Летак о диференцијалним једначинама
– прелиминарна верзија из фебруара 2019. –

Дарко Милинковић

Летак: Једно од средстава информисања и рекламирања. У данашње време најпопуларнији и најефикаснији метод оглашавања и пропаганде. Штампа се у различитим величинама, облицима и бојама.

Летак може да се дистрибуира на више начина:

- слањем поштом
- убацивањем у поштанско сандуче
- ручним дељењем на улици или неком другом јавном простору.

(Дефиниција на Википедији)

Садржај

ГЛАВА 1

Основна теорема интегралног рачуна

1. Увод

Нека је $F : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ непрекидна функција. Из почетног курса Анализе познато је да је

$$\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} F(s)\,ds = F(t).$$

Другим речима, функција

$$y : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}, \qquad y(t) := y_0 + \int_{t_0}^{t} F(s)\,ds$$

задовољава једначину

$$\frac{dy}{dt} = F(t) \tag{1}$$

и услов

$$y(t_0) = y_0. \tag{2}$$

Једначина (1) је један од најједноставнијих примера *диференцијалне једначине*. Услов (2) назива се *почетним условом*; без њега добијамо фамилију решења једначине (1)

$$y(t) = C + \int_{t_0}^{t} F(s)\,ds, \tag{3}$$

где је $C \in \mathbb{C}$ произвољна константа. Сва решења једначине (1) су описана формулом (3). Ово следи из теореме о средњој вредности:

Теорема 1. (Лагранжева теорема) *Нека је функција $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ непрекидна на затвореном интервалу $[\alpha, \beta]$ и диференцијална на његовој унутрашњости $]\alpha, \beta[$. Тада је за неко $\xi \in]\alpha, \beta[$*

$$f(\beta) - f(\alpha) = (\beta - \alpha) f'(\xi).$$

Из Лагранжеве теореме следи да је извод функције *на интервалу* идентички једнак нули ако и само ако је функција константна на њему. Другим речима, диференцијабилна функција на интервалу је одређена својим првим изводом до на константу.

Напомена 1. Лагранжева теорема *не важи* за комплексне функције, као што показује пример функције

$$f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}, \qquad f(t) = e^{it}.$$

Међутим, применом Лагранжеве теореме на функције $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$ лако закључујемо да је и комплексна функција чији је домен интервал једнозначно одређена својим првим изводом до на (комплексну) константу. $\diamond$

2. Теорема о средњој вредности

У првом тому свог *Трактата о анализи* [**6**] Диједоне наводи следеће уопштење Теореме 1:

Теорема 2. *Нека је $I = [\alpha, \beta]$ компактан интервал у $\mathbb{R}$, $P \subset I$ највише пребројив скуп, B Банахов простор и*

$$f : I \to B, \qquad \varphi : I \to \mathbb{R}$$

непрекидна пресликавања која су диференцијабилна у свакој тачки скупа $I \setminus P$ и чији изводи задовољавају

$$\|f'(t)\| \leq \varphi'(t), \qquad \text{за све} \qquad t \in I \setminus P.$$

Тада је

$$\|f(\beta) - f(\alpha)\| \leq \varphi(\beta) - \varphi(\alpha).$$

$\triangle$ Довољно је доказати да је за свако $\varepsilon > 0$

$$\|f(\beta) - f(\alpha)\| \leq \varphi(\beta) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(\beta - \alpha + 2),$$

јер одатле, преласком на лимес кад $\varepsilon \to 0_+$ следи тражена неједнакост.

Нека је $P = \{p_1, p_2, \ldots\}$ и нека је

$$A := \big\{t \in I \mid (\forall s \in [\alpha, t])\, \|f(s) - f(\alpha)\| \leq \varphi(s) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(s - \alpha) + \varepsilon \sum_{p_n < s} 2^{-n}\big\}.$$

Скуп A је непразан, јер садржи тачку α и ограничен одозго бројем β, па постоји

$$\gamma := \sup A.$$

Одатле и из дефиниције скупа A следи да је $A = [\alpha, \gamma]$.

Из дефиниције скупа A следи да је

$$\|f(\gamma) - f(\alpha)\| \leq \varphi(\gamma) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(\gamma - \alpha) + \varepsilon \sum_{p_n < \gamma} 2^{-n}. \tag{4}$$

Остаје нам да докажемо да је $\gamma = \beta$. Претпоставимо супротно: $\gamma < \beta$. Могућа су два случаја:

(1) $\gamma \notin P$
(2) $\gamma \in P$.

У првом случају, из дефиниције извода следи да постоји интервал $[\gamma, \gamma + \delta] \subset I$ такав да је

$$\|f(s) - f(\gamma) - f'(\gamma)(s - \gamma)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}(s - \gamma) \quad \text{и} \quad |\varphi(s) - \varphi(\gamma) - \varphi'(\gamma)(s - \gamma)| \leq \frac{\varepsilon}{2}(s - \gamma)$$

за све $s \in [\gamma, \gamma + \delta[$. Одатле следи

$$\begin{aligned} \|f(s) - f(\gamma)\| &\leq \|f'(\gamma)\|(s - \gamma) + \tfrac{\varepsilon}{2}(s - \gamma) \\ &\leq \varphi'(\gamma)(s - \gamma) + \tfrac{\varepsilon}{2}(s - \gamma) \\ &\leq \varphi(s) - \varphi(\gamma) + \varepsilon(s - \gamma). \end{aligned}$$

Одатле и из (4) следи

$$\begin{aligned} \|f(s) - f(\alpha)\| &\leq \varphi(s) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(s - \alpha) + \varepsilon \sum_{p_n < \gamma} 2^{-n} \\ &\leq \varphi(s) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(s - \alpha) + \varepsilon \sum_{p_n < s} 2^{-n} \end{aligned}$$

што је у контрадикцији са дефиницијом γ.

У другом случају, ако је $\gamma = p_m \in P$, из непрекидности пресликавања f и φ следи да постоји интервал $[\gamma, \gamma+\delta] \subset I$, такав да за $s \in [\gamma, \gamma+\delta[$ важи

$$\|f(s) - f(\gamma)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} 2^{-m} \quad \text{и} \quad \varphi(s) - \varphi(\gamma) \leq \frac{\varepsilon}{2} 2^{-m}.$$

Одатле и из (4) добијамо

$$\begin{aligned} \|f(s) - f(\alpha)\| &\leq \varphi(s) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(\gamma - \alpha) + \varepsilon \sum_{p_n < s} 2^{-n} \\ &\leq \varphi(s) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(s - \alpha) + \varepsilon \sum_{p_n < s} 2^{-n} \end{aligned}$$

што је поново контрадикција. $\bigtriangledown$

Напомена 2. Из доказа је јасно да претходна теорема важи и под слабијим претпоставкама: да f и φ имају једнострани (нпр. десни) извод у свакој тачки скупа $I \setminus P$ и да важи

$$\|f'_+(t)\| \leq \varphi'_+(t)$$

за све $t \in I \setminus P$. $\diamond$

Последица 1. *Ако је, уз ознаке из претходне теореме, пресликавање* $f : I \to B$ *непрекидно на* I *и диференцијабилно на скупу* $I \setminus P$ *и ако је* $\|f'(s)\| \leq M$ *за све* $s \in I \setminus P$*, онда је*

$$\|f(\beta) - f(\alpha)\| \leq M(\beta - \alpha)$$

$\bigtriangleup$ Следи из Теореме 2 за случај $\varphi(s) = M(s - \alpha)$. $\bigtriangledown$

Последица 2. *Ако је, уз ознаке из претходне теореме, пресликавање* $f : I \to B$ *непрекидно на* I *и диференцијабилно на скупу* $I \setminus P$ *и ако је* $f'(s) = 0$ *за све* $s \in I \setminus P$*, онда је* $f \equiv const$.

Задатак 1. Нека су B_1 и B_2 Банахови простори, $D \subset B_1$ отворен и повезан подскуп и $f : D \to B_2$ диференцијабилно пресликавање, такво да је $f' \equiv 0$. Доказати да је $f \equiv const$. ✓

3. Примитивно пресликавање и одређени интеграл

Нека је $f : I \to B$ пресликавање компактног интервала $I = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ у Банахов простор B.

Дефиниција 1. Непрекидно пресликавање $\Phi : I \to B$ назива се *примитивним пресликавањем* за f ако постоји највише пребројив скуп $P \subset I$ такав да је

$$\Phi'(t) = f(t)$$

за све $t \in I \setminus P$. $\Diamond$

Напомена 3. Ако је пресликавање $f : I \to B$ непрекидно у тачки $t_0 \in I$ и $\Phi : I \to B$ његово примитивно пресликавање, онда је $\Phi'(t_0) = f(t_0)$. Специјално, ако је f непрекидно на I, онда је $\Phi'(t) = f(t)$ за све $t \in I$. Заиста, из Теореме о средњој вредности следи

$$\|\Phi(t_0 + h) - \Phi(t_0) - f(t_0)h\| \leq h \sup_{0 \leq s \leq h} \|f(t_0 + s) - f(t_0)\|,$$

па из непрекидности f у тачки t_0 следи $\Phi'(t_0) = f(t_0)$. $\diamond$

Теорема 3. *Ако су* $\Phi_1, \Phi_2 : I \to B$ *примитивна пресликавања за* $f : I \to B$*, онда је*

$$\Phi_2 = \Phi_1 + C$$

за неку константу $C \in B$*. Специјално,*

$$\Phi_2(\beta) - \Phi_2(\alpha) = \Phi_1(\beta) - \Phi_1(\alpha).$$

$\triangle$ Доказ следи применом Последице 2 на пресликавање $\Phi_2 - \Phi_1$. $\triangledown$

Дефиниција 2. Ако је $\Phi : I \to B$ примитивно пресликавање за $f : I \to B$, разлика

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,dt := \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$$

назива се *одређеним интегралом* пресликавања f. $\lozenge$

Приметимо да је ова дефиниција неодређеног интеграла оправдана Теоремом 3. Овакву дефиницију предлаже Диједоне у [**6**] као алтернативу увођења Римановог интеграла. Њом се избегавају детаљи конструкције помоћу Дарбуових сума, али се поставља друго, природно питање: која су пресликавања интеграбилна, тј. која пресликавања имају примитивно пресликавање?

Дефиниција 3. Пресликавање $f : I \to B$ је *регулисано* ако у свакој тачки има леви и десни лимес. $\lozenge$

Пример 1. 1. Непрекидна пресликавања су $f : I \to B$ су регулисана.

2. Монотоне реалне функција реалне променљиве $f : I \to \mathbb{R}$ су регулисане.

3. Пресликавање $f : I \to B$ је део по део константно ако постоји коначно много тачака

$$\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < t_k = \beta$$

такве да је f константно на сваком од отворених интервала $]t_j, t_{j+1}[$. Јасно је да су део по део константна пресликавања регулисана. Следећа теорема показује да важи и више од тога. $\sharp$

Теорема 4. [**6**] *Пресликавање* $f : I \to B$ *је регулисано ако и само ако постоји низ део по део константних функција* $g_n : I \to B$ *који равномерно конвергира ка* f*.*

Лема 1. *Део по део константно пресликавање има примитивно пресликавање.*

$\triangle$ Нека је $g : I \to B$ део по део константно пресликавање, тј. такво да је $g(t) = c_j$ на интервалу $]t_j, t_{j+1}[$, онда је

$$\Gamma(t) = (t - t_i)c_i + \sum_{j=0}^{i-1}(t_{j+1} - t_j)c_j \quad \text{за} \quad t \in [t_i, t_{i+1}]$$

примитивна за g. $\triangledown$

Дефиниција 4. Примитивно пресликавање део по део константног пресликавања назива се *део по део линеарним* пресликавањем. $\lozenge$

Сада можемо да издвојимо прилично широку класу пресликавања која су интеграбилна (у смислу Дефиниције 2), тј. која имају примитивно пресликавање.

Теорема 5. *Свако регулисано пресликавање има примитивно пресликавање.*

$\triangle$ Нека је $f : I \to B$ регулисано пресликавање. Из Теореме 4 следи да постоји низ $g_n : I \to B$ део по део константних функција који равномерно конвергира ка f. Нека су Γ_n примитивне за g_n (које постоје на основу Леме 1), такве да је $\Gamma_n(\alpha) = 0$ за свако n. Тада, кад $\Gamma'_n = g_n$ равномерно конвергира ка f, а $\Gamma_n(\alpha) \equiv 0$ конвергира, одакле следи да Γ_n равномерно конвергира ка неком пресликавању Φ таквом да је $\Phi' = f$ свуда сем у највише пребројиво много тачака (тј. свуда сем у тачкама прекида функција g_n). $\triangledown$

Подсетимо се да класа функција које имају примитивну, иако је шира од класе непрекидних функција, ипак са овом класом дели нека својства. Једно од њих је садржај следеће познате теореме из уводног курса анализе.

Теорема 6. **(Дарбуова теорема)** *Нека је I интервал у $\mathbb{R}$, $\Phi : I \to \mathbb{R}$ диференцијабилна функција и $f(t) = \Phi'(t)$ њен извод. Ако је $f(a) \neq f(b)$ за неке $a, b \in I$, онда за свако ξ између $f(a)$ и $f(b)$ постоји c између a и b за које је $f(c) = \xi$.*

Задатак 2. Дати пример функције $\Phi : I \to \mathbb{R}$ која је диференцијабилна на интервалу I, а њен извод Φ' има прекид у некој тачки. ✓

Напомена 4. Теорија одређеног интеграла коју смо овде, следећи Бурбакијев и Диједонеов приступ, изложили директно је изведена из појма извода (за разлику од Римановог интеграла где се та веза изводи као теорема). Веза са изводом и особине извода омогућавају нам да докажемо позната својства (читалац може да их схвати као задатке):

Линеарност: Ако су $f, g : [\alpha, \beta] \to B$ регулисане функције и λ, μ скалари, онда је

$$\int_\alpha^\beta (\lambda f(t) + \mu g(t))\, dt = \lambda \int_\alpha^\beta f(t)\, dt + \mu \int_\alpha^\beta g(t)\, dt$$

Смена промењиве: Нека је $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ примитивна функција регулисане функције и $f : J \to B$ регулисана функција дефинисана на интервалу $J \supset \varphi([\alpha, \beta])$. Претпоставимо да је или f непрекидна или φ монотона. Тада је

$$\int_\alpha^\beta f \circ \varphi(s) \varphi'(s)\, ds = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\, dt.$$

Парцијална интеграција: Ако су $f : [\alpha, \beta] \to B_1$ и $g : [\alpha, \beta] \to B_2$ примитивне функције регулисаних функција и $b : B_1 \times B_2 \to B$ непрекидно билинеарно пресликавање, онда је

$$\int_\alpha^\beta b(f(t), g'(t))\, dt = b(f(\beta), g(\beta)) - b(f(\alpha), g(\alpha)) - \int_\alpha^\beta b(f'(t), g(t))\, dt$$

Неједнакост троугла: За регулисану функцију $f : [\alpha, \beta] \to B$ важи

$$\left\| \int_\alpha^\beta f(t)\, dt \right\| \leq \int_\alpha^\beta \|f(t)\|\, dt,$$

где је $\|\cdot\|$ норма на B. $\diamond$

Напомена 5. Бурбакијев и Дијеdonеов приступ изабрали смо као најједноставнији, јер најбрже води дефиницији интеграла функције са вредностима у Банаховом простору који обухвата довољно велику класу интеграбилних функција за наше потребе.

Постоје и други приступи. Један се може наћи у Рудиновој књизи [**9**] и заснива се на следећем. Нека је

$$f : Q \to B \tag{5}$$

пресликавање са вредностима у Банаховом простору B над пољем скалара $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, дефинисано на неком простору (Q, μ) са мером μ. логично је захтевати да интеграл задовољава својство линеарности. Другим речима, ако је $\Lambda \in B^*$ непрекидни линеарни функционал,

$$\Lambda : B \to \mathbb{K},$$

очекујемо да сваки интеграл задовољава

$$\Lambda\left(\int_Q f\,d\mu\right) = \int_Q (\Lambda f)\,d\mu. \tag{6}$$

Приметимо да је на десној страни интеграл скаларне функције. Кажемо да је пресликавање f интеграбилно по мери μ ако је за сваки линеарни функционал $\Lambda \in B^*$ функција $\Lambda \circ f : Q \to \mathbb{K}$ интеграбилна по μ и ако постоји вектор у B, *који означавамо са*

$$\int_Q f\,d\mu$$

такав да за свако $\Lambda \in B^*$ важи (6). Овако дефинисан интеграл некад се назива *слабим интегралом.*

Споменимо да постоји и дефиниција интеграла пресликавања (5) који слика простор са мером (Q, μ) у Банахов простор B, која је потпуно аналогна дефиницији Лебеговог интеграла. У овој дефиницији, интеграл се дефинише као лимес интеграла простих функција

$$s(x) = \sum_{j=1}^{k} \chi_{E_j}(x) b_j, \qquad x \in Q, \quad b_j \in B, \quad E_j \subset Q,$$

за које је

$$\int_Q s\,d\mu := \sum_{j=1}^{k} \mu(E_j) b_j.$$

Мерљива функција f се назива *интеграбилном по Бохнеру* ако постоји низ простих функција s_n такав да је

$$\lim_{n\to\infty} \int_Q \|f - s_n\|\,d\mu = 0 \tag{7}$$

и њен *Бохнеров интеграл* се дефинише са

$$\int_Q f\,d\mu := \lim_{n\to\infty} \int_Q s_n\,d\mu.$$

Приметимо да се, опет, дефиниција своди на интеграл скаларне (у овом случају реалне) функције у (7).

У оба наведена случаја (као и увек кад дефиницији интеграла претходи дефиниција мере, а не обрнуто) није сасвим очигледно шта је класа интеграбилних функција. У приступу који смо ми овде изабрали, велика класа интеграбилних функција се одмах издваја. $\diamond$

Појам интеграла омогућава нам да говоримо о решењу једноставне диференцијалне једначине

$$\frac{dy}{dt} = f(t), \tag{8}$$

где је $f : I \to B$ пресликавање интервала $I \subset B$ у Банахов простор B – решење је фамилија пресликавања

$$y : I \to B, \qquad y(t) = \int_\alpha^t f(s)\,ds + C, \tag{9}$$

где је $C \in B$ константа.

4. Уопштења

Видели смо како су повезани проблем решавања једноставне диференцијалне једначине (8), тј. налажења примитивног пресликавања за пресликавање

$$f : I \to B$$

и интеграција на интервалу I. Имајући у виду чињеницу да је природан амбијент за развијање диференцијалног и интегралног рачуна глатка многострукост, ова разматрања могу да се уопште у два природна правца. Један је уопштење интеграције са интервала I на многострукости, а други уопштење појма примитивног пресликавања на пресликавања

$$f : M \to N,$$

где су M и N глатке многострукости. У првом случају долазимо до уопштења интеграла функције на интеграл диференцијалних форми, док нас други правац, под одређеним додатним претпоставкама[1] о многострукости N, води до појма Дарбуовог извода.

4.1. Стоксова теорема. Нека је N компактна глатка многострукост димензије n са границом ∂N, $\omega \in \Omega^{n-1}(N)$ диференцијална $(n-1)$–форма на N и $d\omega \in \Omega^n(N)$ њен спољашњи извод. Тада је

$$\int_N d\omega = \int_{\partial N} \omega. \tag{10}$$

Специјално, ако је $N = [\alpha, \beta]$ и $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ глатка функција, онда је $df(t) = f'(t)\,dt$ диференцијална 1–форма и $\partial N = \{a, b\}$, па Основна теорема интегралног рачуна

$$\int_\alpha^\beta f'(t)\,dt = f(t)\Big|_{t=\alpha}^{t=\beta}$$

може да се схвати као један случај формуле (10). Још неки случајеви Стоксове формуле су

[1] Приметимо да „$+C$ ” у формули (9) нема смисла ако на N није дефинисано $+$, тј. ако N нема, осим глатке, и алгебарску структуру.

Келвин–Стоксова формула. Ако је Σ глатка површ у $\mathbb{R}^3$ са глатком границом $\partial\Sigma$, онда је

$$\iint_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Гринова формула. Ако је $D \subset \mathbb{R}^2$ ограничен отворен скуп са глатком границом ∂D, онда је

$$\iint_{\overline{D}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Формула Гауса и Остроградског. Ако је $V \subset \mathbb{R}^3$ ограничен отворен скуп са глатком границом ∂V, онда је

$$\iiint_{\overline{V}} \nabla \cdot \mathbf{F} \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Појам примитивног пресликавања природно се уопштава на диференцијалне форме. Ако за дату диференцијалну k–форму $\omega \in \Omega^k(N)$ постоји $\eta \in \Omega^{k-1}$ таква да је

$$d\eta = \omega \tag{11}$$

онда кажемо да је η *примитивна форма* форме ω. Из познате једнакости $d \circ d = 0$ следи да је

$$d\omega = 0 \tag{12}$$

неопходан услов за постојање решења једначине (11) по η. Овај услов није и довољан, али уколико уз (12) важи и

$$H^k_{dR}(N) = 0, \tag{13}$$

где је $H^k_{dR}(N)$ k–та де Рамова кохомологија многострукости N, једначина (11) има решење, које је јединствено *до на затворену* $(k-1)$*–форму*.

Специјално, за $k = 1$ једначина (11) по η се своди на тражење функције (тј. 0–форме) $\eta : N \to \mathbb{R}$ чији је диференцијал задата 1–форма ω. У случају $N = \mathbb{R}^n$ ова једначина има дуалан, векторски запис, тј. своди се на налажење решења f једначине

$$\nabla f = \mathbf{F},$$

где је $\mathbf{F}$ задато векторско поље. Неопходан услов (12) у векторском облику може да се запише као

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0.$$

Довољан услов (13) је испуњен ако је домен векторског поља $\mathbf{F}$ просто повезана област, тј. ако је

$$\pi_1(\mathrm{Dom}\,\mathbf{F}) = 0.$$

Ако је при томе $n = 1$, тј. ако је N унија интервала на реалној оси, ова једначина се своди на једначину (1). Потребан услов (12) је у овом случају тривијално испуњен због димензије, а због контрактибилности интервала испуњен је и довољан услов (13), што је сагласно са ониме што већ знамо, да једначина (1) има решење до на затворену 0–форму, тј. до на локално константну функцију.

Ако је $k = 2$, векторски облик једначине (11) у еуклидском простору $\mathbb{R}^n$ је једначина по непознатом векторском пољу $\mathbf{G}$

$$\nabla \times \mathbf{G} = \mathbf{F}, \tag{14}$$

а неопходни услов (12)

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 0.$$

За доказе наведених тврђења и више детаља о њима упућујемо читаоца на [**1**].

Задатак 3. Наћи пример просто повезане области и векторског поља $\mathbf{F}$ у њој за које једначина (14) нема решења. ✓

4.2. Дарбуов извод. Нека су M и N глатке многострукости и

$$\Phi : M \to N \tag{15}$$

глатко пресликавање. Његов извод у тачки $p \in M$ је пресликавање тангентних простора

$$\Phi'(p) : T_pM \to T_{\Phi(p)}N. \tag{16}$$

За извод пресликавања Φ у тачки p, осим $\Phi'(p)$, користимо и ознаке $D\Phi(p)$, $\Phi_*(p)$ и, у случају $N = \mathbb{R}$, $d\Phi(p)$.

Ако упоредимо ово са ситуацијом коју смо имали када је M био интервал, а N Банахов простор[2], примећујемо две ствари:

(1) Израз „$+C$ " у формули (9) нема смисла на N;
(2) $\Phi(p)$ у кодомену у (16) је саставни део описа извода.

У оба случаја, ситуација са Банаховим простором је била једноставнија због тога што Банахов простор, осим диференцијално тополошке (тј. глатке) структуре има и алгебарску (тј. структуру векторског простора). Та алгебарска структура омогућава додавање константе, али и идентификацију тангентних простора у разним тачкама помоћу транслације, тако да у дефиницији кодомена извода пресликавања нема потребе наглашавати вредност самог пресликавања. У случају пресликавања (15) извод је пресликавање

$$\Phi' : TM \to TN,$$

где су

$$TM := \bigcup_{x\in M} T_xM, \qquad TN := \bigcup_{y\in N} T_yN$$

тангентна раслојења многострукости M и N.

Задатак 4. Доказати да је тангентно раслојење $T\mathbb{S}^1$ круга $\mathbb{S}^1$ *тривијално*, тј. да је оно обичан Декартов производ $T\mathbb{S}^1 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Општије, доказати да је тангентно раслојење n–димензионог торуса $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ тривијално, а да тангентно раслојење Мебијусове траке није. ✓

Дакле, у случају пресликавања многострукости, проблем налажења примитивног пресликавања не можемо да поставимо у истом виду као у случају пресликавања интервала у Банахов простор.

Претпоставићемо, зато, да многострукост која је кодомен има и алгебарску структуру. Прецизније, посматрајмо пресликавање

$$\Phi : M \to G,$$

[2] У том случају су пресликавање f и његово примитивно пресликавање Φ били *објекти истог типа* – пресликавања $I \to B$

где је M глатка многострукост, а G Лијева група,[3] Тангентни простор у јединици $e \in G$

$$\mathfrak{g} := T_e G$$

назива се *Лијевом алгебром* Лијеве групе G.

Ако је

$$L_g : G \to G, \qquad L_g(x) = g \cdot x$$

лева транслација, њен извод у јединици $e \in G$ је пресликавање

$$DL_g(e) : T_e G = \mathfrak{g} \to T_g G. \tag{17}$$

Задатак 5. Доказати да је $(DL_g)^{-1} = DL_{g^{-1}}$. ✓

Задатак 6. Нека су X_e, Y_e елементи Лијеве алгебре $\mathfrak{g} = T_e G$, нека су X, Y векторска поља на G дефинисана, помоћу леве транслације, са

$$X_g := DL_g(e)(X_e), \qquad Y_g := DL_g(e)(Y_e)$$

и нека је $[X, Y] := XY - YX$ њихов комутатор. Доказати да је са

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, \qquad (X_e, Y_e) \mapsto [X, Y]_e$$

добро дефинисано билинеарно множење (ово множење се назива *Лијевим множењем*, или *Лијевим заградама*) које је антикомутативно, тј. задовољава

$$[X, Y]_e = -[Y, X]_e$$

(и, специјално, $[X, X] = 0$). ✓

Пресликавање (17) омогућава *тривијализацију тангентног раслојења*

$$TG \cong G \times \mathfrak{g}, \qquad X_g \mapsto (g, DL_{g^{-1}}(g)X_g).$$

Пример 2. Сфера $\mathbb{S}^3$ може да се схвати као Лијева група јединичних кватерниона, у односу на множење кватерниона. Одатле следи да је њено тангентно раслојење $T\mathbb{S}^3$ тривијално. ♯

Задатак 7. Доказати да је тангентно раслојење $T\mathbb{S}^7$ тривијално.[4] ✓

Задатак 8. Доказати да је пројективни простор $\mathbb{R}P^3$ дифеоморфан групи $SO(3)$ и закључити да је његово тангентно раслојење тривијално. Да ли пројективна раван $\mathbb{R}P^2$ има тривијално тангентно раслојење? ✓

Тривијализација тангентног раслојења TG Лијеве групе G може да се схвати и као диференцијална 1–форма са вредностима у $\mathfrak{g}$; издвајамо је у следећој дефиницији.

Дефиниција 5. *Мореr–Картанова форма* на Лијевој групи G је диференцијална 1–форма ω_G са вредностима у Лијевој алгебри $\mathfrak{g}$ дефинисана са

$$\omega_G(X_g) := DL_{g^{-1}}(g)(X_g)$$

за $X_g \in T_g G$. ♢

---

[3]Тј. група $(G, \cdot)$ која има и структуру глатке многострукости, и то такву да су групове операције, множење $G \times G \to G$, $(g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2$ и инверз $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$, глатка пресликавања.

[4]Познат и нетривијалан резултат је да су једине *паралелизабилне* сфере (тј. једине сфере које имају тривијално тангентно раслојење) $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^3$ и $\mathbb{S}^7$.

Уз помоћ ове тривијализације, извод

$$\Phi_* : TM \to TG = G \times \mathfrak{g}$$

можемо да компонујемо са $\omega_G : TG \to \mathfrak{g}$ и да га схватимо као пресликавање у векторски простор $\mathfrak{g}$, о чему говори следећа дефиниција.

Дефиниција 6. *Дарбуов извод* пресликавања $\Phi : M \to G$ је диференцијална 1–форма $\Phi^*\omega_G$ (односно $\omega_G \circ \Phi_*$) са вредностима у $\mathfrak{g}$. $\Diamond$

Сада можемо да дамо и дефиницију примитивног пресликавања 1–форме са вредностима у $\mathfrak{g}$ као пресликавања чији је та форма Дарбуов извод.

Дефиниција 7. Нека је G Лијева група, $\mathfrak{g}$ њена Лијева алгебра и нека је ω диференцијална 1–форма на глаткој многострукости M са вредностима у $\mathfrak{g}$. Пресликавање

$$\Phi : M \to G$$

је *примитивно пресликавање* форме ω ако је $\omega = \Phi^*\omega_G$. $\Diamond$

Следећа теорема о јединствености примитивног пресликавања је уопштење Теореме 3 на стр. 6.

Теорема 7. *Нека је G Лијева група, $\mathfrak{g}$ њена Лијева алгебра, M повезана глатка многострукост и ω диференцијална 1–форма на M са вредностима у $\mathfrak{g}$ ако су*

$$\Phi_1, \Phi_2 : M \to G$$

примитивна пресликавања форме ω, онда постоји константа $C \in G$ таква да је

$$\Phi_2(x) = C \cdot \Phi_1(x)$$

за све $x \in M$.

Питање егзистенције примитивног пресликавања је сложеније него у случају Банаховог простора. Море–Картанова форма ω_G задовољава *Море–Картанову структуралну једначину*

$$d\omega_G(X,Y) + [\omega_G(X), \omega_G(Y)] = 0,$$

што се записује и у облику [5]

$$d\omega_G + \frac{1}{2}[\omega_G, \omega_G] = 0.$$

Одатле следи да је

$$d\Phi^*\omega_G + \frac{1}{2}[\Phi^*\omega_G, \Phi^*\omega_G] = \Phi^*(d\omega_G + \frac{1}{2}[\omega_G, \omega_G]) = 0.$$

Дакле, *неопходан услов* за егзистенцију примитивног пресликавања диференцијалне 1–форме ω је да она задовољава Море–Картанову једначину

$$d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0.$$

[5] Константа $\frac{1}{2}$ која се појављује у другом запису, а изостаје у првом, није штампарска грешка. У првом изразу, $[\omega(X), \omega(Y)]$ је Лијево множење елемената Лијеве алгебре $\mathfrak{g}$. У другом изразу, $[\omega, \omega]$ је дефинисано на сложенији начин, комбиновањем две операције – Лијевог множења у $\mathfrak{g}$ и спољашњег множења $\wedge$ диференцијалних форми. Специјално, $[\omega, \omega]$ *није нула.*

Испоставља се да је овај услов, али *само локално*, и довољан. За глобални резултат постоје опструкције везане за проблеме *монодромије*, што задире дубље у теорију конексија и кривина на главним раслојењима и није на главној линији овог текста. Читаоца заинтересованог за даље изучавање ових питања упућујемо на [**10**] или [**11**].

ГЛАВА 2

Решење диференцијалне једначине

1. Векторска поља и интегралне криве

Нека је M глатка многострукост. У општем случају, ако другачије не напоменемо, не захтевамо да она буде коначне димензије и допуштамо да буде, уместо на еуклидском, моделована на произвољном Банаховом простору.[1] Пресликавање

$$F : M \to TM = \bigcup_{p\in M} T_pM$$

које задовољава $F(p) \in T_pM$ називамо *векторским пољем на* M или *сечењем*[2] тангентног раслојења. Дуално, сечења котангентног раслојења

$$\eta : M \to T^*M, \qquad \eta(p) \in T_p^*M$$

називамо *ковекторским пољима.* Приметимо да глатка ковекторска поља нису ништа друго него *диференцијалне 1–форме* које смо већ сусрели у Глави 1.

Ако је F векторско поље на M и

$$f : M \to N$$

дифеоморфизам, онда је f_*F векторско поље на N.

Задатак 9. Прецизно формулисати и доказати последње тврђење. Доказати затим да, за произвољно глатко пресликавање

$$f : M \to N$$

(не обавезно дифеоморфизам), и векторско поље F на M, f_*F у општем случају није векторско поље на N, али и да $f^*\eta$ јесте диференцијална форма на M за сваку диференцијалну форму η на N (специјално, за свако ковекторско поље $\eta : N \to T^*N$, $f^*\eta$ је ковекторско поље на M). ✓

Нека је $I \subset \mathbb{R}$ интервал и $\gamma : I \to M$ глатка крива. Вектор

$$\frac{d\gamma}{dt}(t_0) \in T_{\gamma(t_0)}M$$

називамо *вектором брзине* криве γ у тачки t_0; означавамо га и са $\dot\gamma(t_0)$. Ако је $\dot\gamma(t_0) \neq 0$, сваки тангентни вектор на криву γ у тачки $\gamma(t_0)$ је пропорционалан овом вектору брзине.

[1] Другим речима, M је локално хомеоморфна Банаховом простору, а смене координатних карата су глатка пресликавања Банаховог простора.

[2] У општем случају, *сечење* је пресликавање $s : T \to E$ скупа T у унију фамилије скупова $E = \cup_{t\in T} E_t$ параметризоване тачкама скупа T, које задовољава $s(t) \in E_t$ за све $t \in T$.

Задатак 10. Нека је $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ функција класе C^1 и нека је

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = 0\}.$$

Претпоставимо да је $\nabla g(x) \neq 0$ за све $x \in M$. Доказати да је M глатка хиперповрш, тј. глатка подмногострукост у $\mathbb{R}^n$ димензије $n-1$. (Упутство: применити теорему о рангу.) Доказати затим да је градијент ∇g ортогоналан на сваку криву $\gamma : I \to M$. Извести одатле доказ Лагранжевог метода налажења условних екстремума. Уопштити ово на случај више услова, тј. на пресликавања $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$. ✓

Нека је $F : M \to TM$ векторско поље на M. Главни проблем теорије диференцијалних једначина је налажење фамилије кривих $\gamma : I \to M$ које у свакој тачки $t \in I$ имају вектор брзине $F(\gamma(t))$. Прецизније, тада говоримо о *аутономним* диференцијалним једначинама. Општије, задато векторско поље може да зависи и од $t \in I$ и тада је реч о *неаутономним* једначинама. Некад променљиву $t \in I$ називамо *временском променљивом* или *временом.*

Дефиниција 8. Нека је дата фамилија

$$F : I \times M \to TM$$

векторских поља на M, параметризована тачкама интервала $I \subset \mathbb{R}$. Крива $\gamma : I \to M$ је *решење диференцијалне једначине*

$$\frac{d\gamma}{dt} = F(t, \gamma(t)) \tag{18}$$

ако је $F(t, \gamma(t))$ њен вектор брзине у свакој тачки $t \in I$. Ако је $p_0 \in M$, решење које задовољава

$$\gamma(t_0) = p_0 \tag{19}$$

називамо решењем са *почетним условом* (19). $\Diamond$

Једначину (18) често записујемо на друге начине, од којих неки поједностављују запис кад нема опасности од забуне, нпр.

$$\dot\gamma(t) = F(t, \gamma), \qquad \dot\gamma = F \circ \gamma, \qquad \dot\gamma = F$$

и слично. Ако је M многострукост коначне димензије n, у локалним координатама $(x_1, \ldots, x_n)$, ова једначина може да се напише у облику

$$\frac{dx_j}{dt} = F_j(t, x_1, \ldots, x_n), \qquad 1 \leq j \leq n, \tag{20}$$

где је $F = (F_1, \ldots, F_n)$ локални запис векторског поља F. О једначини (20) некад говоримо и као о *систему n диференцијалних једначина.* Израз на левој страни можемо да схватимо и као количник диференцијала dx_j и dt, тј. као локални запис количника две 1–форме на многострукости $I \times M$, па једначину (20) можемо да запишемо и као

$$dx_j = F_j(t, x_1, \ldots, x_n)\, dt, \qquad 1 \leq j \leq n$$

и схватимо је као тражење кривих на многострукости $I \times M$ на којима се анулирају 1–форме $dx_j - F_j(t, x_1, \ldots, x_n)\, dt$. Решења једначине (20) су онда слике тих кривих на M при пројекцији $\pi_2 : I \times M \to M$ на другу компоненту. Криве у $I \times M$ о којима овде говоримо називају се *интегралним кривама*, а њихове пројекције на M *фазним кривама.* Другим речима, интегралне криве су графици фазних кривих.

Задатак 11. (Једначина која раздваја промењиве) Нека су f и g непрекидне функције и $f(x_0)$ и $g(t_0)$ различити од нуле.

(а) Доказати да су интегралне криве једначине

$$\frac{dx}{dt} = \frac{f(x)}{g(t)}, \qquad x(t_0) = x_0 \tag{21}$$

фазне криве система

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x), \qquad x(0) = x_0 \\ \dot{t} &= g(t), \qquad t(0) = t_0. \end{aligned} \tag{22}$$

Упутство: видети [**3**]

(б) Доказати да решење једначине (21) може да се добије интеграцијом

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dy}{f(y)} = \int_{t_0}^{t} \frac{ds}{g(s)}.$$

Упутство: доказати да су вредности диференцијалних 1–форми

$$\frac{dx}{f(x)} \qquad \text{и} \qquad \frac{dt}{g(t)}$$

једнаке на тангентним векторима интегралне криве једначине (21), па су и њихови криволинијски интеграли дуж интегралне криве која спаја тачке (t_0, x_0) и (t, x) једнаки. Или, на други начин: решити једначине (22) свођењем на Основну теорему интегралног рачуна. ✓

Напомена 6. Приметимо да се *диференцијалне једначине вишег реда* облика

$$\frac{d^n y}{dt^n} = F(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \tag{23}$$

сменом

$$x_j = y^{(j-1)}, \qquad 1 \le j \le n,$$

своде на (20), па и њих можемо да третирамо у оквиру јединствене теорије налажења кривих са задатим вектором брзине.

Ако је y функција са вредностима у векторском простору B, тј. ако је (23) систем једначина, његове фазне криве су пројекције фазних кривих $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ система (20) у B^n на B. Интегралне криве су графици фазних кривих и леже у простору $I \times B$. ◇

Ако је M произвољна Банахова многострукост моделирана на Банаховом простору B, локални запис диференцијалне једначине је

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x(t)),$$

где је $F : I \times B \to B$ задато пресликавање. Када нас занимају само локална својства диференцијалних једначина, изучаваћемо их управо у том облику. Тако записане једначине врло једноставног облика

$$\frac{dx}{dt} = F(t),$$

где десна страна није зависила од тачке x многострукости већ само од временске промењиве $t \in I$, смо већ видели у Глави 1. Тамо смо закључили да такве једначине, ако је F непрекидна функција, имају решење које је јединствено до на константу, тј. да је

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s)\,ds$$

јединствено решење које задовољава почетни услов $x(t_0) = x_0$. У општем случају, ствари могу да буду сложеније, као што показују следећа два дијаметрално супротна примера.

Пример 3. Једначина

$$\frac{dx}{dt} = 3x^{2/3}$$

има бесконачно много решења која задовољавају почетни услов $x(0) = 0$. Заиста, једно такво решење је константна функција $x \equiv 0$. Осим ње, решења су све функције

$$x_\lambda(t) = \begin{cases} 0, & t \le \lambda, \\ (t-\lambda)^3, & t > \lambda \end{cases}$$

за произвољно $\lambda > 0$. Приметимо да су сва ова решења глатка. $\sharp$

Пример 4. Нека је

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad F(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ -1, & x \ge 0. \end{cases}$$

Тада диференцијална једначина

$$\frac{dx}{dt} = F(x)$$

нема решења са почетним условом $x(0) = 0$. Заиста, применом Дарбуове теореме (стр. 7) из $x'(0) = -1$ закључујемо да x строго опада на неком интервалу $[0, a[$, па је ту $x(t) < x(0) = 0$, што је у супротности са $x'(t) > 0$ за $x(t) < 0$. $\sharp$

2. Гронвалова неједнакост

Теорема 8. *Нека је* $u : [0, a] \to [0, +\infty[$ *ненегативна непрекидна функција и нека су* $C \ge 0$, $K \ge 0$ *ненегативне константе, такве да је за све* $t \in [0, a]$

$$u(t) \le C + \int_0^t Ku(s)\,ds.$$

Тада је

$$u(t) \le Ce^{Kt}$$

за све $t \in [0, a]$.

$\triangle$ Претпоставимо прво да је $C > 0$. Нека је

$$U(t) = C + \int_0^t Ku(s)\,ds.$$

Диференцирањем добијамо

$$U'(t) = Ku(t).$$

По услову теореме је $u(t) \le U(t)$, па је

$$\frac{U'(t)}{U(t)} = \frac{Ku(t)}{U(t)} \le K,$$

односно
$$\frac{d}{dt}\log U(t) \le K.$$
Интеграцијом од 0 до t, уз помоћ услова $U(0) = C$ добијамо
$$\log U(t) \le \log C + Kt, \quad \text{односно} \quad U(t) \le Ce^{Kt}.$$
Пошто је $u(t) \le U(t)$, тиме је теорема доказана за случај $C > 0$. Ако је $C = 0$, изаберимо низ $0 < C_n \to C$. Из доказаног дела тврђења следи
$$u(t) \le C_n e^{Kt},$$
одакле, преласком на лимес кад $n \to \infty$ добијамо тврђење за $C = 0$. $\triangledown$

Задатак 12. Доказати да, ако су под осталим претпоставкама Теореме 8,
$$C, K : [0, a] \to \mathbb{R}$$
ненегативне непрекидне функције такве да је
$$u(t) \le C(t) + \int_0^t K(s)u(s)\, ds,$$
онда важи
$$u(t) \le C(t) + \int_0^t C(s)K(s)\exp\left(\int_s^t K(r)\, dr\right) ds$$
за све $t \in [0, a]$. Упутство: нека је
$$y(t) = \int_0^t K(s)u(s)\, ds \quad \text{и} \quad z(t) = y(t)\exp\left(-\int_0^t K(s)\, ds\right).$$
Доказати да је $y'(t) - K(t)y(t) \le C(t)K(t)$ и одатле извести
$$z'(t) \le C(t)K(t)\exp\left(-\int_0^t K(s)\, ds\right).$$
Интегралити последњу неједнакост на интервалу $[0, t]$ и искористити неједнакост $u(t) \le C(t) + y(t)$. ✓

Дефиниција 9. Нека је I интервал у $\mathbb{R}$ и V отворен подскуп Банаховог простора B. Пресликавање
$$u : J \to V$$
дефинисано на подинтервалу $J \subset I$ *апроксимира решење диференцијалне једначине*
$$\frac{dx}{dt} = F(t, x) \tag{24}$$
са апроксимацијом $\varepsilon \ge 0$ ако је
$$\|u'(t) - F(t, u(t))\| \le \varepsilon$$
за све $t \in I$. $\diamondsuit$

Мотивација за претходну дефиницију може да се види у следећем. Претпоставимо да смо заинтересовани за решење једначине (24). Ако је десна страна компликована, некад можемо да је заменимо једноставнијом F_ε, таквом да је $\|F - F_\varepsilon\|_\infty < \varepsilon$ (где је $\|\cdot\|_\infty$ униформна норма) и нађемо решење u једноставније једначине
$$\frac{du}{dt} = F_\varepsilon(t, u) \tag{25}$$

са истим почетним условом. Тада је

$$\|u'(t) - F(t, u(t))\| \leq \|u'(t) - F_\varepsilon(t, u(t))\| + \|F - F_\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon,$$

јер је $u'(t) - F_\varepsilon(t, u(t)) = 0$. Одатле следи да u апроксимира решење диференцијалне једначине (24) са апроксимацијом ε. Природно питање је: како апроксимација решења апроксимира стварно решење? Следећа теорема је нешто општија од одговора на то питање. У њој су I, V, B као у Дефиницији 9.

Теорема 9. *Нека је $F : I \times V \to B$ функција класе C^1 таква да је $\|D_2F(t,x)\| \leq K$ за неко $K > 0$ и нека су*

$$u_1, u_2 : J \to V$$

апроксимације решења једначине (24) са апроксимацијама ε_1 и ε_2 редом. Нека је t_0 центар интервала J. Тада је

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leq \|u_1(t_0) - u_2(t_0)\| \, e^{K|t-t_0|} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{e^{K|t-t_0|} - 1}{K} \tag{26}$$

за све $t \in J$.

$\triangle$ Можемо, не умањујући општост, да претпоставимо да је $t_0 = 0$ (смена $s = t - t_0$ своди општи случај на тај). Из

$$\|u_i'(s) - F(s, u_i(s))\| \leq \varepsilon_i, \quad \text{за} \quad s \in J, \ i \in \{1, 2\}$$

следи да је, за $0 \leq s \leq t$,

$$\left\| u_i(t) - u_i(0) - \int_0^t F(s, u_i(s)) \, ds \right\| \leq \varepsilon_i t.$$

Одатле добијамо

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leq \|u_1(0) - u_2(0)\| + \left\| \int_0^t (F(s, u_1(s)) - F(s, u_2(s)) \, ds \right\| + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)t.$$

Применом теореме о средњој вредности на неједнакости $\|D_2F(t,x)\| \leq K$ на средњи сабирак на десној страни добијамо

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leq \|u_1(0) - u_2(0)\| + \int_0^t K\|u_1(s) - u_2(s)\| \, ds + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)t.$$

Доказ теореме сада следи из општег облика Гронвалове неједнакости (Задатак 12). $\triangledown$

Последица 3. *Нека је, уз претпоставке о F из Теореме 9, $x : J \to V$ решење диференцијалне једначине (24) и нека је $u : J \to V$ апроксимација њеног решења са апроксимацијом ε. Тада је*

$$\|x(t) - u(t)\| \leq \|x(t_0) - u(t_0)\| \, e^{K|t-t_0|} + \varepsilon \frac{e^{K|t-t_0|} - 1}{K}.$$

Последица 4. *Ако су, уз претпоставке о F из Теореме 9, $x : J \to V$ и $x_1 : J_1 \to V$ решења диференцијалне једначине (24), онда је*

$$\|x(t) - x_1(t)\| \leq \|x(t_0) - x_1(t_0)\| \, e^{K|t-t_0|}.$$

Задатак 13. Доказати да Теорема 9 важи и у случају $K = 0$, с тим што тада важи

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leq \|u_1(t_0) - u_2(t_0)\| + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)|t - t_0|$$

уместо неједнакости (26), и слично за Последицу 3. ✓

3. Пикарова теорема

Примери 3 и 4 нам показују да ни егзистенција ни јединственост решења диференцијалних једначина није увек обезбеђена, као што је био случај са једноставним неаутономним једначинама разматраним у Глави 1. Следећа теорема нам даје довољне услове за егзистенцију и јединственост решења. Будући да се ради о локалном тврђењу, формулисаћемо га у Банаховом простору.

Теорема 10. (Пикарова теорема) *Нека је B Банахов простор, $V \subset B$ његов отворен подскуп, $I \subset \mathbb{R}$ отворен интервал и*

$$F : I \times V \to B$$

пресликавање класе C^1. Тада за сваки пар $(t_0, x_0) \in I \times V$ диференцијална једначина

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x), \qquad x(t_0) = x_0 \tag{27}$$

има јединствено решење $x : J \to V$ дефинисано на неком подинтервалу $J \subset I$ са центром у t_0. Ово решење је јединствено у смислу да, ако је $x_1 : J_1 \to V$ решење једначине (27) дефинисано на неком интервалу $J_1 \subset I$ са центром у t_0, онда је $x \equiv x_1$ на $J \cap J_1$.

$\triangle$ Из теорије примитивних функција изложене у Глави 1 следи да је једначина (27) еквивалентна једначини

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, x(s))\, ds.$$

Идеја доказа састоји се у налажењу фиксне тачке пресликавања

$$\psi : y(t) \mapsto x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, y(s))\, ds \tag{28}$$

на добро одабраном простору пресликавања $t \mapsto y(t)$.

Нека је J_0 компактан интервал у $\mathbb{R}$ са центром t_0 и нека је B_0 отворена лопта у B са центром x_0, такви да су

$$L := \sup\{\|D_2F(t, x)\| \mid (t, x) \in J_0 \times B_0\} \quad \text{и} \quad M := \sup\{\|F(t, x)\| \mid (t, x) \in J_0 \times B_0\}$$

коначни. Изаберимо $\rho > 0$ за које је отворени интервал $]t_0 - \rho, t_0 + \rho[$ садржан у J_0 и отворена лопта $B]x_0; \rho[$ садржана у B_0. Посматрајмо Банахов простор $C([t_0 - \rho, t_0 + \rho], B)$ непрекидних пресликавања $y : [t_0 - \rho, t_0 + \rho] \to B$ са униформном нормом $\|y\|_\infty = \sup_{t \in [t_0 - \rho, t_0 + \rho]} \|y(t)\|$. Нека је K_δ затворена лопта у $C(J_\rho, B)$, полупречика δ са центром у константном пресликавању $t \mapsto x_0$, где је δ изабрано довољно мало да за сва пресликавања $y \in K_\delta$ имају слику у V (тако да је за њих дефинисано $F(s, y(s))$).

Посматрајмо пресликавање ψ дефинисано са (28) на лопти K_δ. Пошто је

$$\|\psi(y) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t} F(s, y(s))\, ds \right\| \le \int_{t_0}^{t} \|F(s, y(s))\|\, ds \le M\rho$$

следи да ако изаберемо ρ довољно мало да важи $M\rho < \delta$, пресликавање ψ слика K_δ у себе. Из теореме о средњој вредности следи да је, за $y_1, y_2 \in K_\delta$

$$\|\psi(y_1) - \psi(y_2)\| \le \int_{t_0}^{t} \|F(s, y_1(s)) - F(s, y_2(s))\|\, ds \le \rho L \|y_1 - y_2\|,$$

па ако изаберемо ρ довољно мало да важи $\rho L < 1$, пресликавање $\psi : K_\delta \to K_\delta$ је контракција, па из Банахове теореме о фиксној тачки следи да оно има јединствену фиксну тачку $x \in K_\delta$. То пресликавање $x : [t_0 - \rho, t_0 + \rho] \to V$ је решење диференцијалне једначине (27). Ако је и $x_1 : [t_0 - \rho_1, t_0 + \rho_1] \to V$ њено решење, из Последице 4 следи да је $x \equiv x_1$ на $[t_0 - \rho, t_0 + \rho] \cap [t_0 - \rho_1, t_0 + \rho_1]$, чиме је доказана и јединственост. $\triangledown$

Последица 5. *Нека је $F : I \times M \to TM$ непрекидна (по $t \in I$) фамилија глатких (по $x \in M$) векторских поља на глаткој многострукости M. Тада, бар локално, постоје њене интегралне и фазне криве. Интегралне криве се не секу.*

Задатак 14. Доказати да фазне криве аутономног система не могу да се секу. Да ли исто важи и за неаутономне системе[3]? ✓

Задатак 15. Да ли интегралне криве $y(t)$ система једначина вишег реда разматраног у напомени на стр 17 могу да се секу? Одговор: да. ✓

Напомена 7. Из доказа Пикарове теореме је јасно да она важи и под слабијим условима: довољно је да је пресликавање $F(t,x)$ непрекидно по t и Липшицово по x, тј. да постоји реална константа L таква да за све $t \in I$ и све $x, y \in V$ важи $\|F(t,x) - F(t,y)\| \le L\|x - y\|$.

Пошто је тврђење локалног карактера, овај услов може даље да се ослаби захтевом да непрекидно пресликавање F буде и локално Липшицово, тј. да за сваку тачку из $I \times V$ постоји њена околину $J \times U$ у којој је F ограничена и реална константа L (која може да зависи од J и U) таква да је $\|F(t,x) - F(t,y)\| \le L\|x - y\|$ за све $x, y \in U$.

Ако се, даље, непрекидност по t замени слабијим условом да је F локално ограничено и локално Липшицово по x и да је за свако непрекидно пресликавање $u : I \to V$ пресликавање $t \mapsto F(t, u(t))$ регулисано, Пикарова теорема важи, с том разликом што решење задовољава једначину (27) на комплементу највише пребројивог скупа у J. $\diamond$

Задатак 16. Да ли једначина

$$x\frac{dx}{dt} = t, \qquad x(-1) = 0$$

има (јединствено) решење? Упоредити добијени резултат са Пикаровом теоремом. Скицирати слику. Чему тежи $x'(t)$ кад $t \to -1$? ✓

Задатак 17. Да ли једначина

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt[3]{x}, \qquad x(0) = 0$$

има (јединствено) решење? ✓

Задатак 18. Некаје F класе C^1 и нека су $x_1(t)$ и $x_2(t)$ решења диференцијалне једначине

$$\frac{dx}{dt} = F(t,x), \qquad x(t_0) = x_0,$$

дефинисане на интервалу J који садржи тачку t_0. Из Пикарове теореме следи да је $x_1 = x_2$ на неком интервалу који садржи t_0. Да ли тај интервал може да буде мањи од J?

---

[3] одговор: не важи.

Одговор: не. Упутство: нека је $]a,b[\subset J$ максимални интервал на коме је $x_1 \equiv x_2$, при чему је $b \in J$. Тада је, због непрекидности, $x_1(b) = x_2(b)$. Применити Пикарову теорему са почетним условом $x(b) = x_1(b) = x_2(b)$ и извести контрадикцију са претпоставком о максималности интервала $]a,b[$. ✓

Пример 5. Размотримо Пикарову теорему за случај $B = \mathbb{R}$ и $F(x) = x^2$. Непосредно се проверава да једначина

$$\frac{dx}{dt} = x^2, \qquad x(0) = 1$$

има решење $x(t) = (1-t)^{-1}$. Заиста, очигледно је да је почетни услов $x(0) = 1$ задовољен, а диференцирањем добијамо

$$\frac{dx}{dt} = (1-t)^{-2} = x^2.$$

Пошто је функција F класе C^1, из Пикарове теореме следи да је решење јединствено. Приметимо да је оно дефинисано на интервалу $J =]-\infty, 1[$ који садржи нулу и да не може да се продужи на већи интервал, иако је F дефинисано за свако t (штавише, не зависи од t). Одатле видимо да је ограничење наведено у Пикаровој теореми, да решење постоји на неком подинтервалу $J \subset I$ (а не нужно на целом интервалу I) неопходно.

Општије, посматрајмо једначину

$$\frac{dx}{dt} = f(c), \qquad x(t_0) = x_0,$$

где је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрекидна функција. Ако је $f(x_0) > 0$, функција f је, због непрекидности, позитивна на неком интервалу $]x_1, x_2[$ који садржи x_0. На том интервалу можемо обе стране једначине да поделимо са $f(x)$ и интегралимо, чиме добијамо

$$t = t_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{f(x)}.$$

Пошто је функција $x \mapsto \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{f(x)}$ монотона, x може да се изрази преко t и тако добијамо решење $x(t)$. Оно је дефинисано за $t \in]\alpha, \beta[$, где је

$$\alpha = t_0 + \lim_{x \to x_1 + 0} \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{f(x)}, \quad \beta = t_0 + \lim_{x \to x_2 - 0} \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{f(x)}.$$

Одатле видимо да је решење дефинисано за све $t > t_0$ ако је

$$\int_{x_0}^{x_2} \frac{dx}{f(x)} = +\infty,$$

односно ако овај интеграл дивергира. Слично, решење је дефинисано за све $t < t_0$ ако интеграл

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{f(x)}$$

дивергира. ♯

Задатак 19. Пикарова теорема гарантује егзистенцију и јединственост решења диференцијалне једначине из Примера 5 за било које почетне услове. На ком интервалу је решење те једначине дефинисано ако се почетни услов замени са

(а) $x(0) = -1$?

(б) $x(1) = 0$? ✓

Задатак 20**.** Нека је B Банахов простор над $\mathbb{C}$, $V \subset B$ отворен скуп, $D \subset \mathbb{C}$ диск у комплексној равни и $F : D \times V \to B$ холоморфно пресликавање. Доказати да за сваки пар $(z_0, x_0) \in D \times V$ једначина

$$\frac{dx}{dz} = F(z, x(z)), \qquad x(z_0) = x_0$$

има јединствено решење $x : D_0 \to V$ дефинисано на неком диску $D_0 \subset D$ који садржи тачку z_0. ✓

У напомени на стр. 17 смо видели да једначине вишег реда решиве по највишем изводу можемо да посматрамо као једначине (у више димензија) првог реда. Решења таквих једначина ће зависити од већег броја константи, које се одређују из *почетног* услова. Дакле, ако једначина n–тог реда задовољава (после свођења на n једначина првог реда) услове Пикарове теореме, она је одређена, у складу са сменом коју смо навели у Напомени на стр 17, константама

$$y(t_0), y'(t_0) \dots, y^{(n-1)}(t_0).$$

Не треба погрешно мислити да произвољних n вредности одређује диференцијалну једначину n–тог реда. На пример, *гранични услови* (вредности на границама интервала) уместо почетних не дају увек решење, што показује следећи задатак.

Задатак 21**.** Доказати да једначина

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x, \qquad x(0) = 0, \qquad x(\pi) = 1$$

нема решења. ✓

4. Пеанова теорема

У Примеру 3 на стр. 18 смо видели да решење једначине

$$\frac{dx}{dt} = 3x^{2/3}, \qquad x(0) = 0$$

постоји, али није јединствено. Приметимо овде да је десна страна непрекидна али не и глатка, функција, тако да не задовољава услове Пикарове теореме. У Примеру 4 смо затим видели једначину

$$\frac{dx}{dt} = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ -1, & x \geq 0 \end{cases}, \qquad x(0) = 0$$

за коју решење не постоји. Приметимо да у другом случају десна страна није ни непрекидна. Испоставља се да је ово манифестација општег тврђења, познатог као Пеанова теорема, које важи у Банаховим просторима коначне димензије.

Теорема 11**. (Пеанова теорема)** *Нека је B Банахов простор коначне димензије, $V \subset B$ отворен скуп, $I \subset \mathbb{R}$ интервал и $F : I \times V \to B$ непрекидно пресликавање. Тада једначина*

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x(t)), \qquad x(t_0) = x_0$$

има (не обавезно јединствено) решење $x : J \to V$ дефинисано на неком подинтервалу $J \subset I$ који садржи тачку t_0.

Доказаћемо ову теорему применом Шаудерове теореме о фиксној тачки. Подсетимо се формулације ове теореме (за доказ видети [**1**]).

Теорема 12. (Шаудерова теорема о фиксној тачки) *Нека је X Банахов простор и $K \subset X$ непразан, компактан и конвексан подскуп. Свако непрекидно пресликавање $T : K \to K$ има фиксну тачку.*

Пређимо сада на доказ Пеанове теореме.

$\triangle$ Изаберимо $a > 0$ тако да је

$$Q = \{(t, x) \mid \ |t - t_0| \le a,\ d(x, x_0) \le a\} \subset I \times V$$

и нека је $M = \max_Q \|F\|$, $c = a/M$ и $J = [t_0 - c, t_0 + c]$. На Банаховом простору X непрекидних пресликавања $x : J \to B$ са униформном нормом дефинишимо пресликавање

$$T : X \to X, \qquad Tx(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, x(s))\, ds.$$

Нека је $K \subset X$ подскуп дефинисан са

$$K := \{x \in X \mid \|x(t) - x_0\| \le a,\ \|x(t_1) - x(t_2)\| \le M|t_1 - t_2|\}.$$

Једноставна последица неједнакости троугла је да је K конвексан скуп. Из Арцела–Асколијеве теореме (видети [**1**]) следи да је K компактан. Остаје још и да докажемо да T слика K у K, што нам омогућава да завршимо доказ применом Шаудерове теореме.

Нека је $x \in K$. Тада је $\|x(t) - x_0\| \le a$, па је и

$$\|Tx(t) - x_0\| \le \int_{t_0}^{t} |F(s, x(s))|\, ds \le M|t - t_0| \le Mc = a.$$

Слично, из $\|x(t_1) - x(t_2)\| \le M|t_1 - t_2|$ следи

$$\|Tx(t_1) - Tx(t_2)\| \le \int_{t_1}^{t_2} |F(s, x(s))|\, ds \le M|t_1 - t_2|.$$

Одатле следи $T(K) \subset K$, чиме је доказ завршен. $\triangledown$

Задатак 22. Где се у доказу користи $\dim B < +\infty$? ✓

Пример 6. За разлику од Пикарове теореме, која важи у произвољном Банаховом простору, Пеанова теорема не важи у просторима бесконачне димензије. Следећи пример, који је конструисао Диједоне, то показује. Нека је B простор реалних низова који конвергирају нули, са равномерном нормом

$$\|\{x_n\}\| := \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|.$$

Овај простор је Банахов, јер је затворен у Банаховом простору свих ограничених реалних низова са равномерном нормом. Посматрајмо пресликавање

$$F : B \to B, \qquad F(\{x_n\}) := \left\{ \sqrt{|x_n|} + \frac{1}{n+1} \right\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

Из равномерне непрекидности реалне функције $x \mapsto \sqrt{|x|}$ следи да је пресликавање F непрекидно на B. Међутим, диференцијална једначина

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \qquad x(0) = \{0\}$$

(где је са $\{0\}$ означен константан нула–низ) нема решења. Заиста, када би $x(t) = \{x_n(t)\}$ било решење, важило би

$$\frac{dx_n}{dt} = \sqrt{|x_n|} + \frac{1}{n+1}, \qquad x_n(0) = 0. \tag{29}$$

Ова једначина, за све $n \in \mathbb{N}$, може да се реши раздвајањем променљивих (Задатак 11 на стр. 17). Решење је јединствена функција $x_n(t)$, која је непарна и задовољава неједнакост

$$|x_n(t)| \geq \frac{t^2}{4}.$$

Из последње неједнакости следи да низ $\{x_n(t)\}$ не припада простору B. $\sharp$

Пример 7. Нека је $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрекидна функција таква да је $F(x_0) \neq 0$. Тада аутономна диференцијална једначина

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \qquad x(t_0) = x_0$$

има *јединствено* решење у некој околини тачке t_0. Заиста, из непрекидности функције F следи да је $F(x) \neq 0$ у некој околини тачке x_0, па ова једначина може да се напише у еквивалентном облику

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{F(x)}, \qquad t(x_0) = t_0.$$

Као што смо видели у поглављу о Основној теореми интегралног рачуна, ова једначина има јединствено решење

$$t = t_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{du}{F(u)}. \tag{30}$$

Ово показује да, под условима Пеанове теореме, јединственост аутономне диференцијалне једначине може да буде нарушена само у околини *равнотежног положаја*, тј. тачке x_0 у којој је $F(x_0) = 0$. Тада је $x(t) \equiv x_0$ свакако једно решење. Приметимо да тада постоји још једно решење само ако интеграл у (30) конвергира. Ако тај интеграл дивергира, израз (30) нема смисла, тј. једино решење је $x(t) \equiv x_0$. Пошто интеграл

$$\int_0^{\delta} \frac{du}{u^p}$$

конвергира ако и само ако је $p < 1$, закључујемо да, ако функција F задовољава Липшицов услов, интеграл (30) дивергира (то је гранични случај, $p = 1$), као што и тврди Пикарова теорема.

Специјално, једначина (29) има јединствено решење, као што смо и тврдили у Примеру 6, јер је десна страна те једначине различита од нуле. $\sharp$

Задатак 23. (а) Наћи сва решења једначине

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{|x|}, \qquad x(0) = 0.$$

(има их више).

(б) Доказати да једначина

$$\frac{dx}{dt} = x^2, \qquad x(0) = 0$$

има јединствено решење.

Објаснити ово у светлу Пикарове и Пеанове теореме. У првом случају функција на десној страни је (униформно) непрекидна на реалној оси, али није Липшицова (па Пикарова теорема не може да се примени); у другом случају је непрекидна, али није униформно непрекидна (а тим пре ни Липшицова); ипак, Пикарова теорема може да се примени (зашто?). ✓

5. Продужавање решења

У Примеру 5 на стр. 23 и Задатку 19 после њега смо видели да решење диференцијалне једначине некад не може да се прошири ван неке околине тачке у којој је задат почетни услов. Следећи задатак даје још један пример.

Задатак 24. Решити диференцијалну једначину

$$\frac{dx}{dt} = 1 + x^2, \qquad x(0) = x_0$$

и одредити максималан интервал на коме је решење дефинисано. ✓

У овим примерима, решење тежи бесконачности на рубу максималног интервала на коме је дефинисано. То је опште правило, о којем говори следећа теорема.

Теорема 13. *Нека је $V \subset \mathbb{R}^n$ отворен скуп, $I \subset \mathbb{R}$ интервал и $F : I \times V \to \mathbb{R}^n$ пресликавање класе C^1. Нека је $x(t) :]a, b[\to V$ решење диференцијалне једначине*

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x)$$

дефинисано на ограниченом интервалу $]a, b[$, таквом да је $[a, b] \subset I$, које не може да се продужи на већи интервал, који садржи $[a, b]$. Тада за сваки компактан скуп $K \subset V$ постоји $t \in]a, b[$ за које је $x(t) \notin K$.

△ Претпоставимо супротно, да је $x(t) \subset K$ за све $t \in]a, b[$. Непрекидно пресликавање F је ограничено на $[a, b] \times K$; нека је $\sup_{[a,b]\times K} |F| = C$. Докажимо да x може да се продужи до решења $x :]a, b + \delta[\to K$, за неко $\delta > 0$.

За $t_1, t_2 \in]a, b[$ је

$$|x(t_1) - x(t_2)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} \frac{dx}{ds}\, ds \right| \le \int_{t_1}^{t_2} |F(s, x(s))|\, ds \le C|t_2 - t_1|,$$

одакле следи равномерна непрекидност пресликавања $x :]a, b[\to K$. Можемо да дефинишемо

$$x(b) := \lim_{t \to b_-} x(t)$$

јер лимес на десној страни постоји због равномерне непрекидности. Овако дефинисано пресликавање x је диференцијабилно са леве стране у тачки b, јер је

$$\frac{x(b) - x(b-h)}{h} = \frac{1}{h} \lim_{t \to b_-} \int_{b-h}^{t} F(s, x(s))\, ds = \frac{1}{h} \int_{b-h}^{b} F(s, x(s))\, ds,$$

па је $\frac{dx}{dt}(b) = F(b, x(b))$. Из Пикарове теореме следи да постоји решење са почетним условом $x(b)$ на интервалу $]b - \delta, b + \delta[$ и да је оно на том интервалу јединствено, тј. да се поклапа са x на $]b - \delta, b]$. Дакле, x може да се продужи до решења на $[a, b + \delta]$ тј. $[a, b]$ није максимални интервал. ▽

Последица 6. *Ако глатко векторско поље F на коначно димензионој многострукости M има компактан носач, онда су његове интегралне криве дефинисане на целој реалној правој. Специјално, интегралне криве глатког векторског поља на компактној многострукости су дефинисане на целој реалној правој.*

Последица 7. *Ако је B коначно димензиони Банахов простор, пресликавање $F : \mathbb{R} \times B \to B$ класе C^1 и $x(t)$ решење једначине*

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x), \qquad x(t_0) = x_0$$

дефинисано на максималном интервалу $]a, b[$, онда је

$$\lim_{t \to a_+} \|x(t)\| = \lim_{t \to b_-} \|x(t)\| = +\infty.$$

Последица 8. *Нека је B коначно димензиони Банахов простор, пресликавање $F : \mathbb{R} \times B \to B$ класе C^1 и нека је $x(t)$ решење једначине*

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x), \qquad x(t_0) = x_0$$

дефинисано на максималном интервалу J. Ако је $x(t)$ садржано у неком ограниченом скупу, онда је $J = \mathbb{R}$.

Пример 8. Теорему 13 и њене последице смо доказали за коначно димензионе просторе. Она не важи у Банаховим просторима бесконачне димензије. Контрапример за Последицу 8 који наводимо конструисао је, као и онај у Примеру 6, Диједоне. Нека је, као и у том примеру, B Банахов простор низова који конвергирају нули, са равномерном нормом.

Нека је e_n низ у B (низ у простору низова) такав да су сви чланови низа e_n нула, сем n–тог који је 1. Приметимо да овај низ није Кошијев у B, па не конвергира.

Дефинишимо низ пресликавања $F_n : B \to B$ са

$$F_n(\{x_k\}) := \{(2(x_n + x_{n+1}) - 1)_+ (e_{n+1} - e_n)\}_{n \in \mathbb{N}},$$

где је са $(\cdot)_+$ означен позитивни део реалног броја.

Пресликавање F_n је Липшицово, идентички једнако нули на затвореној лопти $\|x\| \leq 4$ и за конвексну комбинацију $x = \lambda e_n + (1 - \lambda) e_{n+1}$ (за све $\lambda \in \mathbb{R}$) је $F_n(x) = e_{n+1} - e_n$.

Нека је

$$\chi_n : \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \to [0, +\infty[$$

пресликавање које се анулира на крајевима домена и чији је интеграл по домену једнак 1.

Нека је $I =]-\infty, 1]$. Дефинишимо пресликавање $F : I \times B \to B$ са

$$F(t, x) := \begin{cases} \chi_n(t) F_n(x), & \text{за} \quad \frac{1}{n+1} \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 0, & \text{за} \quad t \leq 0. \end{cases}$$

Ово пресликавање је непрекидно и локално Липшицово.

Дефинишимо низ пресликавања $x_n : I \to B$ са

$$x_1(t) = \begin{cases} e_1 + (e_2 - e_1) \int_t^1 \chi_1(s)\, ds, & \text{за} \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \\ 0, & \text{за} \quad t < \frac{1}{2} \end{cases}$$

и, за $n \geq 2$,

$$x_n(t) = \begin{cases} e_n + (e_{n+1} - e_n) \int_t^{1/n} \chi_n(s)\, ds, & \text{за} \quad \frac{1}{n+1} \leq t \leq \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{за} \quad t < \frac{1}{n+1} \quad \text{и} \quad t > \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Нека је $x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n(t)$. Приметимо да је за фиксирано $t \in]0,1]$ ова сума коначна, при чему је за $1/(n+1) \leq t \leq 1/n$

$$x(t) = e_n + (e_{n+1} - e_n) \int_t^{1/n} \chi_n(s)\, ds$$

тако да је x добро дефинисано диференцијабилно пресликавање. Оно је и ограничено: лако се проверава да је $\|x(t)\| \leq 1$ за $0 < t \leq 1$. Из дефиниције пресликавања F следи да је x решење диференцијалне једначине

$$\frac{dx}{dt} = -F(t,x), \qquad x(1) = e_1.$$

Међутим, пошто је $x(1/n) = e_n$, $x(t)$ нема лимес кад $t \to 0_+$. Одатле следи да је $J =]0,1] \subset I =]-\infty, 1]$ максимални интервал на коме је дефинисано решење x, иако је оно ограничено. Дакле, Последица 8 не важи у простору B. $\sharp$

Међутим, под мало строжијим претпоставкама теорема о продужавању решења важи и у произвољним Банаховим просторима.

Теорема 14. *Нека је I отворен интервал у $\mathbb{R}$, V отворен подскуп Банаховог простора B, и $F : I \times V \to B$ пресликавање класе C^1. Нека је $x(t)$ решење једначине*

$$\frac{dx}{dt} = F(t,x), \qquad x(t_0) = x_0,$$

дефинисано на отвореном интервалу J са центром у t_0, таквом да је $\overline{J} \subset I$. Ако су испуњени услови

(1) $\overline{x(J)} \subset V$;
(2) *пресликавање $t \mapsto F(t, x(t))$ је ограничено у J,*

онда решење $x(t)$ може да се продужи до решења дефинисаног на отвореном интервалу који садржи $\overline{J}$.

$\triangle$ Нека је $J =]a,b[$. Из претпоставке $\|F(t,x(t)\| \leq C$ следи $\|x'(t)\| \leq C$, па из Теореме о средњој вредности следи да је

$$\|x(t_1) - x(t_2)\| \leq C|t_1 - t_2|.$$

Одавде и из Кошијевог услова постојања лимеса у комплетном простору B закључујемо да постоји

$$x_b := \lim_{t \to b_-} x(t),$$

па $x(t)$ можемо непрекидно да продужимо на $]a,b]$ узимајући $x(b) := x_b$. Из Пикарове теореме следи да постоји јединствено решење диференцијалне једначине

$$\frac{dx}{dt} = F(t,x), \qquad x(b) = x_b.$$

Из јединствености решења следи да ово решење продужује x десно од тачке b. На исти начин решење се продужава и лево од a. $\triangledown$

Теорема 15. *Нека је B Банахов простор, $I =]t_0 - \rho, t_0 + \rho[$ отворен интервал у $\mathbb{R}$ и*

$$F : I \times B \to B$$

непрекидно пресликавање. Ако постоји непрекидна функција

$$\varphi : [0, \rho[\to \mathbb{R}$$

таква да је

$$\|F(t, x_1) - F(t, x_2)\| \leq \varphi(|t - t_0|)\|x_1 - x_2\|, \qquad \text{за све} \quad t \in I,\ x_1, x_2 \in B,$$

тада за свако $x_0 \in B$ постоји јединствено решење једначине

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x), \qquad x(t_0) = x_0$$

које је дефинисано на целом интервалу I.

$\triangle$ Локална егзистенција и јединственост следи из Пикарове теореме; остаје да докажемо да је решење дефинисано на целом интервалу I. Претпоставимо да је $J =]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$ интервал на коме је дефинисано решење и да је $\overline{J} \subset I$. Покажимо да су испуњени услови Теореме 14. Пошто је, у ознакама те теореме, $V = B$ цео Банахов простор, услов $\overline{x(J)} \subset V$ је тривијално испуњен. Остаје још да докажемо да је пресликавање $t \mapsto F(t, x(t))$ ограничено.

Функција φ је непрекидна на компактном интервалу $[0, \delta]$, а функција $t \mapsto \|F(t, x_0)\|$ на компактном интервалу $\overline{J}$, одакле следи њихова ограниченост. Одатле, и из једноставне примене неједнакости троугла, следи да постоје позитивне константе C_1 и C_2 такве да је

$$\|F(t, x)\| \leq C_1\|x\| + C_2 \qquad \text{за све} \quad x \in B,\ t \in J$$

одакле следи

$$\|x'(t)\| \leq C_1\|x(t)\| + C_2 \qquad \text{за све} \quad t \in J.$$

Нека је $u(t) := \|x(t_0 + t)\|$. Из претходне неједнакости и

$$u(t) = \left\| x_0 + \int_0^t x'(t_0 + s)\, ds \right\|$$

следи

$$u(t) \leq \|x_0\| + C_2\delta + C_1 \int_0^t u(s)\, ds.$$

Из Гронвалове неједнакости сада следи

$$\|x(t)\| \leq Ce^{C_1|t - t_0|} + D$$

за неке константе C и D, одакле видимо да је пресликавање $t \mapsto x(t)$ ограничено на J. Из неједнакости $\|F(t, x(t))\| \leq C_1\|x(t)\| + C_2$ следи да је и пресликавање $t \mapsto \|F(t, x(t))\|$ ограничено на J. $\triangledown$

Задатак 25. Наћи максимални интервал на коме је дефинисано решење једначине

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\log(t + 1)}{t - 1}x + \frac{t}{\sqrt[3]{t + 1}}$$

са почетним условом $x(0) = 1$. ✓

Задатак 26. Наћи максимални интервал на коме је дефинисано решење једначине
$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}+\frac{1}{t}x=\frac{\sin t}{3-t}$$
са почетним условом $x(\pi)=0$, $x'(\pi)=-1$. ✓

Задатак 27. Функција $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ дефинисана је са
$$F(x)=\begin{cases}1, & \text{за} \quad x\le 1\\ a, & \text{за} \quad x>1.\end{cases}$$
У зависности од реалног параметра a одредити максимални интервал на коме постоји непрекидна функција која задовољава једначину
$$\frac{dx}{dt}=F(x)$$
свуда сем у нули и почетни услов $x(0)=1$. ✓

6. Зависност од почетних услова и параметара

6.1. Непрекидна зависност. Пикарова теорема (стр. 21) обезбеђује да за сваки пар $(t_0,x_0)\in I\times V$ постоји интервал $J\subset I$ са центром t_0, такав да диференцијална једначина
$$\frac{dx}{dt}=F(t,x), \qquad x(t_0)=x_0 \tag{31}$$
има јединствено решење $J\to V$. У тој формулацији, J може да зависи од t_0 и x_0. Следећа теорема показује под којим условима J може да се изабере униформно, као и да се под тим условима решење непрекидно зависи од почетног услова. У њему ћемо да се ограничимо на Банахов простор коначне димензије, а општи случај ћемо да прокоментаришемо после доказа.

Теорема 16. *Нека је B Банахов простор коначне димензије, $V\subset B$ његов отворен подскуп, $I\subset\mathbb{R}$ отворен интервал и $F:I\times V\to B$ непрекидно пресликавање које је локално Липшицово по другој променљивој. Нека је $(t_0,x_0)\in I\times V$ и нека је $J\subset I$ компактан интервал са центром t_0 на коме постоји јединствено решење $x:J\to V$ једначине (31).*

Тада постоје околина $U\subset V$ тачке x_0 и позитивна константа L, такви да за свако $y_0\in U$ постоји јединствено решење $y:J\to V$ једначине
$$\frac{dy}{dt}=F(t,y), \qquad y(t_0)=y_0 \tag{32}$$
дефинисано на целом интервалу J. Свако такво решење задовољава неједнакост
$$\|x(t)-y(t)\|\le\|x_0-y_0\|\,e^{L|t-t_0|}$$
за све $t\in J$.

Специјално, ако решење једначине (31) означимо, да бисмо подвукли све параметре који у њему учествују, са $\phi_{t_0,t}(x_0)$, пресликавање
$$J\times U\to V, \qquad (t,x_0)\mapsto\phi_{t_0,t}(x_0)$$
је равномерно непрекидно.

$\triangle$ Приметимо да је $\phi_{t_0,t}(x_0)$ непрекидно диференцијабилно (па тиме и Липшицово) по t јер је, по дефиницији, решење (31), тако да последњи закључак теореме следи из првог дела. Докажимо први део.

По претпоставци, интервал J је компактан, па постоји $\varepsilon > 0$ такво да је

$$K := \{b \in B \mid (\exists t \in J)\, \|b - x(t)\| \leq \varepsilon\} \subset V.$$

Скуп K је компактан, па је локално Липшицово пресликавање F на њему Липшицово; нека је L Липшицова константа рестрикције $F|_K$.

Нека је $\delta > 0$ довољно мало да важи $\delta \leq \varepsilon$ и $\delta e^{L|t-t_0|} \leq \varepsilon$. Докажимо да за свако y_0 из лопте $B]x_0;\delta[$ једначина (32) има јединствено решење дефинисано на целом интервалу J. Из Пикарове теореме следи да (32) има јединствено решење дефинисано на неком максималном подинтервалу $J_1 \subset J$ са центром t_0. Из Гронвалове неједнакости следи да је за све $t \in J_1$

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|x_0 - y_0\| e^{L|t-t_0|}. \tag{33}$$

Остаје још да докажемо да је $J_1 = J$. Претпоставимо да је

$$\sup J_1 = \beta < t_1 = \sup J.$$

Из (33) следи да је

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \delta e^{L|t-t_0|} \leq \varepsilon,$$

па решење $y(t)$ лежи у компактном скупу K. По теореми о продужавању решења (стр. 27) следи да J_1 не може да буде максималан интервал. $\triangledown$

Задатак 28. Нека је, у ознакама из Теореме 16,

$$B = \mathbb{R}, \quad V =]0,1[\subset B, \quad I =]-1,1[\subset \mathbb{R}, \quad F(t,x) \equiv 1, \quad x_0 = \frac{1}{2}.$$

Доказати да је максимални интервал на коме је дефинисано решење једначине (31) $J =]-1/2, 1/2[$. Доказати да ни за једно $y_0 \in V \setminus \{x_0\}$ решење једначине (32) није дефинисано на целом J. Да ли је то у противречности са Теоремом 16? ✓

У доказу Теореме 16 смо користили верзију теореме о продужавању решења коју смо доказали само за просторе коначне димензије. Постоји и финија верзија теореме о продужавању, која може да се искористи да се превазиђе ограничење о димензији у претходној теореми. За детаље доказа упућујемо заинтересованог читаоца на [**6**], а овде наводимо само тврђење:

Теорема 17. *Нека је B Банахов простор, $V \subset B$ његов отворен подскуп, $I \subset \mathbb{R}$ отворен интервал и*

$$F : I \times V \to B$$

непрекидно пресликавање које је локално Липшициво по другој променљивој. Тада за сваки пар $(s,a) \in I \times V$ постоји отворен интервал $J \subset I$ са центром s и отворена лопта $U \subset V$ са центром a такви да важи следеће.

1. За сваки пар $(t_0, x_0) \in J \times U$ постоји јединствено решење $x : J \to V$ једначине (31). Да бисмо подвукли зависност од свих параметара који у његовом дефинисању учествују, означимо га са $\phi_{t_0,t}(x_0)$.

2. Пресликавање

$$J \times J \times U \to V, \qquad (t, t_0, x_0) \mapsto \phi_{t_0,t}(x_0)$$

је равномерно непрекидно.

3. Постоји отворена лопта $W \subset U$ са центром a таква да за сваку тројку $(t, t_0, x_0) \in J \times J \times W$ једначина $x_0 = \phi_{t,t_0}(x)$ има јединствено решење $x = \phi_{t_0,t}(x)$ у U.

Векторско поље које дефинише диференцијалну једначину често зависи од параметра, тј. често имамо, локално гледано, пресликавање

$$F : I \times V \times \Lambda \to V,$$

где је Λ скуп параметара и њиме, за свако λ из скупа параметара Λ, дефинисану диференцијалну једначину[4]. Могуће је поставити питање непрекидности решења по параметру, уколико скуп параметара Λ има структуру метричког простора. Размотримо прво случај када је Λ глатка многострукост (или отворен скуп у Банаховом простору, што је еквивалентно јер се ради о локалном својству).

Теорема 18. *Нека је B Банахов простор коначне димензије, $V \subset B$ његов отворен подскуп, $I \subset \mathbb{R}$ отворен интервал Λ отворен подскуп неког Банаховог простора E коначне димензије и $F : I \times V \times \Lambda \to B$ непрекидно пресликавање које је локално Липшицово по другој и трећој променљивој. Нека је $(t_0, x_0, \lambda_0) \in I \times V \times \Lambda$ и нека је $J \subset I$ ограничен интервал са центром t_0 на коме постоји јединствено решење $x : J \to V$ једначине*

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x, \lambda), \qquad x(t_0) = x_0. \tag{34}$$

Тада решење непрекидно зависи од λ.

$\triangle$ Једначину (34) можемо да напишемо у еквивалентном облику

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x, \lambda), \qquad \frac{d\lambda}{dt} = 0, \qquad (x(t_0), \lambda(t_0)) = (x_0, \lambda_0)$$

и посматрамо као једначину у $V \times \Lambda$, чиме избор параметра сводимо на избор почетног услова, а Теорему 18 на Теорему 16. $\bigtriangledown$

Као и Теорема 16, Теорема 18 важи и у Банаховим просторима бесконачне димензије и под слабијим условом да је Λ само метрички простор (у [**6**] може да се види прецизна формулација и доказ).

6.2. Глатка зависност. Нека је $\phi_{t_0,t}(x)$ решење једначине са почетним условом $x(t_0) = x$, тј. нека је

$$\frac{d}{dt}\phi_{t_0,t}(x) = F(t, \phi_{t_0,t}(x)), \quad \phi_{t_0,t_0}(x) = x.$$

Формалним диференцирањем овог израза по x добијамо да

$$y(t) := \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{x=a} \phi_{t_0,t}(x)$$

задовољава диференцијалну једанчину

$$\frac{dy}{dt} := D(t) \cdot y(t), \quad \text{где је} \quad D(t) = \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{x=\phi_{t_0,t}(a)} F(t, x).$$

[4] Један такав пример смо имали у једначини (25) на стр. 19 и Теореми 9 испод ње, где је простор параметара ε била реална права.

Ова једначина је једноставнија од почетне, јер десна страна линеарно зависи од y. Показаћемо да она има решење и да је оно заиста извод пресликавања $\phi_{t_0,t}(x)$ по x у тачки a (тако да претходно „формално диференцирање" заправо није само формално). Прецизније, важи следећа теорема.

Теорема 19. *Под условима Теореме 16, уз додатну претпоставку да је пресликавање F класе C^k, решење $\phi_{t_0,t}(x_0)$ је класе C^k.*

$\triangle$ Доказаћемо случај $k = 1$; општи случај се изводи индукцијом. Нека је $x(t)$ решење једначине

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x) \tag{35}$$

са почетним условом $x(t_0) = x_0$, дефинисано на интервалу J и нека је

$$D(t) := \frac{\partial F}{\partial x}(t, x(t)),$$

Јакобијева матрица пресликавања $x \mapsto F(t, x)$ у тачки $x(t)$. Посматрајмо једначину [5]

$$\frac{dy}{dt} = D(t) \cdot y(t). \tag{36}$$

Из Теореме 15 на стр. 30 следи да ова једначина има решење $y(t)$ дефинисано на целом интервалу J за произвољни почетни услов $y(t_0) = y_0$. Нека је $x(t, h)$ решење једначине (35) са почетним условом $x(t_0, h) = x_0 + h$ (специјално, $x(t, 0) = x(t)$) и нека је $y(t, h)$ решење једначине (36) са почетним условом $y(t_0, h) = h$. Довољно је да докажемо да је

$$\lim_{h\to 0} \frac{x(t, h) - x(t) - y(t, h)}{\|h\|} = 0 \tag{37}$$

равномерно по $t \in J$. Заиста $\phi_{t_0,t}(x)$ је C^1 по t на основу поставке проблема, а за мало h је

$$\phi_{t_0,t}(x_0 + h) - \phi_{t_0,t}(x) = x(t, h) - x(t),$$

па из (37) следи да је

$$\frac{\partial \phi_{t_0,t}}{\partial x}(x) \cdot h = y(t, h),$$

што је непрекидна функција, због непрекидности (36) по почетном услову (Теорема 16). Остаје да докажемо (37).

Из диференцијалних једначина којима су задати $x(t, h)$ (и специјално за $x(t, 0) = x(t)$) и $y(t, h)$ следи

$$x(t, h) = x_0 + h + \int_{t_0}^{t} F(s, x(s, h))\, ds, \quad y(t, h) = h + \int_{t_0}^{t} DF(s, x(s)) \cdot y(s, h)\, ds.$$

Одатле добијамо

$$\|x(t, h) - x(t) - y(t, h)\| \le \int_{t_0}^{t} \|F(s, x(s, h)) - F(s, x(s)) - DF(s, x(s)) \cdot y(s, h)\|\, ds. \tag{38}$$

Из Тејлорове формуле следи да је

$$F(s, b) - F(s, a) - DF(s, a)(b - a) = R(s, b - a),$$

[5] Ова једначина се назива *варијационом једначином*.

где за функцију R (остатак Тејлоровог реда) важи

$$\lim_{b\to a}\frac{R(s,b-a)}{\|b-a\|}=0$$

равномерно по s на компактном интервалу $[t_0,t]$. Одатле и из (38) следи

$$u(t)\le\int_{t_0}^{t}\|DF(s,x(s))\cdot(x(s,h)-x(s)-y(s,h))\|\,ds+\int_{t_0}^{t}\|R(s,x(s,h)-x(s))\|\,ds \tag{39}$$

где смо са $u(t)$ означили израз на левој страни у (38).

За произвољно $\varepsilon>0$ изаберимо $\delta>0$ тако да важи

$$\|R(s,x(s,h)-x(s))\|\le\varepsilon\|x(s,h)-x(s)\|\qquad\text{за}\qquad s\in J,$$

ако је $\|x(s,h)-x(s)\|\le\delta$. Из Теореме 16 следи да постоје позитивне константе L и δ_1 такве да је

$$\|x(s,h)-x(s)\|\le\|h\|e^{L|s-t_0|}\le\delta$$

ако је $|h|\le\delta_1$. Одатле и из (38) видимо да је

$$u(t)\le\|DF\|_\infty\int_{t_0}^{t}u(s)\,ds+\int_{t_0}^{t}\varepsilon|h|e^{L|s-t_0|}\,ds,$$

па је

$$u(t)\le\|DF\|_\infty\int_{t_0}^{t}u(s)\,ds+C\varepsilon|h|.$$

Одавде, на основу Гронвалове неједнакости, закључујемо да је

$$u(t)\le C\varepsilon e^{\|DF\|_\infty|t-t_0|}|h|$$

за $t\in J$ и $|h|\le\delta_1$, при чему δ_1 зависи само од ε. Пошто је $\varepsilon>0$ произвољно, одатле следи да је

$$\lim_{h\to 0}\frac{u(t)}{|h|}=0$$

равномерно по $t\in J$, чиме је доказано (37). $\triangledown$

Напомена 8. Теорема о глаткој зависности од почетних услова може, као и у случају непрекидне зависности, да се преформулише као теорема о глаткој зависности од параметара. Прецизну формулацију остављамо читаоцу. $\diamond$

У изучавању глатке зависности од почетних услова (и параметара) смо се, као и код непрекидне зависности, задржали само на случају коначне димензије, због тога што су докази за тај случај једноставнији. И за глатку зависност постоје аналогна тврђења у Банаховим просторима бесконачне димензије [**6**].

7. Дејство једнопараметарске групе

Подсетимо се следеће дефиниције из курса Алгебре.

Дефиниција 10. *Дејство групе* G на скупу E је хомоморфизам група

$$h:G\to\mathrm{Sym}\,(E), \tag{40}$$

где је $\mathrm{Sym}\,(E)$ група пермутација скупа E, односно скуп бијекција скупа E са операцијама слагања пресликавања и инверза пресликавања. $\Diamond$

Ако скуп E у Дефиницији 10 има неку додатну структуру, често је занимљиво издвојити она дејства која чувају ту структуру. На пример, ако је E тополошки простор, можемо да говоримо о дејству групе G на E *хомеоморфизмима*: то је свако дејство (40) за које је $\mathrm{Im}\,(h)$ подгрупа групе хомеоморфизама скупа E. Слично, ако E има структуру глатке многострукости, можемо да говоримо о *дејству дифеоморфизмима*.

Ако при томе и група G има додатну структуру, можемо да говоримо и о дејствима која поштују и ту структуру. Нпр, ако је G тополошка група, а E метрички простор, можемо да говоримо о *непрекидном дејству хомеоморфизмима*: то је дејство за које је пресликавање (40) непрекидно у односу на топологију групе хомеоморфизама[6] скупа E. Слабији услов од непрекидности дејства је непрекидност по тачкама, када захтевамо да за свако $x \in E$ пресликавање $h : g \mapsto h(g)(x)$ буде непрекидно. Слично, ако је G Лијева група, а E глатка многострукост, можемо да говоримо о *глатком дејству дифеоморфизмима*, или дејству које је *глатко по тачкама*.

Специјално, ако је G адитивна група реалних бројева $(\mathbb{R}, +)$ говоримо о *дејству једнопараметарске групе*, а слику пресликавања (40) зовемо *једнопараметарском подгрупом* групе пермутација. Другим речима, једнопараметарска подгрупа групе $\mathrm{Sym}\,(E)$ је фамилија бијекција $\phi_t : E \to E$ која задовољава

$$\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s, \qquad \varphi_0 = \mathrm{id}.$$

Приметимо да из прве једнакости следи $\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$. Из комутативности групе $(\mathrm{R}, +)$ следи комутативност сваке једнопараметарске подгрупе.

Дејство једнопараметарске групе се природно појављује у вези са *аутономним* системима. Нека је F аутономно векторско поље на глаткој многострукости M (дакле, векторско поље на M које не зависи од t), које задовољава услове Теореме 16 о непрекидној зависности од почетног услова. Претпоставимо и да је M компактна или да F има компактан носач (да бисмо могли, уз помоћ Теореме 13, да говоримо о решењу дефинисаном на целој реалној правој). Тада је једначином

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \qquad x(0) = x_0 \tag{41}$$

дефинисана фамилија непрекидних пресликавања

$$\varphi_t : M \to M, \qquad x_0 \mapsto x(t)$$

(у ознакама из Теореме 16 је $\varphi_t = \phi_{0,t}$). Други начин да се напише (41) је

$$\frac{\varphi_t(x)}{dt} = F(\varphi_t(x)), \qquad \varphi_0(x) = x.$$

односно

$$\frac{d\varphi_t}{dt} = F \circ \varphi_t, \qquad \varphi_0 = \mathrm{id}. \tag{42}$$

Приметимо да је са (41) задато бесконачно много једначина на коначнодимензионој многострукости M (за свако x_0 по једна једначина, док је (42) једна једначина на бесконачнодимензионој многострукости дифеоморфизама.

Теорема 20. $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$.

[6] Наравно, ова топологија није јединствена. Често се подразумева *компактно–отворена* топологија; видети [**1**].

$\triangle$ Нека је $p \in M$ и

$$x(t) = \varphi_{t+s}(p), \qquad y(t) = \varphi_t \circ \varphi_s(p).$$

Диференцирањем по t добијамо

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \quad x(0) = \varphi_s(p), \qquad \frac{dy}{dt} = F(y), \quad y(0) = \varphi_s(p).$$

Дакле, x и y задовољавају исту диференцијалну једначину, са истим почетним условом. Из јединствености решења следи да је $x(t) \equiv y(t)$, тј. $\varphi_{t+s}(p) = \varphi_t \circ \varphi_s(p)$. Пошто је $p \in M$ произвољно, доказ је завршен. $\bigtriangledown$

Задатак 29. Нека је фамилија $\varphi_t : M \to M$ пресликавања дата диференцијалниом једначином

$$\frac{d\varphi_t(x)}{dt} = F(t, \varphi_t(x)), \qquad \varphi_0(x) = x,$$

где F задовољава услове Пикарове теореме и Теореме о продуживању, тако да је $\varphi_t(x)$ дефинсано за све $t \in \mathbb{R}$ и $x \in M$. Доказати обрнути смер Теореме 20, тј. доказати да је φ_t једнопараметарска група ако и само ако F не зависи од t. ✓

Из Теореме 16 на стр. 31 следи да је свако φ_t непрекидно. Пошто је $\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$, следи и да је φ_t^{-1} непрекидно, тј. да је свако φ_t хомеоморфизам. Дакле, под условом да аутономно векторско поље F на многострукости задовољава услове Теореме 16, динамички систем (41) дефинише дејство једнопараметарске групе на M хомеоморфизмима.

Слично, ако су задовољени услови Теореме 19, имамо дејство једнопараметарске групе дифеоморфизмима.

Задатак 30. Нека је $F(t, x)$ векторско поље које задовољава услове Пикарове теореме и Теореме о продужавању решења, тако да је фамилија пресликавања $\varphi_t : M \to M$ дефинисана једначином

$$\frac{\varphi_t(x)}{dt} = F(t, \varphi_t(x)), \qquad \varphi_0(x) = x$$

дефинисана за све $t \in \mathbb{R}$. Ако је F неаутономно, из Задатка 29 следи да φ_t није једнопараметарска група. Да ли је и поред тога φ_t хомеоморфизам ако су испуњени услови Теореме 16, односно дифеоморфизам ако су задовољени услови Теореме 19? Одговор: да! Упутство: искористити идеју из доказа Теореме 18 на стр. 33 и проширивањем фазног простора свести тврђење на аутономни случај. ✓

За случај да читаоц није решио претходни задатак, дајемо решење у виду доказа следеће теореме.

Теорема 21. *Нека је $F(t, x)$ неаутономно глатко векторско поље са компактним носачем на многострукости M. Решење једначине*

$$\frac{d\varphi_t}{dt}(x) = F(t, \varphi_t(x)), \qquad \varphi_0 = \mathrm{id}$$

је фамилија дифеоморфизама. Другим речима, ако је $\varphi_t(x_0)$ решење једначине

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x), \qquad x(0) = x_0, \tag{43}$$

онда је, за свако $t \in \mathbb{R}$, пресликавање $x \mapsto \varphi_t(x)$ дифеоморфизам многострукости M.

$\triangle$ Заједно са једначином (43) чије је решење $\varphi_t(x_0)$, посматрајмо аутономни систем на $\mathbb{R} \times M$:

$$\frac{dt}{ds} = 1, \qquad \frac{dx}{ds} = F(t, x) \tag{44}$$

са почетним условом

$$t(0) = t_0, \qquad x(0) = x_0.$$

Пошто је овај систем аутономан, његово решење $\Psi_s : \mathbb{R} \times M \to \mathbb{R} \times M$ је једнопараметарска група дифеоморфизама. Решавањем прве једначине у (44) и убацивањем решења у другу закључујемо да Ψ_s има облик

$$\Psi_s(t_0, x_0) = (t_0 + s, \psi_s^{t_0}(x_0)),$$

где је $\psi_s^{t_0}(x)$ решење једначине

$$\frac{dx}{ds} = F(t_0 + s, x), \qquad x(0) = x_0.$$

Специјално, $\psi_s^0(x_0)$ је решење једначине

$$\frac{dx}{ds} = F(s, x), \qquad x(0) = x_0,$$

што је једначина (43), па је $\psi_s^0(x_0) = \varphi_s(x_0)$.

Пошто је за свако s

$$\Psi_s : \mathbb{R} \times M \to \mathbb{R} \times M$$

дифеоморфизам, и његова рестрикција

$$\Psi_s : \{0\} \times M \to \{s\} \times M, \qquad (0, x_0) \mapsto (s, \psi_s^0(x_0)) = (s, \varphi_s(x_0))$$

је дифеоморфизам. То је могуће само ако је $x \mapsto \varphi_s(x)$ дифеоморфизам. $\triangledown$

8. Исправљивост векторских поља

Следећа теорема показује да су, у извесном смислу, једине тополошки интересантне тачке векторских поља – равнотежни положаји, тј. тачке у којима је векторско поље нула.

Теорема 22. *Нека је M глатка многострукост, $p \in M$ и $F : M \to TM$ глатко векторско поље такво да је $F(p) \neq 0$. Тада постоје глатке координате у некој околини тачке p у којима је $F = \frac{\partial}{\partial x_1}$.*

$\triangle$ Тврђење је локалног каракетра, па не умањујемо општост ако га докажемо за $M = \mathbb{R}^n$ и $p = 0$.

Нека је $\varphi_t(x)$ решење аутономне једначине

$$\frac{d\varphi_t(x)}{dt} = F(\varphi_t(x)), \qquad \varphi_0(x) = x.$$

Пошто је $F(0) \neq 0$, можемо да изаберемо координате у околини нуле тако да $F(0)$ буде једна координата, тј.

$$\mathbb{R}^n \cong < F(0) > \times \mathbb{R}^{n-1},$$

где је $< F(0) >$ права одређена вектором $F(0)$. Дефинишимо пресликавање

$$\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n, \qquad (t, x) \mapsto \varphi_t(0, x).$$

Ово пресликавање је добро дефинисано у некој околини нуле. Диференцирањем по t видимо да његов извод у свакој тачки (t, x) из те околине задовољава тражени услов

$$\phi_*(t, x) : (1, 0) \mapsto \frac{d\varphi_t}{dt} = F,$$

тј. $F = \phi_* \frac{\partial}{\partial x_1}$.

Из чињенице да је

$$\phi\,\big|_{\{0\}\times\mathbb{R}^{n-1}} = \mathrm{id}\big|_{\{0\}\times\mathbb{R}^{n-1}}, \qquad \phi_*(0)(1, 0) = F(0)$$

следи да је Јакобијева матрица пресликавања ϕ у нули инвертибилна. Из Теореме о инверзној функцији следи да је ϕ локални дифеоморифизам. Он дефинише тражене координате у околини нуле. $\bigtriangledown$

Из Теореме 22 следи да се, у околини неравнотежног положаја, сваки систем диференцијалних једначина који задовољава услове Пикарове теореме своди, у неким координатама, на

$$\frac{dx_1}{dt} = 1, \qquad \frac{dx_2}{dt} = \ldots = \frac{dx_n}{dt} = 0.$$

У тим координатама трајекторије система су веома једноставне: то су паралелне праве

$$x_1(t) = t + C_1, \qquad x_j(t) = C_j \quad \text{за} \quad j \geq 2.$$

У произвољним картама, ове трајекторије су хомеоморфне слике паралелних правих.

У околини равнотежног положаја, међутим, ситуација је често знатно сложенија. Нека је p равнотежни положај, тј. $F(p) = 0$. Не умањујући општост, претпоставимо да је $p = 0$ у локалним координатама. Пошто је $F(0) = 0$, први члан Тејлоровог развоја пресликавања F у околини нуле је његов извод:

$$F(x) = A \cdot x + r(x),$$

где је $A = DF(0)$ линеарно пресликавање, а r Тејлоров остатак који је мали у поређењу са $A \cdot x$. Из Теореме 9 на стр. 20 видимо да се тада и интегралне криве векторског поља F, у околини равнотежног положаја, могу у извесном смислу описати помоћу решења линеарне једначине

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot x.$$

Ове једначине су предмет нашег изучавања у следећем поглављу.

ГЛАВА 3

Линеарне диференцијалне једначине

1. Егзистенција решења

Нека је B Банахов простор и $\mathcal{L}(B;B)$ простор непрекидних линеарних пресликавања $L : B \to B$. Нека је I отворен интервал у $\mathbb{R}$ који садржи тачку t_0 и нека су

$$A : I \to \mathcal{L}(B;B), \qquad b : I \to B$$

непрекидна пресликавања.

Дефиниција 11. Диференцијална једначина

$$\frac{dx}{dt} = A(t) \cdot x + b(t), \qquad x(t_0) = x_0$$

назива се *линеарном диференцијалном једначином.* Ако је $b \equiv 0$, такву линеарну једначину називамо *хомогеном.* Ако су A и b константна пресликавања, говоримо о линеарној диференцијалној једначини *са константним коефицијентима.* $\Diamond$

Пресликавање $F(t,x) = A(t) \cdot x + b(t)$ задовољава услове Теореме 15 на стр. 30, што за последицу има следеће важно својство линеарних диференцијалних једначина.

Теорема 23. *Линеарна диференцијална једначина има јединствено решење, дефинисано на целом домену I пресликавања A и b. Специјално, линеарна диференцијална једначина са константним коефицијентима има јединствено решење $x(t)$ дефинисано за све $t \in \mathbb{R}$.*

2. Случај реалне праве

Размотримо линеарну диференцијалну једначину у најједноставнијем Банаховом простору (над пољем $\mathbb{R}$) – реалној правој.

Нека је $a \in \mathbb{R}$ реална константа. Диференцијална једначина

$$\frac{dx}{dt} = ax, \qquad x(t_0) = x_0 \tag{45}$$

по непознатој функцији $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ назива се *једначином нормалног раста.*[1] Најлакши начин да се она реши је раздвајање промењивих: интеграцијом еквивалентне једначине

$$\frac{dx}{x} = a\,dt, \qquad x(t_0) = x_0$$

[1]Ова једначина описује природне процесе као што је раст популације бактерија (где је $a > 0$) или радиоактивни распад (кад је $a < 0$).

налазимо решење
$$x(t) = x_0 e^{a(t-t_0)}.$$

Као наговештај могућности уопштења на Банахове просторе сложеније од реалне праве, споменимо да једначина (45) може да се реши и помоћу степених редова – тражимо решење у облику
$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t-t_0)^n.$$
Диференцирањем и убацивањем у (45) добијамо $nc_n = ac_{n-1}$. Одатле, индукцијом, следи $n!c_n = a^n c_0$. Имајући у виду почетни услов, добијамо
$$c_n = x_0 \frac{a^n}{n!},$$
одакле, уз помоћ развоја
$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \tag{46}$$
следи да је решење
$$x(t) = x_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n (t-t_0)^n}{n!} = x_0 e^{a(t-t_0)}.$$

Задатак 31. Нека је $x(t)$ количина радиоактивне супстанце у тренутку t. Доказати да време за које се ова количина преполови не зависи од почетне количине x_0. Ово време назива се *периодом полураспада.* ✓

Нешто општија од једначине (45) је једначина
$$\frac{dx}{dt} = a(t)x, \qquad x(t_0) = x_0,$$
где је $a : I \to \mathbb{R}$ непрекидна функција дефинисана на интервалу $I =]t_0-\rho, t_0+\rho[$ са центром у t_0. И ова једначина се решава на исти начин – раздвајањем променљивих. Интеграцијом еквивалентне једначине
$$\frac{dx}{x} = a(t)\,dt, \qquad x(t_0) = x_0 \tag{47}$$
добијамо решење
$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}. \tag{48}$$

Задатак 32. Одредити домен овог решења. ✓

Уместо да говоримо о (48) као решењу једначине (47), можемо да кажемо да је
$$x(t) = Ce^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds} \tag{49}$$
опште решење диференцијалне једначине
$$\frac{dx}{dt} = a(t)x, \tag{50}$$
при чему се константа C одређује из почетног услова.

Задатак 33. Решити диференцијалну једначину (50) помоћу степених редова: доказати да се диференцирањем израза

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

и убацивањем у (50) добија систем једначина

$$nc_n = a(t)c_{n-1},$$

чијим се решавањем добија (49). ✓

Посматрајмо сада нехомогену једначину

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t). \tag{51}$$

Постоји више начина да се она реши; ми ћемо да демонстрирамо један који илуструје важан метод – *метод варијације константе*. Општа идеја овог метода може да се формулише овако. Претпоставимо да неки проблем можемо да решимо ако га поједноставимо (нпр. игноришемо $b(t)$ у једначини (51) и сведемо је на једначину (50)) и да решење зависи од неке константе C (као што је x_0 у (49)). Можемо да покушамо да докажемо да је се усложњавањем проблема (какво је додавање $b(t)$ на десној страни) усложњава и решење тако што константа C постаје функција.[2]

Дакле, покушајмо да нађемо решење нехомогене линеарне једначине (51) у облику решења хомогене (49), али с том разликом што C сматрамо функцијом по t:

$$x(t) = C(t)e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}, \qquad \text{односно} \qquad x(t) = C(t)y(t). \tag{52}$$

где је

$$y(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}.$$

Диференцирањем (52) налазимо

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dC}{dt}y + C\frac{dy}{dt}. \tag{53}$$

Пошто је $y(t)$ функција која (као специјални случај (49) за $C = 1$) задовољава хомогену једначину (50), убацивањем израза (53) у једначину (51) добијамо диференцијалну једначину

$$\frac{dC}{dt}y(t) = b(t), \qquad \text{тј.} \qquad \frac{dC}{dt} = b(t)e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}$$

по непознатој функцији C. Њено решење је

$$C(t) = C_0 + \int_{t_0}^{t} b(u)e^{-\int_{t_0}^{u} a(s)\,ds}\,du.$$

[2] Леп пример оваквог резоновања наводи Арнолд у [**3**]: уместо да у опис неке појаве на Земљи (нпр. опис кретања брода по мору) укључимо Месец, можемо да прво решимо тај проблем као да Месец не постоји и добијемо решење које зависи од неких константи. То није право решење, јер игнорише утицај плиме и осеке (последице револуције Месеца) на кретање брода. Право решење се добија кад опишемо како се те константе мењају, под утицајем кретања Месеца, у току 24 сата. Другим речима, третирамо их као функције које зависе од времена.

Убацивањем овог израза у (52) добијамо опште решење нехомогене линеарне једначине (51)

$$x(t) = \left(C_0 + \int_{t_0}^{t} b(u) e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}\,du\right) e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}, \tag{54}$$

где је C_0 константа која се одређује из почетних услова.

Задатак 34. Да ли једначина

$$\frac{dx}{dt} = x + \cos t$$

има периодичних решења? ✓

Задатак 35. Нека је $a(t) \equiv a$ константна функција. Доказати да је

$$x(t) = e^{(t-t_0)a} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)a} b(s)\,ds$$

решење једначине (51) са почетним условом $x(t_0) = x_0$. ✓

Напомена 9. У методу варијације константи, као и у методу решавања помоћу степених редова, тражили смо решење *у одређеном облику*. Другим речима, у извесном смислу смо *погодили* решење. Када смо у томе успели, прогласили смо једначину решеном. Наравно, то је могуће на основу јединствености решења. Уколико услови који обезбеђују јединственост решења нису испуњени, могуће је да нам је неко решење промакло. Међутим, као што смо видели у Теореми 23, код линеарних једначина увек имамо обезбеђену јединственост. $\diamond$

3. Општи случај

Нека је B Банахов простор и $A \in \mathcal{L}(B; B)$ ограничени линеарни оператор. Израз (46) има смисла и у Банаховом простору, односно можемо да говоримо о линеарном оператору

$$e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!},$$

где је $A^0 = I$ идентички оператор и $A^n := A^{n-1} \circ A$, а лимес у бесконачном збиру на десној страни узет у односу на операторску норму $\|A\| := \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$.

Задатак 36. Доказати да је e^A дефинисано за све $A \in \mathcal{L}(B; B)$. Упутство: нормирани простор је Банахов ако и само ако је сваки апсолутно конвергентан ред конвергентан. Простор $\mathcal{L}(X; Y)$ је Банахов ако и само ако је Y Банахов (видети [**1**]). ✓

Задатак 37. Доказати да је

$$e^A = \lim_{m\to\infty} \left(I + \frac{A}{m}\right)^m.$$

Упутство: I и A комутирају, па стандардна биномна формула може да се примени на израз на десној страни. ✓

Непосредним диференцирањем степеног реда се проверава да је решење диференцијалне једначине

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot x, \qquad x(t_0) = x_0$$

дато изразом аналогним случају реалне праве

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0. \tag{55}$$

Из Теореме 23 следи да је ово решење јединствено и дефинисано на целом скупу $\mathbb{R}$.

Напомена 10. До решења (55) можемо да дођемо и без погађања позивањем на аналогију са реалном правом, ако се детаљније удубимо у доказ Пикарове теореме. Подсетимо се да смо тамо, на стр. 21, до решења дошли применом Банаховог става о фиксној тачки на пресликавање

$$\psi : y(t) \mapsto x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, y(s))\, ds.$$

У случају линеарне једначине који разматрамо је $F(t, y) = A \cdot y$. Сетимо се да се Банахов став о фиксној тачки доказује применом Њутн–Пикаровог метода итерације: за произвољно x_0 тражена фиксна тачка је гранична вредност низа

$$x_{n+1} = \psi(x_n).$$

Посматрајмо низ

$$x_0(t) \equiv x_0, \qquad x_{n+1}(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} A \cdot x_n(s))\, ds.$$

Тада је

$$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A \cdot x_0\, ds = x_0 + (t - t_0)A \cdot x_0.$$

Продужавањем поступка добијамо

$$x_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A \cdot x_1(s)\, ds = x_0 + (t - t_0)A \cdot x_0 + \frac{1}{2}(t - t_0)^2 A^2 \cdot x_0$$

и даље, индукцијом,

$$x_{n+1}(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(t - t_0)^k A^k}{k!} \cdot x_0.$$

Гранична вредност овог низа је управо (55). $\diamond$

Решење нехомогене једначине

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot x + b(t), \qquad x(t_0) = x_0,$$

уколико A не зависи од t, је дато истим изразом као у случају реалне праве (видети Задатак 35)

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} b(s)\, ds \tag{56}$$

што се проверава непосредним диференцирањем.

Задатак 38. Да ли и хомогена једначина

$$\frac{dx}{dt} = A(t) \cdot x, \qquad x(t_0) = x_0,$$

са неконстантним $A(t)$, може да се реши помоћу степених редова као у Банаховом простору, као што је урађено у Задатку 33 на реалној правој? Одговор: не. ✓

Посматрајмо сада општи случај

$$\frac{dx}{dt} = A(t) \cdot x + b(t), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{57}$$

где и $A(t)$ и $b(t)$ зависе од t. У Задатку 38 смо видели да чак и за $b \equiv 0$ не можемо да поновимо метод са реалне праве, тако да је већ и хомогена једначина са неконстантним коефицијентима довољно компликована.

Покажимо међутим, да решавање нехомогене једначине (57) може да се сведе на решавање хомогене, али у другом простору. Посматрајмо уместо једначине (57) у простору B, једначину

$$\frac{dL}{dt} = A(t)L$$

у Банаховом простору $\mathcal{L}(B; B)$. Нека је $L(t, s)$ њено решење које одговара почетном услову $L(s) = I$. Тада је

$$x(t) = L(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} L(t, s)b(s)\, ds \tag{58}$$

јединствено решење једначине (57), што се проверава непосредним диференцирањем.

Задатак 39. Извести, у случају кад је $A(t) \equiv A$ константно пресликавање, израз (56) из (58). ✓

4. Коначнодимензиони случај

Решавање неаутономне хомогене једначине

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot x, \qquad x(t_0) = x_0$$

у случају Банахових простора коначне димензије своди се на израчунавање матрице $e^{(t-t_0)A}$. Ово је посебно лако ако матрица A може да се дијагонализује, тј. ако постоје дијагонална матрица D и инвертибилна матрица S такве да је $A = S^{-1}DS$. Пошто је

$$e^{(t-t_0)S^{-1}DS} = S^{-1}e^{(t-t_0)A}S, \tag{59}$$

проблем се своди на једноставно израчунавање експонента дијагоналне матрице. Лако се види да је $e^{(t-t_0)D}$ опет дијагонална матрица, чији су елементи облика $e^{(t-t_0)\lambda_j}$, где су λ_j дијагонални елементи матрице D, односно сопствене вредности матрице A.

Задатак 40. Доказати да матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

не могу да се дијагонализују.

(б) Израчунати $e^{t(A+B)}$ и $e^{tA} \cdot e^{tB}$.

(в) Нека су P и Q квадратне $n \times n$ матрице *које комутирају.* Доказати да је $e^{P+Q} = e^P e^Q = e^Q e^P$ и $Pe^Q = e^Q P$. ✓

У општем случају, матрицу A можемо да сведемо на Жорданов канонски облик. Из курса Линеарне алгебре нам је познато да матрица у Жордановом облику има сопствене вредности на дијагонали, нуле испод дијагонале и канонске блокове изнад дијагонале. Ако је C Жорданова матрица која изнад дијагонале има и елементе различите од нуле, у матрици $e^{(t-t_0)C}$ се, осим $e^{(t-t_0)\lambda_j}$, појављују и полиномске функције (када се у блоковима изнад реалних сопствених вредности појављују јединице) и тригонометријске функције (када матрица има комплексне сопствене вредности). То можемо да формулишемо као теорему.

Теорема 24. *Решења хомогене линеарне диференцијалне једначине са константним коефицијентима*

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot x \tag{60}$$

у $\mathbb{R}^n$ *припадају алгебри генерисаној експоненцијалним, полиномским и тригонометријским функцијама.*

Задатак 41. (а) Решити линеарни систем (60) за следеће матрице A

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(б) Решити систем

$$\begin{aligned} \tfrac{dx}{dt} &= x + y \\ \tfrac{dy}{dt} &= y. \end{aligned}$$

(в) Свести диференцијалну једначину другог реда

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0$$

на систем од две једначине првог реда и решити тај систем. ✓

Задатак 42. Решити систем

$$\frac{dx}{dt} = tA \cdot x + x \cos t$$

за сваку од матрица A из Задатка 41 (а). ✓

Задатак 43. За које $\lambda \in \mathbb{R}$ једначина

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\lambda^2 x, \qquad x(0) = 0, \qquad x(\pi) = 1$$

има решења? Упоредити овај задатак са Задатком 21 на стр. 24. ✓

Задатак 44. Решити нелинеарни систем

$$\frac{dx}{dt} = |y|$$
$$\frac{dy}{dt} = -x$$

и скицирати његове фазне криве. ✓

ГЛАВА 4

О експлицитној решивости диференцијалних једначина

1. Решивост помоћу квадратура

Поступак израчунавања површина (односно интеграција) у класичној литератури називао се *квадратуром*. Овај термин потиче још од Питагорејаца, који су одређивање површине фигура покушавали да сведу на поступак налажења квадрата исте површине. Нпр. проблем *квадратуре правоугаоника* чије странице имају дужину a и b своди се на конструкцију квадрата странице $\sqrt{ab}$ (геометријска средина). Међу највећа достигнућа античке математике спадају решења проблема квадратура сложенијих ликова, као што је Архимедов доказ да површина одсечка параболе износи 4/3 површине троугла уписаног у тај одсечак. Нерешивост античког проблема квадратуре круга доказана је тек у XIX веку – то је последица Линдеман–Вајерштрасове теореме из 1882. године, која показује и да је број π трансцендентан. Решење проблема квадратуре хиперболе $y = 1/x$ до кога је у XVII веку дошао Грегорије де Сен–Венсан довело је до дефиниције функције *природног логаритма*

$$\log x := \int_1^x \frac{dt}{t}$$

која је касније имала важну улогу у математици.

Уколико се решавање диференцијалне једначине само алгебарским трансформацијама своди на проблем израчунавања интеграла, кажемо да је диференцијална једначина *решива помоћу квадратура*. На пример, као што смо видели у Глави 3, линеарна диференцијална једначина

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t) \tag{61}$$

је решива помоћу квадратура. Њено решење је

$$x(t) = x(t) = \left(C + \int_{t_0}^{t} b(u) e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}\, du \right) e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}.$$

Даћемо још један пример једначине решиве помоћу квадратура.

Пример 9. (Једначина са тоталним диференцијалом) Нека су P и Q глатке функције дефинисане на отвореном скупу $V \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Диференцијална једначина

$$\frac{dx}{dt} + \frac{P(t,x)}{Q(t,x)} = 0$$

може да се напише у облику

$$P(t,x)\,dt + Q(t,x)\,dx = 0, \tag{62}$$

па се налажење њених интегралних кривих своди на налажење кривих на којима се анулира диференцијална 1–форма

$$\omega = P\,dt + Q\,dx \in \Omega^1(V).$$

Као што смо видели у Глави 1 (видети стр. 10), неопходан услов за егзистенцију примитивне функције (0–форме) форме ω је $d\omega = 0$. Пошто је

$$d\omega = \frac{\partial P}{\partial x}\,dx \wedge dt + \frac{\partial Q}{\partial t}\,dt \wedge dx = \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t}\right) dx \wedge dt,$$

неопходан услов за егзистенцију функције $f : V \to \mathbb{R}$ такве да је $df = \omega$ је

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t}. \tag{63}$$

Овај услов је и довољан, ако је

$$H^1_{dR}(N) = 0$$

(видети (13) на стр. 10). Лако се види да су, у том случају, решења једначине (62) дата са

$$f(t,x) \equiv C,$$

где се константа C налази из почетних услова. ♯

Задатак 45. Доказати да једначина која раздваја променљиве (Задатак 11 на стр. 17) може да се сведе на једначину са тоталним диференцијалом. Решити једначину која раздваја променљиве методом из Примера 9. ✓

Напомена 11. **(Интеграциони множитељ)** Уколико функције P и Q у једначини (62) не задовољавају (63), и даље можемо да покушамо да решимо ту једначину методом из Примера 9. Можемо да пробамо да нађемо функцију $\mu(t,x)$ такву, да једначина

$$\mu(t,x)P(t,x)\,dt + \mu(t,x)Q(t,x)\,dx = 0$$

постане једначина са тоталним диференцијалом. Функцију μ тражимо тако да важи

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial t}(\mu Q)$$

и називамо је *интеграциони множитељ*. ◇

Задатак 46. Доказати да хомогена линеарна једначина (једначина (61) са $b \equiv 0$) може да се реши као једначина са тоталним диференцијалом.

Упутство: наћи интеграциони множитељ у облику $\mu(t,x) = \lambda(t)x$. ✓

Проблемом решивости (не само диференцијалних) једначина бавили су се многи математичари – Абел, Галоа, Пикар, Лиувил и други. Класичан резултат Галоаове теорије о немогућности налажења решења неких алгебарских једначина помоћу радикала има своју аналогију и у теорији диференцијалних једначина. Једна од Лијевих мотивација за увођење бесконачних група које данас називамо Лијевим била је управо проширење метода Галоаове теорије на теорију диференцијалних једначина. Улогу коју у алгебарској Галоаовој теорији имају коначне групе, у диференцијалној имају Лијеве. Прве резултате о нерешивости неких диференцијалних једначина добио је Лиувил.

Данас знамо да само мали број диференцијалних једначина можемо да решимо помоћу квадратура. На пример, већ ако на десној страни у (61) имамо квадратни полином, уместо линеарног, добијамо једначину којој посвећујемо следећи пример.

Пример 10. **(Рикатијева једначина)** Може да се докаже да једначина

$$\frac{dx}{dt} = a(t) + b(t)x + c(t)x^2 \tag{64}$$

у општем случају не може да се реши помоћу квадратура. Међутим, ако нам је познато једно њено решење („партикуларно решење”) $u(t)$, онда опште решење можемо да добијемо помоћу смене

$$x(t) = u(t) + \frac{1}{y(t)}$$

којим се Рикатијева једначина (64) своди на линеарну (61). ♯

Ако на десној страни, уместо линеарног (као у линеарној једначини) или квадратног (као у Рикатијевој) полинома имамо полином вишег степена, нпр. ако имамо једначину

$$\frac{dx}{dt} = a(t) + b(t)x + c(t)x^2 + d(t)x^3,$$

у општем случају нам ни то што знамо неко партикуларно решење не помаже да нађемо опште.

Рикатијева једначина, разматрана у Примеру 10, се своди на линеарну ако је $c \equiv 0$, па може да се сматра њеним уопштењем. Још једно уопштење даје следећи пример.

Пример 11. **(Бернулијева једначина)** Једначина

$$\frac{dx}{dt} + a(t)x + b(t)x^r = 0 \tag{65}$$

је, за $r \in \{0,1\}$ линеарна једначина (61). За $r \notin \{0,1\}$, Бернулијева једначина (65) се своди на линеарну сменом

$$x = y^p, \qquad \text{тј.} \qquad \frac{dx}{dt} = py^{p-1}\frac{dy}{dt},$$

за погодно изабрано p. Заиста, после ове смене једначина (65) постаје (после скраћивања са y^{p-1})

$$p\frac{dy}{dt} + a(t)y + b(t)y^{pr-p+1} = 0.$$

Ако изаберемо p тако да је $pr-p+1=0$, тј. $p = 1/(1-r)$, добили смо линеарну једначину. ♯

2. Симетрије и смене

Могућност да неке једначине ипак решимо експлицитно обично се јавља кад је у њој присутна нека симетрија која поједностављује проблем. Најједноставнији пример тога су једначине којима смо почели овај текст, облика

$$\frac{dx}{dt} = F(t), \qquad x(t_0) = x_0. \tag{66}$$

Као што знамо, оне се решавају директном применом Основне теореме интегралног рачуна:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s)\,ds.$$

Симетрија која је присутна у једначини (66) је инваријантност десне стране у односу на вертикалну транслацију, тј. у односу на дејство групе $(\mathbb{R}, +)$ на $\mathbb{R}^2$ дато са $g \cdot (t, x) := (t, x + g)$. Формализоваћемо овај појам следећом дефиницијом.

Дефиниција 12. Дифеоморфизам $\psi : M \to M$ је симетрија векторског поља F на M ако је $\psi_* F = F$. $\Diamond$

Задатак 47. Доказати да је скуп симетрија датог векторског поља са операцијом слагања пресликавања група. ✓

Задатак 48. Доказати да симетрија векторског поља слика интегралне криве у интегралне криве. ✓

Дефиниција 13. Дифеоморфизам $\psi : M \to M$ је симетрија аутономне диференцијалне једначине

$$\frac{dx}{dt} = F(x)$$

ако је он симетрија векторског поља F на M.

Дифеоморфизам $\psi : I \times M \to I \times M$ је симетрија неаутономне диференцијалне једначине

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t)$$

ако је он симетрија аутономне диференцијалне једначине:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\tau} &= g(t, x) \\ \frac{dx}{d\tau} &= g(t, x) \cdot F(t, x) \end{aligned}$$

на многострукости $I \times M$. $\Diamond$

Пример 12. Диференцијална једначина

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \qquad x(t_0) = x_0.$$

је симетрична у односу на хоризонталну транслацију. Ако је $F(x_0) \neq 0$, у околини те тачке ова једначина може да се напише у еквивалентном облику

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{F(x)}$$

и реши применом Основне теореме интегралног рачуна, као и (66). $\sharp$

Пример 12 илуструје метод решавања диференцијалних једначина који се некад назива и методом смене променљивих. У једначини из тог примера уочили смо симетрију (хоризонтална транслација) која нам је помогла да проблем сведемо на други који већ знамо да решимо, тј. на једначину (66). То смо урадили променивши улоге координатних оса равни. Њу остварује дифеоморфизам

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \qquad (t, x) \mapsto (x, t),$$

или, другачије речено (некад је та формулација згоднија за практично решавање проблема) увођењем нових променљивих (s, y) уместо старих (t, x) сменом $s = x$, $y = t$.

Размотримо општији случај.

Теорема 25. *Нека је $F(t, x)$ глатко векторско поље у равни $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Ако постоји једнопараметарска група симетрија која глатко и нетривијално дејствује на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, онда је једначина*

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x)$$

експлицитно решива у околини сваке нестационарне тачке дејства.

$\triangle$ Као у Теореми 22 на стр. 38, можемо да нађемо координате (s, y) у којима је дејство елемента ε групе $(\mathbb{R}, +)$ на тачку (s, y) дато са

$$(s, y) \mapsto (s, y + \varepsilon). \tag{67}$$

Као и у доказу споменуте теореме, бирамо за „координатне осе" орбиту дејства и криву која је трансверзална на њу.

Пошто је векторско поље F инваријантно у односу на дејство, у координатама (s, y) оно је инваријантно у односу на вертикалну транслацију, па једначина добија облик (66), који се решава директном применом Основне теореме интегралног рачуна. $\bigtriangledown$

Анализом доказа ове теореме можемо да формулишемо општи метод смене променљиве у присуству једнопараметарске групе глатких симетрија. Циљ нам је да са координата (t, x) пређемо на нове променљиве $s(t, x)$ и $y(t, x)$ у којима је векторско поље инваријантно у односу на транслацију дуж y–осе, па једначина може да се реши директном применом Основне теореме интегралног рачуна.

Диференцирањем можемо да пређемо са једнопараметарске групе на којој је дефинисано дејство на векторско поље ξ које је тангентно на његове орбите. Да би дејство у новим координатама (s, y) имало облик (67), морају да буду испуњена следећа два услова:

- криве $s(t, x) = const$ су тангентне на ξ;
- криве $y(t, x) = const$ нису нигде тангентне на ξ.

Ови услови су испуњени ако важи

$$\xi \cdot \nabla s = 0, \qquad \xi \cdot \nabla y = 1. \tag{68}$$

Ово је систем парцијалних једначина по s и y. На први поглед, овиме смо добили компликованији проблем, али пошто је потребно наћи само неко његово решење, некад можемо да помоћу њега нађемо тражену смену.

Сем тога, захтеви да нивои функције s буду тангентни, а функције y трансверзални на ξ су испуњени и ако је, уместо (69), испуњен слабији услов

$$\xi \cdot \nabla s = 0, \qquad \xi \cdot \nabla y \neq 0. \tag{69}$$

Пример 13. **(Хомогена једначина)** Диференцијална једначина

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x)$$

се назива *хомогеном* ако је F хомогена функција, тј. ако је $F(e^\varepsilon t, e^\varepsilon x) = F(t,x)$. Диференцирањем фамилије хомотетија

$$(t,x) \mapsto (e^\varepsilon t, e^\varepsilon x)$$

по ε добијамо векторско поље $\xi(t,x) = t\mathbf{i}+x\mathbf{j}$ које је тангентно на орбите дејства. Услов (69) у овом случају је

$$t\frac{\partial s}{\partial t} + x\frac{\partial s}{\partial x} = 0, \qquad t\frac{\partial y}{\partial t} + x\frac{\partial y}{\partial x} \neq 0$$

и задовољава га, за $t > 0$, смена $s(t,x) = x/t$, $y(t,x) = t$ (или $y = \log t$ ако желимо да буде задовољен јачи услов (68)). $\sharp$

Задатак 49. Решити хомогену једначину

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x^2+tx}{t^2},$$

за $t > 0$ сменом $x = st$ из претходног примера. ✓

Задатак 50. **(Квазихомогена једначина)** Функција $F(t,x)$ је квазихомогена са тежинама α и β ако важи

$$F(e^{\alpha\varepsilon}t, e^{\beta\varepsilon}x) = e^{(\beta-\alpha)\varepsilon}f(t,x).$$

Ако је F таква функција,

$$\frac{dx}{dt} = F(t,x)$$

се назива *квазихомогеном једначином.* Доказати да се квазихомогена једначина решава сменом $s = x^\alpha/t^\beta$, $t = y$. ✓

Задатак 51. Користећи чињеницу да је једначина

$$\frac{dx}{dt} = t^{\lambda-1}F\left(\frac{x}{t^\lambda}\right)$$

инваријантна у односу на дејство

$$(t,x) \mapsto (e^\varepsilon t, e^{\lambda\varepsilon}x)$$

групе $(\mathbb{R},+)$, доказати да се она сменом $s = x/t^\lambda$, $y = \log t$ своди на једначину

$$\frac{dy}{ds} = \frac{1}{F(s)-\lambda s}$$

која раздваја променљиве. ✓

Пример 14. **(Линеарна једначина)** Већ смо видели више начина за решавање линеарне једначине

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t). \tag{70}$$

Покажимо како можемо да је решимо и коришћењем симетрија. Једначина (70) је инваријантна у односу на дејство групе $(\mathbb{R},+)$ задато са

$$(t,x) \mapsto (t, x + \varepsilon e^{\int a(t)\,dt}).$$

Векторско поље

$$\xi = (0, e^{\int a(t)\,dt})$$

је тангентно на орбите овог дејства, па једначине (68) постају

$$\frac{\partial s}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial y}{\partial x}e^{\int a(t)\,dt} = 1.$$

Одатле следи да се сменом

$$s = t, \qquad y = xe^{-\int a(t)\,dt}$$

једначина (70) своди на једначину која раздваја променљиве. Заиста, ако у (70) уврстимо смену

$$x = ye^{\int a(t)\,dt},$$

добијамо добро познату формулу за решење линеарне једначине. Проверу остављамо читаоцу као задатак. ✓

ДОДАТАК: Технике решавања диференцијалних једначина

Као што је читалац приметио, у овом тексту се нисмо много бавили техникама решавања оних диференцијалних једначина које је могуће експлицитно решити. Више пажње смо посветили опису неких метода који нам омогућавају да анализирамо решења, без обзира на то да ли можемо да нађемо „формулу решења” или не. Наравно, некада је важно наћи управо такву формулу. Технике решавања неких конкретних диференцијалних једначина могу да се нађу у разним приручницима. На пример, предлажемо читаоцу да погледа сајт

http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm

на коме су изложени поступци решавања великог броја једначина, не само диференцијалних.

Литература

[1] Д. Милинковић, *Математичка анализа 2*, скрипта, Математички факултет у Београду.
[2] Т. Пејовић, *Диференцијалне једначине 1 и 2*, Научна књига, Београд, 1948.

[3] V. Arnold, Ordinary Differential Equations, Springer–Verlag, 1992.
[4] R. L. Bryant, An Introduction to Lie Groups and Symplectic Geometry, у Geometry and Quantum Field Theory, едитори: D. S. Freed, K. K. Uhlenbeck, American Mathematical Society, Institute for Advanced Study, 1995.
[5] K. Deimling, Ordinary Differential Equations in Banach Spaces, Springer–Verlag, 1977.
[6] J. Dieudonné, Foundations of Modern Analysis, Academic Press, New York, 1960.
[7] R. E. Hydon, Symmetry Method for Differential Equations, Cambridge University Press, 2000.
[8] M. W. Hirsh, S. Smale, R. L. Devaney, Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos , Elsevier 2004.
[9] W. Rudin, Functional Analysis, McGraw–Hill, 1987.
[10] R.W. Sharpe, Differential geometry: Cartan's generalization of Klein's Erlangen program, Springer, 1997.
[11] S. Sternberg, Lectures on differential geometry, 2nd Edition, American Mathematical Society, 1999.
[12] Tomasova matematička biblija – Veština računanja, Građevinska knjiga, Beograd, 2007.

Индекс