f_n(x)$ конвергентан. Израчунати

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \quad \text{и} \quad \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

Да ли низ f_n конвергира равномерно на $[0, 1]$?

(93) Израчунати

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 2n^2 x e^{-n^2 x^2} dx \quad \text{и} \quad \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} 2n^2 x e^{-n^2 x^2} dx.$$

Испитати обичну и равномерну конвергенцију низа $2n^2 x e^{-n^2 x^2}$.

(94) *Гранични прелаз у Стилтјесовом интегралу I.* **Задатак:** Нека је $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ функција ограничене варијације и $f_n \in \mathcal{R}(g)$ (тј. f_n је низ комплексних функција на $[a, b]$ таквих да постоји Стилтјесов интеграл $\int_a^b f_n dg$). Доказати да, ако f_n равномерно конвергира ка f_∞ , важи $f_\infty \in \mathcal{R}(g)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n dg = \int_a^b f_\infty dg$.

(95) *Гранични прелаз у Стилтјесовом интегралу II.* **Задатак:** Нека је

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} \cos(k^6 x) \quad \text{и} \quad g_n = n^{-1/2} \sin(nx).$$

Доказати да низ g_n конвергира равномерно на $[0, 2\pi]$ ка g_∞ , али да је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f dg_n \neq \int_0^{2\pi} f dg_\infty.$$

(96) *Гранични прелаз у Стилтјесовом интегралу III.* **Задатак:** Нека је $g_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ низ функција ограничене варијације таквих да је $g_n(a) = 0$ и нека је $g_\infty : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ функција која задовољава $\lim_{n \rightarrow \infty} V_a^b(g_n - g_\infty) = 0$ и $g_\infty(a) = 0$.

(а) Доказати да за сваку непрекидну функцију $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ важи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f dg_n = \int_a^b f dg_\infty.$$

(б) Доказати да g_n конвергира ка g_∞ равномерно на $[a, b]$.

(97) *Гранични прелаз у Стилтјесовом интегралу IV.* **Задатак:** Нека је $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ непрекидна и $g_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ функције ограничене варијације. Ако је $V_a^b(g_n) \leq M$ (тј. варијација функција g_n је равномерно

ограничена) и $(\forall x \in [a, b]) \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = g_\infty(x)$, доказати да је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f dg_n = \int_a^b f dg_\infty.$$

(98) **Задатак:** Доказати да ред $\sum (-1)^n \frac{x^{2+n}}{n^2}$ конвергира равномерно на сваком компактном интервалу у \mathbb{R} , али да не конвергира апсолутно ни за једно $x \in \mathbb{R}$.

(99) **Задатак:** Доказати да следећи редови конвергирају равномерно:

(а) $\sum \frac{(-1)^n}{n} x^n$ за $0 \leq x \leq 1$

(б) $\sum \frac{(-1)^n}{n} e^{-nx}$ за $0 \leq x < +\infty$

(в) $\sum \frac{(-1)^n}{x+n}$ за $0 \leq x < +\infty$.

Закључити из сваког од ових примера да је Вајерштрасов поредбени принцип довољан, али не и неопходан услов за равномерну конвергенцију реда.

(100) **Задатак:** Доказати да ред $\sum \frac{(-1)^n x^2}{(1+x^2)^n}$ конвергира равномерно на \mathbb{R} .

(101) **Задатак:** Доказати да ред $\sum \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ конвергира за свако $x \in \mathbb{R}$. Да ли овај ред конвергира равномерно на \mathbb{R} ?

(102) **Задатак:** Наћи суму реда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$.

(103) **Задатак:** Развити функцију $f(x) = \frac{1}{x+1}$ у степени ред са центром у тачки 3 и наћи интервал конвергенције добијеног реда.

(104) **Задатак:** Израчунати $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n(n+1)}$.

(105) **Задатак:** Развити функције

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{a^k}{1+a^{2k}x^2} \quad \text{и} \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{a^k}{1+a^{2k}x^2}$$

(где је $0 < a < 1$) у степене редове на интервалу $] -1, 1[$.

(106) **Задатак:** Користећи идентитет $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$ развити функцију $\sin^2 x$ у степени ред. Диференцирањем добијеног израза наћи степени ред за функцију $2 \sin x \cos x$ и проверити директно да ли је добијени ред степени ред за функцију $\sin 2x$.

(107) **Задатак:** Полазећи од идентитета

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$$

доказати Лајбницову формулу за број π :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Колико чланова овог реда треба сабрати да би се добио број π са тачношћу до друге децимале?

(108) **Задатак:** Разложити функције e^x и $\log(1+x)$ у степени ред и израчунати

$$\int_0^1 e^x \log x dx, \quad \int_0^1 \frac{e^x - 1}{\sqrt{x^3}} dx \quad \text{и} \quad \int_0^1 \log x \log(1+x) dx.$$

- (109)
- Задатак:**
- Израчунати интеграле

$$\int_0^{0,1} \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int_0^{0,1} e^{-x^2} dx, \quad \int_0^{0,1} \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} dx$$

са тачношћу до 10^{-3} .

- (110)
- Задатак:**
- Израчунати

$$\cos 31^\circ, \quad \sin 6,3, \quad \tan 46^\circ, \quad \arctan 1,02$$

са тачношћу на три децимале.

- (111)
- Задатак:**
- Доказати да је

$$\frac{\arctan x}{x} = \int_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2}$$

и израчунати

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x\sqrt{1-x^2}} dx.$$

- (112)
- Задатак:**
- Израчунати збир
- $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \dots$
- .

- (113)
- Задатак:**
- Решити помоћу степених редова диференцијалну једначину
- $y'' - y = 0$
- са почетним условима

(а) $y(0) = 0, y(1) = 1$

(б) $y(0) = 1, y(1) = 0$.

- (114)
- Задатак:**
- Доказати да ако Дирихлеов ред
- $\sum \frac{c_n}{n^x}$
- конвергира у тачки
- x_0
- , онда он конвергира равномерно на скупу
- $x \geq x_0$
- , а апсолутно за
- $x > x_0 + 1$
- .

- (115)
- Задатак:**
- Доказати да је функција

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

решење Беселове диференцијалне једначине $y'' + x^{-1}y' + y = 0$ и да има развој

$$J_0(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}.$$

- (116)
- Задатак:**
- Доказати да је функција
- J_0
- из (115) једнака

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin \theta) d\theta$$

и да је $\int_0^{+\infty} J_0(x) dx = 1$.(Упутство: израчунати $\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-tx} J_0(x) dx$.)

- (117)
- Задатак:**
- Доказати да су функције

$$x^n \int_0^{\pi} \cos(x \cos \theta) d\theta \quad \text{и} \quad \int_0^{\pi} \cos(n\theta - x \sin \theta) d\theta$$

решења диференцијалне једначине $x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$.

- (118)
- Задатак:**
- Нека је

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{за } x < (n+1)^{-1} \\ \sin^2(\pi x^{-1}), & \text{за } (n+1)^{-1} \leq x \leq n^{-1} \\ 0, & \text{за } x > n^{-1}. \end{cases}$$

- (а) Доказати да низ f_n неравномерно конвергира ка функцији f_∞ .
 (б) Доказати да је f_∞ (ипак) непрекидна.
 (в) Испитати равномерно и апсолутну конвергенцију реда $\sum f_n$.
 (г) Закључити да апсолутна конвергенција реда, чак и за свако x , не повлачи равномерно конвергенцију.
- (119) **Задатак:** Нека је $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 + n^2x)^{-1}$.
 (а) Одредити домен функције f .
 (б) Испитати равномерно непрекидност реда на десној страни.
 (в) Испитати непрекидност функције f .
 (г) Испитати ограниченост функције f .
- (120) **Задатак:** Испитати функцију $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^2(1 + x^2)^{-n}$ и нацртати њен график. На којим интервалима је ред $\sum_{n=1}^{\infty} x^2(1 + x^2)^{-n}$ равномерно конвергентан?
- (121) **Задатак:** Израчунати

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^n (1-x^{2n})^{-1}.$$

Испитати обичну, равномерно и апсолутну конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-x)^n (1-x^{2n})^{-1}.$$

- (122) **Задатак:** Нека је $f(x) = x(1 + nx^2)^{-1}$. Доказати да f_n равномерно на \mathbb{R} конвергира ка f_∞ . Доказати да је $f'_\infty(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$ ако и само ако је $x \neq 0$.
- (123) **Задатак:** Нека је $\{a\} := a - [a]$ *разломљени део* реалног броја a и

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{nx\}}{n^2}.$$

- (а) Доказати да је скуп прекида функције f свуда густ у \mathbb{R} .
 (б) Доказати да је функција f интегрална по Риману на сваком компактном интервалу.
- (124) **Задатак:** Нека је

$$k(x) = \begin{cases} 1, & \text{за } x > 0 \\ 0, & \text{за } x \leq 0 \end{cases}$$

и нека је x_n низ међусобно различитих тачака интервала (a, b) . Нека је c_n низ комплексних бројева, такав да ред $\sum |c_n|$ конвергира.

- (а) Доказати да ред $\sum c_n k(x - x_n)$ конвергира равномерно на $[a, b]$.
 (б) Доказати да је функција $f(x) = \sum c_n k(x - x_n)$ непрекидна у свакој тачки $x \neq x_n$ и ограничене варијације на $[a, b]$.
- (125) **Задатак:** Нека је $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ равномерно ограничен низ функција интегралних по Риману. Доказати да низ функција

$$F_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, \quad F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt$$

има равномерно конвергентан подниз.

- (126)
- Задатак:**
- Доказати да ако фамилија непрекидних функција

$$f_t : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$$

конвергира равномерно на (a, b) кад $t \rightarrow t_0$, онда f_t конвергира, и то равномерно, и на затвореном интервалу $[a, b]$.

- (127)
- Задатак:**
- Израчунати
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$
- .

- (128)
- Задатак:**
- Нека је
- $f_n : T \rightarrow \mathbb{C}$
- низ непрекидних функција који равномерно конвергира ка
- $f_\infty : T \rightarrow \mathbb{C}$
- . Доказати да за сваки низ
- $t_n \in T$
- тачака који конвергира ка
- $t_\infty \in T$
- важи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t_n) = f_\infty(t_\infty).$$

- (129)
- Задатак:**
- Доказати

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{x^n}{1+x^n} = \frac{1}{2} \log 2$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{1-x^{2n}} = \frac{1}{2} \log 2$$

- (130)
- Задатак:**
- Доказати да је алгебра генерисана функцијама
- $e(x) \equiv 1$
- и
- $g(x) = x^2$
- густа у скупу свих парних непрекидних функција на
- $[-1, 1]$
- . Да ли је алгебра генерисана функцијом
- $h(x) = x$
- густа у скупу свих непарних непрекидних функција на
- $[-1, 1]$
- ?

- (131)
- Задатак:**
- Доказати да је алгебра генерисана произвољном строго монотоним функцијом која нема нула на
- $[a, b]$
- густа у
- $C([a, b], \mathbb{R})$
- . За које
- a
- и
- b
- је алгебра генерисана функцијом
- $f(x) = x$
- густа у
- $C([a, b], \mathbb{R})$
- ?

- (132)
- Задатак:**
- Да ли је могуће сваку функцију

$$(a) f \in C([0, \pi], \mathbb{C})$$

$$(b) f \in C([- \pi, \pi], \mathbb{C})$$

$$(v) f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C}), f(x+2\pi) = f(x)$$

униформно апроксимирати функцијама из алгебре генерисане скупом $\{1, e^{ix}\}$?

- (133)
- Задатак:**
- Нека је
- $Q_n(x) = \mu_n(1-x^2)^n$
- за
- $n \in \mathbb{N}$
- , где је
- μ_n
- изабрано тако да је

$$\int_{-1}^1 Q_n(x) dx = 1.$$

$$(a) \text{ Доказати да је } \mu_n < \sqrt{n}.$$

$$(b) \text{ Нека је } \delta > 0. \text{ Доказати да за } \delta \leq |x| \leq 1 \text{ важи } Q_n(x) \leq \sqrt{n}(1-\delta^2)^n.$$

$$(v) \text{ Доказати да за свако } \delta > 0 \text{ низ } Q_n \text{ конвергира равномерно на сегменту } [\delta, 1] \text{ и наћи } \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(x).$$

$$(r) \text{ Нацртати графике функција } Q_n \text{ за } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$(d) \text{ Нека је } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ непрекидна функција, једнака нули ван } [0, 1], \text{ и нека је, за } 0 \leq x \leq 1,$$

$$P_n(x) = \int_{-1}^1 f(x+t)Q_n(t) dt.$$

Доказати да је

$$P_n(x) = \int_{-x}^{1-x} f(x+t)Q_n(t) dt = \int_{-1}^1 f(t)Q_n(t-x) dt$$

и закључити да је P_n низ полинома.

(ђ) Нека је $\varepsilon > 0$. Доказати да постоји $\delta > 0$, такво да важи

$$|x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon,$$

и да за такво δ важи

$$|P_n(x) - f(x)| \leq 4\|f\|_\infty \sqrt{n}(1 - \delta^2)^n + \frac{\varepsilon}{2}.$$

(Упутство:

$$P_n(x) - f(x) = \int_{-1}^1 (f(x+t) - f(t))Q_n(x) dx = \int_{-1}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^1 \dots)$$

(е) Доказати да P_n конвергира ка f равномерно на $[0, 1]$.

(ж) Извести директан доказ Вајерштрасове теореме о униформној апроксимацији непрекидних функција полиномима, без позивања на Стоун–Вајерштрасову или Коровкинову теорему. (Упутство: ако је $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ функција таква да је $f(0) = f(1) = 0$, проширити је непрекидно нулом на \mathbb{R} и применити претходно резонување, у противном посматрати функцију $g(x) = f(x) - f(0) - x(f(1) - f(0))$. Доказати и да избором интервала $[0, 1]$ уместо $[a, b]$ није умањена општост.)

(134) **Задатак:** Одредити домен и израчунати први извод функције

$$f(t) = \int_{2+\sin t}^{2+\cos t} \frac{\sin(tx)}{x} dx.$$

(135) **Задатак:** Доказати да је

$$\int_0^1 \log(-\log x) dx = \Gamma'(1).$$

(136) **Задатак:** Да ли је дозвољено изменити поредак интеграције у интегралима

$$\int_1^{+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} dx dy \quad \text{и} \quad \int_1^{+\infty} \int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3} dx dy?$$

(137) **Задатак:** Нека је $0 < a < b$.

(а) Доказати да се у интегралу

$$\int_a^b \int_0^1 x^y dx dy$$

може заменити поредак интеграције.

(б) Израчунати

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x} dx.$$

(138) **Задатак:** Нека је $0 < a < b$. Израчунати

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx \quad \text{и} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x^2} dx.$$

(139) **Задатак:** Израчунати

$$\lim_{t \rightarrow +0} \int_0^1 \frac{2xt^2}{(x^2 + t^2)^2} dx \quad \text{и} \quad \lim_{t \rightarrow +0} \int_0^1 \frac{x^3}{t^2} e^{-x^2/t} dx.$$

(140) **Задатак:** Израчунати

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x}}{x} \cos x \, dx.$$

(141) **Задатак:** Израчунати

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(2tx) \, dx \quad \text{и} \quad \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin(2tx) \, dx.$$

(142) **Задатак:** Нека је $a > 0$ и $s \in \mathbb{R}$.

(а) Доказати да је

$$\frac{\Gamma(s)}{x^s} = \int_0^{+\infty} y^{s-1} e^{-yx} \, dy.$$

(б) Израчунати

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(bx)}{x^s} \, dx \quad \text{за} \quad 0 < s < 1 \quad \text{и} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(bx)}{x^s} \, dx \quad \text{за} \quad 0 < s < 2.$$

(143) **Задатак:** Доказати да је $\int_0^{2\pi} \log(1 - 2t \cos x + t^2) \, dx = 0$.

(144) **Задатак:** Нека је

$$\text{si}(x) := \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt.$$

Доказати да је

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \text{si}(x) \, dx = \frac{\pi}{4}.$$

(145) **Задатак:** Израчунати

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tx)}{x} e^{-nx} \, dx \quad \text{и} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x} \frac{\sin(sx)}{x} e^{-nx} \, dx.$$

(Упутство: диференцирати по параметру.)

(146) **Задатак:** Израчунати

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x}}{x} \cos x \, dx.$$

(Упутство: диференцирати $\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-tx}}{x} \cos x \, dx$.)

(147) **Задатак:** Доказати да су функције

$$x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} \, dt \quad \text{и} \quad x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t} \, dt$$

решења диференцијалне једначине $y'' + y = 1/x$. Израчунати њихове лимесе кад $x \rightarrow +\infty$ и закључити да је

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} \, dt = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t} \, dt.$$

(148) **Задатак:** Полазећи од $\tan x = -\cot(x - \frac{\pi}{2})$ и (32) извести формулу за развој тангенса у ред

$$\tan x = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - \frac{2(n-1)^2\pi^2}{4}}.$$

Користећи ову формулу и

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2} (\tan(x/2) + \cot(x/2))$$

доказати да је

$$\frac{1}{\sin x} = \sum \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}.$$

Диференцирањем, извести одатле развој

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(x - n\pi)^2} + \frac{1}{(x + n\pi)^2} \right).$$

Задатак: Доказати

$$\frac{1}{\sinh x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2x}{x^2 + n^2\pi^2}.$$

Увод у Фуријеову анализу

- (1) Нека је $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функција реалне променљиве. Она може да се напише као збир парне и непарне функције:

$$f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)).$$

На пример, функција e^x је збир хиперболичког косинуса и хиперболичког синуса.

Задатак: Доказати да је ова репрезентација јединствена.

Први сабирак на десној страни је парна функција, тј. функција која је инваријантна у односу на дејство мултипликативне групе \mathbb{Z}_2

$$h(x) \mapsto h(\nu x), \quad \nu \in \mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$$

простору реалних функција $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ а други непарна, тј. инваријантна у односу на дејство¹

$$h(x) \mapsto \nu h(\nu x), \quad \nu \in \mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}.$$

Слично, ако је G група коначног реда $|G|$ која дејствује на скупо-вима S_1 и S_2 и $f : S_1 \rightarrow S_2$, онда је функција

$$\tilde{f}(x) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gf(gx)$$

инваријантна у односу на дејство $h(x) \mapsto gh(gx)$ на скупу пресликавања $h : S_1 \rightarrow S_2$.

Ако се ради о бесконачној групи, онда некад збир на десној страни (који представља средњу вредност функције f у односу на дејство G) можемо да заменимо бесконачним редом или интегралом. Нпр, у (355) на стр. 177, запис

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)e^{inx}, \quad \text{где је } \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int} dt, \quad n \in \mathbb{Z},$$

је разлагање функције на збир сабирака који се, у извесном смислу, правилно понашају у односу на дејство мултипликативне групе јединичних комплексних бројева.

Ове појмове ћемо сада да размотримо мало прецизније и општије.

¹Приметимо да смо сличну ситуацију имали у (14) на 192. страни, када смо реално линеарно пресликавање представили као збир комплексно линеарног и комплексно антилинеарног – ту се радило о дејствима $L(x) \mapsto -iL(ix)$ и $L(x) \mapsto iL(ix)$ групе \mathbb{Z}_2 .

- (2) Нека је $(G, +)$ локално компактна Абелова тополошка група (тополошке групе смо дефинисали у (130) на 82. страни). Хомоморфизам

$$\gamma : G \rightarrow \mathbb{S}^1$$

у мултипликативну групу јединичних комплексних бројева, тј. пресликавање које задовољава

$$\gamma(x + y) = \gamma(x) \cdot \gamma(y)$$

назива се *карактером* на групи G . Скуп свих непрекидних карактера на G назива се *дуалном групом* групе G и означава са Γ . Структура Абелове групе на Γ је дефинисана помоћу структуре Абелове групе на \mathbb{S}^1 :

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(x) := \gamma_1(x) \cdot \gamma_2(x).$$

Неутрал групе $(\Gamma, +)$ означавамо са 0 , што је уобичајено за Абелове групе. Уобичајена је ознака $\langle x, \gamma \rangle$ уместо $\gamma(x)$, за $\gamma \in \Gamma$ и $x \in G$.

Приметимо да је

$$\langle x, 0 \rangle = \langle 0, \gamma \rangle = 1$$

за све $x \in G$ и $\gamma \in \Gamma$ и

$$\langle -x, \gamma \rangle = \langle x, -\gamma \rangle = \langle x, \gamma \rangle^{-1} = \overline{\langle x, \gamma \rangle}.$$

- (3) Специјални случај (2) је случај n -димензионе Абелове Лијеве групе (видети (11) на стр. 248). Класичан резултат из теорије Лијевих група је да је свака повезана n -димензиона Абелова Лијева група изоморфна (као група и као многострукост) производу

$$G \cong \mathbb{R}^p \times \mathbb{T}^q$$

p -димензионог векторског простора $(\mathbb{R}^p, +)$ и q -димензионог торуза $(\mathbb{T}^q = (\mathbb{S}^1)^q, \cdot)$, где је $p + q = n$.

Претпоставимо да је $\mu \in \Omega^n(G)$ форма запремине која је инваријантна у односу на транслације

$$\tau_a : G \rightarrow G, \quad \tau_a(x) = x + a,$$

за све $a \in G$, тј. таква да је

$$\tau_a^* \mu = \mu \quad \text{за све } a \in G.$$

Једна таква форма на $\mathbb{R}^p \times \mathbb{T}^q$ је форма²

$$\mu = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p \wedge d\theta_1 \wedge \cdots \wedge d\theta_q.$$

Фуријеов интеграл или *Фуријеова трансформација* функције $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ је функција

$$\hat{f} : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}, \quad \hat{f}(\gamma) = \int_G f(x) \langle -x, \gamma \rangle \mu(x).$$

²Мера индукована оваквом формом је пример *Харове мере* – то је мера на Абеловој тополошкој групи која је инваријантна у односу на транслацију. Познато је да свака локално компактна Абелова тополошка група има Харову меру, која је јединствена до на мултипликативну константу. Ми нећемо улазити дубље у ту конструкцију и остаћемо у категорији Абелових Лијевих група, али напомињемо да Фуријеова анализа може да се изложи у категорији локално компактних Абелових тополошких група.

(4) *Класична Фуријеова анализа* односи се на следеће три Лијеве групе:

$$(\mathbb{R}, +), \quad (\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \cdot), \quad (\mathbb{Z}, +).$$

Нека је G једна од прве две групе, \mathbb{R} или \mathbb{S}^1 , и нека је $\gamma \in \Gamma$. Из непрекидности γ и $\gamma(0) = 1$ следи да је за неко $\varepsilon > 0$

$$I = \int_0^\varepsilon \gamma(s) ds \neq 0,$$

где са ds означавамо инваријантну форму $\mu(s)$. Из $\gamma(x+s) = \gamma(x) \cdot \gamma(s)$ следи

$$I\gamma(x) = \int_0^\varepsilon \gamma(x+s) ds = \int_x^{x+\varepsilon} \gamma(s) ds$$

(у последњем кораку смо користили инваријантност форме ds). Одатле следи да је γ диференцијабилна функција (интеграл непрекидне функције је диференцијабилна функција по граници интеграције), па израз $\gamma(x+s) = \gamma(x) \cdot \gamma(s)$ можемо да диференцирамо по s , што нам, за $s = 0$, даје

$$\gamma'(x) = C\gamma(x),$$

где је $C = \gamma'(0)$. Одатле следи

$$\gamma(x) = e^{itx}$$

за неко $t \in \mathbb{R}$. У случају $G = \mathbb{R}$ то даје резултат $\Gamma = \mathbb{R}$. Ако је $G = \mathbb{S}^1 \cong \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, услов $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$ даје $\Gamma = \mathbb{Z}$.

Ако је $G = \mathbb{Z}$ и $\gamma(1) = e^{i\theta}$, онда је $\gamma(n) = e^{in\theta}$, одакле следи да је дуална група Γ у овом случају изоморфна са \mathbb{S}^1 (изоморфизам је дефинисан са $\gamma \mapsto e^{i\theta}$).

Тако добијамо Фуријеове трансформације за ове три класичне групе:

- $G = \mathbb{R}, \Gamma = \mathbb{R}$: $\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-itx} dt$;
- $G = \mathbb{S}^1, \Gamma = \mathbb{Z}$: $\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})e^{-in\theta} d\theta$;
- $G = \mathbb{Z}, \Gamma = \mathbb{S}^1$: $\widehat{f}(e^{in\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)e^{-in\omega}$.

Ове изразе смо већ видели у претходним поглављима у вези са класичним Фуријеовим интегралима³, Фуријеовим коефицијентима и Фуријеовим редовима.

(5) *Конволуција* функција $f, g : G \rightarrow \mathbb{C}$ је функција

$$f * g : G \rightarrow \mathbb{C}, \quad f * g(x) = \int_G f(x-y)g(y) dy,$$

(где је са dy уместо $\mu(y)$ означена инваријантна форма на G) дефинисана под претпоставком да је

$$\int_G |f(x-y)g(y)| dy < +\infty.$$

³У (65) на 340 смо увели Фуријеову трансформацију са константом $(2\pi)^{-1/2}$ испред интеграла, односно користили смо другу Харову меру. У литератури се појављују различите нормализације Харове мере, односно константе испред Фуријеовог интеграла. Неке формуле Фуријеове анализе лепше изгледају ако се ради са једном, а неке друге ако се ради са другом Харовом мером.

Задатак: Доказати да је $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$, где је

$$\|h\|_1 = \int_G |h(t)| dt.$$

Задатак: Доказати да је множење $*$ комутативно и асоцијативно.

Задатак: Доказати да је $\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$.

Задатак: Нека је $\gamma \in \Gamma$, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ и $\|f\|_1 < +\infty$. Доказати да је

$$(f * \gamma)(x) = \langle x, \gamma \rangle \widehat{f}(\gamma).$$

- (6) *Формула инверзије.* Нека је dx инваријантна форма на Абеловој Лијевој групи G . Тада постоји инваријантна форма $d\gamma$ на дуалној групи Γ , таква да за сваку непрекидну функцију $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ за коју је

$$\int_G |f(x)| dx < +\infty, \quad \int_\Gamma |\widehat{f}(\gamma)| d\gamma < +\infty$$

важи

$$f(x) = \int_\Gamma \widehat{f}(\gamma) \langle x, \gamma \rangle d\gamma.$$

Доказ овог тврђења у наведеној општости изостављамо. Размотримо само случај класичних група (4). Ако је $G = \mathbb{R}$ (или, општије, $G = \mathbb{R}^n$), доказ следи из Фубинијеве теореме. Ако је $G = \mathbb{S}^1$ или $G = \mathbb{Z}$, теорема се своди на одређивање Фуријеових коефицијената Фуријеовог реда, о чему је било речи у Глави 1 (видети стр. 177). Приметимо да у том случају услов $\int_{\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| dn < +\infty$ значи да ред $\sum |c_n|$ (где су $c_n = \widehat{f}(n)$ Фуријеови коефицијенти функције f) апсолутно конвергира, одакле следи да Фуријеов ред $\sum c_n e^{inx}$ (који се у том случају интерпретира као $\int_{\mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{inx} dn$) равномерно конвергира ка непрекидној функцији f .

- (7) **Задатак:** Нека је $a > 0$ и $f(t) = e^{-at^2}$.
- (а) Оправдати диференцирање Фуријеове трансформације

$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-itx} dt$$

под знаком интеграла за ову функцију.

- (б) Доказати да се двоструком применом Фуријеове трансформације добија

$$\widehat{(\widehat{f})}(x) = 2\pi f(-x).$$

- (в) Применом Фуријеове трансформације на обе стране једнакости

$$f'(x) = -2axf(x)$$

и применом (а) и (б) доказати да је

$$\widehat{f'}(x) = -\frac{1}{2a} x \widehat{f}(x).$$

- (г) Доказати да је опште решење диференцијалне једначине

$$y' = -\frac{1}{2a} xy$$

дато са

$$y = Ce^{-\frac{x^2}{4a}}.$$

(д) Нека је $a = \frac{1}{2}$, тј. $f(t) = e^{-t^2/2}$. Доказати да је

$$\widehat{f}(x) = Ce^{-x^2/2} = Cf(x),$$

где је $C = \widehat{f}(0)$.

(ђ) Применом Фуријеове трансформације на обе стране једнакости $\widehat{f}(x) = Cf(x)$ доказане у (д) и једнакости из (б) доказати да је $C^2 = 2\pi$.

(д) Приметити да из (д) и (ђ) следи

$$C = \widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$$

и одатле извести још један начин да се израчуна *Пуасонов интеграл*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

(8) *Примена на парцијалне диференцијалне једначине.* Нека је

$$P(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

полином n променљивих. Тада је са $P(D)$ дефинисан оператор диференцирања – сабирку $\xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$ одговара диференцирање $D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, где је $D_k^{\alpha_k}$ парцијални извод реда α_k по k -тој променљивој. Нека је v дата функција n променљивих. Претпоставимо да желимо да решимо *парцијалну једначину са константним коефицијентима*

$$P(D)u(x) = v(x)$$

по непознатој функцији u . Преласком на Фуријеову трансформацију

$$\widehat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} u(t)e^{-i\xi \cdot t} dx$$

(где је $\xi \cdot t$ на десној страни скаларни производ вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ и $t = (t_1, \dots, t_n)$) добијамо

$$\widehat{P(D)u}(\xi) = \widehat{v}(\xi),$$

У (65) на стр. 340 смо видели како Фуријеова трансформација остварује дуалност множења и диференцирања, одакле следи

$$\widehat{P(D)u}(\xi) = P(i\xi)\widehat{u}(\xi),$$

па добијамо једноставну алгебарску једначину

$$P(i\xi)\widehat{u}(\xi) = \widehat{v}(\xi).$$

Ако њу можемо да решимо по \widehat{u} (нпр. ако је $P \neq 0$ свуда), онда одатле можемо и да нађемо решење u користећи формулу инверзије (6).

Задатак: Доказати да се применом Фуријеове трансформације таласна једначина⁴

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

са почетним условима

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$$

трансформише у обичну диференцијалну једначину

$$\widehat{u}''(\xi, t) = -c^2 \xi^2 \widehat{u}(\xi, t).$$

Сменом $v(t) = \widehat{u}(\xi, t)e^{ict\xi}$ (или директном провером) показати да је решење ове једначине

$$\widehat{u}(\xi, t) = A(\xi) \cos(c\xi t) + B(\xi) \sin(c\xi t).$$

Користећи почетне услове доказати да је

$$A(\xi) = \widehat{f}(\xi), \quad B(\xi) = \frac{1}{c\xi} \widehat{g}$$

и одатле

$$\widehat{u}(\xi, t) = \frac{1}{2} \widehat{f}(\xi) (e^{ic\xi t} + e^{-ic\xi t}) + \frac{1}{2ic\xi} (e^{ic\xi t} - e^{-ic\xi t}).$$

Израчунавањем инверзне Фуријеове трансформације⁵

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{u}(\xi, t) e^{i\xi x} d\xi$$

доказати да је

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2} \int_0^t (g(x+cs) + g(x-cs)) ds$$

решење таласне једначине (упоредити са (77) на стр. 344).

Задатак: Једначина провођења топлоте је парцијална диференцијална једначина

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \Delta u,$$

са почетним условом

$$u(x, 0) = f(x)$$

по непознатој функцији $u(x_1, \dots, x_n, t)$, дефинисаној на $\mathbb{R}^n \times [0, +\infty[$.

Овде је $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ Лапласијан, а $c \neq 0$ константа.

(а) Доказати да се применом Фуријеове трансформације по $x \in \mathbb{R}^n$ једначина провођења топлоте трансформише у обичну диференцијалну једначину

$$\widehat{u}'(\xi, t) = -c^1 (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2) \widehat{u}(\xi, t).$$

⁴Таласна једначина по непознатој функцији $u(x_1, \dots, x_n, t)$, која описује осциловање струне и друге еквивалентне појаве, је једначина $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u$, где је Δ Лапласијан а $c \neq 0$ константа. Ми овде разматрамо случај $n = 1$, само да бисмо илустровали решавање методом Фуријеове анализе.

⁵Ово израчунавање може да се скрати ако се обе стране помноже са $i\xi$ и примени формула $i\xi \widehat{u} = \widehat{D}u$ из (65) на стр. 340.

- (б) Решавањем ове једначине (дељењем са \hat{u} на десној страни добијамо извод функције $\log \hat{u}$) и коришћењем почетног услова доказати да је

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi)e^{-c^2\|\xi\|^2 t}.$$

- (в) Применом инверзне Фуријеове трансформације доказати да је решење једначине провођења топлоте

$$u(x, t) = f * K(x, t),$$

где је

$$K(x, t) = (2c\sqrt{\pi t})^{-n} e^{-\|x\|^2/4c^2 t}$$

Ово решење смо, за $n = 1$, видели у (76) на 344. страни.

- (9) *Метод раздвајања променљивих.* И Фуријеови редови налазе примену у теорији парцијалних једначина. Размотримо још једном таласну једначину из (8)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

са почетним условима

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x).$$

Претпоставимо да је функција u дефинисана за $0 \leq x \leq L$ и да задовољава гранични услов

$$u(0, t) = u(L, t) = 0$$

(што одговара случају када она описује струне дужине L која осцилује; график функције $y = u(x, t)$ је положај струне у тренутку t , крајеви $u(0, t)$ и $u(L, t)$ су причвршћени и не осцилују).

Покушајмо да нађемо решење у облику

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

где су X и T функције једне променљиве. Тада таласна једначина постаје

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)}$$

Пошто лева страна не зависи од t , а десна не зависи од x , обе стране су једнаке истој константни λ , па је

$$X''(x) = \lambda X(x), \quad T''(t) = c^2 \lambda T(t),$$

са почетним условом $X(0) = X(L) = 0$. Ово су обичне диференцијалне једначине, какве смо већ решавали у (8); решење за X је, у зависности од знака константе λ :

$$X(x) = \begin{cases} Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}, & \lambda = \omega^2 > 0 \\ Ax + B, & \lambda = 0 \\ A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x), & \lambda = -\omega^2 < 0, \end{cases}$$

за неке константе A и B . Уз захтев да решење задовољава тражене граничне услове, видимо да мора да буде $\lambda = -\omega^2$, па је решење

$$X(x) = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x), \quad T(t) = C \cos(\omega ct) + D \sin(\omega ct).$$

Из $X(0) = X(L) = 0$ следи $A = 0$ и $\omega = \pm \frac{n\pi}{L}$ за $n \in \mathbb{N}$ (игноришемо тривијални случај $B = 0$). Тако смо добили низ решења

$$u_n(x, t) = \sin(n\pi x/L)(C_n \cos((n\pi ct/L) + D_n \sin((n\pi ct/L))).$$

Решење које обухвата све њих је

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t),$$

уз правилно одређене константе C_n и D_n (u се назива *суперпозицијом* решења u_n). Њих налазимо из почетних услова $u(x, 0) = f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi x/L), \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{L} D_n \sin(n\pi x/L).$$

Дакле, тражени коефицијенти D_n и C_n су коефицијенти у развоју функција f и g у тригонометријски Фуријеов ред на интервалу $[0, L]$. Тиме смо проблем решавања једне парцијалне једначине свели на проблем развоја две функције у Фуријеов ред⁶.

Задатак: Доказати да је решење једнодимензионе једначине провођења топлоте

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

са почетним условом

$$u(x, 0) = f(x)$$

и граничним условом

$$u(0, t) = u(L, t) = 0$$

(који захтева да се на граници одржава иста температура) функција

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x/L) e^{-nc^2\pi t/L},$$

где су b_n Фуријеови коефицијенти у развоју

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x/L).$$

(10) **Задатак:** Развити функције $f(x) = e^{\lambda x}$ и $g(x) = x^2$ у тригонометријски Фуријеов ред на $]0, \pi[$:

(а) по синусима

(б) по косинусима.

⁶Тригонометријски Фуријеов ред функције на интервалу $[-L, L]$ је развој по ортонормираном систему $\{\frac{1}{\sqrt{2L}}, \frac{1}{\sqrt{L}} \cos(n\pi x/L), \frac{1}{\sqrt{L}} \sin(n\pi x/L) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Развој на интервалу $[0, L]$ само по синусима се добија тако што се функција која се развија продужи да буде непарна на $[-L, L]$, јер у том случају тригонометријски Фуријеов ред не садржи косинусе. Слично, развој који садржи само синусе се добија тако што се функција проужи тако да буде парна.

- (11) Из Беселове неједнакости (337) на стр. 167 примењене на ортонормирани систем вектора $\{e^{inx} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ у простору квадратно интегралних функција

$$R^2[-\pi, \pi] = \{f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < +\infty\}$$

са скаларним производом $\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)} dx$ следи да је

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx} dx = 0.$$

Следеће тврђење уопштава ово опажање.

- (12) *Риманова лема.* Нека је $f :]\alpha, \beta[\rightarrow \mathbb{C}$ апсолутно интегрална функција. Прецизније, под тиме подразумевамо да је f интегрална на сваком компактном интервалу $[a, b] \subset]\alpha, \beta[$ и, уколико су тачке α, β (или једна од њих) сингуларне, претпостављамо да је

$$\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx < +\infty.$$

Тада је

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{\alpha}^{\beta} f(x)e^{i\lambda x} dx = 0.$$

Довољно је да изведемо доказ за случај кад је f реална функција (општи случај следи из овог, применом на $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$). Из претпоставке о конвергенцији интеграла $\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx$ следи да за свако $\varepsilon > 0$ постоји интервал $[a, b] \subset]\alpha, \beta[$ такав да је

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x)e^{i\lambda x} dx - \int_a^b f(x)e^{i\lambda x} dx \right| < \varepsilon,$$

па је довољно доказати тврђење за интервал $[a, b]$ уместо $] \alpha, \beta [$. Другим речима, можемо да претпоставимо да се у њему ради о својственом интегралу

$$\int_a^b f(x)e^{i\lambda x} dx,$$

где је $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ интегрална функција. Пошто у том случају постоји подела интервала $[a, b]$ таква да је

$$0 \leq \int_a^b f(x) dx - \sum_{j=1}^n m_j \Delta x_j < \varepsilon,$$

довољно је доказати тврђење за функцију g дефинисану са $g(x) = m_j$ на $[x_{j-1}, x_j[$, јер је тада

$$\left| \int_a^b f(x)e^{i\lambda x} dx - \int_a^b g(x)e^{i\lambda x} dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon.$$

За функцију g посматрани интеграл се директно израчунава:

$$\int_a^b g(x)e^{i\lambda x} dx = \frac{1}{i\lambda} \sum_{j=1}^n m_j e^{i\lambda x} \Big|_{x=x_{j-1}}^{x_j}.$$

Последњи израз тежи нули кад $\lambda \rightarrow +\infty$.

- (13) Раздвајањем имагинарног и реалног дела, Риманова лема може да се формулише у облику

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \sin(\lambda x) dx = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cos(\lambda x) dx = 0$$

за функцију f која задовољава услове (12).

- (14) У Глави 1 (видети стр. 177) смо видели да је тригонометријски Фуријеов ред квадратно интеграбилне функције $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ дат са

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}, \quad \text{где је} \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

Ако хоћемо да нагласимо да су c_n Фуријеови коефицијенти функције f означавамо их и са $c_n(f)$.

Нека је

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\sum_{k=-n}^n e^{ik(x-t)} \right) dt$$

n -та парцијална сума Фуријеовог реда и нека је

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx}.$$

Функције D_n се називају *Дирихлеовим језгрима*. У терминима Дирихлеових језгара, парцијална сума Фуријеовог реда има облик конволуције

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt.$$

- (15) **Задатак:**

(а) Применом формуле за геометријски збир, доказати да је

$$D_n(x) = \frac{\sin(n+1/2)x}{\sin(x/2)}.$$

(б) Доказати да је

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = 1.$$

(в) Применом Риманове леме (12) на функцију

$$f(x) = \frac{1}{\sin(x/2)}$$

доказати да је за свако $\delta \in]0, \pi[$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta}^{\pi} D_n(t) dt = 0.$$

- (16) *Принцип локализације.* Нека су $f, g :]-\pi, \pi[\rightarrow \mathbb{C}$ апсолутно интеграбилне функције које су једнаке на некој отвореној околини U тачке $x_0 \in]-\pi, \pi[$, тј. такве да постоји отворен подскуп $U \subset]-\pi, \pi[$ који садржи тачку x_0 и такав да важи

$$x \in U \Rightarrow f(x) = g(x).$$

Тада Фуријеови редови

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{inx} \quad \text{и} \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(g)e^{inx}$$

у тачки $x = x_0$ или оба конвергирају, или оба дивергирају. У случају да оба конвергирају, њихови зборови у тој тачки су једнаки (при томе не морају да буду једнаки вредности функције $f(x_0) = g(x_0)$).

Доказ: Продужимо функције f и g на целу реалну осу тако да буду 2π -периодичне⁷. Користећи 2π -периодичност Дирихлеових језгара и чињеницу да је интеграл 2π -периодичне функције исти по било ком интервалу дужине 2π , добијамо, после смене $s = x - t$,

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-s)D_n(s) ds.$$

Нека је $0 < \delta < \pi$. Тада је

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right) f(x-s)D_n(s) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} f(x-s)D_n(s) ds + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} \frac{f(x+s) + f(x-s)}{\sin(s/2)} \sin((n+1/2)s) ds. \end{aligned}$$

Функција $1/\sin(s/2)$ је ограничена на $[\delta, \pi]$, па из Риманове леме (13) следи да други сабирак тежи нули кад $n \rightarrow \infty$, па је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} f(x-s)D_n(s) ds.$$

Израз на десној страни зависи само од рестрикције функције f на 2δ -околину тачке x , што је и требало доказати.

- (17) *Динијев услов конвергенције Фуријеовог реда.* У Глави 1 смо видели да произвољну функцију $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ (или 2π -периодичну функцију $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$) која је квадратно интеграбилна на $[-\pi, \pi]$, тј. таква да је

$$\|f\|_2^2 := \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < +\infty,$$

можемо да развијемо у тригонометријски Фуријеов ред

$$f(x) =_{\|\cdot\|_2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{inx}, \quad c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int} dt$$

у норми $\|\cdot\|_2$. То следи из општих тврђења везаних за потпуност тригонометријског система (Друга Вајерштрасова теорема) и ортогоналност тог система (у Глави 1 смо видели да је потпун ортонормиран систем база). Корисно је знати када овај развој важи за конкретне вредности x . Један од услова је који то обезбеђују је *Динијев услов* – функција f задовољава тај услов у околини тачке x ако

(а) постоје леви и десни лимес

$$f(x_-) := \lim_{t \rightarrow 0+} f(x-t), \quad f(x_+) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(x+t);$$

⁷При томе игноришемо, за интеграцију небитне, тачке облика $2n\pi$ (у њима може да буде нарушен услов периодичности).

(б) за неко $\varepsilon > 0$ интеграли

$$\int_0^\varepsilon \frac{f(x-t) - f(x_-)}{t} dt \quad \text{и} \quad \int_0^\varepsilon \frac{f(x+t) - f(x_+)}{t} dt$$

апсолутно конвергирају.

Ако је 2π -периодична функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ апсолутно интегрална на $[-\pi, \pi]$ и задовољава Динијев услов у тачки x , онда њен Фуријеов ред у тој тачки конвергира и важи

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{inx} = \frac{f(x_-) + f(x_+)}{2}.$$

Ако је уз то функција f непрекидна у тачки x , онда њен Фуријеов ред конвергира ка $f(x)$.

Доказ: Нека су, као и у (14), $S_n(x)$ парцијалне суме Фуријеовог реда функције f . Тада је

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^0 + \int_0^{\pi} \right) f(x-t) D_n(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (f(x-t) + f(x+t)) D_n(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x_-) + f(x_+)}{2} D_n(t) dt + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{f(x-t) - f(x_-)}{2} + \frac{f(x+t) - f(x_+)}{2} \right) D_n(t) dt \\ &= \frac{f(x_-) + f(x_+)}{2} + \\ &\quad + \int_0^{\pi} \frac{1}{\pi} \left(\frac{f(x-t) - f(x_-)}{2 \sin(t/2)} + \frac{f(x+t) - f(x_+)}{2 \sin(t/2)} \right) \sin((n+1/2)t) dt. \end{aligned}$$

Пошто је $\sin(t/2) \sim t$ кад $t \rightarrow 0_+$, из Риманове леме (13) следи да последњи сабирак тежи нули кад $n \rightarrow \infty$, што је и требало доказати.

(18) Функција $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ је *део по део непрекидна* на интервалу $[a, b]$ ако постоји коначна подела

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b,$$

таква да је f непрекидна на сваком од интервала $]x_{j-1}, x_j[$, а у њиховим граничним тачкама има једностране лимесе. Функција је део по део класе C^1 ако има део по део непрекидан извод. Из Лагранжеве теореме следи да функција која је део по део класе C^1 задовољава Динијев услов (17).

(19) *Динијев услов за Фуријеове интеграле.* Нека је $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ део по део непрекидна функција која задовољава Динијев услов у тачки x . Тада њен Фуријеов интеграл конвергира у тој тачки и важи, у ознакама из (17),

$$\frac{f(x_-) + f(x_+)}{2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

Доказ је сличан доказу Динијевог критеријума за конвергенцију Фуријеовог реда (17), при чему улогу идентитета

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(s) ds = 2\pi$$

игра Дирихлеов интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(Ts)}{s} ds = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}$$

(видети (23) на стр. 323). Нека је

$$S_T(x) := \int_{-T}^T \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi = \int_{-T}^T \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-itx} dt \right) d\xi.$$

Читаоцу остављамо да покаже да је оправдана промена поретка интеграције у последњем интегралу, одакле, после експлицитног израчунавања интеграла по ξ следи да је

$$S_T(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} (f(x-s) + f(x+s)) \frac{\sin(sT)}{s} ds.$$

Одатле, и из Дирихлеовог интеграла, следи да је разлика $S_T(x) - \frac{f(x_-) + f(x_+)}{2}$ једнака

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\frac{f(x-s) - f(x_-)}{s} + \frac{f(x+s) - f(x_+)}{s} \right) \sin(sT) ds.$$

Из Риманове леме следи да интеграл на десној страни тежи нули кад $T \rightarrow +\infty$.

- (20) *Ојлеров развој синуса*, који смо елементарно извели у (31) на 327. страни, може да се изведе и помоћу Фуријеових редова. Нека је $\lambda \in]-1, 1[$. Функција $f(x) = \cos(\lambda x)$ задовољава Динијев услов (17) у свакој тачки $x \in]-\pi, \pi[$, па је она једнака збиру свог Фуријеовог реда:

$$\cos(\lambda x) = \frac{2\lambda \sin(\pi\lambda)}{\pi} \left(\frac{1}{2\lambda^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda^2 - n^2} \cos(nx) \right).$$

За $x = \pi$ одатле добијамо

$$\operatorname{ctg}(\pi\lambda) - \frac{1}{\pi\lambda} = \frac{2\lambda}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^2 - n^2}.$$

На сваком интервалу $|\lambda| \leq \lambda_0 < 1$ је

$$\left| \frac{1}{\lambda^2 - n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2 - \lambda_0^2},$$

па ред на десној страни равномерно конвергира, чиме је оправдана замена поретка сумирања и интеграције:

$$\int_0^x \left(\operatorname{ctg}(\pi\lambda) - \frac{1}{\pi\lambda} \right) d\lambda = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{2\lambda}{\lambda^2 - n^2} d\lambda$$

за $|x| < 1$. Израчунавањем ових интеграла добијамо

$$\log \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \sum_{n=1}^{\infty} \log \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right),$$

одакле следи Ојлеров развој синуса

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$$

за $|x| < 1$.

(21) Из Ојлеровог развоја синуса следи *Валисова формула*

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)$$

(22) **Задатак:** Користећи Фуријеов развој функције $f(x) = x^2$ на $[-\pi, \pi]$ доказати једнакости

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{и} \quad \frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

(23) *Дирихлеова лема.* Нека је $g : [0, \beta[\rightarrow \mathbb{R}$ растућа и ограничена апсолутно интегрална функција и $g(0_+)$ њен десни лимес у нули. Тада је

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^{\beta} g(x) \frac{\sin(\lambda x)}{x} dx = \frac{\pi}{2} g(0_+).$$

Доказ: Интеграл на левој страни може да се напише као

$$g(0_+) \int_0^{\beta} \frac{\sin(\lambda x)}{x} dx + \int_0^{\beta} (g(x) - g(0_+)) \frac{\sin(\lambda x)}{x} dx.$$

Први сабирак се помоћу смене $t = \lambda x$ трансформише у

$$g(0_+) \int_0^{\lambda\beta} \frac{\sin t}{t} dt$$

и његов лимес, кад $\lambda \rightarrow +\infty$ је $g(0_+) \frac{\pi}{2}$, пошто је вредност Дирихлеовог интеграла (видети стр. 323)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Да бисмо доказали лему, остаје још да докажемо да је

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^{\beta} (g(x) - g(0_+)) \frac{\sin(\lambda x)}{x} dx = 0.$$

Нека је $\varepsilon > 0$ и нека је $\delta \in]0, \beta[$ такво да је

$$0 \leq g(t) - g(0_+) < \varepsilon \quad \text{за} \quad 0 \leq t \leq \delta.$$

Интеграл који посматрамо можемо да напишемо у облику збира

$$\int_0^{\delta} (g(x) - g(0_+)) \frac{\sin(\lambda x)}{x} dx + \int_{\delta}^{\beta} (g(x) - g(0_+)) \frac{\sin(\lambda x)}{x} dx$$

Други сабирак тежи нули кад $\lambda \rightarrow +\infty$ на основу Риманове леме (13), јер је функција $(g(x) - g(0_+))/x$ ограничена на $[\delta, \beta[$. Први сабирак

можемо, примењујући прво Другу теорему о средњој вредности за интеграле, а затим смену $t = \lambda x$, да трансформишемо на следећи начин:

$$\begin{aligned} \int_0^\delta (g(x) - g(0_+)) \frac{\sin(\lambda x)}{x} dx &= (g(\xi) - g(0_+)) \int_\xi^\delta \frac{\sin(\lambda x)}{x} dx \\ &= (g(\xi) - g(0_+)) \int_{\lambda\xi}^{\lambda\delta} \frac{\sin t}{t} dt, \end{aligned}$$

за неко $\xi \in [0, \delta]$. Интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ конвергира, важи

$$\left| \int_0^T \frac{\sin t}{t} dt \right| \leq M < +\infty$$

(лева страна је непрекидна функција по T која има лимес у $+\infty$, па је ограничена по T). Одатле следи

$$\left| \int_{\lambda\xi}^{\lambda\delta} \frac{\sin t}{t} dt \right| = \left| \int_0^{\lambda\delta} \frac{\sin t}{t} dt - \int_0^{\lambda\xi} \frac{\sin t}{t} dt \right| \leq 2M.$$

Пошто је $|g(t) - g(0_+)| < \varepsilon$ на $[0, \delta]$, из претходне неједнакости следи

$$(g(\xi) - g(0_+)) \int_{\lambda\xi}^{\lambda\delta} < 2M\varepsilon,$$

чиме је доказ завршен.

- (24) *Дирихле–Жорданов услов конвергенције Фуријеовог реда.* Нека је $x_0 \in]-\pi, \pi[$ и $f :]-\pi, \pi[\rightarrow \mathbb{C}$ функција која у некој околини $]x_0 - \beta, x_0 + \beta[$ тачке x_0 има ограничену варијацију. Тада фуријеов ред функције f у тачки x_0 конвергира ка $\frac{f(x_0-0) + f(x_0+0)}{2}$.

Доказ: Пошто је свака реална функција ограничене варијације разлика две монотоне, а комплексну можемо да раздвојимо на реални и имагинарни део, довољно је доказати тврђење под претпоставком да је f реална функција која је растућа на $]x_0 - \beta, x_0 + \beta[$. Из Принципа локализације (16) следи да је за тврђење небитно како функција изгледа ван тог интервала, па можемо да претпоставимо да је f монотона на $] - \pi, \pi[$. После ових претпоставки, доказ тврђења је исти као доказ Динијевог услова (17), само што се уместо Риманове користи Дирихлеова лема (23).

- (25) Динијев (17) и Дирихле–Жорданов (24) услов су неупоредиви:

Задатак: Нека је

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{\log \frac{1}{2\pi}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad f_2(x) = \begin{cases} x \cos \frac{\pi}{2x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

- (а) Доказати да функција f_1 задовољава Дирихле–Жорданов, али не задовољава Динијев услов.
 (б) Доказати да функција f_2 задовољава Динијев услов, али не задовољава Дирихле–Жорданов.

- (26) Специјалан случај Дирихле–Жордановог услова је *Дирихлеов услов*: Ако је $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ монотона функција која има највише коначно много прекида, онда њен Фуријеов ред конвергира ка $f(x_0)$ у свакој тачки непрекидности и ка $\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$ у свакој тачки прекида.
- (27) Функције

$$F_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(x),$$

где су D_n Дирихлеова језгра (14) називају се *Фејеровим језгрима*. Имајући у виду да је

$$D_n(x) = \frac{\sin(n+1/2)x}{\sin(x/2)}$$

(задатак у 14), сумирањем збира којим је дефинисано Фејерово језгро (нпр. уз помоћ Ојлерове формуле $\sin \alpha = (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})/2i$) добијамо

$$F_n(x) = \frac{\sin^2((n+1)x/2)}{(n+1)\sin^2(x/2)}.$$

У (14) смо са $S_n(x)$ означили n -ту парцијалну сума Фуријеовог реда. Из Штолцове теореме следи да ако $S_n(x)$ конвергира, онда и

$$\sigma_n(x) := \frac{S_0(x) + \dots + S_n(x)}{n+1}$$

конвергира ка истој граничној вредности. Приметимо да се $\sigma_n(x)$ може написати у облику конволуције

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)F_n(t) dt.$$

Задатак: Доказати да је фамилија функција

$$K_n = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} F_n(x), & |x| \leq \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$$

апроксимација јединице, тј. да задовољава услове у (72) на 342. страни. Одатле извести доказ Друге Вајерштрасове теореме о апроксимацији непрекидних функција тригонометријским полиномима (тврђење (312) на стр. 156).

Задатак: Нека је функција $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ непрекидна у тачки x_0 . Доказати да је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x_0) = f(x_0).$$

Задатак: Користећи Штолцову теорему доказати да Фуријеов ред функције f која је непрекидна у тачки x_0 или дивергира⁸, или конвергира ка $f(x_0)$.

⁸Фуријеов ред непрекидне функције може да дивергира.

(28) Диференцирање Фуријеовог реда. Нека је

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

2π -периодична функција класе C^1 и

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{inx}$$

њен Фуријеов ред. Тада је Фуријеов ред првог извода $f'(x)$ ред

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} inc_n(f) e^{inx}$$

који се добија формалним диференцирањем Фуријеовог реда функције f . Другим речима, постоји следећа веза између Фуријеових коефицијената ова два реда:

$$c_n(f') = inc_n(f).$$

Доказ следи из формуле за Фуријеове коефицијенте и формуле парцијалне интеграције:

$$\begin{aligned} c_n(f') &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} f(x) e^{-inx} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{in}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = inc_n(f), \end{aligned}$$

пошто је $e^{in\pi} f(-\pi) = e^{-in\pi} f(\pi)$, због периодичности.

Важно је напоменути да се овде не ради о диференцирању реда члан по члан (добијени ред не мора да конвергира, као ни полазни; видети задатак и фусноту у (27)), него о последици формуле парцијалне интеграције.

(29) Из (28) следи да, ако је

$$f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$$

функција класе C^p таква да је

$$f^{(k)}(-\pi) = f^{(k)}(\pi) \quad \text{за } k \in \{0, 1, \dots, p-1\},$$

онда је

$$c_n(f^{(p)}) = (in)^p c_n(f).$$

Одатле, на основу Беселове неједнакости, добијамо следећу важну асимптотику Фуријеових коефицијената функције класе C^p :

$$|c_n(f)| = n^{-p} \gamma_n,$$

где је $\gamma_n \geq 0$ низ такав да је $\sum \gamma_n^2 < +\infty$. Специјално

$$c_n(f) = o(n^{-p}), \quad \text{кад } n \rightarrow \infty.$$

(30) Нека је $p \geq 1$ и $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ функција класе C^p , таква да је

$$f^{(k)}(-\pi) = f^{(k)}(\pi), \quad \text{за } k \in \{0, 1, \dots, p-1\}.$$

Тада Фуријеов ред функције f конвергира апсолутно и равномерно ка f на интервалу $[-\pi, \pi]$.

Доказ: Из (29) следи да је

$$|c_n(f)e^{inx}| \leq n^{-p}\gamma_n \leq \frac{1}{2}(\gamma_n^2 + n^{-2p}).$$

Пошто је $p \geq 1$, ред $\sum n^{-2p}$ конвергира, а ред $\sum \gamma_n^2$ конвергира на основу (29). Одатле, из Вајерштрасовог поредбеног принципа, следи да Фуријеов ред функције f равномерно и апсолутно конвергира ка некој суми $S_\infty(x)$, тј.

$$S_\infty(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x).$$

Из Динијевог услова (17) следи да је $S_\infty \equiv f$.

- (31) *Интеграција Фуријеовог реда.* Нека је $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ непрекидна функција и

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)e^{inx}$$

њен Фуријеов ред. Тада је

$$\int_0^x f(t) dt = c_0(f) + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{c_n(f)}{in} (e^{inx} - 1).$$

Ред на десној страни је дефинисан као

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=-k}^{-1} + \sum_{n=1}^k \right)$$

и тај лимес је равномеран.

Доказ следи из тврђења (28), примењеног на функцију

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt - c_0(f)x$$

класе C^1 . Приметимо да је $F(-\pi) = F(\pi)$ због дефиниције Фуријеовог коефицијента $c_0(f)$, па функцију F можемо да продужимо на целу реалну осу тако да буде 2π -периодична и непрекидна. Доказ равномерне конвергенције следи из (30).

Приметимо да у овом тврђењу Фуријеов ред саме функције f не мора да конвергира ка функцији f (видети задатак и фусноту у (27), али је сума реда који се добија формалном интеграцијом Фуријеовог реда функције f *једнака* интегралу функције f . То, као што смо у доказу навели, следи из тврђења (30), али и из Динијевог услова (17).

- (32) Нека је γ проста затворена C^1 крива дужине L у равни \mathbb{C} , која ограничава површину A . Уз помоћ Фуријеових редова можемо да докажемо изопериметријску неједнакост (видети стр. 291, тврђења (11) и (12))

$$4\pi A \leq L^2,$$

при чему једнакост важи ако и само ако је крива γ круг.

Доказ: нека је крива γ параметризована са

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad -\pi \leq t \leq \pi,$$

при чему је параметар t изабран тако да је

$$t = 2\pi \frac{s}{L} - \pi,$$

где је s природни параметар (видети (154) на стр. 92). Нека је

$$z(t) = x(t) + iy(t).$$

Из $\frac{dt}{ds} = \frac{2\pi}{L}$ следи

$$|z'(t)| = (x'(t))^2 + (y'(t))^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{L^2}{4\pi^2}.$$

Из

$$\begin{aligned}\bar{z}z' &= (x - iy)(x' + iy') \\ &= (xx' + yy') + i(xy' - x'y) \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2)' + i(xy' - x'y)\end{aligned}$$

следи да формула за површину

$$A = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (xy' - x'y) dt$$

(видети (10) на стр. 291) може да се напише као

$$A = \frac{1}{2i} \int_{-\pi}^{\pi} z'(t)z(t) dt - \frac{1}{4i} \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 + y^2)'(t) dt.$$

Пошто је $z(t)$ затворена крива, тј. $x(-\pi) = x(\pi)$, $y(-\pi) = y(\pi)$, из Њутн–Лајбницевог формуле следи да је последњи сабирак једнак нули, па је

$$A = \frac{1}{2i} \int_{-\pi}^{\pi} z'(t)z(t) dt.$$

Нека је

$$z(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$$

Фуријеов ред функције z . Функција z је класе C^1 , дакле испуњава Динијев услов (видети (18)) па у претходној формули оправдано стоји знак једнакости. Фуријеов ред првог извода $z'(t)$ је

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} inc_n e^{int}.$$

Он не мора да конвергира ка z' , али важе Парсевалове једнакости (видети (354) на 176 страни)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \|z'\|^2 &:= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |z'(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |nc_n|^2 \\ \frac{1}{2\pi} \langle z', z \rangle &:= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} z'(t)\overline{z(t)} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} inc_n \bar{c}_n.\end{aligned}$$

Пошто је

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |z'(t)|^2 dt = \frac{L^2}{4\pi^2} \quad \text{и} \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} z'(t)\overline{z(t)} dt = \frac{i}{\pi} A,$$

одатле следи

$$L^2 = 4\pi^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |nc_n|^2 \quad \text{и} \quad A = \pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} nc_n \overline{c_n}.$$

Из ових једнакости добијамо

$$L^2 - 4\pi A = 4\pi^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (n^2 - n)|c_n|^2 \geq 0.$$

Последња неједнакост је строга, сем ако је $c_n = 0$ за $n \notin \{0, 1\}$. Али тада је

$$z(t) = c_0 + c_1 e^{it}, \quad -\pi \leq t \leq \pi,$$

што је једначина круга.

- (33) *Поенкареова неједнакост.* Нека је $f : J \rightarrow \mathbb{C}$ функција класе C^1 на квадру $J \subset \mathbb{R}^n$. Њена *средња вредност* је комплексни број

$$f_J = \frac{1}{\mu(J)} \int_J f(t) dt,$$

где је μ Жорданова мера. За свако $p \geq 1$ постоји константа $C > 0$ таква да је

$$\|f - f_J\|_p \leq C \|\nabla f\|_p.$$

Овде је

$$\|f - f_J\|_p = \left(\int_J |f(t) - f_J|^p dt \right)^{1/p}, \quad \|\nabla f\|_p = \left(\int_J \|\nabla f(t)\|^p dt \right)^{1/p},$$

где је норма у последњем интегралу еуклидска норма у \mathbb{C}^n . Ово је *Поенкареова неједнакост* (она важи и под слабијим претпоставкама за функцију f).

Користећи Фуријеове редове можемо на једноставан начин да докажемо Поенкареову неједнакост за специјални случај $J = [-\pi, \pi]$ и $p = 2$: из Парсевалове једнакости следи

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |c_n|^2 \geq \sum_{n \neq 0} |c_n|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - f_J|^2 dt,$$

што даје Поенкареову неједнакост (о овом специјалном случају добија се $C = 1$ на десној страни неједнакости).

Сабирак за $n = 1$ у оба претходна реда је исти, па је

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2 dt - \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - f_J|^2 dt \geq \sum_{|n| \geq 2} (n^2 - 1) |c_n|^2,$$

тако да у Поенкареовој једнакости важи једнакост ако и само ако је $c_n = 0$ за $n \geq 2$.

- (34) Користећи Поенкареову неједнакост, можемо да скратимо доказ (32) изопериметријске неједнакости. Нека је

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad -\pi \leq t \leq \pi$$

параметризација криве γ као у (32). Због периодичности је

$$\int_{-\pi}^{\pi} y'(t) dt = y(\pi) - y(-\pi) = 0,$$

па је

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\pi}^{\pi} xy' dt = \int_{-\pi}^{\pi} (x - x_J)y' dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} ((x - x_J)^2 + (y')^2 - (x - x_J - y')^2) dt \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} ((x - x_J)^2 + (y')^2) dt. \end{aligned}$$

Овде смо користили једнакост $ab = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - (a - b)^2)$ у првом кораку, а изоставили негативан сабирак и прешли на неједнакост у другом. Ако сада на први сабирак у последњем реду применимо Поенкареову неједнакост, добијамо

$$A \leq \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} ((x')^2 + (y')^2) dt = \frac{1}{2} \frac{L^2}{4\pi^2} 2\pi,$$

одакле следи изопериметријска неједнакост.

(35) **Задатак:** Развити функције

(а) $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x & \text{за } x \in (0, \pi) \\ -\pi - x & \text{за } x \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

(б) $f : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$

у тригонометријски Фуријеов ред.

(36) **Задатак:** Доказати једнакости

(а) $\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{2n}$ за $0 < x < \pi$;

(б) $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$ за $0 < x < \pi$;

(в) *Лајбницеов израз за број π :* $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$.

(37) **Задатак:** Нека је $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -периодична функција класе C^m .

(а) Доказати да је

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_n(t - x) f^{(n)}(t) dt$$

где је $P_n(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-n} \cos(ks + \frac{n\pi}{2})$.

(б) Доказати да су, за све $n \in \mathbb{N}$, $P_n(s)$ полиноми. (Упутство: искористити Задатак (35) (б)).

(в) Доказати да је $\int_0^{2\pi} P_n(s) ds = 0$ за $n \geq 1$.

(38) *Бернулијеви полиноми* су полиноми једнозначно одређени условима

- $\mathcal{B}_0(x) \equiv 1$;
- $\mathcal{B}'_n(x) = n\mathcal{B}_{n-1}(x)$ за $n \geq 1$;
- $\int_0^1 \mathcal{B}_n(x) dx = 0$ за $n \geq 1$.

Овако изгледа првих седам Бернулијевих полинома:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_0(x) &= 1 \\ \mathcal{B}_1(x) &= x - \frac{1}{2} \\ \mathcal{B}_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6} \\ \mathcal{B}_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \\ \mathcal{B}_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30} \\ \mathcal{B}_5(x) &= x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x \\ \mathcal{B}_6(x) &= x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42}.\end{aligned}$$

(39) **Задатак:** Наћи везу између Бернулијевих полинома и полинома P_n из (37).

(40) Из (38) се лако изводе следећа својства Бернулијевих полинома:

(а) $\mathcal{B}_n(1-x) = (-1)^n \mathcal{B}_n(x)$;

(б) $\mathcal{B}_n(0) = \mathcal{B}_n(1)$ за $n \geq 2$

(в) $\mathcal{B}_{2n+1}(0) = 0$ за $n \geq 1$.

Доказ тврђења (а) изводимо индукцијом. За $n = 1$ оно очигледно важи. Претпоставимо да је $\mathcal{B}_{n-1}(1-x) = (-1)^{n-1} \mathcal{B}_{n-1}(x)$. Пошто је $\mathcal{B}'_n(x) = n\mathcal{B}_{n-1}(x)$, интеграцијом добијамо

$$-\mathcal{B}_n(1-x) = (-1)^{n-1} \mathcal{B}_n(x) + C.$$

Одатле и из $\int_0^1 \mathcal{B}_n(x) dx = 0$ следи $C = 0$, чиме је доказано (а).

Доказ тврђења (б) следи из

$$\mathcal{B}_n(1) - \mathcal{B}_n(0) = \int_0^1 \mathcal{B}'_n(x) dx = n \int_0^1 \mathcal{B}_{n-1}(x) dx = 0.$$

Тврђење (в) следи из (а) и (б).

(41) Бернулијеви полиноми могу да се дефинишу и помоћу

$$\frac{te^{tx}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n(x) \frac{t^n}{n!},$$

што може да се види провером услова (38).

(42) **Задатак:** Полазећи од

$$\mathcal{B}_n(x+1) - \mathcal{B}_n(x) = \int_x^{x+1} \mathcal{B}'_n(t) dt = \int_x^{x+1} \mathcal{B}_{n-1}(t) dt$$

доказати да је $\mathcal{B}_n(x+1) - \mathcal{B}_n(x) = nx^{n-1}$. Извести одатле формулу

$$1^k + 2^k + \dots + n^k = \int_1^{n+1} \mathcal{B}_k(x) dx.$$

(43) Бројеви

$$B_n := \mathcal{B}_n(0)$$

називају се *Бернулијевим бројевима*. Почетни чланови овог низа су:

$$\begin{aligned} B_0 &= 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, B_5 = 0, \\ B_6 &= \frac{1}{42}, B_7 = 0, B_8 = -\frac{1}{30}, B_9 = 0, B_{10} = \frac{5}{66}, B_{11} = 0, \\ B_{12} &= -\frac{691}{2730}, B_{13} = 0, B_{14} = \frac{7}{6}, B_{15} = 0, B_{16} = -\frac{3617}{510}, \\ B_{17} &= 0, B_{18} = \frac{43867}{798}, B_{19} = 0, B_{20} = -\frac{174611}{330}, B_{21} = 0 \dots \end{aligned}$$

Из (40) следи да су сви непарни Бернулијеви бројеви једнаки нули, осим $B_1 = -1/2$. Диференцирањем једнакости

$$\mathcal{B}_{2n+2}(1-x) = \mathcal{B}_{2n+2}(x)$$

и коришћењем $\mathcal{B}'_{2n+2}(x) = (2n+2)\mathcal{B}_{2n+1}(x)$ и $B_{2n+1} = 0$ закључујемо да су B_{2n} и B_{2n+2} супротног знака за $n \geq 1$.

- (44) Из (41) следи да Бернулијеви бројеви могу да се дефинишу помоћу коефицијената у развоју аналитичке функције $z \mapsto z/(e^z - 1)$ у степени ред

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}.$$

- (45) **Задатак:** Применом индукције и својства $\mathcal{B}'_n(x) = n\mathcal{B}_{n-1}(x)$ доказати да је

$$\mathcal{B}_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k x^{n-k}.$$

- (46) За свако $k \in \mathbb{N}$ је

$$\zeta(2k) = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k} B_{2k}}{2(2k)!},$$

где је $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ Риманова зета-функција.

Доказ: Разијањем функције $\mathcal{B}_1(x) = x - \frac{1}{2}$ у Фуријеов ред добијамо⁹

$$\mathcal{B}_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\pi} \sin(2n\pi(x - 1/2)).$$

Пошто је $\mathcal{B}'_2(x) = 2\mathcal{B}_1(x)$, тј.

$$\mathcal{B}_2(x) = B_2 + 2 \int_0^x \mathcal{B}_1(x),$$

развој функције $\mathcal{B}_2(x)$ у Фуријеов ред добијамо по правилу за интеграцију Фуријеовог реда (или применом Њутн-Лајбницевог формуле):

$$\mathcal{B}_2(x) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n\pi)^2} \cos(2n\pi(x - 1/2)).$$

⁹Развој функције у Фуријеов ред на интервалу $[-T, T]$ је развој по ортонормираном систему $\{\frac{1}{\sqrt{2t}}, \frac{1}{\sqrt{T}} \cos(n\pi x/T), \frac{1}{\sqrt{T}} \sin(n\pi x/T) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Развој функције $x - \frac{1}{2}$ на интервалу $[0, 1]$ о коме је реч добија се транслацијом за $\frac{1}{2}$ развоја функције x на $[-1/2, 1/2]$.

Ако поновимо поступак и овај израз интегралимо још два пута, добијамо Фуријеов развој за $\mathcal{B}_4(x)$. Индукцијом долазимо до опште формуле

$$\mathcal{B}_{2k}(x) = 2(-1)^{k+1}(2k)! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n\pi)^{2k}} \cos(2n\pi(x - 1/2)),$$

па је

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{2k} &= \mathcal{B}_{2k}(0) = 2(-1)^{k+1}(2k)! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n\pi)^{2k}} \cos(n\pi) \\ &= 2(-1)^{k+1}(2k)! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n\pi)^{2k}} \\ &= 2(-1)^{k+1}(2k)! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n\pi)^{2k}} \\ &= \frac{2(-1)^{k+1}(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} \\ &= \frac{2(-1)^{k+1}(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \zeta(2k), \end{aligned}$$

што је и требало доказати.

(47) Из (46) следи *Ојлерова формула*

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

(48) **Задатак:** Доказати да је низ B_{2n} неограничен.

(49) **Задатак:** Користећи развој парне функције

$$f(x) = \log(2 \cos(x/2))$$

у Фуријеов ред на интервалу $]-\pi, \pi[$ доказати идентитет

$$\log(2 \cos(x/2)) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(nx)}{n}.$$

Замењујући $\pi - x$ уместо x у овој формули, доказати да је

$$-\log(2 \sin(x/2)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n} \quad \text{за } 0 < x < 2\pi.$$

(50) *Фуријеов ред функције* $\log \Gamma(x)$. Да бисмо одредили коефицијенте у развоју

$$\log \Gamma(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n\pi x) + b_n \sin(2n\pi x)$$

функције $\log \Gamma(x)$ у Фуријеов ред на интервалу $]0, 1]$ треба да израчунамо интеграле

$$a_n = 2 \int_0^1 \log \Gamma(x) \cos(2n\pi x) dx, \quad n \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$b_n = 2 \int_0^1 \log \Gamma(x) \sin(2n\pi x) dx, \quad n \in \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Први интеграл је лакше израчунати: из формуле допуњавања (видети стр. 327) следи

$$\log \Gamma(x) + \log \Gamma(1-x) = \log 2\pi - \log(2 \sin(\pi x)).$$

Приметимо да Фуријеов ред функције $\Gamma(1-x)$ може да се добије од Фуријеовог реда функције $\Gamma(x)$, ако се у њему x замени са $(1-x)$. При томе се чланови са косинусима не мењају, а чланови са синусима мењају знак. Сабирањем ова два Фуријеова реда добијамо

$$\log \Gamma(x) + \log \Gamma(1-x) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n\pi x).$$

Израз на левој страни је једнак $\log 2\pi - \log(2 \sin(\pi x))$. Ову функцију можемо да развијемо у Фуријеов ред користећи (49). Тако добијамо

$$a_0 = \log \sqrt{2\pi}, \quad a_n = \frac{1}{2n}, \quad n \in \{1, 2, 3, \dots\}.$$

За израчунавање коефицијената b_n можемо да се послужимо формулом

$$\log \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \left((x-1)e^{-t} - \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{1 - e^{-t}} \right) \frac{dt}{t}$$

доказаном у (51) на 333. страни. Ако у њој уведемо смену $e^{-t} = s$, добијамо

$$\log \Gamma(x) = \int_0^1 \left(\frac{1 - s^{x-1}}{1 - s} - x + 1 \right) \frac{ds}{\log s},$$

па коефицијенте b_n можемо да израчунамо као

$$b_n = 2 \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\frac{1 - s^{x-1}}{1 - s} - x + 1 \right) \sin(2n\pi x) dx \right) \frac{ds}{\log s}.$$

Задатак: Оправдати промену поретка интеграције у последњем интегралу и доказати да је

$$b_n = \frac{1}{\pi} (\gamma + \log(2n\pi)),$$

где је γ Ојлерова константа (видети (52) на стр. 334). При решавању овог задатка може да буде користан резултат (53) на стр. 286.

(51) **Задатак:** Нека је

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$$

парцијална сума тригонометријског Фуријеовог реда функције $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ и $\sigma_n(x)$ (Фејерова) аритметичка средина

$$\sigma_n(x) := \frac{1}{n+1} [S_0(x) + S_1(x) + \cdots + S_n(x)].$$

Доказати:

(а) Ако је $\sup_x |f(x)| \leq M$, онда је $\sup_{x,n} |\sigma_n(x)| \leq M$.

(б) Ако је f функција ограничене варијације, онда је низ $S_n(x)$ равномерно ограничен.

(в) Низ $\sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k}$ је равномерно ограничен.

(52) **Задатак:** Развити функцију

$$f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(x) = e^{\lambda x}, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

у тригонометријски Фуријеов ред.

(53) **Задатак:** Написати тригонометријске Фуријеове редове функција

$$f(x) = \begin{cases} \log(2 \cos \frac{x}{2}) & |x| < \pi \\ 0 & x = \pm\pi, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & -\pi \leq x \leq 0 \end{cases}$$

на $[-\pi, \pi]$ и испитати њихову конвергенцију.

(54) **Задатак:** Доказати да за $x \in]0, 2\pi[$ важи

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi - x}{2}.$$

Доказати да за $x \in]0, \pi[$ важи

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2nx)}{2n} = \frac{\pi - 2x}{4} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1} = \frac{\pi}{4}.$$

Доказати да за $x \in]-\pi, \pi[$ важи

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{x}{2}.$$

Доказати да за $x \in [-\pi, \pi]$ важи

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(nx)}{n^2} = \frac{3x^2 - \pi^2}{12}.$$

Користећи ове збирове, израчунати

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

(55) **Задатак:** Наћи низове a_n и b_n тако да важи

$$e^{\lambda x} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx \quad \text{и} \quad e^{\lambda x} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

за свако $x \in (0, \pi)$.

(56) **Задатак:** Нека је $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ функција класе C^1 , таква да је $f(0) = f(\pi) = 0$.

(а) Доказати неједнакост Стеклова

$$\int_0^\pi (f(x))^2 dx \leq \int_0^\pi (f'(x))^2 dx,$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $f(x) = a \cos x$.

(б) Доказати да неједнакост Стеклова важи и ако се услов $f(0) = f(\pi) = 0$ замени условом $\int_0^\pi f(x) dx = 0$.

(57) **Задатак:** Нека је $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ функција класе C^1 , таква да је $f(-\pi) = f(\pi)$ и $\int_{-\pi}^\pi f(x) dx = 0$. Доказати Виртингерову неједнакост

$$\int_{-\pi}^\pi (f(x))^2 dx \leq \int_{-\pi}^\pi (f'(x))^2 dx,$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $f(x) = a \cos x + b \sin x$.

(58) **Задатак:** Нека су $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -периодичне функције и $c_n(f)$, $c_n(g)$ њихови Фуријеови коефицијенти у односу на тригонометријски систем. Доказати да Фуријеови коефицијенти $c_n(h)$ нормиране конволуције

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x-t)g(t) dt$$

задовољавају једнакост $c_n(h) = c_n(f)c_n(g)$.

(59) *Лежандрови полиноми.* У овој глави смо разматрали тригонометријске Фуријеове редове, тј. развоје функција у односу на базу $\{e^{inx} \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Наравно, имајући у виду апстрактну теорију Фуријеових редова из Главе 1, има смисла говорити о Фуријеовим редовима у односу на било коју ортонормирану базу.

У (353) на стр. 175 смо видели да је систем вектора

$$\{1, x, x^2, \dots\}$$

потпун у простору

$$R^2[-1, 1] := \{f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C} \mid \|f\|_2^2 := \int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx < +\infty\},$$

али да није база.

Задатак: Доказати да се Грам–Шмитовим поступком ортогонализације систем $\{1, x, x^2, \dots\}$ у односу на скаларни производ $\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(x)\overline{g(x)} dx$ добија систем Лежандрових полинома¹⁰

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.$$

Доказати да је систем Лежандрових полинома база у $R^2[-1, 1]$. Наћи прва три члана развоја функције $\cos(\pi x)$ у тој бази (тј. прва три члана њеног Фуријеовог реда у односу на систем Лежандрових полинома).

¹⁰Реч о ортогонализацији, а не ортонормализацији – Лежандрови полиноми су нормирани тако да им је водећи коефицијент 1, а не тако да су јединичне дужине.

- (60) **Задатак:** Доказати да за сваку функцију $f \in R^2[-1, 1]$ важи

$$\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) \left| \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx \right|^2,$$

где су $P_n(x)$ Лежандрови полиноми (59).

- (61) **Задатак:** Доказати да је полином степена n са коефицијентом 1 уз x^n који је најближи нули у $(R^2[-1, 1], \|\cdot\|_2)$ Лежандров полином $P_n(x)$.
- (62) **Задатак:** Нека је $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ непрекидна 2π -периодична функција и λ реалан број, такав да је $\lambda^{-1}\pi$ ирационалан. Доказати да важи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x + k\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt.$$

(Упутство: доказати прво да тврђење важи за $f(x) = e^{ikx}$.)

- (63) **Задатак:** Нека је X пред-Хилбертов простор и $E = \{e_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subset X$ потпун ортонормиран систем вектора.

(а) Доказати да E није прави подскуп ниједног потпуног ортонормираног система.

(б) Доказати да је $\|e_\eta - e_\zeta\| = \sqrt{2}\delta_{\eta\zeta}$, где је $\delta_{\eta\zeta}$ Кронекеров симбол.

(в) Доказати да јединична сфера $\mathbb{S} := \{f \in X \mid \|f\| = 1\}$ није компактан скуп.

(г) Да ли је јединична сфера у Хилбертовом простору комплетан скуп?

(д) Доказати да је, ако је X сепарабилан, скуп Λ пребројив.

- (64) **Задатак:** Нека је H сепарабилан Хилбертов простор над пољем \mathbb{C} .

(а) Ако је $\dim H = \infty$, доказати да је простор H изоморфан простору l^2 комплексних низова z_n таквих да ред $\sum |z_n|^2$ конвергира. Тачније, доказати да постоји линеарни изоморфизам $\Psi : H \rightarrow l^2$ векторских простора који чува скаларни производ, тј. такав да је $\Psi^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{l^2} = \langle \cdot, \cdot \rangle_H$.

(б) Ако је $\dim H = n < \infty$, доказати да је простор H изоморфан простору \mathbb{C}^n са скаларним производом $\mathbf{z} \cdot \mathbf{w} = z_1 \bar{w}_1 + \dots + z_n \bar{w}_n$.

- (65) **Задатак:** Доказати да у пред-Хилбертовом простору норма $\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle}$ задовољава једнакост паралелограма

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2).$$

Зашто се ова једнакост тако зове? Које тврђење елементарне геометрије она уопштава и како се то тврђење елементарно доказује? Дати пример нормираног простора у коме не важи једнакост паралелограма.

- (66) **Задатак:** Нека је $1 \leq k \leq n$, $k, n \in \mathbb{N}$ и $f_{kn} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ карактеристична функција скупа $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$. Доказати:

(а) Низ f_{kn} конвергира у простору $(\mathcal{R}^2([0, 1]), \|\cdot\|_2)$ са нормом $\|f\|_2 := \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 dt}$ ка функцији $f \equiv 0$.

(б) Низ $f_{kn}(t)$ не конвергира ни за једно $t \in [0, 1]$.

(в) Подниз $f_{1,n}(t)$ конвергира за свако $t \in (0, 1]$.

Литература

- [1] Аљанчић, С. *Увод у реалну и функционалну анализу*
- [2] Аранђеловић, Д. *Предавања из Анализе, 1985–87.*
- [3] Арнолд, В.И. *Обичне диференцијалне једначине*
- [4] Бурбаки, Н. *Функције реалне променљиве и Општа топологија*
- [5] Гелдбаум, Б. и Олмстед, Ц. *Контрапримери у анализи*
- [6] Диједоне, Ж. *Основе модерне анализе и Трактат о анализи 1–9*
- [7] Дороговцев, А.Ј. *Математичка анализа, збирка задатака*
- [8] Едвардс, Х.М. *Риманова Зета функција*
- [9] Зорич, В.А. *Математичка анализа 1, 2*
- [10] Кранц, С. и Паркс, Х.Р. *Буквар о реалним аналитичким функцијама*
- [11] Курепа, С. *Функционална анализа*
- [12] Лукеш, Ј. и Мали, Ј. *Мера и интеграл*
- [13] Мардешкић, С. *Математичка анализа 1, 2*
- [14] Марјановић, М. *Математичка анализа 1*
- [15] Милинковић, Д. *Математичка анализа 1*, скрипта Математичког факултета
- [16] Рудин, В. *Принципи математичке анализе и Фуријеова анализа на групама*
- [17] Томас, Ц.Б. и Фини, Р.Л. *Калкулус и аналитичка геометрија*
- [18] Хантер, Ц. и Нахтергел, Б. *Примењена анализа*
- [19] Шафаревич, И. *Основни појмови алгебре*

Индекс

- аксиома
 - Архимедова, 81
 - супремума, 82
- алгебра
 - Банахова, 153
 - нормирана, 152
- апроксимација јединице, 342
- асимптотске релације, 91
- атлас, 245

- база
 - филтера, 55
 - Хамелова, 175
 - Шаудерова, 175
 - топологије, 69
 - векторског простора, 175
- Бета функција, 330
- број
 - Бернулијев, 147, 336, 376
 - Лебегов, 120
- бројеви
 - p -адски, 84

- де Рамова кохомологија, 242, 252
- дифеоморфизам, 92, 221
 - многострукости, 246
 - прост, 225
- диференцијал, 201
 - форме, 238
 - на многострукости, 249
 - спољашњи, 238
- диференцијална форма, 236
 - на многострукости, 251
 - тачна, 241
 - затворена, 241
- дијадски разломци, 82
- дијаметар, 53
- димензија
 - многострукости, 245
 - површи, 226
- дивергенција векторског поља, 234
 - на многострукости, 265
- дужина криве, 92

- екстремне вредности, 212
 - условне, 232
- епсилон-мрежа, 118

- фамилија
 - вектора, линеарно независна, 172
 - вектора, потпуна, 172
- филтер, 47
 - Фрешеов, 49
 - генерисан базом, 55
 - околина, 53
 - пробушених околина, 54, 62
- форма
 - запремине или оријентације, 294
- Формула
 - Јакобијева, 200
- формула
 - ди Брунова, 141
 - Гауса-Остроградског, 293
 - Гаусова, 326
 - Гринова, 290, 293
 - Картанова, 255
 - Лајбницова за π , 347, 375
 - Лежандрова, 329
 - Стирлингова, 336
 - Тејлорова, 211
 - Валисова, 368
- Френеов координатни систем, 94
- функција
 - аналитичка, 139
 - Бета, 330
 - цела, 139
 - Гама, 324
 - хармонијска, 209, 311
 - холоморфна, 192
 - интеграбилна, 57
 - Лагранжева, 233
 - ограничене варијације, 87
 - полунепрекидна, 74
 - примитивна, 96
 - Риманова зета, ζ , 147, 334
- функционална независност, 224

- Гама функција, 324

- градијент, 202
на многострукости, 265
- група
архимедска, 81
дуална, 356
фундаментална, 303
главна линеарна, 82
хомолошка, 259
хомотопска, 303
кохомолошка, 242, 252
комплетна, 82
Лијева, 248
нормирана Абелова, 80
ортогонална, 163
тополошка, 82
тотално уређена, 80
унитарна, 163
- Хесијан, 210
- хиперповрш, 226
- холоморфно пресликавање, 192
- хомеоморфизам, 61
- хомологија, 259
- хомотопија, 256
- имерзија, 248
- интеграл
Данијелов, 132
Дарбуов, 269
диференцијалне форме, 289
на многострукости, 297
Дирихлеов, 323
Фуријеов, 180, 340, 356
Кошијев, 159
криволинијски
друге врсте, 289
прве врсте, 295
Лапласов, 339
Лебегов, 125
неодређени, 96
несвојствени, 278
Ојлеров, 333
по скуцу, 275
површински
друге врсте, 292
прве врсте, 295
Пуасонов, 285, 322, 329, 331, 359
Лапласов доказ, 332
Рабеов, 332
Радонов, 170
разломљени, 339
Риманов, 57, 268
векторског поља, 289, 292
- изометрија, 51
- извод, 186
инверзног пресликавања, 189
комплексни, 192
коваријантни, 255
Лијев, 256
линеарног пресликавања, непрекидног,
190
на многострукости, 247
парцијални, 91, 193
разломљени, 339
сложене функције, 188
у правцу, 91, 194
унутрашњи, 243
векторског поља, 254
вишег реда, 205
- Јакобијан, 188
- једначина
диференцијална
Беселова, 348
хомогена, 204
која раздваја променљиве, 241
линеарна, 124
парцијална, 359
Коши-Риманова, 210
Лапласова, 209, 311, 344
Ојлер-Лагранжева, 213
провођења топлоте, 344, 360, 362
Пуасонова, 312
таласна, 344, 360, 361
- једнакост
паралелограма, 166
Парсевалова, 176
- језгро
 δ -типа, 342
Дирихлеово, 364
Фејерово, 370
- карактер на групи, 356
- карта, 245
- Кавалијеријев принцип, 278
- Клајнова флаша, 71
- кодимензија, 226, 246
- компактификација, 122
једном тачком, 123
- комплетирање, 75
- компонента повезаности, 78
- компоненте повезаности
путне, 78
- комутатор, 251
- конекција, 255
- константа
Липшицова, 59
- контракција, 59, 243
- конвергенција
равномерна, 51
униформна, 51
- конволуција
функција, 342, 357
низова, 106
- координате
цилиндричне, 221
локалне, 221, 226, 245
поларне, 221

- сферне, 221
 - уопштене, 221
- критеријум
 - Вајерштрасов, 319
- крива
 - глатка, 92, 185
 - непараметризована, 92, 185
 - параметризована, 92, 185
 - регуларна, 92, 216
- кривина
 - криве, 93
 - полупречник, 93
 - површи
 - Гаусова, 297
 - главна, 297
- квадратна форма
 - друга, 296
 - прва, 266, 296
- Лапласијан, 209, 311
 - на многострукости, 265
- лема
 - Дирихлеова, 368
 - Лебегова, 120
 - Поенкареова, 259
 - Риманова, 363
 - Урисонова, 64
- лепљење тополошких простора, 72
- лимес
 - бесконачни, 54
 - десни и леви, 62
 - горњи, 56
 - нетангентни, 149
 - по тачкама, 313
 - пресликавања, 54
 - равномерни, 313
 - у бесконачности, 54
 - униформни, 313
- Лопиталова правила, 97
- лопта
 - отворена, 50
 - затворена, 50
- матрица
 - Грамова, 167
 - Јакобијева, 188
- Мебијусова трака, 70
- мера, 133, 294
 - Харова, 356
 - Лебегова, 133, 271
 - Жорданова, 274
- метод најмањих квадрата, 174
- метрички простори
 - тополошки еквивалентни, 68
- метрика, 48
 - p -адска, 52
 - дискретна, 50
 - Риманова, 262
 - униформна, 51
- метрике
 - тополошки еквивалентне, 68
- многострукост
 - глатка, 245
 - Грасманова, 86
 - класе C^k , 245
 - са границом, 298
 - тополошка, 72
- мултииндекс, 212
- наткривање
 - универзално, 257
- неједнакост
 - Беселова, 167
 - изопериметријска, 291, 372
 - Коши-Шварцова, 164
 - Поенкареова, 374
 - Стеклова, 381
 - ултраметричка, 52
 - Виртингерова, 381
- непрекидна бијекција (која није хомеоморфизам), 79
- непрекидност
 - равномерна, 59
 - равностепена, 133
- низ
 - Кошијев, 58
 - ограничене варијације, 86
 - униформно ограничен, 110
- норма, 84
 - линеарног оператора, 87
 - операторска, 87
 - равномерна, 86
 - униформна, 86
- носач функције, 114
- Ојлерова карактеристика, 254
- Ојлерова константа, 326
- околина, 53, 62
 - отворена, 53, 62
 - пробушена, 53
- општи члан реда, 98
- оријентација, 242, 263, 294
 - границе, 299
- осцилација, 53
- отворено покривање скупа, 118
- параметар
 - природни, 93
- параметар поделе, 56
- параметризација
 - локална, 226, 245
 - површи, 226
 - природна, 93
- парцијална сума реда, 98
- подела
 - интервала, 56
 - квадра, 267
 - са уоченим тачкама, 56, 267

- подмногострукост, 226, 246
 полином
 Бернштајнов, 158
 Бернулијев, 375
 Лежаңдров, 381
 Тејлоров, 211
 поље
 архимедско, 83
 неархимедско, 83
 нормирано, 83
 уређено, 83
 векторско, 234
 на многострукости, 254
 потенцијално, 236
 соленоидно, 236
 полунепрекидно, 74
 потенцијал, 236
 векторски, 236
 потпростор
 метрички, 50
 тополошки, 61
 површ
 d -димензиона, 226
 глатка, 226
 класе C^k , 226
 регуларна, 292
 позитивни и негативни део x_+ , x_- , 81
 пресликавање
 n пута диференцијабилно, 206
 диференцијабилно, 186, 187
 комплексно, 192
 реално, 192
 глатко
 на многострукости, 246
 холоморфно, 192
 хомогено, 203
 класе C^1 , 196
 класе C^n , 206
 класе C^∞ , 206
 Липшицово, 59
 непрекидно, 61
 непрекидно диференцијабилно, 196
 ограничено, 50
 позитивно хомогено, 203
 принцип максимума, 147
 производ
 бесконачни, 98
 метричких простора, 50
 многострукости, 246
 нормираних простора, 85
 Ојлеров за ζ функцију, 336
 скаларни, 163
 спољашњи \wedge , 237
 тополошких простора, 69
 пројекција
 Шаудерова, 181
 пројективизација, 86
 пројективна раван, 72
 простор
 σ -компактан, 122
 афини, 187
 Банахов, 84
 Хаусдорфов, 69
 Хилбертов, 171
 компактан метрички, 114
 компактан тополошки, 119
 комплетан, 58
 контрактибилан, 258
 котангентни, 249
 локално компактан, 168
 локално повезан, 78
 метрички, 47
 дискретан, 50
 повезан, 75
 нормалан, 69
 нормирани, 84
 паракомпактан, 260
 петљи, 139
 подела, 56, 267
 повезан, 75
 локално, 78
 просто, 78
 путно, 78
 предхилбертов, 163
 пројективни, 72, 86
 псевдометрички, 48
 рефлексиван, 183
 регуларан, 74
 сепарабилан, 120
 Шварцов, 341
 тангентни, 227, 230, 247
 тополошки, 61
 тополошки векторски, 85
 ултраметрички, 52
 унитарни, 163
 прстен
 полинома, 107
 псевдометрика, 48
 раслојење
 котангентно, 250
 тангентно, 250
 раван
 оскулаторна, 93
 разлагање јединице, 161, 261
 ред
 апсолутно конвергентан, 101
 биномни, 141
 Дирихлеов, 147, 336, 348
 двоструки, 105
 Фуријев, 176
 геометријски, 101
 хармонијски, 99
 уопштени, 100
 Лоранов, 9
 нормално конвергентан, 110

- степени, 111
- Тејлоров, 140
- у нормираној Абеловој групи, 98
- регуларна вредност, 248
- репараметризација криве, 92
- ротор векторског поља, 234
- руб скупа, 62
- сфера
 - у метричком простору, 50
- Шварцов простор, 341
- сигма процес, 205
- симплекс, 259
- сингуларна вредност, 248
- скуп
 - густ, 62, 81
 - мере нула, 132, 271
 - мерљив, 133
 - по Жордану, 274
 - нигде густ, 66
 - ограничен, 50
 - отворен, 53
 - прекомпактан, 118
 - прве и друге категорије, 66
 - релативно компактан, 118
 - резидуалан, 66
 - савршен, 65
 - тотално ограничен, 118
 - затворен, 63
- смена променљиве
 - у интегралу, 283
 - у лимесу, 55
- став
 - Абел–Дирихлеов, 111, 320
 - Вајерштрасов о униформној конвергенцији реда, 110
- својство
 - Канторово, 64
- тачка
 - фиксна, 60
 - изолована, 62
 - нагомилавања, 54
 - нагомилавања скупа, 62
 - непокретна, 60
 - регуларна, 216
 - сингуларна, 203, 216, 248
 - унутрашња, 62
- тангента, 185, 203
- тангентни простор, 227, 230, 247
- тангентни вектор, 92
- теорема
 - Абелова, 148
 - Арцела–Асколијева, 133, 135
 - Банахова о фиксној тачки, 60
 - Берова о категоријама, 66
 - Брауерова, 305
 - де Рамова, 304
 - Динијева, 131
 - Фубинијева, 276
 - Гауса–Остроградског, 293
 - Гринова, 290, 293
 - Хелдерова, 82
 - јединствености, 147
 - Канторова, 120
 - Коровкинова, 160
 - Лебегова о интегралности, 272
 - Лиувилова, 178
 - о дивергенцији, 293
 - о имплицитној функцији, 216
 - о инверзној функцији, 220
 - о међувредности, 77
 - о рангу, 222
 - о средњој вредности, 94
 - за интеграле, 275
 - Ојлерова, 203
 - Пеанова, 136
 - Пикарова, 123
 - Питагорина, 167
 - Риманова за редове, 103
 - Рисова, 180, 181
 - Сардова, 272
 - Шаудерова
 - о фиксној тачки, 305
 - о пројекцији, 181
 - Стоксова, 300
 - Стон–Вајерштрасова, 154, 156
 - Тауберова, 150
 - Вајерштрасова, 137, 156
 - Вејлова, 156
 - Витнијева, 266
- топологија, 61
 - дискретна, 64
 - количничка, 70
 - релативна, 61
 - Зариског, 69
- тополошка група, 82
- тополошки векторски простор, 85
- торзија
 - криве, 94
- тотална ограниченост, 118
- трансформација
 - Фуријеова, 179, 340, 356
 - инверзна, 358
 - Лапласова, 339
- улагање, 248
- универзално наткривање, 257
- унутрашњост скупа, 62
- услов
 - Динијев, 365
 - Дирихле–Жорданов, 369
 - Дирихлеов, 370
 - Кошијев, 57
 - за равномерни лимес, 314
 - Липшицов, 59
 - узималица, 301

варијација
 функције, 87
 низа, 86
 тотална, 87
вектор
 бинормале, 94
 набла ∇ , 234
 нормале на криву, 93
 тангентни, 92
вектори
 ортогонални, 166
 ортонормирани, 166
векторски простор
 нормирани, 84
векторско поље, 234
 на многострукости, 254
 потенцијално, 236
 соленоидно, 236
вишелинеарна пресликавања, 90
затворење, 62