Одабрана поглавља механике 2009. **Девети домаћи задатак**

(1) Нека је $\psi \in \mathrm{Symp}\,(P,\omega)$ симплектички дифеоморфизам.

(а) Доказати да је са
$$T_\psi(h) = \psi \circ h \circ \psi^{-1}$$
добро дефинисан хомоморфизам
$$T_\psi : \mathrm{Ham}\,(P,\omega) \to \mathrm{Ham}\,(P,\omega)$$
групе $\mathrm{Ham}\,(P,\omega)$ Хамилтонових дифеоморфизама.

(б) Доказати да је T_ψ изометрија у односу на Хоферову метрику.

(в) Доказати да, ако је симплектоморфизам ψ Хамилтонов, важи
$$\rho(h, T_\psi h) \le 2\rho(\mathrm{id}, h),$$
где је ρ Хоферова метрика.

(г) Нека је $\mathrm{Symp}_0\,(P,\omega)$ компонента путне повезаности у $\mathrm{Symp}\,(P,\omega)$ која садржи id. Доказати да је
$$G := \{\psi \in \mathrm{Symp}_0\,(P,\omega) \mid \sup_{h\in \mathrm{Ham}\,(P,\omega)} \rho(h, T_\psi h) < +\infty\}$$
нормална подгрупа групе $\mathrm{Symp}_0\,(P,\omega)$ која садржи $\mathrm{Ham}\,(P,\omega)$.

(2) Нека је $\omega_0 = \sum dp_k \wedge dq_k$ стандардна симплектичка форма у еуклидском простору $\mathbb{C}^n$, $\psi \in \mathrm{Ham}\,(\mathbb{C}^n, \omega_0)$ и нека је, за $\lambda > 0$,
$$\psi_\lambda := \lambda\psi(\lambda^{-1}z).$$

(а) Доказати да је $\psi_\lambda \in \mathrm{Ham}\,(\mathbb{C}^n, \omega_0)$.

(б) Доказати да је $\rho(\mathrm{id}, \psi_\lambda) = \lambda^2\rho(\mathrm{id}, \psi)$, где је ρ Хоферова метрика.

(3) Нека је $f_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ функција која задовољава
$$f_n(x) = \begin{cases} x & \text{за } 0 \le x \le n^2 \\ n^2 + \epsilon & \text{за } x > n^2 + \epsilon \\ -\epsilon & \text{за } x < -\epsilon \end{cases}$$
и нека је $\chi_n \in C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ глатка функција са компактним носачем таква да је
$$\chi_n(x,y) = 1 \quad \text{на правоугаонику} \quad \left\{0 \le x \le n^2,\, 0 \le y \le 2n^{-1}\right\}$$
и $\|\nabla\chi_n(x,y)\| \le n^{-2}$ за све $(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Нека је
$$\psi_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
Хамилтонов дифеоморфизам генерисан Хамилтонијаном
$$H_n(x,y) = \frac{1}{n} f_n(x)\chi_n(x,y).$$
Доказати да је
$$\lim_{n\to\infty} d_\infty(\mathrm{id}, \psi_n) = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \rho(\mathrm{id}, \psi_n) = \infty,$$
где је
$$d_\infty(f,g) = \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \|f(x,y) - g(x,y)\|$$
C^0–метрика на простору дифеоморфизама $\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ са компактним носачем, а ρ Хоферова метрика.