МАТЕМАТИЧКА АНАЛИЗА 1
СКРИПТА
прелиминарна верзија која трпи сталне промене
ОКТОБАР 2024.

Дарко Милинковић

– Шта се, уствари, може открити?

– Питања су једини могући одговор, Морисе. Прави Викинзи, то су питања. Одговори, то је већ оно што су Викинзи сами себи певали за време пловидбе, да се охрабре.

(Емил Ажар, *Псеудо*)

Садржај

ГЛАВА 1. Бројеви 7
1. Поље рационалних бројева 7
2. Потпуно уређено поље 17
3. Природни, цели и рационални бројеви 22
4. Архимедово и Канторово својство реалне праве 38
5. Бројност скупа 41
6. Нека метричка и тополошка својства реалне праве 49
7. Једначина $x^n = a$ 55
8. Јединственост и постојање реалних бројева 58
9. Комплексни бројеви 60
10. Вежбе 85

ГЛАВА 2. Функције реалне и комплексне променљиве 97
1. Елементарне функције 97
2. Непрекидност 103
3. Гранична вредност 116
4. Вежбе 126

ГЛАВА 3. Извод функције реалне променљиве 133
1. Диференцијабилност 133
2. Основне теореме диференцијалног рачуна 141
3. Изводи вишег реда. Тејлорова формула 150
4. Конвексне функције 154
5. Вежбе 159

ГЛАВА 4. Низови и редови 167
1. Конвергенција низова 167
2. Њутнов метод решавања једначина 183
3. Бесконачни редови и бесконачни производи 187
4. Редови са позитивним члановима 193
5. Редови са произвољним члановима 204
6. Операције са редовима 207
7. Степени редови 213
8. Вежбе 234

ГЛАВА 5. Неодређени интеграл 243
1. Примитивна функција и неодређени интеграл 243
2. Основни методи израчунавања неодређених интеграла 245
3. Интеграли облика $\int \sin^k x \cos^n x \, dx$ 247
4. Интеграли облика $\int \sin ax \cos bx \, dx$ 248

5. Интеграција рационалних функција 249
6. Интегрални облика $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ 251
7. Интегрални облика $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ 251
8. Интегрални облика $\int R(x, y(x))\,dx$ 253
9. Вежбе 256

ГЛАВА 6. Одређени интеграл 257
1. Њутнов интеграл 258
2. Кошијев интеграл 258
3. Примене интеграла 275
4. Несвојствени интеграл 279
5. Риманов интеграл 290
6. Риман–Стилтјесов интеграл 303
7. Заснивање елементарних функција помоћу интеграла 310
8. Неке неједнакости 312
9. Вежбе 314

ГЛАВА 7. Функције са вредностима у векторском простору 325
1. Векторске операције у координатама 325
2. Лимеси, изводи и интеграли 335
3. Правила диференцирања 337
4. Брзина и убрзање 340
5. Покретни координатни системи 343
6. Вежбе 347

ДОДАТАК 1. Тополошке основе анализе 349
1. Конвергенција по филтерима 349
2. Непрекидност и гранична вредност у метричким просторима 351
3. Непрекидност у тополошким просторима 373

ДОДАТАК 2. Питања и задаци 375
1. Први семестар 375
2. Други семестар 381

Литература 385

Индекс 387

ГЛАВА 1

Бројеви

Најстарија идеја о броју везана је за концепт *бројања*, дакле за скуп $\mathbf{N}$ природних бројева. Потреба вршења операција (рачунања) са природним бројевима природно води до концепта рационалног броја. Они су полазна тачка нашег изучавања у овом тексту. Полазећи од претпоставке да је систем рационалних бројева познат читаоцу, бар на интуитивном нивоу, издвојићемо списак тврђења, *аксиома*, из којих се могу извести сва остала својства овог система. Показаћемо, затим, његову непотпуност и указати на начин њеног превазилажења. Тиме ћемо мотивисати строго, формално и аксиоматско, заснивање поља $\mathbf{R}$ реалних бројева, које ћемо започети у Параграфу 2 ове главе.

1. Поље рационалних бројева

1.1. Архимедско поље. Читаоцу су позната правила за рачунање у скупу $\mathbf{Q}$ *рационалних бројева*, тј. бројева облика $\frac{m}{n}$, где су m и n цели бројеви и $n \neq 0$. Сва та правила се могу извести из следећих *аксиома*:

(A1) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (асоцијативност операције $+$)

(A2) $(\exists\, 0)(\forall x)\, x + 0 = 0 + x = x$ (постојање неутралног елемента за операцију $+$)

(A3) $(\forall x)(\exists(-x))\, x + (-x) = (-x) + x = 0$ (постојање инверзног елемента за операцију $+$)

(A4) $x + y = y + x$ (комутативност операције $+$)

(A5) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (асоцијативност операције $\cdot$)

(A6) $(\exists\, 1)(\forall x)\, x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ (постојање неутралног елемента за операцију $\cdot$)

(A7) $(\forall x)\, x \neq 0 \Rightarrow (\exists x^{-1})\, x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$ (постојање инверзног елемента за операцију $\cdot$)

(A8) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$, $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ (дистрибутивност операције $\cdot$ у односу на $+$)

(A9) $x \cdot y = y \cdot x$ (комутативност операције $\cdot$)

(A10) $0 \neq 1$ (нетривијалност)

(A11) $x \leq x$ (рефлексивност релације $\leq$)

(A12) $(x \leq y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ (транзитивност релације $\leq$)

(A13) $(x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow x = y$ (антисиметричност релације $\leq$)

(A14) $(x \leq y) \vee (y \leq x)$ (аксиома тоталног поретка)

(A15) $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$ (сагласност релације $\leq$ и операције $+$)

(A16) $(0 \leq x) \wedge (0 \leq y) \Rightarrow 0 \leq x \cdot y$ (сагласност релације $\leq$ и операције $\cdot$).

(АРХ) (**Архимедова**[1] **аксиома**) За свако $a > 0$ и свако b постоји $n \in \mathbf{N}$ такво да важи $n \cdot a > b$.

[1] Архимед (*Αρχιμήδης*, 287–212. пре Христа), старогрчки мислилац

На пример, познато тврђење

$$x \leq y \Rightarrow -y \leq -x$$

изводи се из аксиома на следећи начин:

$$\begin{array}{rcll} x \leq y & \Rightarrow & x + ((-x) + (-y)) \leq y + ((-x) + (-y)) & \text{(A15)} \\ & \Rightarrow & (x + (-x)) + (-y) \leq y + ((-x) + (-y)) & \text{(A1)} \\ & \Rightarrow & 0 + (-y) \leq y + ((-x) + (-y)) & \text{(A3)} \\ & \Rightarrow & -y \leq y + ((-x) + (-y)) & \text{(A2)} \\ & \Rightarrow & -y \leq y + ((-y) + (-x)) & \text{(A4)} \\ & \Rightarrow & -y \leq (y + (-y)) + (-x) & \text{(A1)} \\ & \Rightarrow & -y \leq 0 + (-x) & \text{(A3)} \\ & \Rightarrow & -y \leq -x. & \text{(A2)} \end{array}$$

Слично се решава и следећи задатак.

Задатак 1. Доказати еквиваленцију $0 \leq x \Leftrightarrow -x \leq 0$. ✓

Заборавимо сада, на тренутак, да се својства (A1)–(A16), (APX) односе на бројеве и размотримо их као апстрактне аксиоме дефинисане на неком скупу. Тако добијамо разне *алгебарске структуре*, тј. скупове на којима су дефинисане операције и релације које задовољавају неке од горе наведених аксиома.

Скуп T на коме је дефинисана релација $\leq$ која задовољава аксиоме (A11), (A12) и (A13) назива се *уређеним скупом*, а релација $\leq$ *релацијом поретка*. Ако на скупу важи и (A14) он се назива *тотално уређеним скупом*. На сваком уређеном скупу дефинишу се и релације $\geq$, $<$ и $>$:

$$x \geq y \overset{\text{деф.}}{\Longleftrightarrow} y \leq x, \quad x < y \overset{\text{деф.}}{\Longleftrightarrow} x \leq y \ \wedge x \neq y, \quad x > y \overset{\text{деф.}}{\Longleftrightarrow} y \leq x \ \wedge x \neq y.$$

Нека је T уређен скуп и $E \subset T$. Елемент $m \in E$ је *најмањи елемент* или *минимум* скупа E, ако

$$(\forall e \in E)\ m \leq e.$$

Минимум скупа E се означава са $\min E$. Слично се дефинише *највећи елемент* или *максимум скупа*, $\max E$:

$$M = \max E \ \Leftrightarrow \ (\forall e \in E) e \leq M.$$

Нека је T уређен скуп и $A \subset T$. Елемент $t \in T$ назива се *горњим ограничењем* (*горњом границом, мајорантом*) скупа A ако је $a \leq t$ за свако $a \in A$. *Супремум* скупа A је његово *најмање горње ограничење*, тј. елемент $s \in T$ такав да је $a \leq s$ за свако $a \in A$ и $s \leq t$ за свако горње ограничење t скупа A. Супремум скупа A означава се са $\sup A$. Дакле, ако са $A^{\leq}$ означимо скуп свих мајоранти скупа A, онда је

$$\sup A = \min A^{\leq}.$$

Елемент $t \in T$ назива се *доњим ограничењем* (*доњом границом, минорантом*) скупа A ако је $t \leq a$ за свако $a \in A$. *Инфимум* скупа A (у ознаци $\inf A$ је његово *највеће доње ограничење*, тј. елемент $s \in T$ такав да је $s \leq a$ за свако $a \in A$ и $t \leq s$ за свако доње ограничење t скупа A.

Кажемо да је скуп *ограничен одозго* ако има бар једну мајоранту, а *ограничен одоздо* ако има бар једну миноранту. Скуп је *ограничен* ако је ограничен и одоздо и одозго.

Скуп не мора да садржи свој супремум, нпр. ако је

$$B = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 \leq x < 1\}, \tag{1}$$

онда је

$$\sup B = 1 \notin B.$$

Уколико је $\sup A \in A$, онда се тај супремум назива *максимумом* скупа A и означава са $\max A$. Слично се дефинише минимум скупа, у ознаци $\min A$ као његов инфимум, уколико он припада самом скупу.

Пример 1. Скуп B из (1) има супремум, али нема максимум, док је $\min B = \inf B = 0$. ♯

Пример 2. Нека је A непразан скуп и $P(A)$ скуп свих подскупова скупа A (скуп $P(A)$ се назива *партитивним скупом* скупа A). Релација инклузије $\subset$ је релација поретка на $P(A)$. У односу на ову релацију је $\max P(A) = A$, $\min P(A) = \emptyset$. ♯

Задатак 2. Доказати да је на скупу $\mathbf{N}$ природних бројева релација $\mid$ дефинисана са

$$k \mid n \quad \Leftrightarrow \quad n \text{ је дељиво са } k$$

релација поретка. Да ли је она релација тоталног поретка? Да ли скуп $B = \{2, 3\}$ има максимум (минимум) у $(\mathbf{N}, \mid)$? Да ли овај скуп има супремум (инфимум)? ✓

Нека је $(T, \leq)$ уређен скуп и $B \subset T$. Елемент $b_0 \in B$ назива се *максималним елементом скупа* B ако важи

$$b_1 \in B \ \wedge \ b_0 \leq b_1 \quad \Rightarrow \quad b_1 = b_0.$$

Слично се дефинише и *минимални елемент скупа*.

Задатак 3. Да ли скуп B из Задатка 2 има максимални (минимални) елемент? ✓

Напомена 1. Парцијално уређен скуп може да има више максималних и минималних елемената, али највише један максимум и највише један минимум. Јединственост максимума и минимума је последица антисиметричности релације поретка (читаоцу остављамо да ово докаже у слкопу следећег задатка). ◇

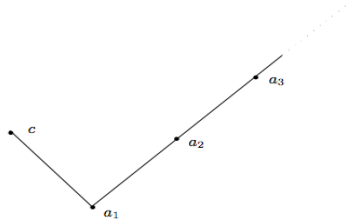
Задатак 4. (а) Доказати да је максимум уређеног скупа, ако постоји, јединствен.

(б) Доказати да је максимум уређеног скупа његов јединствени максимални елемент.

(в) Доказати да уређени скуп може да има јединствени максимални елемент, који није максимум. Упутство: Нека је на бесконачном скупу

$$A = \{c, a_1, a_2, \ldots\}$$

задата релација $<$ са



$a_1 < c, \qquad a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$. Доказати да је са

$$x \leq y \;\Leftrightarrow\; x = y \vee x < y$$

дефинисана релација поретка на A и да овај скуп има јединствени максимални елемент, али нема максимум. ✓

Задатак 5. На скупу $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ је дефинисана релација

$$(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2) \;\Leftrightarrow\; x_1 \leq x_2 \wedge y_1 \leq y_2.$$

(а) Доказати да је $\preceq$ релација поретка.
(б) Нека је
$$\mathbf{T} := \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$
Наћи све минималне и максималне елементе уређеног скупа $(\mathbf{T}, \preceq)$.
(в) Наћи $\sup \mathbf{T}$ и $\inf \mathbf{T}$.
(г) Да ли скуп $\mathbf{T}$ има минимум и максимум?

Решење: (б) скуп максималних елемената је $\{(x, y) \in \mathbf{T} \mid x \geq 0, y \geq 0\}$; (в) $\sup \mathbf{T} = (1, 1)$, $\inf \mathbf{T} = (-1, -1)$; (г) не, јер за сваку тачку постоји тачка која је са њом неупоредива. ✓

Скуп G у коме је дефинисана операција $+$ која задовољава својства (А1), (А2) и (А3) назива се *групом*. Кад желимо да нагласимо о којој се операцији ради, кажемо и да је *уређени пар* $(G, +)$ група, а ако желимо да истакнемо и неутрал, говоримо о групи $(G, +, 0)$.

Пример 3. Нека је $G = \{e\}$ једночлан скуп и $+$ операција на њему, дефинисана са

$$e + e = e.$$

Тада је пар $(G, +)$ група. Ова група назива се *тривијалном групом*. ♯

Пример 4. Структура $(\mathbf{Z}, +)$, где је

$$\mathbf{Z} := \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}$$

скуп целих бројева и $+$ операција сабирања, је један пример групе. Структура $(\mathbf{Z}, \cdot)$, где је $\cdot$ операција множења, *није* група, јер не задовољава аксиому постојања инверзног елемента. Структура $(\mathbf{Q}^*, \cdot)$, где је

$$\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q} \setminus \{0\}$$

јесте група. Неутрал ове групе је 1. Међутим, $(\mathbf{Q}, \cdot)$ није група, јер 0 нема инверз у односу на множење. ♯

Задатак 6. **(Група пермутација)** Нека је E произвољан скуп и нека је S_E скуп свих бијекција $f : E \to E$. На њему је дефинисана операција

$$\circ : S_E \times S_E \to S_E, \qquad (f, g) \mapsto f \circ g$$

слагања пресликавања. Специјално, ако је $E = \{1, 2, \ldots, n\}$, уместо S_E користи се ознака S_n.

(а) Доказати да је $(S_E, \circ)$ група. Ова група се назива *групом пермутација* скупа E. Шта је њен неутрални елемент, а шта инверз?

(б) Доказати да група S_n има $n! = n(n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ елемената. Ова група назива се *симетричном групом*. ✓

Група је комутативна (или Абелова[2]) ако у њој важи и аксиома (А4). Група у којој та аксиома не важи назива се *некомутативном* или *неабеловом*.

Пример 5. Групе из Примера 3 и 4 су Абелове. ♯

Задатак 7. Доказати (примером) да је група пермутација S_E у општем случају неабелова. Доказати да је, у случају да је скуп E једночлан или двочлан, група S_E Абелова. Да ли су то једина два случаја када је група пермутација Абелова? ✓

Аксиомом (А2) се дефинише *неутрални елемент* 0 групе. Овај елемент је јединствен. Заиста, претпоставимо да постоје два неутрална елемента 0_1 и 0_2 која задовољавају аксиому (А2). Ако напишимо ову аксиому за $x = 0_1$, а затим за $x = 0_2$, добијамо $0_1 + 0_2 = 0_1$ и $0_1 + 0_2 = 0_2$. Одатле следи $0_1 = 0_2$.

За произвољне елементе $a, b \in G$ једначина

$$a + x = b \tag{2}$$

има јединствено решење, тј. постоји један и само један елемент $x \in G$ такав да важи $a + x = b$. Заиста, елемент $x_1 = (-a) + b$ је решење јер, применом аксиоме (А1), затим (А3) и на крају(А2), добијамо $a + ((-a) + b) = (a + (-a)) + b = 0 + b = b$. Овиме смо доказали да постоји *једно* решење. Да бисмо доказали да постоји *само једно*, претпоставимо да за неки елемент x_2 групе важи $a + x_2 = b$. Показаћемо да је $x_2 = x_1$. Заиста, применом аксиома (А2), (А3), (А1) и дефиниције елемента x_1 добијамо $x_2 = 0 + x_2 = ((-a) + a) + x_2 = (-a) + (a + x_2) = (-a) + b = x_1$.

Специјално, нека је $b = 0$. Из јединствености решења једначине $a + x = 0$ следи и јединственост инверзног елемента за операцију $+$.

Имајући то у виду, лако се доказује да је

$$-(-x) = x. \tag{3}$$

Заиста, по дефиницији инверзног елемента је $(-x) + (-(-x)) = 0$ и $(-x) + x = 0$, тако да су и $-(-x)$ и x инверзни елементи за $(-x)$, па је $-(-x) = x$ због јединствености инверзног елемента.

Пример 6. Означимо са $2\mathbf{Z}$ скуп свих парних целих бројева. Тада је $(2\mathbf{Z}, +)$ група. Међутим скуп свих непарних бројева није група у односу на сабирање – збир два непарна броја није непаран број, тако да операција $+$ уопште није дефинисана на том скупу. Структура $(\mathbf{N}, +)$, где је

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

скуп природних бројева, такође није група, јер ниједан елемент $n \in \mathbf{N}$ нема инверзни елемент у скупу $\mathbf{N}$. ♯

Пример 6 нас мотивише да уведемо следећи појам.

[2]Абел (Niels Henrik Abel, 1802–1829), норвешки математичар

Дефиниција 1. Нека је $(G,+)$ група. Подскуп $H \subset G$ називамо *подгрупом групе* G ако важи

$$x,y \in H \ \Rightarrow x+y \in H, \qquad x \in H \ \Rightarrow -x \in H. \tag{4}$$

Другим речима, подгрупа групе G је сваки њен подскуп који је затворен у односу на груповне операције – бинарну операцију $+$ и унарну операцију $-$. $\Diamond$

У претходној дефиницији је реч о унарној операцији $-$, али често истим симболом означавамо и једну бинарну операцију у групи, дефинисану са

$$x-y = x+(-y).$$

Услов (4) је еквивалентан услову

$$x,y \in H \ \Rightarrow x-y \in H. \tag{5}$$

Заиста, нека су x и y елементи скупа H. Ако претпоставимо да важи (4), онда из друге импликације у (4) следи да је $(-y) \in H$, а одатле и из прве импликације следи $x-y = x+(-y) \in H$, тј. важи (5). Обрнуто, ако претпоставимо да важи (5), из те импликације следи да је $0 = x-x \in H$, па је и $-x = 0-x \in H$, што је друга импликација у (4). Слично се доказује и да је $(-y) \in H$, па из (5), уз помоћ (3), следи и да је $x+y = x-(-y) \in H$, што је прва импликација у (4).

Ако је H подгрупа групе $(G,+)$, онда је и структура $(H,+)$ група. Скуп свих парних бројева из Примера 6 је једна подгрупа групе $(\mathbf{Z},+)$, али подскупови непарних и природних бројева нису.

Задатак 8. Нека су H_1 и H_2 подгрупе групе G. Доказати да је и њихов пресек $H_1 \cap H_2$ подгрупа групе G. ✓

Задатак 9. Нека је E непразан скуп, S_E његова група пермутација и $p \in E$ неки његов елемент. Доказати да је

$$\Gamma_p = \{f \in S_E \mid f(p) = p\}$$

подгрупа групе S_E. ✓

Задатак 10. Нека је $(G,\star)$ група и $g \in G$ неки њен елемент. За $n \in \mathbf{N}$ дефинишимо

$$g^n := \underbrace{g \star \ldots \star g}_{n} \qquad \text{и} \qquad g^{-n} := \underbrace{g^{-1} \star \ldots \star g^{-1}}_{n}$$

где је g^{-1} инверз елемента g. Такође, дефинишимо $g^0 := e$, где је e неутрални елемент групе G. Доказати да је

$$\langle g \rangle = \{g^n \mid n \in \mathbf{Z}\}$$

подгрупа групе G. Ова подгрупа назива се *цикличном подгрупом* генерисаном елементом g. ✓

Тотално уређена Абелова група је Абелова група у којој је дефинисана релација тоталног поретка $\leq$ таква да, сем аксиома Абелове групе, важи и аксиома (A15).

Абелова група у којој је, сем операције $+$ дефинисана и операција $\cdot$ која задовољава (A5) и (A8) зове се *прстен*. Прстен је, дакле, структура $(P,+,\cdot)$, која задовољава споменуте аксиоме. Ако је $(P,+,\cdot)$ прстен, Абелова група $(P,+)$ се назива *адитивном групом прстена* P.

Пример 7. $(\mathbf{Z},+,\cdot)$ и $(\mathbf{Q},+,\cdot)$ су примери прстена. ♯

Прстен у коме важи (A6) и (A10) зове се *прстен са јединицом*. Аксиома (A10) обезбеђује нам да тривијални прстен $\{0\}$, који задовољава све остале аксиоме прстена са јединицом, *не* зовемо прстеном са јединицом.

Елемент 1 прстена са јединицом, дефинисан аксиомом $(A6)$, је јединствен; доказ овог тврђења се добија кад се у доказу тврђења о јединствености елемента 0 у групи симболи $+$ и 0 замене симболима $\cdot$ и 1. Кад желимо да истакнемо неутрале 0 и 1, говоримо о прстену са јединицом као уређеној петорци $(P,+,\cdot,0,1)$.

Пример 8. У структури прстена можемо да изведемо тврђење $0\cdot x=0$: пошто је $0+0=0$, из дистрибутивног закона следи

$$0\cdot x=(0+0)\cdot x=0\cdot x+0\cdot x,$$

па из јединствености решења једначине $0\cdot x+X=0\cdot x$ следи $0\cdot x=0$. ♯

Прстен у коме важи (A9) зовемо *комутативним прстеном*.

Следећа дефиниција је аналогија Дефиниције 1 за прстене.

Дефиниција 2. Нека је $(P,+,\cdot)$ прстен. Подскуп $P_0\subset P$ је *потпрстен* прстена $(P,+,\cdot)$ ако важи

$$x,y\in P_0\ \Rightarrow\ x+y\in P_0,\ \ -x\in P_0\ \ x\cdot y\in P_0. \tag{6}$$

Еквивалентно: $P_0\subset P$ је потпрстен ако је $(P_0,+)$ подгрупа адитивне групе $(P,+)$ и ако је уз то скуп P_0 затворен у односу на операцију множења $\cdot$. ◊

Пример 9. Скуп свих парних целих бројева $2\mathbf{Z}$ је потпрстен прстена $(\mathbf{Z},+,\cdot)$. Скуп целих бројева је потпрстен прстена рационалних бројева, па је и скуп парних целих бројева потпрстен прстена $(\mathbf{Q},+,\cdot)$. ♯

Потпрстен парних бројева у прстену $(\mathbf{Z},+,\cdot)$ има и својство које је јаче од затворености у односу на операцију множења у (6):

$$x\in\mathbf{Z},\ y\in 2\mathbf{Z}\ \ \Rightarrow\ \ x\cdot y\in 2\mathbf{Z}.$$

Овакве подскупове прстена издвајамо следећом дефиницијом.

Дефиниција 3. Нека је $(P,+,\cdot)$ комутативни прстен. Подскуп $I\subset P$ назива се *идеалом* прстена $(P,+,\cdot)$ ако важи

1. $(I,+)$ је подгрупа адитивне групе $(P,+)$;
2. $x\in P,\ y\in I\ \ \Rightarrow\ \ x\cdot y\in I$.

Чињеница да је I идеал у прстену P означава се са $I\lhd P$. ◊

Пример 10. Скуп $2\mathbf{Z}$ парних бројева је идеал у прстену $(\mathbf{Z},+,\cdot)$, али *није* идеал у прстену $(\mathbf{Q},+,\cdot)$. ♯

Пример 11. Нека је X произвољан скуп и $\mathbf{Q}^X$ скуп свих пресликавања

$$f:X\to\mathbf{Q}. \tag{7}$$

Дефинишимо на $\mathbf{Q}^X$ операције сабирања и множења са

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\qquad (f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$$

(овде операције $+$ и $\cdot$ на десној страни означавају операције сабирања и множења у $\mathbf{Q}$, а на левој страни новодефинисане операције у $\mathbf{Q}^X$, иако их означавамо истим симболом). Тада је $(\mathbf{Q}^X, +, \cdot)$ комутативни прстен са јединицом

$$\mathbf{1} : X \to \mathbf{Q}, \quad \mathbf{1}(x) = 1 \text{ за све } x \in X.$$

Нека је $S \subset X$ произвољан скуп. Подскуп

$$I_S = \{f \in \mathbf{Q}^X \mid (\forall s \in S)\, f(s) = 0\} \subset \mathbf{Q}^X$$

је идеал у прстену $(\mathbf{Q}^X, +, \cdot)$. ♯

Пример 12. Претходни пример може да се уопшти тако што се уместо (7) посматра скуп пресликавања

$$f : X \to P,$$

где је P неки прстен, не обавезно прстен рационалних бројева. ♯

Прстен са јединицом у коме важи аксиома (A7) назива се *телом*, или *прстеном са дељењем*. Комутативно тело назива се *пољем*. Поље на коме је дефинисана релација поретка која задовољава аксиоме (A15) и (A16) назива се *уређеним пољем*; ако се ради о релацији тоталног поретка, говоримо о *тотално уређеном пољу*.

Задатак 11. Нека су a и b елементи тела и $a \neq 0$. Доказати да једначина

$$a \cdot x = b \tag{8}$$

има јединствено решење. Формулисати и доказати тврђење о јединствености инверзног елемента за операцију $\cdot$ у прстену. ✓

Задатак 12. Извести из аксиома (A1)–(A16) следећа тврђења:
(а) $x \leq 0 \wedge y \leq 0 \Rightarrow x \cdot y \geq 0$
(б) $x_1 \leq y_1 \wedge x_2 \leq y_2 \Rightarrow x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2$
(в) $0 < 1$. ✓

Аксиому (АРХ) смо издвојили из нумерације и означили посебно из разлога који ће бити јаснији касније, када ову аксиому будемо заменили општијом *Аксиомом супремума*, или неком од њој еквивалентних аксиома, чиме ћемо проширити поље рационалних бројева. Уређено поље у коме важи (АРХ) назива се *Архимедским пољем*. Архимедова аксиома је оригинално формулисана у склопу аксиоматског заснивања геометрије, као могућност да наношењем дате дужи a на правој можемо, полазећи из тачке A, прећи преко произвољне тачке B на правој.[3] Израз на левој страни неједнакости $na > b$ при томе није могуће тумачити као множење, већ као „додавање дужи n пута". Другим речима, Архимедова аксиома у структури $(G, +, \leq)$ у којој, уз релацију поретка, имамо само операцију сабирања (нпр. у уређеној групи) утврђује да постоји $n \in \mathbf{N}$ за које важи

$$\underbrace{a + \cdots + a}_{n} > b. \tag{9}$$

Група у којој важи Архимедова аксиома назива се *Архимедском групом*.

Убудуће ћемо из ознака изостављати знак $\cdot$ и уместо $a \cdot b$ писати ab.

[3] Ми овде нећемо улазити у аналогију између аналитичке и геометријске аксиоматике, која се детаљније изучава на курсу Аналитичке геометрије (в. [**17**]), али ћемо, мотивисани њом, скуп реалних бројева звати још и реалном правом.

1.2. Непотпуност поља Q. Вратимо се сада са разматрања ових апстрактних алгебарских структура пољу $\mathbf{Q}$ рационалних бројева. У њему, као у сваком пољу, једначине (2) и (8) за $a \neq 0$ имају јединствена решења. Покажимо да то није случај са једначином

$$x^2 = 2. \tag{10}$$

Претпоставимо да је рационалан број x решење ове једначине и напишимо га као $x = \frac{m}{n}$ где су m и n *узајамно прости* (тј. без заједничког делитеља) цели бројеви. (Другим речима, напишимо x у виду количника два цела броја, што је дефиниција рационалног броја, и извршимо њихово скраћивање тако да се они више не могу скраћивати.) Заменом овог израза у (10) добијамо

$$m^2 = 2n^2. \tag{11}$$

Одавде следи да је m^2 паран, што значи да је и m паран (јер је квадрат непарног броја непаран), тј. облика $m = 2k$. Ако уврстимо то у једначину (11) добијамо $4k^2 = 2n^2$, па је $n^2 = 2k^2$ паран број. Одатле следи да је и n паран, што је у супротности са претпоставком да су m и n узајамно прости. Из ове контрадикције следи да једначина (10) нема решења у скупу рационалних бројева.

Задатак 13. Доказати да једначина $x^2 = 3$ нема решење у скупу рационалних бројева, користећи идеју доказа аналогног тврђења за једначину (10). На ком месту тај доказ не пролази за једначину $x^2 = 4$ (која има решење у скупу рационалних бројева: $\pm 2 \in \mathbf{Q}$)? ✓

Доказ који смо изложили наводи Аристотел[4], као пример *доказивања свођењем на противречност*, односно, у савременим ознакама, таутологије

$$(p \Rightarrow q \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p.$$

Само откриће непостојања решења једначине (10) приписује се Питагорејцима,[5] школи античких философа која се одвојила од софиста (склоних лошим демократским утицајима[6]) и приступила аристократском слоју. Сматра се да је ово њихово најзначајније откриће и претпоставља „да су до њега дошли проучавањем геометријске средине $a : b = b : c$ која је нарочито интересовала Питагорејце, а служила је као симбол аристократије" (в. [**12**]). Геометријски гледано, овај резултат говори да дијагонала квадрата са страницом дужине 1 није рационалан број. За Питагорејце, који су познавали само рационалне бројеве, као и за античку математику уопште, ово је означило улазак у велику кризу математике. Питагорејци су, у свом целокупном погледу на свет, настојали да све сведу на број. Познавали су парне бројеве, непарне, парно–непарне, непарно–парне, просте, сложене, савршене, пријатељске, троугаоне, четвороугаоне, петоугаоне итд. Откриће геометријских величина које се не могу описати рационалним бројевима навело их је да почну да негирају могућност аритметике да опише све геометријске објекте. Излаз из кризе тражен је у асиметрији између геометрије (тј. „видљивог света") и теорије бројева, а

[4] Аристотел (*Αριστότελης* 384–322. пре Христа), старогрчки философ

[5] Питагора (*Πυθαγόρας*, ∼580–500. пре Христа), јонски аристократа, мистик и научник

[6] *„Мајор Lawford направи заједљиву примедбу на рачун демократије, која статистички изједначује глупост с разумом, а идиотима, само ако их је довољно, допушта да управљају светом"* (Б. Пекић [**7**])

не у проширењу концепта броја, до кога се дошло много касније. И касније, током читаве историје математике, смењивали су се периоди успеха онога што је Галилеј [7] формулисао као програм „мерити све што је мерљиво и учинити мерљивим све што још увек није", са периодима његове кризе и тражења проширења или уопштења појма „мерења", тј. броја. И XX век је донео један такав период – период развоја квантне физике сушински је променио (и још увек мења) начин гледања на концепт мерења. Напоменимо да је овде реч само о *улози* концепта мерења у науци, а не о њеном свођењу на квантитативну димензију. Буквално схватање Галилејевих речи Анри Поенкаре[8] је духовито окарактерисао речима: „Да ли природњак може добро да проучи слона ако га посматра микроскопом?"

Размотримо мало неформалније концепт мерења дужи, како бисмо мотивисали проширење аксиоматског система који смо до сада разматрали и увођење *скупа реалних бројева* $\mathbf{R}$. Из Архимедове аксиоме следи да не постоје „недостижне" тачке на реалној правој. Ако је a „јединица мере" (назовимо је нпр. метар) и ако је $na = b$ за неки природан број n, онда кажемо да „b има дужину n метара". Ако не постоји такав природан број n, потребно је увести мању јединицу мерења. Поделимо зато дуж a на 10 једнаких делова (назовимо их дециметрима). Ако постоји природан број n такав да је $n\frac{a}{10} = b$, измерили смо дужину b у дециметрима; у супротном, морамо да поделимо дуж $\frac{a}{10}$ на још 10 мањих делова итд. Уколико после коначно много корака успемо да измеримо дуж b, добијамо њену меру у *децималном запису*

$$b = x_m x_{m-1} \cdots x_1 x_0, x_{-1} x_{-2} \cdots x_{-k},$$

што је ознака за

$$b = x_m \cdot 10^m + x_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \cdots + x_1 \cdot 10 + x_0 + x_{-1} \cdot 10^{-1} + x_{-2} \cdot 10^{-2} + \cdots + x_{-k} \cdot 10^{-k}.$$

Међутим, може да се деси да се овај поступак никад не заврши, тј. да број b има *бесконачан децимални запис*.

Задатак 14. Доказати да је број рационалан ако и само ако је његов децимални запис коначан или периодичан. (Упутство: за доказ једне импликације користити чињеницу да се у алгоритму дељења целих бројева m и n може јавити само коначно много остатака, па је поступак или коначан или периодичан; за доказ друге искористити формулу за суму геометријског низа[9].) ✓

Дакле, уколико желимо да меримо и дужи као што је хипотенуза једнакокраког правоуглог троугла са катетама дужине 1, морамо да проширимо скуп рационалних бројева. Један од начина да се то уради је да му *договором*, или *дефиницијом*, придружимо и бројеве који имају бесконачан децимални запис. Приметимо да при томе није постојао ни један разлог да почетни, „јединични" интервал делимо на 10 делова. Чињеница да имамо 10 прстију је једини историјски разлог због којег користимо децимални систем. Много подесније би било користити систем са основом 12: број 12 има велики број делитеља

[7] Галилеј (Galileo Galilei, 1564–1642), италијански научник

[8] Поенкаре (Jules Henri Poincaré, 1854–1912), француски математичар

[9] Читалац коме је ова формула непозната може да је види у Леми 5 на 24. страни, где се ћемо и да је докажемо.

(дељив је са 2,3,4,6 и 12), што би олакшало алгоритам дељења бројева, а захтевало увођење још само два нова симбола за цифре.[10] Дакле, скуп рационалних бројева можемо да проширимо тако што му додамо „елементе које добијамо бесконачним дељењем интервала на мање делове", или, речено у терминима аксиоматике, тако што Аксиомама (А1)–(А16) и (АРХ) додамо још једну, тзв. *Канторову аксиому*:

(КАН) **Канторова аксиома:** Нека је за свако $n \in \mathbf{N}$ дат интервал $[a_n, b_n]$ и нека важи $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$. Тада је

$$\bigcap_{n\in\mathbf{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

У следећим параграфима позабавићемо се детаљније проблемом проширења скупа рационалних бројева. Видећемо да постоји неколико еквивалентних начина да се он реши. Један је преко тзв. *Аксиоме супремума*

(СУП) **Аксиома супремума:** Ако је подскуп $T \subset \mathbf{R}$ непразан и одозго ограничен, онда постоји његово најмање горње ограничење $\sup T \in \mathbf{R}$.

У параграфу 4 ћемо да покажемо да се додавањем аксиоме (КАН) аксиомама (А1)–(А16), (АРХ) добија систем еквивалентан систему одређеном аксиомама (А1)–(А16), (СУП). У међувремену ћемо се сусрести са још два еквивалентна приступа: Дедекиндовом аксиомом и Аксиомом непрекидности. Сваки од ових приступа *дефинише* систем реалних бројева $\mathbf{R}$. У следећем параграфу ми ћемо се определити да систем дефинисан аксиомама (А1)–(А16), (СУП) узмемо за *дефиницију* система $\mathbf{R}$, а затим ћемо остале споменуте приступе да изведемо као *теореме* и докажемо да су они *еквивалентни* изабраном.

2. Потпуно уређено поље

2.1. Аксиома супремума. Вратимо се једначини $x^2 = 2$. Посматрајмо скуп

$$T = \{x \in \mathbf{Q} \mid x^2 < 2\}.$$

Скуп T не садржи највећи елемент; тачније, да за сваки рационални број $x \in T$ постоји рационални број $y \in T$ такав да важи $x < y$. Заиста, нека је $x \in T$; тада је $x^2 < 2$. Изаберимо број $q \in \mathbf{Q}$ такав да важи $0 < q < 1$ и $q < (2-x^2)(2x+1)^{-1}$. Тада је $y = x + q$ рационалан број који је већи од x и припада скупу T.

Задатак 15. Доказати да скуп

$$S = \{x \in \mathbf{Q} \mid x^2 > 2\}$$

не садржи најмањи елемент. ✓

Мотивисани овим разматрањима, додајмо аксиомама (А1)–(А16) и следећу.

(СУП) **Аксиома супремума:** Ако је подскуп $T \subset \mathbf{R}$ непразан и одозго ограничен, онда постоји његово најмање горње ограничење $\sup T \in \mathbf{R}$.

Скуп на коме је дефинисана релација поретка која задовољава аксиому (СУП) назива се *потпуно уређеним скупом*. Приметимо да је скуп T ограничен одозго, али да нема супремум *као подскуп уређеног скупа* $\mathbf{Q}$. Заиста,

[10] Неки стари мерни системи користе управо систем са основом 12, ови системи су се задржали и данас нпр. у англосаксонском свету. Код нас, термин *туце* означава 12 као „округао број". Бројчаник сата је подељен на 12 делова, година има 12 месеци.

сви позитивни елементи скупа S су горња ограничења скупа T, а према Задатку 15 овај скуп нема најмањи елемент. Дакле, скуп $\mathbf{Q}$ није потпуно уређен и додавањем аксиоме (СУП) аксиомама (А1)–(А16) добили смо структуру која проширује уређено поље $\mathbf{Q}$.

Аксиоме (А1)–(А16), (СУП) карактеришу реалне бројеве; другим речима, можемо их узети као дефиницију поља реалних бројева $\mathbf{R}$.

Дефиниција 4. Уређена шесторка $(\mathbf{R}, +, \cdot, \leq, 0, 1)$, где је $\mathbf{R}$ скуп, $+$ и $\cdot$ бинарне операције, $\leq$ бинарна релација и $0, 1 \in \mathbf{R}$ истакнути елементи, која задовољава аксиоме (А1)–(А16), (СУП) назива се *пољем реалних бројева*.

Да би оваква дефиниција била оправдана, било би потребно доказати

1. да структура која задовољава аксиоме (А1)–(А16), (СУП) постоји и
2. да је структура која задовољава аксиоме (А1)–(А16), (СУП) јединствена.

На ова питања ћемо се вратити у Параграфу 8.

Из аксиоме (СУП) следи

Теорема 1. *Сваки непразан и одоздо ограничен подскуп $S \subset \mathbf{R}$ има инфимум.*

$\triangle$ Нека је $T = -S = \{-s \mid s \in S\}$. Тада је T непразан и ограничен одозго. Заиста, из $S \neq \emptyset$ следи да постоји неко $s \in S$, а по дефиницији скупа T то значи да $t = -s \in T$, тј. $T \neq \emptyset$. Пошто је S ограничен одоздо, следи да постоји $m \in \mathbf{R}$ такво да је $m \leq s$ за свако $s \in S$. Нека је $M = -m$; множењем претходне неједнакости са -1 добијамо $t \leq M$ за свако $t \in T$, што значи да је T ограничен одозго. Из (СУП) следи да постоји $\lambda = \sup T$. Тада је лако видети да је $-\lambda = \inf S$. Заиста, потребно је само поново помножити одговарајуће неједнакости са -1 и видети најпре да је $-\lambda$ доње ограничење скупа S, а затим и да је највеће (користећи чињеницу да је горње ограничење λ скупа T најмање).

Прецизније, ако је $s \in S$, онда је $-s \in T$, па је $-s \leq \lambda$, јер је λ горње ограничење скупа T, одакле следи $-\lambda \leq s$, тј. $-\lambda$ је доње ограничење скупа S. Ако је и μ доње ограничење скупа S, онда је $\mu \leq s$ за свако $s \in S$, одакле, множењем са -1 добијамо, имајући у виду дефиницију скупа T, да је $t \leq -\mu$ за свако $t \in T$. Дакле, $-\mu$ је горње ограничење скупа T, па није веће од његовог најмањег горњег ограничења $\lambda = \sup T : -\mu \leq \lambda$. Одатле следи $-\lambda \leq \mu$. Пошто је μ произвољно доње ограничење скупа S, следи да је $-\lambda$ његово највеће горње ограничење, тј. $-\lambda = \inf S$. $\triangledown$

Пошто постоји дуалност између $\leq$ и $\geq$, Теорему 1 смо могли да узмемо за аксиому уместо (СУП). Тада би (СУП) била теорема, коју бисмо доказали на потпуно исти начин као Теорему 1, заменом симбола $\leq$ симболом $\geq$ и заменом улога симбола sup и inf, доњег и горњег ограничења итд.

Приметимо да смо у доказу Теореме 1 доказали да важи $\inf(-A) = -\sup A$, где је

$$-A = \{-a \mid a \in A\}.$$

Издвојићемо ово и још нека својства супремума и инфимума у следећој леми. За скупове A и B дефинишимо

$$A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}, \quad A \cdot B = \{a \cdot b \mid a \in A,\ b \in B\}$$

и

$$A \leq B \;\Leftrightarrow\; (\forall a \in A)(\forall b \in B)\, a \leq b.$$

Лема 1. *Нека су A, B непразни и ограничени скупови реалних бројева и $A_0 \subset A$ непразан подскуп. Тада важи*

1. $\inf A \leq \inf A_0 \leq \sup A_0 \leq \sup A$
2. $\inf(-A) = -\sup A$, $\sup(-A) = -\inf A$
3. $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$, $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$
4. $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$, $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$.
5. *Ако је* $0 \leq A$, $0 \leq B$ *онда је* $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$, $\inf(A \cdot B) = \inf A \cdot \inf B$.

$\triangle$ Тврђење 1. је очигледно; тврђење 2. смо доказали у доказу Теореме 1. Докажимо да је $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$. Пошто је $(\forall a \in A)\, a \leq \sup A$ и $(\forall b \in B)\, b \leq \sup B$, следи да је $(\forall a \in A)(\forall b \in B)\, a + b \leq \sup A + \sup B$, па је $\sup A + \sup B$ горње ограничење скупа $A + B$. Докажимо да је оно најмање. Нека је $x < \sup A + \sup B$. Тада је $x - \sup A < \sup B$. Пошто је $\sup B$ најмање горње ограничење скупа B, постоји $b \in B$ за које важи $b > x - \sup A$, тј. $x - b < \sup A$. Одатле следи да $x - b$ није горње ограничење скупа A, па постоји $a \in A$ за које је $a > x - b$, па је $a + b > x$, тј. x не може да буде горње ограничење скупа $A + B$. Тиме је доказано $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$. Доказ осталих својстава препуштамо читаоцу за вежбу. $\triangledown$

2.2. Дедекиндова аксиома и Аксиома непрекидности. Навешћемо сада још два тврђења еквивалентна Аксиоми супремума. За прво од њих нам је потребна следећа дефиниција.

Дефиниција 5. Нека је X уређен скуп. Пар (D_1, D_2) подскупова $D_1, D_2 \subset X$ назива се *Дедекиндовим*[11] *пресеком* ако има следећа својства

(А) $D_1 \cup D_2 = X$
(Б) $D_1 \neq \emptyset$, $D_2 \neq \emptyset$
(В) $\delta_1 \in D_1 \wedge \delta_2 \in D_2 \Rightarrow \delta_1 < \delta_2$

За нас је овде од интереса случај $X = \mathbf{R}$. Важе следећа два тврђења, која називамо аксиомама јер свако од њих (в. Теорему 2 ниже) можемо узети за аксиому уместо Аксиоме (СУП); преостала два тврђења, наравно, онда постају теореме.

(ДЕД) **Дедекиндова аксиома:** Ако су $D_1, D_2 \subset \mathbf{R}$ такви да је (D_1, D_2), Дедекиндов пресек, онда постоји најмање горње ограничење

$$\sup D_1 \in \mathbf{R}$$

скупа D_1.

(НЕП) **Аксиома непрекидности (или Аксиома потпуности):** Нека су T и S два непразна подскупа скупа $\mathbf{R}$ која имају својство

$$(\forall t \in T)(\forall s \in S)\, t \leq s.$$

Тада постоји $c \in \mathbf{R}$ за које важи $(\forall t \in T)(\forall s \in S)\, t \leq c \leq s$.

Теорема 2. *Тврђења* (СУП), (ДЕД) *и* (НЕП) *су еквивалентна.*

[11] Дедекинд (Richard Dedekind, 1831–1916), немачки математичар

$\triangle$ Претпоставимо да важи (СУП) и нека је (D_1, D_2) Дедекиндов пресек у $\mathbf{R}$. Из Дефиниције 5 следи да је скуп D_1 непразан и ограничен одозго. Заиста, $D_1 \neq \emptyset$ следи из (Б), док из (В) следи да је сваки елемент скупа D_2 горње ограничење скупа D_1. Из (СУП) следи да постоји $\sup D_1$, што доказује импликацију (СУП) $\Rightarrow$ (ДЕД).

Претпоставимо сада да важи (ДЕД) и нека су T и S скупови са својствима из (НЕП) Нека је $D_1 = \{x \in \mathbf{R} \mid (\forall s \in S)\, x < s\}$ и $D_2 = \mathbf{R} \setminus D_1$. Тада је (D_1, D_2) Дедекиндов пресек. Заиста, (А) важи по дефиницији скупова D_1 и D_2. Нека је $\varepsilon > 0$ и

$$T_\varepsilon := \{t - \varepsilon \mid t \in T\}$$

Очигледно је $S \subset D_2$ и $T_\varepsilon \subset D_1$, па пошто су, према претпоставци (НЕП) S и T (а тиме и T_ε) непразни, следи да важи (Б). Ако је $\delta_1 \in D_1$, онда је $\delta_1 < s$ за све $s \in S$. Нека је

$$\delta_2 \in D_2. \tag{12}$$

Ако би важило $\delta_2 \leq \delta_1$, тада би важило и $\delta_2 < s$ за све $s \in S$. То би, по дефиницији скупа D_1, значило да важи $\delta_2 \in D_1$, што, заједно са (12) и (В) даје контрадикцију $\delta_2 < \delta_2$. Према томе, (D_1, D_2) је Дедекиндов пресек, па постоји $c = \sup D_1$. Из дефиниције супремума и $T_\varepsilon \subset D_1$ следи да је $t - \varepsilon \leq c$ за све $t \in T$ и све $\varepsilon > 0$. Одатле следи $t \leq c$ за свако $t \in T$. Заиста, ако би за неко $t_0 \in T$ било $t_0 > c$, онда би било и $t_0 - \frac{1}{2}(t_0 - c) > c$, што је у супротности са $t_0 - \varepsilon < c$ за $\varepsilon = \frac{1}{2}(t_0 - c) > 0$.

Нека је $s \in S$. Из дефиниције скупа D_1 следи да је $\delta_1 \leq s$ за свако $\delta_1 \in D_1$, па је горње ограничење скупа D_1. Пошто је супремум најмање горње ограничење, следи да је $c \leq s$. Тиме је доказана импликација (ДЕД) $\Rightarrow$ (НЕП).

Претпоставимо, на крају, да важи (НЕП) и нека је T непразан и одозго ограничен подскуп скупа $\mathbf{R}$. Нека је S скуп свих горњих ограничења скупа T. Пошто је T ограничен одозго, следи да је и S непразан, па T и S задовољавају услове из аксиоме (НЕП). Одатле следи

$$(\exists c)(\forall t \in T)(\forall s \in S)\, t \leq c \leq s. \tag{13}$$

Тада је $c = \sup T$. Заиста, из прве неједнакости у (13) следи да је елемент c горње ограничење скупа T, а из друге (и из дефиниције скупа S) да је он најмање горње ограничење, тј. супремум. $\triangledown$

2.3. Интервали. Дефинишимо сада важне подскупове скупа $\mathbf{R}$.

Дефиниција 6. Нека су a и b реални бројеви.

1. Скуп $(a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$ назива се *отвореним интервалом* са крајевима a и b.
2. Скуп $[a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}$ назива се *затвореним интервалом* или *сегментом* са крајевима a и b.
3. Скупови $[a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < b\}$ и $(a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leq b\}$ називају се *полуотвореним интервалима* са крајевима a и b.
4. Скупови $(a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x > a\}$ и $[a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq a\}$ називају се редом *отвореним и полуотвореним интервалом са крајевима* a и $+\infty$. Симбол $+\infty$ чита се *плус бесконачно*. Специјално, интервал $(0, +\infty)$ означавамо и са $\mathbf{R}_+$.

5. Скупови $(-\infty, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid x < b\}$ и $(-\infty, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq b\}$ називају се редом *отвореним и полуотвореним интервалом са крајевима* $-\infty$ и b. Симбол $-\infty$ чита се *минус бесконачно*.
6. Скуп $[-\infty, +\infty]$, који се означава још и са $\overline{\mathbf{R}}$ и назива *проширеним системом реалних бројева* је скуп који се добија додавањем двају симбола $-\infty$, $+\infty$ скупу $\mathbf{R}$, при чему су испуњени следећи услови:
   6.1 За свако $x \in \mathbf{R}$ важи

$$-\infty < x < +\infty, \quad x + (+\infty) = +\infty, \quad x + (-\infty) = -\infty, \quad \frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0$$

   6.2 За свако $x > 0$ важи

$$x \cdot (+\infty) = +\infty, \quad x \cdot (-\infty) = -\infty$$

   6.3 За свако $x < 0$ важи

$$x \cdot (+\infty) = -\infty, \quad x \cdot (-\infty) = +\infty$$

   Уместо $+\infty$ често пишемо само ∞.

Задатак 16. Доказати да је сваки Дедекиндов пресек (D_1, D_2) у $\mathbf{R}$ облика $((-\infty, a), [a, +\infty))$ или $((-\infty, a], (a, +\infty))$. ✓

Лема 2. **(Карактеризација интервала)** *Подскуп* $J \subset \mathbf{R}$ *је интервал ако и само ако за свака два броја* $a, b \in J$*, таква да је* $a < b$*, важи* $[a, b] \subset J$*.*

△ Да сваки интервал има наведено својство следи из Дефиниције 6. Претпоставимо да је J скуп са својством описаним у формулацији леме. Ако је J неограничен, онда је $J = \mathbf{R}$, дакле J је интервал $(-\infty, +\infty)$. Заиста, из неограничености скупа J следи да за свако $x \in \mathbf{R}$ постоје $a, b \in J$ такви да је $a < x < b$ (јер би у супротном x било или горње или доње ограничење скупа J), а одатле, на основу претпоставке о скупу J, следи $x \in J$. Нека је J ограничен одозго, али не одоздо, и нека је $s = \sup J$. Тада за свако $x < s$ постоје $a, b \in J$ такви да је $a < x < b$ (зашто?). Одатле следи $x \in J$, тј. $J = (-\infty, s)$ или $J = (-\infty, s]$. Слично се разматра случај скупа који је ограничен одоздо, али не и одозго. На крају, нека је J ограничен и нека је $s = \sup J$, $\imath = \inf J$. Тада за свако $x \in (\imath, s)$ постоје бројеви $a, b \in J$ такви да је $a < x < b$. Одатле следи $x \in J$, па је J један од интервала $(\imath, s)$, $[\imath, s]$, $(\imath, s]$, $[\imath, s)$. ▽

Дефиниција 7. Бројеве из интервала $(0, +\infty)$ зовемо *позитивним*, а бројеве из интервала $(-\infty, 0)$ *негативним бројевима*.

Пример 13. Број 1 је позитиван број. Показаћемо како се ово тврђење може извести из аксиома (тј. решићемо Задатак 12 на 14. страни). Из аксиома (A10), (A14) и дефиниције релације $<$ следи да важи тачно једна од релација $0 < 1$ и $1 < 0$.

Претпоставимо да важи $1 < 0$. Тада је, на основу (A15), $1 + (-1) < 0 + (-1)$, тј. $0 < -1$. Одатле и из (A16) би следило $0 \leq (-1)(-1)$. Ако докажемо да је десна страна последње неједнакости једнака 1 (приметимо да израз $(-x)(-y) = xy$ није међу аксиомама, па захтева доказ) добићемо да је $0 \leq 1$, што је у супротности са претпоставком $1 < 0$. Из ове контрадикције следи $0 < 1$.

Докажимо да је

$$(-x)(-y) = xy. \tag{14}$$

Доказ ћемо поделити у неколико корака. Приметимо најпре да из (А2) и (А8) следи $0x = (0+0)x = 0x + 0x$. Одавде, на основу јединствености решења једначине $a + x = b$ следи $0x = 0$ (још једно „очигледно" тврђење које није међу аксиомама и захтева доказ!).

Докажимо сада да важи

$$-(-x) = x. \tag{15}$$

Из (А3) следи $(-x) + x = 0$ и $(-x) + (-(-x)) = 0$, а одатле, на основу јединствености инверзног елемента за сабирање, следи $-(-x) = x$.

Из $0 = 0y = (x + (-x))y = xy + (-x)y$, на основу јединствености инверзног елемента за сабирање, следи

$$(-x)y = -(xy). \tag{16}$$

Слично се доказује и

$$x(-y) = -(xy). \tag{17}$$

Сада имамо

$$\begin{aligned} (-x)(-y) &= -(x(-y)) && \text{следи из (16)} \\ &= -(-(xy)) && \text{следи из (17)} \\ &= xy && \text{следи из (15)}, \end{aligned}$$

што доказује (14). Тиме је завршен доказ да је $0 < 1$. ♯

Из претходног примера и аксиома (А12) и (А15) следи $0 < 1+1$. Број $1+1$ означава се симболом 2 и назива се *два*. Слично, $0 < 1 + 1 + 1$ итд. Тиме смо издвојили један важан подскуп скупа позитивних бројева, скуп бројева који се могу добити од броја 1 применом операције $+$. Овај скуп је наш следећи предмет изучавања.

3. Природни, цели и рационални бројеви

Сумирајмо укратко шта смо до сада урадили. Потребом преласка од (блиских интуицији) рационалних бројева на реалне смо *мотивисали* дефиницију система реалних бројева $(\mathbf{R}, +, \cdot, \leq, 0, 1)$ као структуре која задовољава аксиоме (А1)–(А16), (СУП). Усвајајући ове аксиоме за *дефиницију* (реалних) бројеве, почели смо њихово *аксиоматско заснивање*. Како сада да у овом систему препознамо и формално издвојимо оне објекте чија нам је јасна интуитивна представа послужила као мотивација – природне, целе и рационалне бројеве?

3.1. Природни бројеви. Пеанове аксиоме. Нека је $\mathcal{N}$ класа свих подскупова $N \subset \mathbf{R}$ који имају следеће две особине

$$1 \in N \quad \text{и} \quad n \in N \Rightarrow n + 1 \in N.$$

Релација $\subset$ је релација поретка на скупу $\mathcal{N}$, па можемо да говоримо о његовом *најмањем елементу*.

Дефиниција 8. Скуп $\mathbf{N}$ је најмањи елемент класе $\mathcal{N}$. Елементе скупа $\mathbf{N}$ називамо *природним бројевима*.

Еквивалентно, скуп $\mathbf{N}$ се може дефинисати као пресек свих скупова класе $\mathcal{N}$. Одатле се лако види и да је $\mathbf{N} \in \mathcal{N}$. Природни бројеви имају својства која издвајамо следећом теоремом. Она се називају Пеановим[12] аксиомама, јер се у заснивању аритметике може поћи од њих као дефиниције система

[12] Пеано (Giuseppe Peano, 1858–1932), италијански математичар

природних бројева, а потом из њих извести реалне бројеве (више о овоме ћемо рећи у Параграфу 8). У нашем приступу, у коме смо аксиомацки засновали реалне бројеве, а природне из њих издвојили дефиницијом, Пеанове „аксиоме" добијају статус теореме. Нека је $\sigma(n) = n + 1$ „следбеник природног броја n".

Теорема 3. (Пеанове аксиоме) *Скуп природних бројева* $\mathbf{N}$ *има следећа својства*

(П1) *пресликавање* $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$*, је добро дефинисано*
(П2) $\sigma(m) = \sigma(n) \Rightarrow m = n$
(П3) $1 \in \mathbf{N}$
(П4) $(\forall n \in \mathbf{N})\sigma(n) \neq 1$
(П5) **принцип индукције:** *ако за подскуп* $S \subset \mathbf{N}$ *важи*

$$1 \in S \wedge (n \in S \Rightarrow \sigma(n) \in S)$$

онда је $S = \mathbf{N}$.

$\triangle$ Својства (П1) и (П3) следе из $\mathbf{N} \in \mathcal{N}$, а својство (П2) из јединствености решења једначине $a + x = b$. Претпоставимо да не важи (П4), тј. да је $1 = n + 1$. Тада је $n = 0$. Лако се види да интервал $(0, +\infty)$ припада класи $\mathcal{N}$. Пошто је $\mathbf{N}$ најмањи скуп из $\mathcal{N}$, важи $\mathbf{N} \subset (0, +\infty)$, па $0 \notin \mathbf{N}$. Тиме је доказано (П4). Докажимо (П5). Из дефиниције скупа S следи $S \in \mathcal{N}$, па је $\mathbf{N} \subset S$, пошто је $\mathbf{N}$ најмањи скуп из $\mathcal{N}$. Међутим, по претпоставци је $S \subset \mathbf{N}$, па је $S = \mathbf{N}$. $\triangledown$

Из (П5) се изводи *метод доказивања индукцијом*. Претпоставимо да желимо да докажемо неко тврђење о природним бројевима. Претпоставимо да смо доказали да оно важи за број 1 и да из претпоставке да важи за неки природан број n следи да важи и за $n + 1$. Означимо са S скуп природних бројева за које важи тврђење. Онда је, према (П5), $S = \mathbf{N}$, тј. тврђење важи за свеки природан број. Илустроваћемо то доказима следећих тврђења.

Лема 3. (а) $\sigma(\mathbf{N}) = \mathbf{N} \setminus \{1\}$
(б) $m, n \in \mathbf{N} \Rightarrow m + n \in \mathbf{N} \wedge mn \in \mathbf{N}$
(в) $m, n \in \mathbf{N} \wedge n < m \Rightarrow m - n \in \mathbf{N}$.

$\triangle$ (а) Непосредно се проверава да $S = \{1\} \cup \sigma(\mathbf{N})$ задовољава (П5), одакле по принципу индукције следи $S = \mathbf{N}$. Одатле и из (П4) следи (а). Доказ тврђења (б) следи индукцијом по n (за фиксирано m). Да бисмо доказали (в), фиксирајмо m и применимо индукцију по n. Ако је $n = 1$, тада је $m > 1$, па из (а) следи $m \in \sigma(\mathbf{N})$, тј. $m = k + 1$ за неко $k \in \mathbf{N}$. Тада је $m - 1 = k \in \mathbf{N}$, чиме је доказано тврђење (в) за $n = 1$. Претпоставимо да (в) важи за неко $n \in \mathbf{N}$. Нека је $m > n + 1$. Тада је и $m > n$, па по индуктивној претпоставци важи $m - n \in \mathbf{N}$. Пошто је $m - n > 1$, из (а) следи да је $m - n = k + 1$ за неко $k \in \mathbf{N}$. Одалте следи $m - (n + 1) = m - n - 1 = k \in \mathbf{N}$. Тиме је доказано (в). $\triangledown$

Лема 4. *Сваки непразан подскуп* $A \subset \mathbf{N}$ *има минимум. Специјално,* $\min \mathbf{N} = 1$.

$\triangle$ Докажимо прво да је $\min \mathbf{N} = 1$, тј. да је $1 \leq n$ за све $n \in \mathbf{N}$. Нека је $S \subset \mathbf{N}$ скуп природних бројева за које важи $1 \leq n$. Тада је $1 \in S$. Ако је $n \in S$ важи $1 \leq n$. Сабирањем ове неједнакости и неједнакости $0 \leq 1$ доказане у Примеру 13 добијамо $1 \leq n + 1$, тј. $n + 1 \in S$. На основу принципа индукције закључујемо $S = \mathbf{N}$, тј. $1 \leq n$ за сваки природан број n.

Претпоставимо сада да A нема минимум. Нека је $T = \{n \in \mathbf{N} \mid (\forall a \in A)\, n < a\}$. Пошто је $1 = \min \mathbf{N}$, а претпоставили смо да A нема минимум, следи да је $(\forall a \in A)\, 1 < a$, тј. $1 \in T$. Нека је $n \in T$. Докажимо да одатле следи $n+1 \in T$. Нека је $a \in A$. Из претпоставке да A нема минимум следи да постоји $a_1 \in A$ такво да је $a_1 < a$. Пошто је $n \in T$, важи

$$n < a_1. \tag{18}$$

Из $a - a_1 \in \mathbf{N}$ (Лема 3 (в)) и $1 = \min \mathbf{N}$ следи $1 \leq a - a_1$, тј. $a_1 + 1 \leq a$. Одатле и из (18) следи $n + 1 < a_1 + 1 \leq a$. На основу принципа индукције је $T = \mathbf{N}$. Пошто је $T \cap A = \emptyset$, одатле следи да је $A = \emptyset$, што је у контрадикцији са претпоставком да је A непразан. ▽

Својство (П5) је у основи важног *принципа дефинисања индукцијом*. Претпоставимо да смо неки појам, везан за природне бројеве, дефинисали за број 1 и описали правило по коме се из дефиниције за природан број n изводи дефиниција за природан број $n+1$. Ако је S скуп за који смо на овај начин описали дати објекат, онда из (П5) следи да је он дефинисан за сваки природан број. Илуструјмо то примерима.

Пример 14. **Коначне суме и коначни производи.** Нека је $n \in \mathbf{N}$. Дефинишимо симболе $\sum_{k=1}^{n}$ и $\prod_{k=1}^{n}$ са

$$\sum_{k=1}^{1} x_k = x_1, \quad \sum_{k=1}^{n+1} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1}$$

и

$$\prod_{k=1}^{1} x_k = x_1, \quad \prod_{k=1}^{n+1} x_k = \prod_{k=1}^{n} x_k \cdot x_{n+1}$$

за реалне бројеве $x_1, \cdots, x_n$. Специјално, за $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$ пишемо

$$\sum_{k=1}^{n} x =: nx, \quad \prod_{k=1}^{n} x =: x^n.$$

Ако је $x \neq 0$, $(x^{-1})^n$ означавамо са x^{-n}. За $x_k = k$ добијамо број $\prod_{k=1}^{n} x =: n!$, који се назива *факторијелом* броја n. Дефинишемо и факторијел нуле са

$$0! = 1.$$

За природне бројеве k и n израз

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!}, & k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

се назива *биномним коефицијентом* ♯

Задатак 17. Доказати да важи $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ и одатле, применом метода индукције, да је $\binom{n}{k}$ природан број за све $k, n \in \mathbf{N}$, $k < n$. ✓

Задатак 18. Доказати да је $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ за све $k, n \in \mathbf{N}$, $k < n$. ✓

Лема 5. *Операције уведене у Примеру 14 имају следећа својства:*

1. $\big(\sum_{k=1}^{n} x_k\big)y = \sum_{k=1}^{n}(x_k y)$ *(уопштени дистрибутивни закон)*
2. $nx = n \cdot x$, *где је на левој страни израз уведен у Примеру 14, а на десној производ реалних бројева* n *и* x
3. $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$, $(x^n)^m = x^{nm}$, $(xy)^n = x^n y^n$
4. **(Биномна формула)** $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$
5. **(Геометријска прогресија)** $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

△ Докажимо прво тврђење. За $n = 1$ оно гласи $x_1 y = x_1 y$ и очигледно важи. Претпоставимо да оно важи за неко $n \in \mathbf{N}$ и докажимо да важи и за $n+1$. Из дефиниције операције $\sum$ и дистрибутивног закона (Аксиома (A8)) следи

$$\Big(\sum_{k=1}^{n+1} x_k\Big)y = \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1}\Big)y = \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big)y + x_{n+1}y.$$

Применимо сада индуктивну претпоставку $\big(\sum_{k=1}^{n} x_k\big)y = \sum_{k=1}^{n}(x_k y)$ и дефиницију операције $\sum$. Добијамо $\big(\sum_{k=1}^{n} x_k\big)y + x_{n+1}y = \sum_{k=1}^{n+1}(x_k y)$. Тиме је доказано да прво тврђење важи и за $n+1$. Доказе осталих тврђења остављамо читаоцу. ▽

Задатак 19. Доказати да је

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \qquad \text{и} \qquad \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

Упутство: за другу формулу искористити Задатак 18. ✓

Задатак 20. Доказати да је

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Упутство: искористити једнакост $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$. ✓

Задатак 21. Израчунати $\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(k+j)$ и $\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{k}(k+j)$. ✓

Задатак 22. Доказати да је

$$\sum_{k=1}^{n}(x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_1. \tag{19}$$

✓

Задатак 23. Израчунати

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Упутство: показати да је

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

и применити (19). ✓

Задатак 24. Израчунати $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n!$. ✓

Задатак 25. Доказати да је

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{j}{k} = \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

Упутство: искористити Задатак 17 и формулу (19). ✓

Задатак 26. Израчунати

$$\sum_{k=1}^{n^2-1} [\sqrt{k}],$$

где је $[\cdot]$ цео део реалног броја. Упутство: написати тражену суму као

$$\sum_{m=1}^{n-1} \Bigg(\sum_{k=m^2}^{(m+1)^2-1} [\sqrt{k}] \Bigg) = \sum_{m=1}^{n-1} m(2m+1).$$

Резултат: $n(n+1)(4n+1)/6$. ✓

Задатак 27. Доказати уопштење биномне формуле

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^k = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_n=k} \binom{k}{k_1, k_2, \ldots, k_n} \prod_{1 \le j \le n} x_j^{k_j}, \tag{20}$$

где је

$$\binom{k}{k_1, k_2, \ldots, k_n} := \frac{k!}{k_1! k_2! \cdots k_n!} \tag{21}$$

тзв. мултиномни коефицијент. ✓

Напомена 2. Мултиномни коефицијент (21) има комбинаторну интерпретацију као број начина да се $k = k_1 + \ldots + k_n$ куглица распореди у n кутија, тако да се у прву кутију стави k_1 куглица, у другу k_2 итд. Специјално, ако је $n = 2$, онда је (21) биномни коефицијент, који је једнак броју подскупова скупа $\{1, 2, \ldots, k\}$ који имају k_1 елемената. ◇

Задатак 28. Доказати да постоји 630 различитих речи које могу да се напишу од слова речи „тротоар". ✓

Пример 15. **(Број e)** Из Леме 5, 3. следи

$$\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k \Big(\frac{1}{n}\Big)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \Big(\frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \Big(1 - \frac{j}{n}\Big)\Big) \le \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}. \tag{22}$$

Индукцијом се лако доказује да важи $k! \ge 2^{k-1}$, па из претходне једнакости добијамо

$$\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n \le \sum_{k=0}^{n} \Big(\frac{1}{2}\Big)^{k-1} < 3.$$

Последња неједнакост следи из Леме 5, 4. Одатле следи да је скуп $\{(1 + \frac{1}{n})^n \mid n \in \mathbf{N}\}$ ограничен одозго, па има супремум. Број

$$e := \sup \Big\{ \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n \;\Big|\; n \in \mathbf{N} \Big\} \tag{23}$$

назива се Ојлеровим[13] бројем. Овај број је ирационалан; његових првих неколико децимала је

$$e = 2,718281828459045\ldots$$

Ирационалност броја e биће доказана у Примеру 24 у Глави 2. ♯

Лема 6. (Бернулијева[14] неједнакост) *Нека је* $\alpha \in (-1, +\infty)$ *и* $n \in \mathbf{N}$. *Тада важи*

$$(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha.$$

Једнакост $(1+\alpha)^n = 1 + n\alpha$ *важи ако и само ако је* $n = 1$ *или* $\alpha = 0$.

△ За $n = 1$ тврђење је очигледно је тачно. За $n = 2$ оно гласи $(1+\alpha)^2 \geq 1+2\alpha$, што је тачно јер је $(1+\alpha)^2 = 1 + 2\alpha + \alpha^2$ и $\alpha^2 \geq 0$. Претпоставимо да оно важи за неко $n \in \mathbf{N}$, тј. да је $(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha$. Множењем обе стране ове неједнакости позитивном бројем $1+\alpha$ добијамо

$$(1+\alpha)^{n+1} \geq 1 + (n+1)\alpha + n\alpha^2 \geq 1 + (n+1)\alpha,$$

чиме је, на основу принципа индукције, доказан први део тврђења. Други део следи из чињенице да се у случају да је $n > 1$ и $\alpha \neq 0$ у претходном доказу знак $\geq$ може свуда заменити знаком $>$. ▽

Задатак 29. Доказати да за сваки природан број $n > 8$ важи неједнакост $n^2 < 2^{n+1}$. ✓

Задатак 30. Доказати да за сваки природан број n важи неједнакост

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

✓

Задатак 31. Применом метода индукције доказати једнакости

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \text{и} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Наћи формулу за

$$s_r(n) := \sum_{k=1}^{n} k^r, \qquad r \in \mathbf{N}.$$

Упутство: применом биномне формуле на $(k+1)^{r+1} - k^{r+1}$ и сумирањем по k изразити тражену суму s_r преко познатих $s_1, s_2, \ldots, s_{r-1}$. ✓

Задатак 32. Доказати да се сви бројеви облика $2^{2^{n+1}}+1$, $n \in \mathbf{N}$ завршавају цифром 7. ✓

Задатак 33. *Линеарне диференцне једначине.* Нека је низ x_n задат са

$$x_0 = a, \quad x_1 = b, \quad x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n.$$

и нека су t_1 и t_2 решења једначине

$$t^2 = pt + q.$$

Индукцијом по n доказати:

---

[13] Ојлер (Leonhard Euler, 1707–1783), швајцарски математичар

[14] Бернули (Jakob Bernoulli, 1654–1705), швајцарски математичар

(а) Ако је $t_1 \neq t_2$, онда је $x_n = At_1^n + Bt_2^n$, где су A и B решења система једначина $A + B = a$, $At_1 + Bt_2 = b$.

(б) Ако је $t_1 = t_2$, онда је $x_n = At_1^n + nBt_1^n$, где су A и B решења система једначина $A = a$, $At_1 + Bt_1 = b$. ✓

Задатак 34. Решити диференцну једначину

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n + 3^n, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 2. \tag{24}$$

Упутство: Доказати да је опште решење једначине $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n + 3^n$ облика $a_n = x_n + y_n$, где је x_n опште решење *хомогене* (тј. без члана 3^n) диференцне једначине

$$x_{n+2} = 4x_{n+1} - 3x_n \tag{25}$$

а y_n било које решење (тзв. *партикуларно решење*) y_n једначине

$$y_{n+2} = 4y_{n+1} - 3y_n + 3^n \tag{26}$$

Методом Задатка 33 наћи опште решење x_n једначине (25) и погодити неко решење y_n једначине (26) – природни покушаји су $y_n = C3^n$, или $y = Cn3^n$ итд, за неку константу C (приметимо да такво, методом погађања нађено, решење y_n не мора да буде тражено решење a_n са захтеваним почетним условима $a_1 = 1$, $a_2 = 2$). Наћи затим решење са траженим почетним условима. (Приметимо да тако добијено решење није ниједно од решења y_n добијених погађањем – погађање једног партикуларног решења је само један корак у тражењу општег решења). ✓

Задатак 35. Доказати да је $(3 + \sqrt{5})^{1389} + (3 - \sqrt{5})^{1389}$ цео број и наћи његову последњу цифру. Упутство: приметити да су $3 \pm \sqrt{5}$ корени једначине $t^2 - 6t + 4 = 0$, па из Задатка 33 следи да је тражени број члан низа задатог диференцном једначином

$$x_{n+2} = 6a_n - 4x_n, \quad x_0 = 2, \quad x_1 = 6.$$

Доказати да су чланови овог низа цели бројеви, чије се последње цифре периодично понављају. ✓

Задатак 36. У конвексном n–тоуглу повучено је неколико дијагонала, тако да сваке две од њих или полазе из истог темена, или се не секу. Тиме је полигон подељен на делове. Који је највећи могући број тих делова? ✓

Задатак 37. Наћи грешку у следећем „доказу" тврђења „*да су сви природни бројеви једнаки*".

Нека је S_n следеће тврђење: *Ако су k и m природни бројеви и ако је* $\max\{k, m\} = n$, *онда је* $k = m$. Тврђење S_1 је тачно, јер из $\max\{k, m\} = 1$ следи $k = 1$ и $m = 1$ (пошто су k и m природни бројеви, а $1 = \min \mathbf{N}$). Претпоставимо да је тврђење S_n тачно и докажимо да је тада тачно и S_{n+1}. Нека је $\max\{k, m\} = n + 1$. Нека је $p = k - 1$, $q = m - 1$. Тада је $\max\{p, q\} = n$. Пошто је, по индуктивној претпоставци, S_n тачно, одавде следи $p = q$. Али, тада је и $m = n$. Тиме је, на основу принципа индукције, доказано да важи S_n.

Нека су k, m произвољна два природна броја и нека је $n = \max\{k, m\}$. Пошто је доказано да за свако n важи S_n, следи $k = m$. ✓

3.2. Цели бројеви. Из Леме 3 следи да је скуп $\mathbf{N}$ затворен у односу на операције $+$ и $\cdot$. Међутим, овај скуп није затворен за операције инвертовања у односу на ове две операције. Заиста, претпоставимо да важи $\{-n, n\} \subset \mathbf{N}$. Из Аксиоме (А14) и Задатка 1 следи да тада важи бар једна од неједнакости $n \leq 0$, $-n \leq 0$, што, због $0 < 1$, противречи Леми 4. Слично, из $\{m, m^{-1}\} \subset \mathbf{N}$ за $m \neq 1$ следило би $m < 1$ или $m^{-1} < 1$, што је опет контрадикција са Лемом 4.

Скуп целих бројева $\mathbf{Z}$ је најмање проширење скупа $\mathbf{N}$ које је затворено за ивертовање у односу на $+$. Прецизирајмо ову формулацију. *Подгрупом* групе $(G, +)$ називамо сваки подскуп $H \subset G$ који је и сам група у односу на груповну операцију $+$. Лако се види да је подскуп $H \subset G$ подгрупа ако и само ако за све $g_1, g_2 \in H$ важи $g_2 - g_1 \in H$.

Дефиниција 9. Скуп целих бројева $\mathbf{Z}$ је најмања подгрупа групе $(\mathbf{R}, +)$ која садржи број 1.

Наравно, термин *најмања* односи се на релацију поретка $\subset$. Еквивалентно, $\mathbf{Z}$ је пресек свих подгрупа групе $(\mathbf{R}, +)$ које садрже број 1.

Следећа теорема показује да је ова апстрактна алгебарска дефиниције еквивалентна уобичајеној дефиницији, познатој читаоцу из курсева елементарне математике.

Теорема 4. $\mathbf{Z} = \{0\} \cup \mathbf{N} \cup \{-n \mid n \in \mathbf{N}\}$.

$\triangle$ Доказ следи из чињенице да је скуп на десној страни подгрупа која садржи број 1 и минималности подгрупе $\mathbf{Z}$. $\triangledown$

Скуп $\mathbf{Z}$ је затворен у односу на сабирање, одузимање и множење, али не и у односу на дељење: при дељењу броја $a \in \mathbf{Z}$ бројем $b \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ јавља се *остатак*. Прецизније, важи следећа теорема.

Теорема 5. *За свако* $a \in \mathbf{Z}$ *и* $b \in \mathbf{N}$ *постоје једнозначно одређени бројеви* $q \in \mathbf{Z}$ *и* $r \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ *такви да је* $a = bq + r$ *и* $0 \leq r < b$.

$\triangle$ Треба да докажемо да, полазећи од a и одузимајући b, па затим, $2b, 3b, \ldots$, после коначно много корака добијамо број мањи од b.

Из Леме 4 лако следи да у скупу $\{a - kb \mid k \in \mathbf{Z}\}$ постоји најмањи број r облика $a - qb$ који је природан или једнак нули. Он задовољава тражени услов $0 \leq r < b$,јер би у случају $r \geq b$ број $r_0 = a - (q+1)b$ био природан или једнак нули, а мањи од r. Тиме је доказана егзистенција бројева q и r. Да бисмо доказали јединственост, претпоставимо да постоји још један пар бројева q_1, r_1 такав да је $a = bq_1 + r_1$ и $0 \leq r_1 < b$. Одатле и из $a = bq + r$ следи $b(q - q_1) = r_1 - r$, па је $kb = |r_1 - r| < \max\{r_1, r\}$, где је $k = |q - q_1| \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Пошто су r и r_1 природни бројеви мањи од b, ова неједнакост је могућа само за $k = 0$, тј. $q_1 = q$. Али тада је и $r_1 = r$. $\triangledown$

Дефиниција 10. Нека је $a \in \mathbf{Z}$ и $b \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$. Ако постоји $q \in \mathbf{Z}$ такав да је $a = bq$ кажемо да је *број* a *дељив бројем* b, или да b *дели* a и пишемо $b|a$.

Број $p \in \mathbf{N}$ зовемо *простим бројем* ако је $p > 1$ и ако p није дељив ниједним природним бројем сем 1 и p.

Број $d \in \mathbf{Z}$ је *заједнички делилац* бројева $a, b \in \mathbf{Z}$ ако $d|a$ и $d|b$. *Највећи заједнички делилац* бројева a и b означавамо са (a, b). Ако је $(a, b) = 1$ кажемо да су бројеви a и b *узајамно прости*.

Задатак 38. Доказати да је $|$ релација поретка на $\mathbf{N}$. Да ли је ово релација тоталног поретка на $\mathbf{N}$? Да ли је ово релација поретка на $\mathbf{Z}$? ✓

Задатак 39. Доказати да постоји бесконачно много простих бројева.

Упутство: претпоставимо да су $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *сви* прости бројеви; тада број $p = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$ није дељив ниједним простим бројем. ✓

Задатак 40. Доказати да за свако $n \in \mathbf{N}$ постоји n узастопних бројева који нису прости. Другим речима, постоји произвољно велики интервал у коме нема простих бројева.

Упутство: посматрати бројеве

$$(n+1)!+2,\ (n+1)!+3,\ \ldots,\ (n+1)!+(n+1)$$

и показати да је $(n+1)!+k$ дељиво са k ако је $2 \leq k \leq n+1$. ✓

Задатак 41. Нека је n природан број, такав да је $2^n - 1$ прост. Доказати да је n прост.

Упутство: $(a^{km}-1) = (a^k-1)(a^{k(m-1)} + a^{k(m-2)} + \cdots + a^k + 1)$. ✓

Задатак 42. Доказати да је 2 једини прост број облика $n^3 + 1$. ✓

Задатак 43. Доказати да за све $a, b, k \in \mathbf{Z}$ важи $(ka, kb) = |k|(a, b)$. ✓

Теорема 6. *Ако је d највећи заједнички делилац целих бројева a и b, онда постоје цели бројеви k и m такви да је $ka + mb = d$. Специјално, ако су a и b узајамно прости, онда постоје цели бројеви k и m такви да је $ka + mb = 1$.*

△ Нека је c најмањи природан број у скупу $S = \{ua + vb \mid u, v \in \mathbf{Z}\}$. Докажимо прво да је број c заједнички делилац бројева a и b. Из $c \in S$ следи

$$c = ka + mb \tag{27}$$

за неке $k, m \in \mathbf{Z}$. Из Теореме 5 следи да постоје $q, r \in \mathbf{Z}$, $0 \leq r < c$ такви да је $a = cq + r$, што заједно са (27) даје $r = a - cq = (1 - kq)a - mqb$. Ако би било $r > 0$, онда би r био природан број облика $ua + vb$ који је мањи од c, што је супротно претпоставци да је c најмањи такав број. Одатле следи $r = 0$, тј. $c|a$. На исти начин се доказује $c|b$.

Докажимо сада да је c највећи заједнички делилац бројева a и b, тј. да је $c = d$. Пошто $d|a$ и $d|b$, постоје $u, v \in \mathbf{Z}$ такви да је $a = ud$, $b = vd$. Одатле и из (27) следи $c = (ku + mv)d$, па је $d \leq c$. Пошто је d највећи заједнички делилац, следи да је $d = c$, што заједно са (27) даје доказ Теореме. ▽

Приметимо да смо, доказујући Теорему 6 доказали и следеће тврђење.

Последица 1. *Највећи заједнички делилац целих бројева a и b је најмањи природан број облика $ka + mb$, $k, m \in \mathbf{Z}$.*

Задатак 44. Доказати да су цели бројеви a и b узајамно прости ако и само ако постоје цели бројеви k и m такви да је $ka + mb = 1$. ✓

Задатак 45. Доказати да су бројеви $\frac{a}{(a,b)}$ и $\frac{b}{(a,b)}$ узајамно прости. ✓

Задатак 46. Нека је n природан број. Доказати да су бројеви $3n + 2$ и $5n + 3$ узајамно прости. ✓

Задатак 47. Нека су m и n узајамно прости цели бројеви. Доказати да је $(m+n, m-n) = 1$ или $(m+n, m-n) = 2$.

✓

Теорема 7. *Ако је* $a = bq + r$, *онда је* $(a, b) = (b, r)$.

△ Нека је d_0 заједнички делилац бројева a и b. Тада је $a = ud_0$, $b = vd_0$ за неке $u, v \in \mathbf{Z}$, па је $r = d_0(u - vq)$. Тиме је доказано $d_0 | r$; дакле сваки заједнички делилац бројева a и b је и заједнички делилац бројева b и r. Још лакше је доказати да важи и обрнуто: сваки заједнички делилац бројева b и r је и заједнички делилац бројева a и b. Одатле следи тврђење Теореме. ▽

Теорема 7 нам даје поступак за налажење највећег заједничког делиоца целих бројева a и b. Овај поступак назива се *Еуклидовим*[15] *алгоритмом* и састоји се у следећем. Претпоставимо да су a и b *природни* бројеви (зашто тиме не умањујемо општост?). Применом Теореме 5 извршимо низ узастопних дељења:

$$\begin{array}{ll} a = bq_1 + r_1, & 0 \le r_1 < b \\ b = r_1 q_2 + r_2, & 0 \le r_2 < r_1 \\ r_1 = r_2 q_3 + r_3, & 0 \le r_3 < r_2 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n, & 0 \le r_n < r_{n-1} \\ r_{n-1} = r_n q_{n+1}. & \end{array}$$

Пошто је $r_k < r_{k-1}$ за свако k, овај поступак ће се завршити после коначног броја корака. Наводимо две последице овог поступка.

Последица 2. $(a, b) = r_n$.

△ Доказ следи из Теореме 7 примењене n пута. ✓

Задатак 48. Применом Последице 2 наћи највећи заједнички делилац бројева 1389 и 2014. ✓

Последица 3. *Сваки разломак* $\kappa = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbf{N}$ *може да се напише у облику*

$$\kappa = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cdot \atop \cdot \atop \cdot + \frac{1}{q_n}}}, \tag{28}$$

где су $q_1, q_2, \ldots, q_n$ *природни бројеви.*

△ Применом Еуклидовог алгоритма добијамо

$$\kappa = q_1 + \frac{r_1}{b} = q + \frac{1}{\frac{b}{r_1}} = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{r_2}{r_1}} = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{\frac{r_2}{r_1}}} = \cdots .$$

После n корака добијамо (28). ▽

[15] Еуклид (око 365–око 300. г. пре Христа) – старогрчки математичар

Дефиниција 11. Разломци вида (28) називају се *коначним непрекидним* (или *верижним*) *разломцима*. Општије, верижни разломак је израз облика

$$\kappa = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ddots}}, \tag{29}$$

и може да буде коначан или бесконачан. Верижни разломак (29) означавамо и са $\kappa = [q_1, q_2, q_3, \ldots]$.

Задатак 49. Доказати да је $\frac{7}{11} = [0, 1, 1, 1, 3]$. Написати $\frac{11}{7}$ у облику верижног разломка. ✓

Задатак 50. Ако је $x = [q_1, q_2, \ldots, q_n]$, где је $q_1 \neq 0$, доказати да је

$$\frac{1}{x} = [0, q_1, q_2, \ldots, q_n]$$

(упоредити са Задатком 49). ✓

Сваки реални број може да се представи у облику (коначног или бесконачног) верижног разломка. Заиста, нека је $x \in \mathbf{R}$ произвољан број и нека је $q_1 = [x]$ његов цео део. Тада је

$$x = q_1 + b_1, \quad \text{за неко} \quad 0 \leq b_1 < 1.$$

Ако је $b_1 = 0$, поступак је завршен и добили смо представљање броја x у облику верижног разлога. У противном, поновимо поступак за број b_1^{-1}: нека је $q_2 = [b_1^{-1}]$, тј.

$$\frac{1}{b_1} = q_2 + b_2, \quad \text{за неко} \quad 0 \leq b_2 < 1.$$

Тада је

$$x = q_1 + \frac{1}{q_2 + b_2}.$$

Ако је $b_2 = 0$ поступак је завршен; у противном понављамо га за b_2^{-1}. Да ли ће се овај поступак завршити после коначно много корака или не, зависи од тога да ли је x рационалан или ирационалан број. Тачније, важи следеће тврђење.

Последица 4. *Број је рационалан ако и само ако се представља као коначан верижни разломак.*

△ Један смер овог тврђења је већ доказан (Последица 3). Други смер се лако доказује индукцијом по броју чланова у верижном разломку (број n у Последици 3). ▽

Напомена 3. Строго говорећи, ми још увек нисмо дефинисали бесконачни верижни разломак. Рекли смо да ако ни за једно k у коначном броју од k корака у претходно описаном поступку не добијемо $b_k = 0$, имамо посла са „бесконачним верижним разломком". То се односи само на ситуацију кад *полазимо од броја* x и претходно описанм поступком му придружујемо низ $\{q_n\}$. Још увек нисмо дефинисали општи појам бесконачног верижног разломка, тј. услова под којим можемо да говоримо о обрнутом поступку: како за дати низ $\{q_n\}$ наћи x за које је $x = [q_1, q_2, \ldots]$. Да бисмо тај појам строго дефинисали и придружили му реалан број x (на јединствен начин), потребан нам је појам конвергенције, са којим ћемо се сусрести тек касније.

Међутим, некад за дати низ бројева $\{q_n\}$, захваљујући некој његовој специфичности или правилности, можемо да нађемо (или погодимо) реални број x, такав да је $q_1 = [x]$ и да, примењујући претходно описани поступак у k–том кораку добијамо број q_k, за свако k. У том случају пишемо $x = [q_1, q_2, \ldots]$, имајући у виду поступак којим смо од броја x дошли до низа $\{q_n\}$, а не строгу дефиницију обрнутог поступка, долажења од низа $\{q_n\}$ до броја x, и формалну дефиницију „конвергенције верижног разломка" (за коју нам је потребан материјал који излажемо у Глави 4).

Ово ће посатати јасније кроз следеће примере. ♯

Пример 16. Нека је $x = \sqrt{2} + 1$. Множењем и дељењем овог броја са $(\sqrt{2} - 1)$ добијамо $x = 1/(\sqrt{2} - 1)$, тј. $\sqrt{2} = 1 + 1/x$, па је

$$x = 2 + \frac{1}{x} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{x}} = \cdots .$$

Очигледно је да овај поступак можемо бесконачно да понављамо, па тако добијамо представљање ирационалног броја x (а тиме и $\sqrt{2}$) у облику бесконачног верижног разломка: $\sqrt{2} = [1, 2, 2, \ldots]$. ♯

Задатак 51. **(Златни пресек)** (а) Израчунати

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}, \tag{30}$$

(тј. наћи број $\phi = [1, 1, \ldots]$, који има бесконачни верижни разломак састављен само од јединица). Упутство: приметимо да (30) можемо да напишемо као

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi},$$

а последњу једначину можемо да решимо по ϕ.

(б) Доказати да је

$$\phi = \sqrt{1 + \phi} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \phi}} = \cdots . \tag{31}$$

Ова чињеница се некад записује као[16]

$$\phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}. \tag{32}$$

Број ϕ о коме је реч у овом задатку назива се *златним пресеком*. Користи се и термин *златна пропорција*. У VI књизи Елемената Еуклид објашњава да тачка дели дуж у односу златне пропорције ако је однос дужина целе дужи и већег сегмента поделе једнак односу сегмената поделе; односно, речима данашње алгебарске нотације, ако је

$$\frac{a + b}{a} = \frac{a}{b}, \tag{33}$$

[16]Као и у случају бесконачних верижних разломака о којима је било речи у Напомени 3, и изразу (32), који има бесконачно много сабирака, можемо да дамо смисао самосталног појма (а не само друге ознаке за (31)), али за то морамо да сачекамо док не стигнемо до Главе 4 (видети Задатак 22 на стр. 186).

где је a дужина већег, а b дужина мањег сегмента поделе дужи укупне дужине $a+b$. Читаоцу препуштамо да докаже да је количник (33) увек једнак ϕ, без обзира на то колике су дужине a и b.

Ознака ϕ уведена је по Фидији[17], јер се сматра да је ову пропорцију често користио у својим скулптурама. ✓

Задатак 52. *Фибоначијев*[18] *низ* је низ F_n задат са

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Доказати да је

$$F_n = \frac{\phi^{n+1} - (-\phi)^{-(n+1)}}{\sqrt{5}} \qquad \text{за} \qquad n > 0,$$

где је ϕ златни пресек, уведен у Задатку 51. Број $-\phi^{-1}$ се често означава са ψ, тако да претходна формула може да се напише у виду

$$F_n = \frac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}} \qquad \text{или} \qquad F_n = \frac{\phi^n - \psi^n}{\phi - \psi}.$$

Читалац који је решио Задатак 51 вероватно је већ приметио да су ϕ и ψ корени једначине $x^2 - x - 1 = 0$. ✓

Теорема 8. (Основни став аритметике) *Сваки природан број може да се представи као производ простих. То представљање је јединствено до на поредак множитеља.*

△ Ако n није прост, онда је $n = k \cdot m$. Ако су k и m прости доказ је завршен, ако нису, поновимо резоновање за k и n. Овај поступак се завршава после коначног броја корака јер је $k, m < n$.

Да бисмо доказали јединственост овог представљања, претпоставимо супротно: да постоји природан број који може да се представи као производ простих на два различита начина. Нека је n *најмањи* такав природан број и нека је

$$n = p_1 p_2 \cdots p_r = q_1 q_2 \cdots q_s, \tag{34}$$

где су $p_1, \ldots p_r$, $q_1, \ldots, q_s$ прости бројеви, уређени тако да је $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_r$, $q_1 \leq q_2 \leq \ldots \leq q_s$. Тада је $p_1 \neq q_1$, јер би у супротном из (34) скраћивањем са $p_1 = q_1$ добили број $n_0 < n$ који има два различита представљања, што је у супротности са избором n као *најмањег* природног броја са ти својством. Претпоставимо, не умањујући општост, да је $p_1 < q_1$. Нека је $n_1 = n - p_1 q_2 q_3 \cdots q_s$; јасно је да је $n_1 < n$. Из (34) следи

$$n_1 = (q_1 - p_1) q_2 q_3 \cdots q_s, \tag{35}$$

па је $n_1 \in \mathbf{N}$. Али из (34) следи и

$$n_1 = p_1 (p_2 p_3 \cdots p_r - q_2 q_3 \cdots q_s). \tag{36}$$

Пошто је n најмањи природан број који нема јединствено представљање и $\mathbf{N} \ni n_1 < n$, из (35) и (36) следи да се p_1 појављује као множилац или у $q_1 - p_1$ или у $q_2 \cdots q_s$. Прво није могуће јер би из $q_1 - p_1 = p_1 d$ следило $q_1 = p_1(d+1)$, што је контрадикција, пошто је q_1 прост. Остаје могућност да је p_1 множилац у

[17] Фидија (Φιδιας, 490–430. пре Христа), старогрчки скулптор

[18] Леонардо из Пизе (Leonardo Pisano Bigollo, 1170–1250), познат и као Леонардо Боначи (Bonacci) и Фибоначи (Fibonacci), италијански математичар

$q_2 \cdots q_s$. Због $q_2 \cdots q_s n$ следи да је представљање $q_2 \cdots q_s$ као производа простих јединствено, па би p_1 морао да буде неки од бројева $q_2, \ldots, q_s$. Међутим, ово је немогуће због $p_1 < q_1 \leq q_2 \leq \cdots \leq q_s$. ▽

Задатак 53. (а) Доказати да ако важи $d|ab$ и $(d, b) = 1$, онда $d|a$.
(б) Нека је p прост број такав да $p|ab$. Доказати да $p|a$ или $p|b$. ✓

Задатак 54. Нека су a, b и n природни бројеви, такви да $a^n \mid b^n$. Доказати да $a \mid b$. ✓

Задатак 55. Нека су a и n природни бројеви и p прост број, такви да $p \mid a^n$. Доказати да $p^n \mid a^n$. ✓

Задатак 56. Збир свих делитеља природног броја n (укључујући и 1 и n), ознчава се са $\sigma(n)$; другим речима

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d$$

(нпр. $\sigma(6) = 12$, $\sigma(7) = 8$, $\sigma(8) = 15$, $\sigma(9) = 13$). Доказати да, ако су m и n узајамно прости, важи $\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$. ✓

Број који је једнак збиру својих правих (тј. различитих од њега самог) делитеља се назива *савршеним*. У терминологији из Задатка 56, број n је савршен ако је $\sigma(n) = 2n$ (пошто је у $\sigma(n)$ укључен и сам број n). На пример, бројеви

$$6 = 2 \cdot 3, \qquad 28 = 2^2 \cdot 7, \qquad 496 = 2^4 \cdot 31 \qquad 8128 = 2^6 \cdot 127 \tag{37}$$

су савршени.

Задатак 57. Следеће тврђење се налази у IX књизи Еуклидових Елемената. Нека је $2^n - 1$ прост број. Тада је $2^{n-1}(2^n - 1)$ савршен. Доказати ово тврђење. Упутство: искористити Задатак 56. ✓

Можемо да приметимо да су сви бројеви (37) облика $2^{n-1}(2^n - 1)$ (где је 2^{n-1} прост) о коме је реч у Задатку 57. То није случајно – Ојлер је доказао да су сви *парни* савршени бројеви тог облика. До данас није познато да ли постоје непарни савршени бројеви, иако је познато да их нема међу бројевима са мање од 300 цифара, тј. међу првих 10^{300} природних бројева. Приметимо да је и овај резултат нетривијалан, тј. да се не ради о провери, чак ни уз помоћ компјутера. Како је духовито приметио амерички математичар Џон Кук на свом интернет блогу, година има мање од 10^8 секунди; да је неко почео да проверава у доба Еуклида (пре око 2500 година) и проверавао 10^9 (милијарду) бројева у секунди, до сада би стигао тек до бројева са 200 цифара.

Задатак 58. (а) Нека су k и n природни бројеви, такви да је $k^n - 1$ прост број. Доказати да је $k = 2$ или $n = 1$. Упутство: доказати $(k - 1)|(k^n - 1)$.
(б) *Мерсенови*[19] *бројеви* су бројеви облика $M_n = 2^n - 1$. Доказати да је n прост ако је M_n прост[20]. Приметимо да смо просте Мерсенерове бројеве већ сусрели у Задатку 57. ✓

[19]Мерсен (Marin Mersenne, 1588–1648), француски монах, теолог, математичар и теоретичар музике

[20]Иако су неки математичари у Мерсеново веровали да важи и еквиваленција, обрнуто није тачно: $M_{11} = 2047 = 23 \cdot 89$. Није познато да ли постоји бесконачно много простих Мерсенових бројева.

3.3. Рационални бројеви. До целих бројева смо дошли тражећи затвореност у односу на операцију $x \mapsto -x$. На сличан начин, тражећи затвореност у односу на операцију $x \mapsto x^{-1}$ долазимо до поља рационалних бројева $\mathbf{Q}$. Ако је $(F, +, \cdot)$ поље, подскуп $E \subset F$ називамо *потпољем* ако је $(E, +, \cdot)$ поље; E је потпоље ако и само ако за све $a, b \in E$ и $c \in E \setminus \{0\}$ важи $b - a \in E$ и $a \cdot c^{-1} \in E$.

Дефиниција 12. *Скуп рационалних бројева* $\mathbf{Q}$ је најмање потпоље поља $(\mathbf{R}, +, \cdot)$. Скуп $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ се назива *скупом ирационалних бројева*.

Следећа теорема се доказује на сличан начин као Теорема 4.

Теорема 9. $\mathbf{Q} = \{mn^{-1} \mid m \in \mathbf{Z},\ n \in \mathbf{N}\}$.

△ Доказ следи из чињенице да је скуп на десној страни потпоље у $\mathbf{R}$, и из минималности потпоља $\mathbf{Q}$. ▽

Задатак 59. Доказати да не постоји рационалан број чији је квадрат прост број.

Упутство: $(\frac{m}{n})^2 = p \wedge (m, n) = 1 \Rightarrow p|m \Rightarrow p|n$. ✓

Већ смо дефинисали појам *уређеног поља*, тј. структуре $(F, +, \cdot, \leq, 0, 1)$, такве да је $(F, +, \cdot, 0, 1)$ поље, а $\leq$ релација поретка која је *сагласна са операцијама поља*, тј. која задовољава аксиоме (А15) и (А16).

Поље рационалних бројева је *најмање тотално уређено поље* (подсетимо се да је $\leq$ релација *тоталног* поретка ако задовољава аксиому (А14)). Да бисмо ово прецизирали, уводимо следећу дефиницију.

Дефиниција 13. Нека су $(F_1, +_1, \cdot_1, \leq_1, 0_1, 1_1)$ и $(F_2, +_2, \cdot_2, \leq_2, 0_2, 1_2)$ уређена поља. Пресликавање $f : F_1 \to F_2$ је *морфизам* (или *хомоморфизам*) поља ако важи

$$f(x +_1 y) = f(x) +_2 f(y), \quad f(x \cdot_1 y) = f(x) \cdot_2 f(y). \tag{38}$$

Ако су $(F_1, +_1, \cdot_1, \leq_1, 0_1, 1_1)$ и $(F_2, +_2, \cdot_2, \leq_2, 0_2, 1_2)$ два уређена поља, пресликавање $f : F_1 \to F_2$ је *хомоморфизам уређених поља* ако уз (38) важи и

$$x \leq_1 y \Rightarrow f(x) \leq_2 f(y).$$

Хоморфизам који је бијекција назива се *изоморфизмом*, хомоморфизам који је инјекција *мономорфизмом* , хомоморфизам који је сурјекција *епиморфизмом*.

Задатак 60. Нека је

$$f : F_1 \to F_2$$

хомоморфизам поља. Доказати да је $f(0_1) = 0_2$ и $f(1_1) = 1_2$. ✓

Неформално речено, хомоморфизам је пресликавање које чува структуру поља и уређења, а изоморфизам пресликавање које уз то чува и кардиналност. Аналогно се дефинишу (изо)морфизми (уређених) група, прстена и тела, као и (изо)морфизми уређених скупова, захтевом да чувају одговарајуће структуре. Хомоморфизам уређених скупова назива се још и *монотоним пресликавањем*; хомоморфизам уређеног скупа $(X, \leq)$ у $(X, \leq)$ назива се *растућим*, а хомоморфизам уређеног скупа $(X, \leq)$ у $(X, \geq)$ *опадајућим* пресликавањем.

Ако је

$$f : F_1 \to F_2 \tag{39}$$

хомоморфизам поља, онда је $f(F_1)$ потпоље поља F_2 или $\{0\}$. Заиста, из (38) следи

$$f(x-y) = f(x) - f(y), \qquad f(x \cdot y^{-1}) = f(x) \cdot f(y)^{-1},$$

па је скуп $f(F_1)$ затворен у односу на операције поља F_2. Скуп $f(F_1)$ назива се *сликом хомоморфизма* f и означава са $\mathrm{Im}(f)$.

Задатак 61**.** Нека је $\varphi : F_1 \to F_2$ морфизам поља. *Језгро хомоморфизма* φ се дефинише као скуп

$$\mathrm{Ker}(\varphi) := \{x \in F_1 \mid f(x) = 0_2\}.$$

Доказати да је $\mathrm{Ker}(\varphi)$ или $\{0\}$ или цело поље F_1. ✓

Изоморфне структуре се, очигледно, могу потпуно идентификовати – оне се разликују само у ознакама елемената, операција и релација. Ако је (39) мономорфизам, онда је

$$f : F_1 \to f(F_1)$$

изоморфизам поља F_1 и потпоља $f(F_1)$. Пошто изоморфна поља идентификујемо, можемо да кажемо да је у овом случају F_1 потпоље поља F_2.

Дефиниција 14**.** Ако је F_1 потпоље поља F_2 кажемо да је поље F_2 *проширење поља* F_1. ◊

Теорема 10**.** *Ако је* $(F, +, \cdot, \leq, 0, 1)$ *произвољно тотално уређено поље, онда постоји мономорфизам уређених поља*

$$\varphi : \mathbf{Q} \to F.$$

Другим речима, свако тотално уређено поље је проширење поља рационалних бројева.

△ Нека је $(F, +_F, \cdot_F, \leq_F, 0_F, 1_F)$ тотално уређено поље. Дефинишимо пресликавање

$$\varphi : \mathbf{Q} \to F, \qquad \varphi(mn^{-1}) := (m \cdot 1_F) \cdot (n \cdot 1_F)^{-1},$$

где је $n \in \mathbf{N}$, $n \cdot 1_F := 1_F + \ldots + 1_F$ збир n јединица у пољу F, $m \in \mathbf{Z}$ и $m \cdot 1_F$ збир m јединица ако је $m > 0$, 0 ако је $m = 0$ и $-(-m \cdot 1_F)$ ако је $m < 0$.

Лако је видети да је φ морфизам. Да бисмо доказали да је мономорфизам, претпоставимо да је $mn^{-1} \neq 0$. Из чињенице да се ради о релацији тоталног поретка, одатле следи да је $mn^{-1} > 0$ или $mn^{-1} < 0$. Претпоставимо да је $mn^{-1} > 0$, други случај се разматра аналогно. Пошто је $n \in \mathbf{N}$, то значи да је и $m \in \mathbf{N}$. Пошто је у сваком тотално уређеном пољу $0_F < 1_F$, из сагласности релације поретка са операцијама поља следи да је $m \cdot 1_F > 0$ и $n \cdot 1_F > 0$, па је $(m \cdot 1_F) \cdot (n \cdot 1_F)^{-1} > 0$. Тиме смо доказали импликацију

$$mn^{-1} \neq 0 \;\Rightarrow\; \varphi(mn^{-1}) \neq 0. \tag{40}$$

Одатле лако следи да је φ инјекција. Заиста, ако је $\varphi(q_1) = \varphi(q_2)$, из чињенице да је φ морфизам следи

$$0 = \varphi(q_1) - \varphi(q_2) = \varphi(q_1 - q_2),$$

а одатле, због (40), да је $q_1 = q_2$. ▽

Напомена 4. Приметимо да смо, у склопу доказа претходне теореме, доказали следеће тврђење: *Морфизам $\varphi : F_1 \to F_2$ је мономорифизам ако и само ако има тривијално језгро, тј. ако и само ако је*

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_1\}$$

(видети Задатак 61). ◇

Пример 17. **(Рационализација разломака)** Нека је

$$\mathbf{Q}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}.$$

Овај скуп је поље, које је раширење поља $\mathbf{Q}$. Заиста, све аксиоме поља се лако проверавају, сем егзистенције инверзног елемента за множење, јер на први поглед није очигледно зашто је за $a, b \in \mathbf{Q}$ број

$$\frac{1}{a + b\sqrt{2}} \in \mathbf{Q}[\sqrt{2}].$$

Међутим, множењем бројиоца и имениоца са $a - b\sqrt{2}$ добијамо

$$\frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{1}{a + b\sqrt{2}} \cdot \frac{a - b\sqrt{2}}{a - b\sqrt{2}} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} - \frac{b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2},$$

што показује да овај број припада скупу $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$. ✓

4. Архимедово и Канторово својство реалне праве

4.1. Архимедова и Канторова аксиома. Већ смо споменули, а сада ћемо то и доказати, да у пољу у коме важе аксиоме (А1)–(А16) Архимедова аксиома

(АРХ) **Архимедова аксиома:** $(\forall a \in (0, +\infty))(\forall b \in \mathbf{R})(\exists n \in \mathbf{N})\, na > b$

следи из Аксиоме супремума. Обрнуто не важи: из Архимедове аксиоме не следи Аксиома супремума, тј. Архимедско поље не мора да буде комплетно – пример некомплетног Архимедског поља је поље $\mathbf{Q}$. Али ако, као што смо наговестили на 17. страни, Архимедовој аксиоми додамо и следећу, Канторову,[21] аксиому, ове две аксиоме заједно су еквивалентне Аксиоми супремума.

(КАН) **Канторова аксиома:** Нека је за свако $n \in \mathbf{N}$ дат интервал $[a_n, b_n]$ и нека важи $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$. Тада је

$$\bigcap_{n \in \mathbf{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

Теорема 11. *Архимедова и Канторова аксиома, узете заједно, су еквивалентне Аксиоми супремума.*

△ Претпоставимо прво да важи Аксиома супремума. Када не би важила Архимедова аксиома, постојали би реални бројеви $a > 0$ и b, такви да је $na \leq b$ за свако $n \in \mathbf{N}$. Тада би скуп $T = \{na \mid n \in \mathbf{N}\}$ био ограничен одозго и непразан, па би, према Аксиоми супремума, имао супремум. Нека је $\lambda = \sup T$. Пошто је $a > 0$ важило би $\lambda - a < \lambda$, па $\lambda - a$ није горња граница скупа T. Одатле следи да за неко $n \in \mathbf{N}$ важи $na > \lambda - a$, тј. $(n + 1)a > \lambda$, што је контрадикција са $\lambda = \sup T$. Овиме смо доказали (СУП) $\Rightarrow$ (АРХ).

[21] Кантор (Georg Cantor, 1845–1917), немачки математичар

Нека су a_n, b_n као у (КАН). Тада за $m < n$ важи

$$a_m \leq a_n \leq b_n \leq b_m \tag{41}$$

и, специјално, $a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1$. Одатле следи да је b_1 горња граница скупа $A = \{a_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ и a_1 доња граница скупа $B = \{b_n \mid n \in \mathbf{N}\}$. Из Аксиоме супремума и Теореме о инфимуму (Теорема 1) следи да постоје $a = \sup A$ и $b = \inf B$. Докажимо да је $a_n \leq a \leq b \leq b_n$ за свако n, одакле ће да следи

$$[a, b] \subset \bigcap_{n \in \mathbf{N}} [a_n, b_n]. \tag{42}$$

Претпоставимо да је $b < a_n$ за неко n. Тада a_n не може да буде доња граница скупа B, па за неко b_m важи

$$b_m < a_n. \tag{43}$$

Ако је $m < n$, из (43) и (41) следи $b_n \leq b_m < a_n \leq b_n$, што је контрадикција. Ако је $n < m$, из (43) и (41) следи $b_m < a_n \leq a_m \leq b_m$, што је опет контрадикција. Дакле $b \geq a_n$ за свако n. Слично се доказује и $(\forall n)\, a \leq b_n$. То доказује (42), а тиме и импликацију (СУП) $\Rightarrow$ (КАН).

Претпоставимо да важе (АРХ) и (КАН). Нека је $T \subset \mathbf{R}$ непразан и одозго ограничен скуп. Нека је $a_1 \in T$ произвољан елемент скупа T и b_1 његова произвољна горња граница. Нека је $n \in \mathbf{N}$. Из Архимедове аксиоме и Леме 4 следи да постоји најмањи природни број m_n за који је $b_n = a_1 + m_n 2^{-n}$ горња граница скупа T. Нека је $a_n = a_1 + (m_n - 1)2^{-n}$. Тада је $[a_n, b_n] \cap T \neq \emptyset$.

Доказаћемо да интервали $[a_n, b_n]$ задовољавају претпоставке Канторове аксиоме. Из $m_n 2^{-n} = 2m_n 2^{-(n+1)}$ следи да $a_1 + 2m_n 2^{-(n+1)}$ јесте, а $a_1 + (2m_n - 2)2^{-(n+1)}$ није горње ограничење скупа T. Одатле следи да важи или $m_{n+1} = 2m_n$ или $m_{n+1} = 2m_n - 1$. Сада се лако види да је $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, па из (КАН) следи $\cap_{n \in \mathbf{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset$.

Претпоставимо да скуп $\cap_{n \in \mathbf{N}} [a_n, b_n]$ садржи два елемента $a < b$. Тада би за свако $n \in \mathbf{N}$ важило $b - a \leq 2^{-n}$, тј. $2^n(b - a) \leq 1$. Пошто из Бернулијеве неједнакости (Лема 6) следи $2^n \geq n$, добијамо $n(b - a) \leq 1$ за све природне бројеве n, што је у контрадикцији са (АРХ). Дакле, скуп $\cap_{n \in \mathbf{N}} [a_n, b_n]$ садржи тачно један елемент c. Докажимо да је $c = \sup T$.

Претпоставимо да c није горње ограничење скупа T. Тада је $t > c$ за неко $t \in T$. Резонујући као малопре, закључујемо да из Бернулијеве неједнакости и Архимедове аксиоме следи да постоји природан број n за који важи $t - c > 2^{-n}$. Одатле, пошто је $c \in [a_n, b_n]$, следи да је $a_1 + m_n 2^{-n} < t$. То је у контрадикцији са дефиницијом броја m_n.

Претпоставимо сада да постоји горње ограничење d скупа T, такво да је $d < c$. Тада, поново на основу Бернулијеве неједнакости и Архимедове аксиоме, за неко $n \in \mathbf{N}$ важи $c - d > 2^{-n}$. Тада би, пошто је $c \in [a_n, b_n]$, важило $a_1 + (m_n - 1)2^{-n} > d$, тако да би $a_1 + (m_n - 1)2^{-n}$ било горње ограничење скупа T, што је опет у контрадикцији са дефиницијом m_n. Следи да је $c = \sup T$. Овиме је доказана импликација (АРХ) $\wedge$ (КАН) $\Rightarrow$ (СУП). $\triangledown$

До сада смо видели да, приликом аксиоматског заснивања система реалних бројева, уз аксиоме (А1)–(А16) можемо додати било коју од еквивалентних аксиома (СУП), (НЕП), (ДЕД) или (АРХ)+(КАН). У Параграфу 6 ћемо се сусрести са још два еквивалента ових аксиома.

Наводимо сада неколико последица Архимедове аксиоме.

Последица 5. 1) *За сваки реалан број* $x > 0$ *постоји природан број* n *такав да важи* $\frac{1}{n} < x$.

2) *Ако је* $0 \leq x < \frac{1}{n}$ *за све* $n \in \mathbf{N}$ *онда је* $x = 0$.

$\triangle$ Из (АРХ) следи $(\exists n)\, n \cdot x > 1$, а одатле 1). 2) следи из 1). $\triangledown$

Последица 6. *За сваки реалан број* x *постоји цео број* k *такав да важи* $k \leq x < k + 1$.

$\triangle$ Нека је $x \geq 0$. Из Архимедове аксиоме и Леме 4 следи да постоји најмањи природан број n за који је $n \cdot 1 > x$. Тада за $k = n - 1$ важи $k \leq x < k + 1$. Случај $x < 0$ изводи се из овог, множењем са -1. $\triangledown$

Број k из Последице 6 назива се *целим делом* реалног броја x и означава $[x]$. Разлика $\{x\} := x - [x]$ назива се *разломљеним делом* броја x. Према Последици 6 за сваки број $x \in \mathbf{R}$ важи $[x] \leq x < [x] + 1$. Нека је $d_0 = [x]$. Претпоставимо да је $d_0 < x$ и поделимо интервал $[[x], [x] + 1]$ на 10 једнаких делова. Тада постоји природан број d_1, $1 \leq d_1 < 9$ такав да важи $x \in [d_0 + d_1 \cdot 10^{-1}, d_0 + (d_1 + 1) \cdot 10^{-1})$. Ако је $x = d_0 + d_1 \cdot 10^{-1}$ пишемо $x = d_0, d_1$. Ако је $x > d_0 + d_1 \cdot 10^{-1}$, онда постоји природан број d_2, $1 \leq d_2 < 9$ такав да важи $x \in [d_0 + d_1 \cdot 10^{-1} + d_2 \cdot 10^{-2}, d_0 + d_1 \cdot 10^{-1} + (d_2 + 1) \cdot 10^{-2})$. Продужимо ли овај поступак, индуктивно дефинишемо (коначан или бесконачан) скуп d_0, d_1, ... и пишемо $x = d_0, d_1 d_2 \cdots$. Овај израз називамо *децималним записом* реалног броја x; запис његовог разломљеног дела је $\{x\} = 0, d_1 d_2 \cdots$.

Наравно, дељење интервала на 10 делова је ствар конвенције. Ако, уместо на 10, интервале у претходној конструкцији делимо на два дела, добијамо *бинарни запис* разломљеног дела, при чему за свако k важи $d_k \in \{0, 1\}$, дељењем на три дела добијамо запис у основи три, са $d_k \in \{0, 1, 2\}$ итд.

4.2. Густина скупа рационалних бројева. Следећа важна последица Архимедове аксиоме описује распоред рационалних бројева на реалној правој.

Теорема 12. **(Густина скупа рационалних бројева)** *У сваком интервалу* (a, b) *за* $a < b$ *постоји бар један рационалан број.*

$\triangle$ По претпоставци је $a < b$, тј. $b - a > 0$. Из Архимедове аксиоме следи да постоји природан број n за који важи $n(b - a) > 1$, односно

$$nb > na + 1. \tag{44}$$

Нека је $k = [na]$ цео део броја na; тј.

$$k \leq na < k + 1. \tag{45}$$

Тада из (44) и (45) следи $nb > na + 1 \geq k + 1 > na$, тј.

$$a < \frac{k + 1}{n} < b.$$

Тако смо добили рационалан број $q = (k + 1)n^{-1}$ припада интервалу (a, b). $\triangledown$

Задатак 62. **Дијадски бројеви** Елементи скупа

$$D = \Big\{ \frac{m}{2^n} \mid m \in \mathbf{Z},\ n \in \mathbf{N} \Big\}$$

називају се *дијадским рационалним бројевима.* Доказати да је скуп D густ у $\mathbf{R}$.

Упутство: имитирати доказ претходне теореме. Приметити да је

$$a < \frac{m}{2^n} < b \;\Leftrightarrow\; 2^n a < m < 2^n b.$$

Доказати да постоји $n \in \mathbf{N}$ са својством да је $2^n(b-a) > 1$, користећи Архимедову аксиому[22]. Закључити одатле да у интервалу $(2^n a, 2^n b)$ постоји бар један цео број m. ✓

Теорема 12 показује да су, за разлику од природних и целих бројева, рационални бројеви густо распоређени на реалној правој. Касније ћемо видети, међутим, да у извесном смислу рационалних бројева *нема више од природних* (иако су сви природни бројеви рационални, али не и обрнуто), док реалних бројева има много више од рационалних (Теореме 15 и 16). Пре тога, треба да прецизирамо шта то значи да елемената једног бесконачног скупа *има више* од елемената другог. То је следећа тема нашег изучавања.

5. Бројност скупа

5.1. Кардинални бројеви. Коначни и бесконачни скупови. На почетку ове главе смо рекли да је појам природног броја везан за концепт бројања, тј. утврђивања *броја елемената* неког скупа. При томе је појам *броја* много млађи од концепта *бројања*. Још у неолитско доба, људи су умели да утврде бројност свог стада, племена и сл, иако нису знали за апстрактне појмове као што је појам броја. Како су то чинили? Упоређивањем. На пример, ујутру би направили гомилу каменчића на коју би за сваку животињу стада ставили по један каменчић, а увече би са гомиле скинули по један каменчић, и тако би утврдили да ли се нека животиња изгубила. Приметимо да и ми данас често управо тако утврђујемо бројност скупова – ако желимо да утврдимо да ли имамо довољно тацни за сваку од n шољица за кафу, нећемо двапут бројати до n (нарочито ако је n велико), него ћемо једноставно на сваку тацну ставити шољицу и видети да ли нека недостаје. И то што ми данас рачунамо у систему са основом 10 је везано за чињеницу да имамо 10 прстију – први бројни системи у историји су управо системи са основом 10 и 20, настали из концепта бројења „на прсте", тј. придруживања елемената неког скупа прстима на рукама.

Сада ћемо дати строгу формулацију овог концепта, која има смисла и за бесконачне скупове.

Дефиниција 15. Кажемо да су скупови A и B *еквипотентни* (или да имају *исту моћ*, или *исту бројност*) ако постоји бијекција

$$\varphi : A \to B.$$

Скуп A је *коначан* ако је празан или је за неко $n_0 \in \mathbf{N}$ еквипотентан скупу $\{k \in \mathbf{N} \mid n \leq n_0\}$. Скуп A је *бесконачан* ако није коначан.

Ако су скупови A и B еквипотентни, пишемо $A \sim B$. Лако се види да важи

$$A \sim A, \quad A \sim B \Rightarrow B \sim A, \quad A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow B \sim C.$$

Пример 18. (1) Скуп $2\mathbf{N} := \{2n \mid n \in \mathbf{N}\}$ парних бројева је еквипотентан скупу природних бројева. Заиста, $\varphi : \mathbf{N} \to 2\mathbf{N}$, $\varphi(n) = 2n$ је бијекција.

[22] Архимедову аксиому у овом облику, са множењем са 2^n уместо са n, већ смо извели и користили у доказу Теореме 11.

(2) За произвољне реалне бројеве a, b, $a < b$ интервал (a, b) је еквипотентан интервалу $(0, 1)$, јер је $x \mapsto (b-a)x + a$ бијекција $(0, 1) \to (a, b)$.

(3) Из бијективности функције $\varphi : \mathbf{R} \to (-1, 1)$, $\varphi(x) = x(1 - |x|)^{-1}$ следи да је $(-1, 1) \sim \mathbf{R}$. ♯

Задатак 63. Доказати $\mathbf{N} \sim \mathbf{Z}$. ✓

Класу свих скупова еквипотентних скупу A називамо његовим *кардиналним бројем* и означавамо $\mathrm{Card}(A)$. Каже се још и да је $\mathrm{Card}(A)$ *моћ скупа* A. Ако је скуп A коначан и n_0 број из Дефиниције 15, пишемо и $\mathrm{Card}(A) = n_0$; за празан скуп $\mathrm{Card}(\emptyset) = 0$. Да је ова дефиниција оправдана, тј. да за коначан скуп A постоји јединствен број n_0 одређен Дефиницијом 15 следи из следећег тврђења.

Тврђење 1. *Ако за $m, n \in \mathbf{N}$ важи*

$$\{k \in \mathbf{N} \mid k \leq m\} \sim \{k \in \mathbf{N} \mid k \leq n\},$$

онда је $m = n$.

△ Треба да докажемо да за $n \neq m$ не постоји бијекција

$$\varphi : \{k \in \mathbf{N} \mid k \leq n\} \to \{k \in \mathbf{N} \mid k \leq m\}.$$

Докажимо ово тврђење индукцијом по n. За $n = 1$ оно је очигледно. Претпоставимо да важи за n и нека је

$$\varphi : \{k \in \mathbf{N} \mid k \leq n+1\} \to \{k \in \mathbf{N} \mid k \leq m\}$$

бијекција. Ако је $\varphi(n+1) = m$ означимо са ψ рестрикцију бијекције φ на скуп $\{k \in \mathbf{N} \mid k \leq n\}$; ако је $\varphi(n+1) = m_1 \neq m$ и $m = \varphi(n_1)$, дефинишимо

$$\psi : \{k \in \mathbf{N} \mid k \leq n\} \to \{k \in \mathbf{N} \mid k \leq m-1\}, \quad \psi(k) = \begin{cases} m_1, & k = n_1, \\ \varphi(k), & k \neq n_1. \end{cases}$$

Очигледно је да је ψ бијекција, па према индуктивној претпоставци важи $m - 1 = n$, тј. $m = n + 1$. ▽

Последица 7. *Коначан скуп није еквипотентан ниједном свом правом подскупу.*

Задатак 64. (Комбинаторика) (а) Доказати да је кардинални број скупа свих бијекција $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ једнак $n!$. (Већ смо рекли да се бијекције скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ у себе називају *пермутацијама*.) Упутство: применити метод индукције.

(б) Доказати да је кардинални број скупа свих уређених k–торки елемената скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ једнак n^k. Уређене k–торке елемената скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ зову се *варијацијама* k–те класе од n елемената.

(в) Доказати да је кардинални број скупа свих уређених k–торки *различитих* елемената скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ једнак $\frac{n!}{(n-k)!}$. Ови елементи називају се *варијацијама без понављања* k–те класе од n елемената.

(г) Доказати да је број подскупова скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ који имају k елемената једнак $\binom{n}{k}$. Овај број назива се бројем *комбинација* k–те класе од n елемената.

(д) Доказати да је број *свих* подскупова скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ једнак 2^n. ✓

Пример 19. Размотримо Задатак 64 (г), у коме се говори о броју подскупова скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ који имају k елемената на следећи начин. Претпоставимо да групи од n студената треба да поделимо k карата за позориште, тако да сваки студент може да добије највише једну карту. То можемо да изведемо тако што узмемо n цедуља, од којих k обележимо са t, а осталих $n-k$ са 1, и поделимо их студентима. Студент који добије цедуљу обележену са t добија карту.

Дакле, сваки студент добија један сабирак из бинома $1+t$. Питање је: на колико начина k студената може да добије сабирак t (а остали 1)?

Посматрајмо полином

$$f(t) = (1+t)^n = \underbrace{(1+t)\cdot\ldots\cdot(1+t)}_{n}.$$

У формирању коефицијента уз t^k учествују сви могући производи у којима се t појављује k тачно пута. Дакле, број начина да поделимо k карата групи од n студената је управо тај коефицијент уз t^k у $p(t)$. Из биномне формуле следи да је тај број $\binom{n}{k}$. ♯

Задатак 65. Колико има инјекција $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$? ✓

Задатак 66. Регистарске таблице на аутомобилима у Београду почињу словима BG, иза којих иду 4 цифре и још два латинична слова. Колико аутомобила може да се региструје на тај начин? ✓

Задатак 67. Колико има четвороцифрених бројева којима су све цифре различите? Доказати да је међу њима 2296 парних бројева. Колико има непарних? ✓

Задатак 68. Колико има четвороцифрених бројева који
(а) имају све цифре различите?
(б) немају ниједну цифру 7?
(в) имају тачно једну цифру 7?
(г) имају најмање једну цифру 7?
(д) имају највише једну цифру 7?
(ђ) имају тачно једну цифру 7 и тачно једну цифру 0? ✓

Следеће тврђење је контраст Последици 7 и даје карактеризацију коначних (а тиме и бесконачних) скупова.

Тврђење 2. *Следећа тврђења су еквивалентна.*

(1) *Скуп A је еквипотентан неком свом правом подскупу.*
(2) *Скуп A је бесконачан.*
(3) *Постоји инјекција $\varphi : \mathbf{N} \to A$.*

△ (1) ⇒ (2) следи из Последице 7. Нека важи (2). Дефинишимо инјекцију $\varphi : \mathbf{N} \to A$ индуктивно. Нека је $\varphi(1)$ произвољан елемент скупа A. Претпоставимо да смо дефинисали $\varphi(n)$. Пошто је скуп A бесконачан, скуп $A \setminus \{\varphi(k) \mid k \leq n\}$ је непразан; нека је $\varphi(n+1)$ његов произвољан елемент. Тиме је доказана импликација (2) ⇒ (3). Претпоставимо сада да важи (3). Приметимо да је $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $\sigma(n) = n+1$ инјекција скупа $\mathbf{N}$ на његов прави подскуп $\mathbf{N} \setminus \{1\}$

(Теорема 3). Дефинишимо пресликавање

$$\psi : A \to A, \quad \psi(a) = \begin{cases} a, & a \notin \varphi(\mathbf{N}), \\ \varphi(\sigma(n)), & a = \varphi(n). \end{cases}$$

Лако се види да је ψ бијекција скупа A и његовог правог подскупа $A \setminus \{\varphi(1)\}$, што доказује импликацију (3) $\Rightarrow$ (1). $\triangledown$

Задатак 69. Нека је A коначан скуп. Доказати да је пресликавање $f : A \to A$ 1–1 ако и само ако је НА. Да ли исто важи за бесконачне скупове? ✓

Из Тврђења 2 следи да је $\mathbf{N}$ „најмањи" бесконачан скуп, у смислу да сваки бесконачан скуп садржи подскуп који је еквипотентан скупу $\mathbf{N}$. Прецизирајмо ову формулацију.

Дефиниција 16. Кажемо да је $\mathrm{Card}(A) \leq \mathrm{Card}(B)$ ако постоји инјекција $\varphi : A \to B$.

Овиме је уведена једна релација поретка. Заиста, рефлексивност следи из инјективности идентичког пресликавања $\mathrm{id}_A : A \to A$, $\mathrm{id}_a(x) = x$, а транзитивност из чињенице да је композиција две инјекције инјекција. Антисиметричност је садржај следеће теореме.

Теорема 13. (Кантор–Бернштајнова[23] теорема)

$$\mathrm{Card}(A) \leq \mathrm{Card}(B) \wedge \mathrm{Card}(B) \leq \mathrm{Card}(A) \Rightarrow \mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B).$$

$\triangle$ Нека су $f : A \to B$ и $g : B \to A$ инјекције. Треба да конструишемо бијекцију $\varphi : A \to B$.

Нека је $x_0 \in A$ произвољни елемент. Ако је $x_0 \in g(B)$, нека је x_1 елемент из B који се слика у x_0, тј. такав да је $g(x_1) = x_0$. Ако је сада $x_1 \in f(A)$ означимо са x_2 елемент скупа A који се слика у x_1, тј. $f(x_2) = x_1$. Продужимо овај поступак. Ако за неко n елемент x_{n+1} не постоји, тј. x_n није слика ниједног елемента, број n називамо поретком елемента x_0. Ако x_{n+1} постоји за свако $n \in \mathbf{N}$, кажемо да је x_0 бесконачног поретка. Скуп A се може написати као унија

$$A = A_0 \cup A_1 \cup A_\infty$$

где је A_0 скуп елемената парног (укључујући и нулти) поретка, A_1 скуп елемената непарног поретка и A_∞ скуп елемената бесконачног поретка. На сличан начин је $B = B_0 \cup B_1 \cup B_\infty$. Приметимо да f пресликава A_0 на B_1 и A_∞ на B_∞, док g^{-1} пресликава A_1 на B_0. Одатле следи да је

$$\varphi : A \to B, \quad \varphi(a) = \begin{cases} f(a), & a \in A_0 \cup A_\infty, \\ g^{-1}(a), & a \in A_1 \end{cases}$$

бијекција. $\triangledown$

Задатак 70. Нека је $f : A \to B$ сурјекција. Доказати да је скуп B еквипотентан неком подскупу скупа A. ✓

Дефиниција 17. Ако је $\mathrm{Card}(A) \leq \mathrm{Card}(B)$, а A и B при томе нису еквипотентни (тј. није $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B)$), кажемо да је $\mathrm{Card}(A) < \mathrm{Card}(B)$. $\Diamond$

[23] Бернштајн (Felix Bernstein, 1878–1956), немачки математичар

Задатак 71. **(Дирихлеов принцип)** Нека су A и B коначни скупови, такви да је $\mathrm{Card}(A) < \mathrm{Card}(B)$. Доказати да не постоји пресликавање

$$f : B \to A$$

које је инјективно[24]. Да ли ово важи за бесконачне скупове? ✓

Задатак 72. Нека је A произвољан подскуп скупа $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ са $(n+1)$ елемената.

(а) Доказати да постоје два броја $k, m \in A$ таква да је $k|m$.

(б) Доказати да постоје два броја $k, m \in A$ која су узајамно проста.

Упутство: $a \in A$ је облика $a = 2^\alpha(2k+1)$, за $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$; постоје $a, b \in A$ такви да је $a - b < 2$. ✓

Задатак 73. Доказати да се последње цифре Фибоначијевог низа (видети Задатак 52 на стр. 34) периодично понављају. Упутство: нека је f_n последња цифра броја F_n. Применити Дирихлеов принцип (Задатак 71) на парове (f_n, f_{n+1}) – различитих парова нема више од 100, тј. коначно много, а ради се о бесконачном низу. Закључити да се бар неки пар понавља, тј. да за неке n и k важи $(f_n, f_{n+1}) = (f_k, f_{k+1})$. Искористити услов $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ и закључити да је $(f_{n+1}, f_{n+2}) = (f_{k+1}, f_{k+2})$; затим поновити поступак. ✓

Задатак 74. Да ли постоји број F_n у Фибоначијевом низу који се завршава са 1389 нула? Упутство: користећи идеју из Задатка 73, доказати да се *сви* парови последњих цифара периодично понављају. Када на n–том месту појави први пар $(f_n, f_{n+1}) = (1, 1)$, из дефиниције $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ следи да је $f_{n-1} = 0$, чиме је доказано да постоји број у Фибоначијевом низу који се завршава једном нулом. Уопштити овај поступак на 1389 нула. ✓

Задатак 75. Унутар круга полупречника 1 налази се 7 тачака. Растојање између сваке две је најмање 1. Доказати да је једна од тих тачака центар. Упутство: поделити са 3 пречника круг на 6 једнаких делова и применити Дирихлеов принцип. ✓

5.2. Пребројиви и непребројиви скупови. Најмање бесконачне скупове издвајамо следећом дефиницијом.

Дефиниција 18. Скуп је *пребројив* ако је еквипотентан скупу $\mathbf{N}$. Бесконачан скуп који није пребројив називамо *непребројивим*. Ако је скуп коначан или пребројив, кажемо да је *највише пребројив*.

Кардинални број скупа $\mathbf{N}$ означава се $\aleph_0$.

Даћемо још једну формулацију појма пребројивости. За то нам је потребан следећи појам.

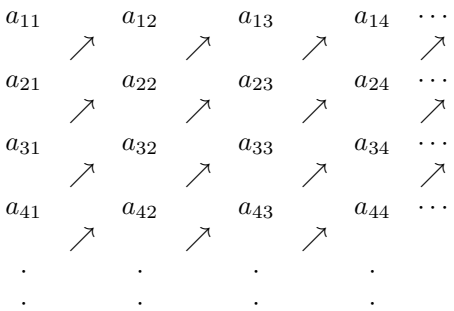
Дефиниција 19. *Низ* у скупу A је пресликавање $a : \mathbf{N} \to A$.

Уместо $a(n)$ писаћемо a_n. Скуп је пребројив, ако се његови елементи могу поређати у низ.

Теорема 14. *Пребројива унија пребројивих скупова је пребројив скуп.*

[24] Ово тврђење се некад формулише овим речима: ако је n голубова затворено у k кавеза и ако је $k < n$ онда се у неком кавезу налазе бар два голуба.

△ Нека су $A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \dots\}$, $n \in \mathbf{N}$ пребројиви скупови. Даћемо правило по коме се елементи скупа $A := \cup_{n\in\mathbf{N}} A_n$ могу поређати у низ. Посматрајмо табелу



и поређајмо њене елементе у низ по „дијагоналном правилу”

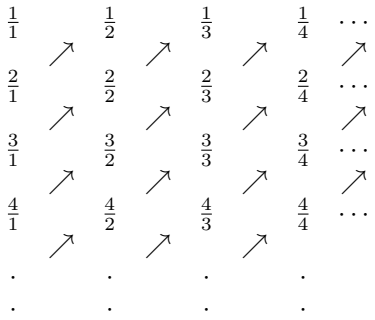
$$a_{11},\ a_{21},\ a_{12},\ a_{31},\ a_{22},\ a_{13},\ a_{41},\ a_{32},\ \dots$$

Приметимо да се, ако скупови нису дисјунктни, неки елементи понављају, тј. важи $\mathrm{Card}(A) \leq \aleph_0$. Пошто је A бесконачан, из Тврђења 2 следи $\aleph_0 \leq \mathrm{Card}(A)$. Закључак теореме следи из Теореме 13. ▽

Последица 8. *Ако је скуп A пребројив, онда је и $A^n := A \times \cdots \times A$ пребројив.*

Теорема 15. *Скуп* $\mathbf{Q}$ *је пребројив.*

△ На исти начин као у доказу Теореме 14 доказује се да је скуп $\mathbf{Q}_+$ позитивних рационалних бројева



пребројив, тј. да га је могуће поређати у низ $\{q_1, q_2, \dots\}$, па $\mathbf{Q}$ можемо да поређамо у низ $\{0, q_1, -q_1, q_2, -q_2, \dots\}$. ▽

Задатак 76. Доказати да је свака фамилија дисјунктних интервала на правој $\mathbf{R}$ највише пребројива. ✓

Теорема 16. *Скуп* $\mathbf{R}$ *је непребројив.*

△ Довољно је доказати да је интервал $(0, 1)$ непребројив (в. Пример 18). Претпоставимо да смо све бројеве из интервала $(0, 1)$ поређали у низ $x_1, x_2, \dots$ и

посматрајмо њихов децимални запис:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 0, d_{11}d_{12}d_{13}\cdots \\ x_2 & = & 0, d_{21}d_{22}d_{23}\cdots \\ x_3 & = & 0, d_{31}d_{32}d_{33}\cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Нека је y број чији је децимални запис $0, c_1c_2\cdots$, где су бројеви $c_1, c_2, \ldots$ дефинисани са

$$c_k = \begin{cases} 0, & d_{kk} = 1, \\ 1, & d_{kk} \neq 1. \end{cases}$$

Тада је $y \neq x_n$ за све n. Заиста, из $y = x_n$ би следило $d_{nn} = c_n$, што је супротно дефиницији бројева c_n. Следи да за сваки низ бројева из интервала $(0,1)$ постоји број који није у том низу, тј. $(0,1)$ је непребројив. ▽

Задатак 77. Доказати Теорему 16 на следећи начин. Нека је дато пресликавање $\psi : \mathbf{N} \to [0,1]$. Нека је $I_1 = [a_1, b_1] \subset [0,1]$ произвољан интервал који не садржи $\psi(1)$. Дефинишимо интервал $I_2 = [a_2, b_2] \subset I_1$ као онај од интервала $[a_1, \frac{1}{2}(a_1 + b_1)]$, $[\frac{1}{2}(a_1 + b_1), b_1]$ који не садржи $\psi(2)$. Продужавањем овог поступка добијамо (применом принципа дефинисања индукцијом) низ интервала I_n такав да је $I_{n+1} \subset I_n$. Применом Канторовог својства реалне праве закључити да ψ није сурјекција. ✓

Задатак 78. Доказати да је $\mathrm{Card}([0,1)) = \mathrm{Card}([0,1) \times [0,1))$. (Упутство: нека су $f : [0,1) \to [0,1) \times [0,1)$ и $g : [0,1) \times [0,1) \to [0,1)$ пресликавања дефинисана са

$$f(x) = (x, 0) \qquad g(x, y) = 0, a_1b_1a_2b_2\ldots$$

где су $x = 0, a_1a_2\ldots$ и $y = 0, b_1b_2\ldots$, $a_j, b_j \in \{0,1\}$ бинарни записи бројева x и y. Доказати да су пресликавања f и g инјекције и применити Кантор–Бернштајнову теорему). ✓

Из Теорема 15 и 16 видимо да рационалних бројева има много мање од реалних, иако између свака два реална броја постоји рационалан (Теорема 12).

Кардинални број скупа $\mathbf{R}$ означава се са $\aleph_1$ или c. Користи се и ознака $2^{\aleph_0}$, чији ћемо смисао видети касније. За скупове чији је кардинални број c кажемо да имају *моћ континуума* (лат. continuum – непрекидан) . Из Теореме 16 следи да је $\aleph_0 < c$. Природно је поставити питање да ли постоји кардинални број већи од c. Потврдан одговор даје следећа теорема. Подсетимо се да се *партитивним скупом* скупа A (у ознаци $P(A)$) назива скуп свих подскупова скупа A.

Теорема 17. (Канторова теорема) *Нека је A произвољан скуп и нека је $P(A)$ његов партитивни скуп. Тада је* $\mathrm{Card}(A) < \mathrm{Card}(P(A))$.

△ Пошто је са $a \mapsto \{a\}$ дефинисана инјекција $A \to P(A)$, следи да је $\mathrm{Card}(A) \leq \mathrm{Card}(P(A))$. Докажимо да је $\mathrm{Card}(A) \neq \mathrm{Card}(P(A))$. Претпоставимо супротно, да постоји бијекција $\varphi : A \to P(A)$. Нека је

$$S := \{a \in A \mid a \notin \varphi(a)\} \subset A.$$

Пошто је, по претпоставци, φ сурјекција, скуп $S \in P(A)$је слика неког елемента $a_0 \in A$, тј. $S = \varphi(a_0)$. Јасно је да мора да важи једно од следећа два тврђења:

$a_0 \in S$ или $a_0 \notin S$. Међутим, оба од ових тврђења дају контрадикцију:

$$a_0 \in S = \varphi(a_0) \Rightarrow a_0 \notin S$$
$$a_0 \notin S = \varphi(a_0) \Rightarrow a_0 \in S.$$

Обе импликације су последица дефиниције скупа S. ▽

Последица 9. *Не постоји највећи кардинални број.*

У случају скупа $\mathbf{N}$, кардинални број $\mathrm{Card}(P(\mathbf{N}))$ је описан следећом теоремом, која и оправдава ознаку $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ (в. Задатак 64 (д)).

Теорема 18. *Кардинални број скупа $P(\mathbf{N})$ једнак је кардиналном броју скупа $\mathbf{R}$.*

△ Из Примера 18 следи да је довољно доказати да је $P(\mathbf{N}) \sim (0,1)$. Нека је $f : P(\mathbf{N}) \to (0,1)$ пресликавање које подскупу $A \in \mathbf{N}$ придружује реални број $f(A)$ са децималним записом $0, d_1 d_2 \cdots$, где је

$$d_k = \begin{cases} 0, & k \notin A, \\ 1, & k \in A. \end{cases}$$

Обрнуто, нека је $g : (0,1) \to P(\mathbf{N})$ пресликавање које броју са *бинарним* записом $x = 0, d_1 d_2 \cdots$ (в. дискусију после Последице 6) придружује скуп $g(x) := \{n \in \mathbf{N} \mid d_n = 1\} \subset \mathbf{N}$. Оба пресликавања су инјекције, па доказ теореме следи из Теореме 13. ▽

Приметимо да из Теорема 18 и 17 добијамо још један доказ Теореме 16.

Задатак 79. Доказати да је скуп свих *коначних* подскупова пребројивог скупа пребројив. ✓

5.3. Операције са кардиналним бројевима. Ако су A и B *дисјунктни* скупови, онда је, по дефиницији

$$\mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) = \mathrm{Card}(A \cup B).$$

За произвољне (не обавезно дисјунктне) скупове A и B производ њихових кардиналних бројева се дефинише са

$$\mathrm{Card}(A) \cdot \mathrm{Card}(B) = \mathrm{Card}(A \times B).$$

Степеновање кардиналних бројева се дефинише са

$$\mathrm{Card}(B)^{\mathrm{Card}(A)} = \mathrm{Card}(B^A),$$

где је B^A скуп свих пресликавања $f : A \to B$.

Очигледно је да се ова правила своде на обичне операције са природним бројевима у случају коначних скупова. Следећи задатак показује неке специфичности везане за неке бесконачне скупове. Подсетимо се да смо са c означавали кардинални број скупа $\mathbf{R}$, а са $\aleph_0$ кардинални број скупа $\mathbf{N}$.

Задатак 80. Доказати да је

(а) $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$;
(б) $c \cdot c = c$;
(в) $2^{\aleph_0} = \mathrm{Card}(P(\mathbf{N})) = c$;
(г) $c^c = (2^{\aleph_0})^c = 2^{\aleph_0 \cdot c} = 2^c$;
(д) $c + \aleph_0 = c$.

✓

Напомена 5. Нека правила рачунања са природним бројевима преносе и на кардиналне бројеве. Ако је $\alpha = \mathrm{Card}(A)$, $\beta = \mathrm{Card}(B)$, $\lambda = \mathrm{Card}(L)$, $\mu = \mathrm{Card}(M)$, може да се докаже да је

(а) $\alpha^{\lambda+\mu} = \alpha^\lambda \cdot \alpha^\mu$;
(б) $(\alpha^\lambda)^\mu = \alpha^{\lambda\cdot\mu}$;
(в) $\alpha^\lambda \cdot \beta^\lambda = (\alpha \cdot \beta)^\lambda$;
(г) ако је $\alpha \leq \beta$ и $\lambda > 0$, онда је $\alpha^\lambda \leq \beta^\lambda$;
(д) ако је $\alpha \neq 0$ и $\alpha \leq \beta$ онда је $\lambda^\alpha \leq \lambda^\beta$;
(ђ) $\mathrm{Card}(P(A)) = 2^\alpha$.

У изразу (ђ) број 2 на десној страни означава кардинални број двочланог скупа; другим речима, 2^α на десној страни је кардинални број скупа $\{0,1\}^A$ свих пресликавања $f : A \to \{0,1\}$. ◇

6. Нека метричка и тополошка својства реалне праве

6.1. Апсолутна вредност и метрика. У скупу реалних бројева дефинисана је операција $|\cdot|$ изразом

$$|x| = \max\{-x, x\}. \tag{46}$$

Ова операција назива се *апсолутном вредношћу* или *модулом* реалног броја. Лако се проверава да је за свако $x \in \mathbf{R}$

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{за } x \geq 0 \\ -x, & \text{за } x < 0 \end{cases}$$

и да важи

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a, \quad |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a, \quad -|x| \leq x \leq |x|. \tag{47}$$

Бројеве

$$x^+ = \begin{cases} x, & \text{за } x > 0 \\ 0, & \text{за } x \leq 0 \end{cases} \qquad x^- = \begin{cases} 0, & \text{за } x \geq 0 \\ -x, & \text{за } x < 0 \end{cases} \tag{48}$$

Називамо *позитивним и негативним делом* броја x. Очигледно важи

$$|x| = x^+ + x^-, \quad x = x^+ - x^-, \quad x^+ = \frac{|x| + x}{2}, \quad x^- = \frac{|x| - x}{2}.$$

Лема 7. *Апсолутна вредност има следећа својства:*

1. $|x| \geq 0$ *и* $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $|\lambda x| = |\lambda||x|$
3. $|x + y| \leq |x| + |y|$
4. $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

△ Доказ првог својства је очигледан. Доказ другог својства лако се изводи дискусијом случајева када су λ и x оба позитивна, супротног знака и оба негативна. Из трећег израза у (47) следи

$$-|x| \leq x \leq |x| \quad \text{и} \quad -|y| \leq y \leq |y|.$$

Сабирањем ових неједнакости добија се $-(|x|+|y|) \le x+y \le |x|+|y|$, одакле, на основу првог израза у (47) следи доказ трећег својства. Докажимо четврто својство. Из трећег следи

$$|x| = |y+(x-y)| \le |y|+|x-y|, \quad |y| = |x+(y-x)| \le |x|+|y-x| = |x|+|x-y|,$$

што даје

$$-|x-y| \le |x|-|y| \le |x-y|.$$

Доказ четвртог својства сада следи из (47). $\bigtriangledown$

Дефиниција 20. Пресликавање $d : \mathbf{R}\times\mathbf{R} \to [0,+\infty)$ дефинисано са $d(x,y) = |x-y|$ називамо *стандардним растојањем* или *стандардном метриком* на реалној правој $\mathbf{R}$.

Из особина апсолутне вредности следи да пресликавање d има следећа својства:

(M1) $d(x,y) \ge 0$ и $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
(M2) $d(x,y) = d(y,x)$
(M3) $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$.

Заиста, својства (M1) и (M3) следе из Леме 7, а својство (M2) непосредно из дефиниције апсолутне вредности. Својство (M3) се назива *неједнакошћу троугла*; истим именом назива се и својство (3) у Леми 7.

6.2. Теорема о отвореном покривању. Приметимо да се отворени и затворени интервали, чија дефиниција је изведена из структуре поретка, могу описати језиком метрике:

$$(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) = \{x\in\mathbf{R} \mid d(x_0,x) < \varepsilon\}, \quad [x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon] = \{x\in\mathbf{R} \mid d(x_0,x) \le \varepsilon\}.$$

Интервал $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ назива се *ε–околином* тачке x_0. Користићемо и ознаку $B(x_0,\varepsilon) := (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$.

Дефиниција 21. Фамилија $\mathcal{J}$ скупова се назива *покривачем* скупа A ако је $A \subset \cup_{J\in\mathcal{J}} J$. *Потпокривање* покривања $\mathcal{J}$ скупа A је фамилија $\mathcal{J}_0 \subset \mathcal{J}$ која је и сама покривање скупа A. Покривање скупа отвореним интервалима назива се његовим *отвореним покривачем*. Покривање називамо *коначним* ако се фамилија $\mathcal{J}$ састоји од коначног броја скупова.

Теорема 19. **(Борел[25]–Лебегова[26] теорема)** *Свако отворено покривање $\mathcal{J}$ сегмента $[a,b]$ има коначно потпокривање.*

$\triangle$ Претпоставимо да је $I_1 = [a,b]$ сегмент који се не може покрити коначном фамилијом отворених интервала из $\mathcal{J}$. Поделимо интервал I на два интервала $[a,(a+b)/2]$, $[(a+b)/2,b]$; тада се бар један од њих не може покрити коначном фамилијом интервала из $\mathcal{J}$. Означимо тај сегмент са I_2 и поновимо поступак. Тако добијамо низ сегмената $I_1 \supset I_2 \supset \ldots$ који не допуштају коначно покривање скуповима фамилије $\mathcal{J}$. По Канторовој аксиоми, постоји број c који припада сваком од интервала I_n. Број c свакако припада и неком интервалу $(\lambda,\mu) \in \mathcal{J}$. Нека је $\delta = \min\{d(c,\lambda), d(c,\mu)\}$ растојање тачке c до ближег краја интервала (λ,μ), тако да је

$$(c-\delta, c+\delta) \subset (\lambda,\mu). \tag{49}$$

[25]Борел (Emil Borel, 1871–1956), француски математичар
[26]Лебег (Henri Lebesgue, 1875–1941), француски математичар

Приметимо да је интервал I_n конструисан дељењем интервала I_1 дужине $b-a$ на два дела n пута, па је његова дужина једнака $2^{-n}(b-a)$. За довољно велико n важи $2^{-n}(b-a) < \delta$. Пошто је $c \in I_n$ следи да је

$$I_n \subset (c-\delta, c+\delta). \tag{50}$$

Из (49) и (50) следи $I_n \subset (\lambda, \mu)$, што је у супротности са претпоставком да се I_n не може покрити коначним бројем интервала из $\mathcal{J}$. ▽

6.3. Тачке нагомилавања. Затворени скупови. Посматрајмо скуп $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N}\}$. Из Архимедове аксиоме следи да свака ε–околина нуле садржи бесконачно много тачака скупа A. Приметимо да ниједно $x \neq 0$ нема то својство – сваки број различит од нуле има околину која не садржи више од једне тачку скупа A. Следећи ову интуицију, рећи ћемо да је нула *тачка нагомилавања* скупа A, а да су тачке $\frac{1}{n}$ његове *изоловане тачке*. Прецизирајмо ове појмове следећом дефиницијом.

Дефиниција 22. Тачка $x_0 \in \mathbf{R}$ се назива *тачком нагомилавања* скупа $A \subset \mathbf{R}$ ако свака њена ε–околина садржи бесконачно много тачака скупа A. Скуп свих тачака нагомилавања означаваћемо са A'. Скуп $\overline{A} := A \cup A'$ назива се *затварањем* скупа A. Ако је $A = \overline{A}$ скуп A називамо *затвореним*. Ако је $B \subset A$ и $\overline{B} = A$ кажемо да је скуп B *густ* (или *свуда густ*) у A. Тачка $a_0 \in A$ која није тачка нагомилавања назива се *изолованом тачком* скупа A. *Руб* скупа $A \subset \mathbf{R}$ је скуп $\partial A := \overline{A} \cap \overline{(\mathbf{R} \setminus A)}$. Скуп чије су све тачке изоловане назива се *дискретним* скупом.

Приметимо да тачка нагомилавања скупа не мора да припада том скупу, док му свака изолована тачка, по дефиницији, припада. Из дефиниције следи да је тачка $x_0 \in A$ изолована ако и само ако постоји ε–околина $B(x_0, \varepsilon)$ за коју важи $A \cap B(x_0, \varepsilon) = \{x_0\}$.

Пример 20. (а) Ако је $A = (0,1) \cup \{2\}$ онда је $A' = [0,1]$, $\overline{A} = [0,1] \cup \{2\}$, $\partial A = \{0, 1, 2\}$. Тачка 2 је изолована тачка скупа A.

(б) За скуп рационалних бројева важи $\overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}$ (в. Теорему 12 на стр. 40).

(в) Затворени интервал је затворен скуп. *Коначна* унија затворених интервала је затворен скуп. За бесконачну унију ово не мора да важи: $\cup_{n\in\mathbf{N}}[\frac{1}{n}, 1] = (0,1]$ није затворен скуп. ♯

Задатак 81. Нека је $A \subset \mathbf{R}$ ограничен и затворен скуп. Доказати да је $\sup A \in A$ и $\inf A \in A$. ✓

Задатак 82. Доказати да је скуп $E = \{\sqrt{m} - \sqrt{n} \mid m, n \in \mathbf{N}\}$ густ у $\mathbf{R}$.

Упутство: нека је $x \in \mathbf{R}$; треба доказати да за свако $\varepsilon > 0$ постоје природни бројеви m и n такви да је

$$|\sqrt{m} - \sqrt{n} - x| < \varepsilon.$$

Не умањујући општост, можемо да претпоставимо да је $x \geq 0$ (случај $x \leq 0$ се изводи из овог заменом улоге бројева m и n). Приметити да је $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$ и закључити да за дато ε постоји k, такво да је $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} < \varepsilon$. Посматрати бројеве

$$n(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \sqrt{n^2k - n^2} - \sqrt{n^2k}$$

Искористити Архимедову аксиому и доказати да постоји $n \in \mathbf{N}$ са својством $n(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \in [a, a+\varepsilon)$. ✓

Пример 21. У Задатку 62 видели смо да је скуп дијадских бројева

$$D = \left\{ \frac{m}{2^n} \mid m \in \mathbf{Z}, ; n \in \mathbf{N} \right\}$$

густ у $\mathbf{R}$. Ево још једног доказа тог тврђења. Нека је x произвољан реални број. Напишимо $x = k + a$, за $k \in \mathbf{Z}$ и $a \in [0, 1)$. Нека је $b_n = [a/2^n]$, где је $[\cdot]$ цео део реалног броја. Тада је

$$\left| \frac{b_n}{2^n} - a \right| \leq \frac{1}{2^n},$$

па за произвољно $\varepsilon > 0$ постоји $n \in \mathbf{N}$ такво да је

$$\left| k + \frac{b_n}{2^n} - x \right| = \left| \frac{b_n}{2^n} - a \right| < \varepsilon.$$

Пошто је $k + \frac{b_n}{2^n} \in D$, овиме је тврђење доказано. ♯

У Вежби (63) на крају ове главе видећемо уопштење претходног примера.

Теорема 20. **(Болцано[27]–Вајерштрасова[28] теорема)** *Сваки бесконачан и ограничен подскуп $A \subset \mathbf{R}$ има тачку нагомилавања.*

△ Пошто је A ограничен, постоји позитиван реалан број ρ такав да је $A \subset [-\rho, \rho]$. Претпоставимо да ниједна тачка интервала $[-\rho, \rho]$ није тачка нагомилавања скупа A. Тада за сваку тачку $x \in [-\rho, \rho]$ постоји ε_x–околина $I(x) = (x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x)$ која садржи највише коначно много тачака скупа A. Фамилија ових ε_x–околина покрива сегмент $[-\rho, \rho]$, па из Теореме 19 следи да постоји коначна фамилија $I(x_1), \ldots, I(x_n)$ која покрива $[-\rho, \rho]$, а тиме и A. Пошто се у сваком од ових скупова налази највише коначно много тачака скупа A, одатле следи да је A коначна унија коначних скупова, што је у противречности са претпоставком да је A бесконачан. ▽

Анализирајмо детаљније доказе Теореме 19 и Теореме 20. Видимо да смо Теорему 19 извели као последицу Аксиоме супремума (СУП), а затим, Теорему 20 као последицу Теореме 19. Тако смо добили ланац импликација

(СУП) ⇒ Борел–Лебегова теорема ⇒ Болцано–Вајерштрасова теорема.

Заједно са еквиваленцијом (СУП) ⇔ (АРХ) ∧ (КАН) доказаном у Теореми 11 на страни 38 и следећим задатком, добијамо још две аксиоме еквивалентне Аксиоми супремума.

Лема 8. *Важи импликација*

Болцано–Вајерштрасова теорема ⇒ (АРХ) ∧ (КАН).

△ За $a > 0$ скуп $\{na \mid n \in \mathbf{N}\}$ нема тачку нагомилавања, па не може бити ограничен, одакле следи Архимедова аксиома. За доказ (КАН) посматрајмо скупове $\{a_1, a_2, \ldots\}$ и $\{b_1, b_2, \ldots\}$ из формулације Канторове аксиоме. Они су ограничени (јер су подскупови сегмента $[a_1, b_1]$), па имају тачке нагомилавања a и b. Лако је видети да за њих важи инклузија (42) на страни 39. ▽

Из Леме 8 и дискусије пре ње следи да се у аксиоматском заснивању поља $\mathbf{R}$ аксиома (СУП) може заменити било којом од Теорема 19 и 20.

[27] Болцано (Bernhard Bolcano, 1781–1848), чешки математичар

[28] Вајерштрас (Karl Weierstrass, 1815–1897), немачки математичар

6.4. Отворени скупови. Топологија. Скупове који се могу представити као произвољна унија отворених интервала издвајамо следећом дефиницијом.

Дефиниција 23. Подскуп $U \subset \mathbf{R}$ зовемо *отвореним* ако је он унија неке фамилије отворених интервала. По дефиницији, празан скуп $\emptyset$ је такође отворен. Фамилију отворених подскупова у $\mathbf{R}$ зовемо *топологијом* реалне праве и означавамо са $\tau_{\mathbf{R}}$.

Следеће две леме следе директно из дефиниције.

Лема 9. *Подскуп $U \subset \mathbf{R}$ је отворен ако и само ако са сваком својом тачком садржи и неку њену ε–околину, тј. ако и само ако за свако $x_0 \in U$ постоји $\varepsilon > 0$ такво да је $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset U$.*

Лема 10. *Топологија $\tau_{\mathbf{R}}$ реалне праве има следеће особине:*

(T1) $\emptyset \in \tau_{\mathbf{R}}$, $\mathbf{R} \in \tau_{\mathbf{R}}$

(T2) $U, V \in \tau_{\mathbf{R}} \Rightarrow U \cap V \in \tau_{\mathbf{R}}$.

(T3) *За произвољну фамилију $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ скупова из $\tau_{\mathbf{R}}$ важи* $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \tau_{\mathbf{R}}$.

Из (T2) следи, индукцијом, да је пресек *коначне* фамилије отворених скупова отворен скуп. За бесконачне фамилије то не важи: $\cap_{n\in\mathbf{N}}(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \{0\}$ није отворен скуп.

Дефиниција 24. *Отворена околина* тачке $x_0 \in \mathbf{R}$ је отворен подскуп $U \subset \mathbf{R}$ такав да је $x_0 \in U$. Отворена околина тачке $+\infty \in \overline{\mathbf{R}}$ је сваки отворен скуп који садржи интервал $\{x \mid x > a\}$ за неко $a \in \mathbf{R}$; отворена околина тачке $-\infty \in \overline{\mathbf{R}}$ је сваки отворен скуп који садржи интервал $\{x \mid x < a\}$ за неко $a \in \mathbf{R}$.

Следећа лема објашњава везу између отворених и затворених скупова.

Лема 11. *Скуп $K \subset \mathbf{R}$ је затворен ако и само ако је његов комплемент $\mathbf{R} \setminus K$ отворен.*

$\triangle$ Претпоставимо да је K затворен и нека је $x_0 \in \mathbf{R}\setminus K$. Пошто је $K = \overline{K}$, важи $x_0 \notin \overline{K}$, тј. x_0 није тачка нагомилавања скупа K. Одатле следи да постоји ε–околина $B(x_0, \varepsilon)$ тачке x_0 таква да важи $B(x_0, \varepsilon) \cap K = \emptyset$, тј. $B(x_0, \varepsilon) \subset \mathbf{R} \setminus K$. То значи, на основу Леме 9, да је $\mathbf{R} \setminus K$ отворен.

Обрнуто, претпоставимо да је $\mathbf{R} \setminus K$ отворен и $x_0 \in \overline{K}$. Када би важило $x \notin K$, из отворености скупа $\mathbf{R} \setminus K$ и Леме 9 следило да постоји околина $B(x_0, \varepsilon) \subset \mathbf{R} \setminus K$. Тада би важило $B(x_0, \varepsilon) \cap K = \emptyset$, што је у супротности са дефиницијом затворења. Дакле за свако $x_0 \in \overline{K}$ важи $x_0 \in K$, тј. $K = \overline{K}$. $\triangledown$

Покажимо сада још једно својство отворених подскупова реалне праве.

Теорема 21. *Сваки отворен подскуп $U \subset \mathbf{R}$ може се представити као пребројива унија дисјунктних отворених интервала.*

$\triangle$ Из Теореме 12 о густини скупа $\mathbf{Q}$ следи да за свако $x \in U$ постоји отворени интервал $J \subset U$ са крајевима у $\mathbf{Q}$ који садржи x. Придружимо сваком $x \in U$ један такав интервал и означимо добијену фамилију интервала са $\mathcal{J}$. Пошто сваком интервалу $[q_1, q_2] \in \mathcal{J}$ можемо да придружимо пар $(q_1, q_2) \in \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$, из Теореме 15 и Последице 8 следи да фамилија $\mathcal{J}$ садржи највише пребројиво много интервала. Очигледно је да сви ови интервали покривају скуп U.

Уведимо у $\mathcal{J}$ следећу релацију еквиваленције: I и J су еквивалентни ако постоји коначно много интервала $I_1, I_2 \ldots, I_n \in \mathcal{J}$ таквих да важи

$$I_1 = I, \quad I_n = J, \quad I_k \cap I_{k+1} \neq \emptyset.$$

Придружимо свакој класи еквиваленције $\mathcal{C} \subset \mathcal{J}$ унију свих $\cup_{J\in\mathcal{C}} J$ интервала који јој припадају. Докажимо да је свака таква унија и сама отворени интервал. Нека је $M = \sup \cup_{J\in\mathcal{C}} J$ ако овај супремум постоји, у противном нека је $M = +\infty$. Слично, нека је $m = \inf \cup_{J\in\mathcal{C}} J$ или $m = -\infty$. Очигледно важи $\cup_{J\in\mathcal{C}} J \subset [m, M]$. Докажимо да је $\cup_{J\in\mathcal{C}} J = (m, M)$. Нека је $x \in (m, M)$. По дефиницији супремума и инфимума, постоје $a, b \in \cup_{J\in\mathcal{C}} J$ такви да важи $m < a < x < b < M$. По дефиницији релације еквиваленције коју разматрамо, то значи да постоје интервали $J_0, \ldots, J_n \in \mathcal{J}$ такви да важи $a \in J_0$, $b \in J_n$ и $J_k \cap J_{k+1} \neq \emptyset$. Изаберимо у сваком од скупова $J_k \cap J_{k+1}$ тачку x_k. Тада је $x \in [x_k, x_{x+1}]$ за неко k, што значи $x \in J_{k+1}$. Одатле следи да важи $(m, M) \subset \cup_{J\in\mathcal{C}} J$. Остаје још да докажемо да $m, M \notin \cup_{J\in\mathcal{C}} J$. Када би било $M \in J$ за неко $J \in \mathcal{C}$, тада, пошто је интервал J отворен, M не би могао да буде његов супремум, а самим тим ни $\sup \cup_{J\in\mathcal{C}} J$. Слично се доказује и $m \notin \cup_{J\in\mathcal{C}} J$.

Пошто су интервали који одговарају различитим класама дисјунктни и има их пребројиво много, следи тврђење теореме. ▽

Из Теореме 21 и Леме 11 следи да је сваки затворен скуп комплемент пребројиве уније дисјунктних отворених интервала. Следећи пример даје једну такву репрезентацију.

Пример 22. (Канторов скуп) Нека је C_0 затворени интервал $[0, 1]$. Одстранимо из C_0 отворени интервал $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ и означимо са C_1 преостали скуп, тј. унију затворених интервала $[0, \frac{1}{3}]$ и $[\frac{2}{3}, 1]$. Одстранимо сада средње трећине из ова два интервала и означимо преостали скуп са C_2, тј.

$$C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Продужимо овај поступак и дефинишимо индуктивно низ скупова C_n. Скуп

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

се назива *Канторовим скупом.* ♯

Задатак 83. (а) Доказати да Канторов скуп има моћ континуума. Упутство: доказати да се у децималном запису са основом три (стр. 40) скуп C_1 састоји од бројева чија прва цифра није 1, скуп C_2 од бројева чије прве две цифре нису 1, итд. Закључити да је C скуп бројева који се у систему са основом три записују помоћу цифара 0 и 2. Доказати да овај скуп има моћ континуума користећи идеју доказа Теореме 18 (стр. 48).

(б) Доказати да сваки интервал $(a, b) \subset [0, 1]$ садржи отворени подинтервал у коме нема тачака Канторовог скупа. Упутство: По конструкцији, ни у једном од интервала $((3m+1)3^{-n}, (3m+2)3^{-n})$ нема тачака Канторовог скупа. Индукцијом се доказује да је $3^n > n$, па одатле и из Архимедове аксиоме следи да постоји n за које је $3^n > \frac{6}{b-a}$, тј. $3^{-n} < \frac{b-a}{6}$. Поново примењујући Архимедову аксиому, закључити да постоји $k \in \mathbf{N}$ за које је $(3k+1)3^{-n} > a$. Нека је m минимум скупа таквих k. Тада је $((3m+1)3^{-n}, (3m+2)3^{-n}) \subset (a, b)$. ✓

Из Задатка 83 (б) видимо да су тачке Канторовог скупа прилично ретко распоређене на интервалу $[0,1]$. За скуп који има својство из Задатка 83 (б) кажемо да је *нигде густ* у $[0,1]$. Задатак 83 нам даје пример скупа који је нигде густ у $[0,1]$, али непребројив. То је контраст у односу на Теореме 12 и 15, које показују да је скуп рационалних бројева из интервала $[0,1]$ свуда густ у том интервалу, али пребројив. Овиме смо открили једно занимљиво својство реалне праве: на њу се бројчано већи скуп може сместити тако да заузме мање места од бројчано мањег.

7. Једначина $x^n = a$

У Примеру 14 смо дефинисали израз x^n за $n \in \mathbf{N}$. Сада ћемо доказати једну важну теорему, везану за решавање једначине

$$x^n = a.$$

Сетимо се да нас је разматрање ове једначине за $n = 2$, $a = 2$ довело до појма ирационалног броја.

Теорема 22. *Нека је $a \geq 0$ и $n \in \mathbf{N}$. Тада постоји јединствен број $x \in [0, +\infty)$ такав да важи $x^n = a$.*

$\triangle$ Докажимо прво јединственост. Нека за $x, y \in [0, +\infty)$ важи $x^n = a$, $y^n = a$. Из ненегативности бројева x и y, аксиома (А16) и (А12) и принципа математичке индукције лако следи

$$x < y \Rightarrow x^n < y^n. \tag{51}$$

Одатле следи да је $x < y$ у противречности са $x^n = a$, $y^n = a$. На исти начин се елиминише могућност $y < x$, па је $x = y$. Тиме је доказана јединственост.

Докажимо егзистенцију. Нека је

$$S = \{s \in [0, +\infty) \mid s^n \leq a\}.$$

Скуп S је непразан, јер је $0 \in S$ и ограничен одозго, јер је $(\forall s \in S)\, s \leq \max\{1, a\}$. Из Аксиоме супремума следи да постоји

$$x = \sup S. \tag{52}$$

Из Последице 5 (стр. 40) следи да за неко $m \in \mathbf{N}$ важи $\frac{1}{m} < x$, тј. $x - \frac{1}{m} > 0$. Одатле, на основу (51) и (52) следи $x - \frac{1}{m} \in S$ и $x + \frac{1}{m} \notin S$, па је

$$\left(x - \frac{1}{m}\right)^n < a < \left(x + \frac{1}{m}\right)^n. \tag{53}$$

Одатле, на основу биномне формуле (Лема 5 на стр. 5) следи

$$\begin{aligned} 0 < \left(x + \tfrac{1}{m}\right)^n - \left(x - \tfrac{1}{m}\right)^n &= x^n + \sum_{k=0}^{n-1} \tbinom{n}{k} x^k m^{-(n-k)} - \\ &- \left(x^n - \sum_{k=0}^{n-1} \tbinom{n}{k} x^k (-m)^{-(n-k)}\right) \\ &= \tfrac{1}{m} \sum_{k=0}^{n-1} \tbinom{n}{k} x^k (m^{-(n-k-1)} - (-m)^{-(n-k-1)}) \\ &< \tfrac{1}{m} \sum_{k=0}^{n-1} \tbinom{n}{k} x^k. \end{aligned}$$

Поновном применом Последице 5 (стр. 40) закључујемо да за свако $\varepsilon > 0$ постоји $m \in \mathbf{N}$ за које је последњи израз мањи од ε. Одатле, из (53) и Канторове аксиоме (в. израз (42), стр. 39) следи

$$\bigcap_{m\in\mathbf{N}} \left[\left(x - \frac{1}{m}\right)^n, \left(x + \frac{1}{m}\right)^n\right] = \{a\}.$$

Када би било $x^n \neq a$, важило би $x^n \notin \left[\left(x - \frac{1}{m}\right)^n, \left(x + \frac{1}{m}\right)^n\right]$ за неко m, што је у супротности са (51). ▽

На 111. страни ћемо видети још један доказ ове теореме.

Дефиниција 25. Нека је $a > 0$. Јединствено решење једначине $x^n = a$ називамо *n–тим кореном* броја a и означавамо са $\sqrt[n]{a}$. За $m \in \mathbf{Z}$, $m < 0$ дефинишемо $a^m := (a^{-m})^{-1}$, а за $q \in \mathbf{Q}$, $q = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$ дефинишемо

$$a^q = \sqrt[n]{a^m}.$$

По дефиницији, $a^0 = 1$.

Задатак 84. Доказати да за $a \geq 0$, $b \geq 0$ важи неједнакост

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

✓

Својства степеновања рационалним бројем издвајамо следећом лемом.

Лема 12. *Нека је $a > 0$, $b > 0$ и $p, q \in \mathbf{Q}$. Тада важи*

(а) $a^{p+q} = a^p a^q$, $a^{pq} = (a^p)^q$, $(ab)^p = a^p b^p$
(б) $p > 0 \wedge a < b \Rightarrow a^p < b^p$
(в) $a > 1 \wedge q < p \Rightarrow a^q < a^p$, $a < 1 \wedge q < p \Rightarrow a^q > a^p$.

△ Доказ лако следи из аналогних својстава степеновања природним бројем, која се доказују индукцијом, и свођења рационалних бројева на заједнички именилац. ▽

Сада можемо да уведемо и степеновање произвољним реалним бројем.

Дефиниција 26. За $x \in \mathbf{R}$ и $a \geq 1$ дефинишемо

$$a^x := \sup\{a^q \mid q \in \mathbf{Q},\ q < x\}, \tag{54}$$

а за $0 < a \leq 1$

$$a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x},$$

За $a = 0$ и $x > 0$ је $0^x = 0$.

Приметимо да израз (54) има смисла. Заиста, из Леме 12 следи да је скуп $\{a^q \mid q \in \mathbf{Q},\ q < x\}$ ограничен одозго било којим бројем a^p за $p \in \mathbf{Q}$, $p > x$. На основу Аксиоме супремума, супремум на десној страни у (54) постоји.

Лема 13. *За $a > 1$ важи $a^x := \inf\{a^q \mid q \in \mathbf{Q},\ q > x\}$.*

$\triangle$ Нека је $A = \{a^q \mid q \in \mathbf{Q},\ q < x\}$, $B = \{a^q \mid q \in \mathbf{Q},\ q > x\}$. Из Леме 12 следи да је $A \leq B$, па је $\sup A \leq \inf B$. Када би било $\sup A < \inf B$, из Бернулијеве неједнакости и Архимедове аксиоме следило би да

$$(\exists m \in \mathbf{N})\, n > m \ \Rightarrow\ \Big(1 + \frac{\inf B - \sup A}{\sup A}\Big)^n > a. \tag{55}$$

Тада би за сваки пар рационалних бројева p, q таквих да је $p < x < q$ и $q - p = \frac{1}{n} < \frac{1}{m}$ важило

$$0 < \inf B - \sup A < a^q - a^p = a^p(a^{q-p} - 1) < \sup A(a^{q-p} - 1). \tag{56}$$

Лако се види да је (55) у контрадикцији са (56). $\triangledown$

Следећа лема проширује особине установљене у Леми 12 на све реалне бројеве.

Тврђење 3. *Нека је $a > 0$, $b > 0$ и $x, y \in \mathbf{R}$. Тада важи*

(а) $a^{x+y} = a^x a^y$, $a^{xy} = (a^x)^y$, $(ab)^x = a^x b^x$

(б) $x > 0 \wedge a < b \ \Rightarrow a^x < b^x$

(в) $a > 1 \wedge y < x \ \Rightarrow a^y < a^x$, $a < 1 \wedge y < x \ \Rightarrow a^y > a^x$.

$\triangle$ Дађемо доказ прве једнакости у (а) и прве импликације у (в); остала тврђења остављамо читаоцу као задатак. Довољно је размотрити случај $a > 1$. Из Дефиниције 26 и Леме 13 следи да за свако $n \in \mathbf{N}$ постоје рационални бројеви p, q такви да је

$$|a^x a^y - a^p a^q| < \frac{1}{2n} \quad \text{и} \quad |a^{p+q} - a^{x+y}| < \frac{1}{2n}. \tag{57}$$

Заиста, из Дефиниције 26 и Леме 13 следи да за свако $\varepsilon > 0$ постоје $r_0 \in \mathbf{Q} \cap (-\infty, x)$, $r_1 \in \mathbf{Q} \cap (x, +\infty)$ такви да је $a^x - \varepsilon < a^{r_0}$ и $a^{r_1} < a^x + \varepsilon$. Из Леме 12 (в) следи да за свако $p \in (r_0, r_1)$ важи $a^x - \varepsilon < a^p < a^x + \varepsilon$. Слично, постоје рационални бројеви s_0, s_1 такви да за свако $q \in (s_1, s_2)$ важи $a^y - \varepsilon < a^q < a^y + \varepsilon$. Множењем ових неједнакости и узимањем довољно малог ε добијамо први пар неједнакости у (57).

Слично добијамо да је за постоје рационални бројеви t_1, t_2 и u_1, u_2 такви да за свако $p \in (t_1, t_2)$ и свако $q \in (u_1, u_2)$ важи $|a^{p_1+q_1} - a^{x+y}| < \frac{1}{2n}$. Одатле следи да за $p \in (r_0, r_1) \cap (t_1, t_2)$ и $q \in (s_1, s_2) \cap (u_1, u_2)$ важи (57). Пошто је, према Леми 12, $a^{p+q} = a^p a^q$, а из неједнакости (57) добијамо

$$a^x a^y - \frac{1}{2n} < a^p a^q < a^x a^y + \frac{1}{2n} \quad \text{и} \quad a^{p+q} - \frac{1}{2n} < a^{x+y} < a^{p+q} + \frac{1}{2n},$$

следи да је

$$a^x a^y - \frac{1}{n} < a^{x+y} < a^x a^y + \frac{1}{n},$$

тј. $|a^{x+y} - a^x a^y| < \frac{1}{n}$ за свако $n \in \mathbf{N}$. Одатле, на основу Последице 5 на стр. 40, следи $a^{x+y} = a^x a^y$. Тиме је доказана прва једнакост у (а).

Докажимо још и прву импликацију у (в). Претпоставимо да је $a > 1$ и $y < x$. Из густине скупа рационалних бројева на реалној правој следи да постоје рационални бројеви p и q такви да је $y < q < p < x$ – прва неједнакост следи из Леме 13, друга из Леме 12, а трећа из Дефиниције 26. Тада важи $a^y < a^q < a^p < a^x$. Тиме је прва импликација у (в) доказана. $\triangledown$

Задатак 85. Да ли постоје ирационални бројеви a и b, такви да је a^b рационалан број?

Упутство: Посматрати бројеве $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ и $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$. ✓

8. Јединственост и постојање реалних бројева

У овом параграфу ћемо се осврнути на питање јединствености и постојања комплетно уређеног поља, дефинисаног аксиомама (А1)–(А16), (СУП). Подсетимо се Дефиниције 13 на стр. 36, којом смо увели појам изоморфизма уређених поља.

Теорема 23. *Ако су* $(\mathbf{R}_1, +_1, \cdot_1, \leq_1, 0_1, 1_1)$ *и* $(\mathbf{R}_2, +_2, \cdot_2, \leq_2, 0_2, 1_2)$ *два потпуно уређена поља, тј. две уређене шесторке које задовољавају аксиоме* (А1)–(А16), (СУП)*, онда постоји јединствени изоморфизам* $f : \mathbf{R}_1 \to \mathbf{R}_2$.

Другим речима, поље реалних бројева је јединствено до на изоморфизам.

△ *Скица доказа.* Нека су $\mathbf{N}_1 \subset \mathbf{Z}_1 \subset \mathbf{Q}_1 \subset \mathbf{R}_1$ и $\mathbf{N}_2 \subset \mathbf{Z}_2 \subset \mathbf{Q}_2 \subset \mathbf{R}_2$ подскупови природних, целих и рационалних бројева у $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$. Из Теореме 9 (стр. 36) следи да постоји јединствени изоморфизам $f_{\mathbf{Q}} : \mathbf{Q}_1 \to \mathbf{Q}_2$. Заиста, за сваки изоморфизам мора да важи

$$f(0_1) = 0_2, \quad f(1_1) = 1_2, \quad f(-x) = -f(x), \quad f(x^{-1}) = (f(x))^{-1},$$

а одатле следи да се изоморфизам $f_{\mathbf{Q}}$ једнозначно и добро дефинише најпре на $\mathbf{N}_1$ (индукцијом, полазећи од $f_{\mathbf{Q}}(1_1) = 1_2$), а затим, применом Теореме 4 (стр. 29) и Теореме 9 (стр. 36) на $\mathbf{Z}_1$ и $\mathbf{Q}_1$. Лако се види да се тако добија изоморфизам

$$f_{\mathbf{Q}} : \mathbf{Q}_1 \to \mathbf{Q}_2$$

уређених поља $(\mathbf{Q}_1, +_1, \cdot_1, \leq_1, 0_1, 1_1)$ и $(\mathbf{Q}_2, +_2, \cdot_2, \leq_2, 0_2, 1_2)$. Дефинишимо, за $x \in \mathbf{R}_1$,

$$f(x) := \sup_2\{f_{\mathbf{Q}}(q) \mid q \in \mathbf{Q}_1,\ q <_1 x\},$$

где је са $\sup_2$ означен супремум у односу на релацију поретка $\leq_2$. Докажимо да је $f : \mathbf{R}_1 \to \mathbf{R}_2$ бијекција. Нека је $y_0 \in \mathbf{R}_2$. Пошто $f_{\mathbf{Q}}$, као изоморфизам уређених поља, чува поредак, скуп $D_1 = \{x \in \mathbf{R}_1 \mid f_{\mathbf{Q}} <_2 y_0\}$, заједно са својим комплементом D_2 чини Дедекиндов пресек. На основу тврђења (ДЕД), еквивалентног аксиоми (СУП), следи да постоји $x_0 \sup D_1$. Није тешко видети да је $f(x_0) = y_0$, што доказује да је f сурјекција. Докажимо да је f инјекција. Нека је $f(x_1) = f(x_2) = y_0$ за $x_1, x_2 \in \mathbf{R}_1$, $y_0 \in \mathbf{R}_2$. Тада из дефиниције пресликавања f и из чињенице да је $f_{\mathbf{Q}}$ изоморфизам уређених поља $\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_2$ следи

$$\{q \in \mathbf{Q}_1 \mid q <_1 x_1\} = \{q \in \mathbf{Q}_1 \mid q <_1 x_2\},$$

па је $x_1 = x_2$.

Остаје још да се докаже да је f морфизам, што следи из

$$\{q_1 + q_2 \mid q_1, q_2 \in \mathbf{Q}_1,\ q_1 <_1 x_1,\ q_2 <_1 x_2\} = \{r \in \mathbf{Q}_1 \mid r < x_1 + x_2\},$$
$$\{q_1 q_2 \mid q_1, q_2 \in \mathbf{Q}_1,\ 0 <_1 q_1 <_1 x_1,\ 0 <_1 q_2 <_1 x_2\} = \{r \in \mathbf{Q}_1 \mid 0 <_1 r <_1 x_1 x_2\}$$

и из чињенице да је $f_{\mathbf{Q}} : \mathbf{Q}_1 \to \mathbf{Q}_2$ изоморфизам уређених поља. ▽

Што се тиче постојања реалних бројева, њега, наравно, не можемо доказати „ни из чега”. Али, ако пођемо од претпоставке да је природније претпоставити постојање природних бројева, тј. структуре дефинисане Пеановим аксиомама

(Теорема 3 на страни 23), следећу теорему сматрамо доказом постојања реалних бројева.

Теорема 24. *Ако постоји уређена тројка* $(\mathbf{N}, \sigma, 1)$ *која задовољава Пеанове аксиоме, онда постоји уређена шесторка* $(\mathbf{R}, +, \cdot, \leq, 0, 1)$ *која задовољава аксиоме* (А1)–(А16), (СУП).

△ *Скица доказа.* Нека је $(\mathbf{N}, \sigma, 1)$ уређена тројка која задовољава Пеанове аксиоме. Тада у $\mathbf{N}$ можемо, користећи принцип индукције, да дефинишемо операције $+$ и $\cdot$ и релацију $\leq$ помоћу

$$n + 1 = \sigma(n), \quad n + \sigma(m) = \sigma(n + m)$$
$$n \cdot 1 = n, \quad n \cdot \sigma(m) = n \cdot m + n$$
$$n < m \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbf{N})\, m = n + k, \quad n \leq m \Leftrightarrow n < m \vee n = m.$$

Дефинишимо сада скуп $\mathbf{Z}$. Придружимо сваком елементу $n \in \mathbf{N}$ елемент који ћемо означити са $-n$; скуп $\{-n \mid n \in \mathbf{N}\}$ означимо са $-\mathbf{N}$. Осим тога, уведимо још један елемент, који ћемо означити са 0. Нека је $\mathbf{Z} = -\mathbf{N} \cup \{0\} \cup \mathbf{N}$. Операције $+$ и $\cdot$ и релација $\leq$ могу се продужити са $\mathbf{N}$ на $\mathbf{Z}$. За операцију $+$ то чинимо на следећи начин. Ако је $m, n \in \mathbf{N}$ онда је $m + n$ већ дефинисано у $\mathbf{N}$. Ако је $m \in -\mathbf{N}$, $n \in \mathbf{N}$, онда је $m = -m_0$ за неко $m_0 \in \mathbf{N}$. Ако за природне бројеве $m_0, n \in \mathbf{N}$ важи $m_0 < n$, онда постоји $k \in \mathbf{N}$ за које важи $n = m_0 + k$. Сада дефинишемо $n + m = k$. Слично се поступа у случају $n < m_0$. На крају $n + 0 = n$ за свако $n \in \mathbf{Z}$. Дефиницију операције $\cdot$ и проверу да је добијена структура $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ комутативни прстен са јединицом остављамо читаоцу. На крају, релацију поретка $\leq$ у $\mathbf{Z}$ уводимо тако што сматрамо да је $-n < 0 < m$ за све $-n \in -\mathbf{N}$, $m \in \mathbf{N}$ и да је $-n < -m$ ако је $m < n$, где је последња неједнакост дефинисана, јер смо у $\mathbf{N}$ већ увели релацију поретка.

Да бисмо дефинисали $\mathbf{Q}$, посматрајмо на скупу $\mathbf{N} \times \mathbf{Z}$ релацију

$$(n_1, z_1) \sim (n_2, z_2) \;\Leftrightarrow\; n_1 z_2 = n_2 z_1.$$

Ово је релација еквиваленције; скуп класа еквиваленције је, по дефиницији, скуп $\mathbf{Q}$. Означимо класу еквиваленције пара (n, z) са $[n, z]$ или $\frac{z}{n}$. Операције $+$ и $\cdot$ и релацију $\leq$ дефинишемо са

$$[n_1, z_1] + [n_2, z_2] = [n_1 n_2, n_1 z_2 + n_2 z_1],$$
$$[n_1, z_1] \cdot [n_2, z_2] = [n_1 n_2, z_1 z_2],$$
$$[n_1, z_1] \leq [n_2, z_2] \Leftrightarrow z_1 n_2 \leq z_2 n_1.$$

Проверу да је ова дефиниција добра (тј. независна од представника класе) и да је структура $(\mathbf{Q}, +, \cdot, \leq, 0, 1)$ уређено поље остављамо читаоцу.

На крају, скуп $\mathbf{R}$ дефинишемо као скуп свих Дедекиндових пресека у $\mathbf{Q}$. Релацију поретка између два Дедекиндова пресека $a = (A_1, A_2)$, $b = (B_1, B_2)$ уводимо са $a \leq b \Leftrightarrow A_1 \subset B_1$. Операције $+$ и $\cdot$ дефинишемо на следећи начин. Нека су $a = (A_1, A_2)$, $b = (B_1, B_2)$ два Дедекиндова пресека и нека је

$$A_1 + B_1 := \{q_1 + q_2 \mid q_1 \in A_1,\ q_2 \in A_2\}, \quad A_1 \cdot B_1 := \{q_1 \cdot q_2 \mid q_1 \in A_1,\ q_2 \in A_2\}.$$

Тада се $a + b$ дефинише као Дедекиндов пресек $(A_1 + B_1, \mathbf{Q} \setminus (A_1 + B_1))$. Слично се дефинише $a \cdot b$ за $a > 0$, $b > 0$. Множење у општем случају се дефинише на очигледан начин, формулама $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$ и сл. ▽

9. Комплексни бројеви

9.1. Поље комплексних бројева. У разматрању једначине $x^n = a$ у Параграфу 7 ограничили смо се на позитивне бројеве. Следећа лема објашњава зашто.

Лема 14. *Једначина $x^2 = -1$ нема решења у скупу $\mathbf{R}$.*

$\triangle$ Претпоставимо да је $x^2 = -1$ за неко $x \in \mathbf{R}$. Пошто је $0^2 = 0$, важи или $0 < x$ или $x < 0$. Претпоставимо да је $0 < x$. Из аксиоме (А16) тада следи $0 < x^2$. Како је $x^2 = -1$, имамо $0 < -1$. Сабирањем ове неједнакости и неједнакости $0 < 1$ коју смо доказали на страни 21, добијамо контрадикцију $0 < 0$. Претпоставимо сада да је $x < 0$. Тада је, на основу Задатка 1, $0 < -x$, па је, поново на основу аксиоме (А16), $0 < (-x)(-x)$. Одатле, на основу једнакости (14) на страни 14, следи $0 < x^2 = -1$, што опет даје контрадикцију са $0 < 1$. $\triangledown$

Сада се налазимо у сличној ситуацији као када смо се на страни 10 сусрели са нерешивошћу једначине $x^2 = 2$ у скупу $\mathbf{Q}$. Као и тада, решење ћемо наћи у проширењу појма броја.

Дефиниција 27. *Поље комплексних бројева* је уређена шесторка

$$(\mathbf{C}, +, \cdot, 0, 1, i) \quad \text{где је} \quad \mathbf{C} := \{x + iy \mid x, y \in \mathbf{R}\},$$

а операције $+$ и $\cdot$ дефинисане са

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$
$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Напомена 6. Лако је видети да је $\mathbf{C}$ стварно *поље*. Заиста, нула и јединица овог поља су $0 := 0 + i \cdot 0$ и $1 := 1 + i \cdot 0$. Све аксиоме поља се непосредно проверавају, сем егзистенције инверзног елемента за множење, јер на први поглед није очигледно да за $a + ib$ постоји $c + id$, са особином

$$(a + ib) \cdot (c + id) = 1.$$

Овде поступамо слично као у Примеру 17 на стр. 38:

$$(a + ib) \cdot \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 - (ib)^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1,$$

па је $(a^2 + b^2)^{-1}a - i(a^2 + b^2)^{-1}b$ инверз елемента $a + ib$.

Тиме је оправдана ознака

$$\frac{x + iy}{a + ib}$$

за производ комплексног броја $x + iy$ и инверза (у односу на множење) комплексног броја $a + ib$. $\diamond$

Задатак 86. Написати комплексни број

$$\frac{\sqrt[3]{2} + 3i}{2 + \sqrt{2}i}$$

у облику $x + iy$, за $x, y \in \mathbf{R}$. $\checkmark$

Комплексне бројеве облика $x + i \cdot 0$, где је $x \in \mathbf{R}$, називамо *реалним*, чиме идентификујемо скуп $\mathbf{R}$ са истакнутим подскупом $\{x + i \cdot 0 \mid x \in \mathbf{R}\}$ скупа $\mathbf{C}$. Уместо $x + i \cdot 0$ пишемо само x. Комплексне бројеве облика $iy = 0 + i \cdot y$, где је $y \in \mathbf{R}$ називамо *чисто имагинарним*. Комплексни број i зовемо *имагинарном јединицом*.

За комплексни број $z = x + iy$ дефинишемо његов *реални део* $\operatorname{Re}(z) = x$ и *имагинарни део* $\operatorname{Im}(z) = y$. Ако је $z = x + iy$, онда је њему инверзни елемент у односу на множење $z^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2}$.

Дефиниција 28. *Конјугована вредност* комплексног броја $z = x + iy$ је

$$\bar{z} = x - iy.$$

Апсолутна вредност или *модул* комплексног броја $z = x + iy$ је број

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Приметимо да је $|z|$ ненегативан *реалан* број. ◊

Лако је видети да важи

1) $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$, $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$.
2) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$, $\bar{\bar{z}} = z$.
3) $z\bar{z} = |z|^2$.

Скуп $\mathbf{C}$ се на очигледан начин може идентификовати са Декартовим[29] производом $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$: број $z = x + iy$ идентификујемо са паром (x, y). Мотивисани тиме и геометријском аналогијом из фусноте на страни 14 за скуп $\mathbf{C}$ користимо и термин *комплексна раван*. Скупове

$$\mathbf{I} = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re}(z) \geq 0,\ \operatorname{Im}(z) \geq 0\}, \qquad \mathbf{II} = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re}(z) \leq 0,\ \operatorname{Im}(z) \geq 0\},$$
$$\mathbf{III} = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re}(z) \leq 0,\ \operatorname{Im}(z) \leq 0\}, \qquad \mathbf{IV} = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re}(z) \geq 0,\ \operatorname{Im}(z) \leq 0\}$$

називамо првим, другим, трећим и четвртим *квадрантом*.

9.2. Полиноми. Једначина из Леме 14 има решење у $\mathbf{C}$:

$$i^2 = (0 + i \cdot 1) \cdot (0 + i \cdot 1) = -1.$$

Важи и више од тога – свака једначина облика

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n = 0, \quad a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{C},\ n \geq 1, a_n \neq 0 \tag{58}$$

има решење $z_0 \in \mathbf{C}$. Ово тврђење назива се *Основним ставом алгебре*. Израз на левој страни у (58) назива се *полиномом n–тог степена*, бројеви $a_0, \ldots, a_n$ његовим *коефицијентима*. Коефицијент уз највећи степен називамо *водећим коефицијентом полинома*; полином чији је водећи коефицијент једнак јединици називамо *моничним полиномом*. Решење једначине (58) називамо *нулом полинома* $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$. Поље у коме сваки полином има нулу назива се *алгебарски затвореним* пољем. У курсу Алгебре се показује да је $\mathbf{C}$ најмање алгебарски затворено поље које садржи поље $\mathbf{R}$.

Директна последица Основног става алгебре је да сваки полином степена $n \geq 1$ може да се напише као производ полинома степена 1, тј. као производ линеарних функција. Заиста, нека је

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n, \qquad a_n \neq 0$$

[29] Декарт (René Descartes, 1596–1650), француски философ и научник

полином степена n. Из Основног става алгебре следи да је $p(r_1) = 0$ за неко $r_1 \in \mathbf{C}$. Индукцијом по n закључујемо да је

$$p(z) = (z - r_1)p_1(z),$$

где је p_1 полином степена $n-1$. За $n = 1$ тврђење је тривијално, а индуктивни прелаз са претпоставке да тврђење важи за полиноме степена $n-1$ на полиноме степена n се остварује применом индуктивне претпоставке на полином

$$q(z) = p(z) - \frac{z^{n-1}}{a_n}(z - r_1)$$

степена $n-1$: из $p(r_1) = 0$ следи $q(r_1) = 0$, па је по индуктивној претпоставци $q(z) = (z-r_1)q_1(z)$, одакле следи $p(z) = (z-r_1)(a_n^{-1}z^{n-1} + q_1(z))$. Понављањем овог поступка са $p_1(z) = a_n^{-1}z^{n-1} + q_1(z)$ итд, добијамо да је

$$p(z) = a_n(z - r_1)(z - r_2) \cdot \ldots \cdot (z - r_n), \tag{59}$$

где су $r_1, r_2 \ldots, r_n$ нуле полинома p. Неке од ових нула могу да се понављају; у том случају говоримо о *вишеструким нулама* полинома. Нпр. ако је

$$r_1 = r_2 = \ldots = r_k$$

кажемо да је r_1 *нула вишеструкости* k.

Задатак 87. (а) Доказати да полином степена n има највише n различитих нула. Специјално, квадратна једначина има највише два решења.

(б) Дати примере квадратних једначина са једним решењем и без решења.

(в) Нека су a, b и c различити реални бројеви. Доказати да су они решења једначине

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = 1.$$

Да ли је ово у противречности са (а)? ✓

Задатак 88. Нека је $p(x)$ полином са целобројним коефицијентима и нека су $a, b \in \mathbf{Z}$ различити цели бројеви. Доказати да је број $p(a)-p(b)$ дељив бројем $a - b$. Упутство: $x = a$ је нула полинома $p(x) - p(a)$. ✓

Задатак 89. Нека је p полином степена n, такав да је

$$p(k) = \frac{k}{k+1} \qquad \text{за} \qquad k \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Израчунати $p(n+1)$. Упутство: доказати да се полином

$$q(x) = (x+1)p(x) - x$$

степена $n+1$ разлаже на линеарне факторе, па је

$$p(x) = \frac{cx(x-1)\ldots(x-n)+x}{x+1} \qquad \text{за неко} \qquad c \in \mathbf{Z}. \tag{60}$$

Доказати да, пошто је p полином, $x = -1$ мора да буде нула полинома у бројиоцу израза (60). Одатле следи $c = (-1)^{n+1}/(n+1)!$. Када знамо c, $p(n+1)$ израчунавамо из (60). ✓

Напомена 7. Очигледна је сличност факторизације (59) са Основним ставом аритметике (Теорема 8 на стр. 34), која говори о факторизацији у прстену $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$. Комутативни прстен $(P, +, \cdot)$ без делитеља нуле[30] се назива *прстеном са једнозначном факторизацијом* ако сваки његов неинвертибилни елемент $p \in P$ различит од нуле може да се представи као производ

$$p = up_1 \dots p_n, \tag{61}$$

где су $p_j \in P$ *иредуцибилни елементи* прстена P (тј. неинвертибилни елементи који не могу да се напишу као производ неинвертибилних), на јединствен (до на пермутацију множилаца и до на инвертибилни елемент) начин.

Прстен целих бројева $\mathbf{Z}$ је прстен са једнозначном факторизацијом. На пример, број 6 може да се напише као

$$6 = 2 \cdot 3 \qquad \text{и} \qquad 6 = (-3) \cdot (-2),$$

али ова два записа се разликују само у до на пермутацију простих множилаца и до на њихово множење инвертибилним елементом -1.

Из факторизације (59) следи да је *прстен полинома* $(\mathbf{C}[z], +, \cdot)$ са комплексним коефицијентима прстен са једнозначном факторизацијом[31].

На исти начин се доказује да је за свако поље F прстен полинома $(F[z], +, \cdot)$ са коефицијентима у F прстен са једнозначном факторизацијом. ◇

Пример 23. Нека је $p(z) = z^4 - 1$. Применом формуле за разлику квадрата лако видимо да полином p има факторизацију

$$p(z) = (z-1)(z+1)(z-i)(z+i)$$

на иредуцибилне елементе (полиноме првог степена). ♯

Задатак 90. Наћи факторизацију полинома $p(z) = z^4 + 1$ на иредуцибилне полиноме. ✓

Ако су коефицијенти $a_0, a_1, \dots, a_n$ полинома

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

реални бројеви, онда се комплексне нуле појављују у паровима: ако је r нула полинома p, онда је и њена конјугована вредност $\bar{r}$ нула тог полинома. Заиста, ако је $p(r) = 0$, онда је и $\overline{p(r)} = 0$, а пошто су коефицијенти реални (па су једнаки својој конјугованој вредности, важи

$$\overline{p(r)} = p(\bar{r}) = 0. \tag{62}$$

Наравно, ако коефицијенти полинома p нису реални бројеви, ова једнакост не мора да важи.

Приметимо да је

$$(z-r)(z-\bar{r}) = z^2 - 2\mathrm{Re}\,(r)z + |r|^2$$

---

[30] $x \in P \setminus \{0\}$ је *делитељ нуле* ако је $xy = 0$ за неко $y \neq 0$; нпр. 2 је делитељ нуле у $\mathbf{Z}_6$, јер је $2 \cdot 3 \equiv 0 \pmod 6$.

[31] Читаоцу остављамо да установи како је на скупу полинома дефинисана структура прстена, по угледу на Пример 12 на стр. 14. Приметимо да су ± 1 једини инвертибилни елементи прстена $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ и да су инвертибилни елементи прстена $(\mathbf{C}[z], +, \cdot)$ константни полиноми различити од нуле. Иредуцибилни елементи прстерна $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ су прости бројеви, а иредуцибилни елементи прстена $(\mathbf{C}[z], +, \cdot)$ су полиноми степена 1.

полином са *реалним* коефицијентима, па из (59) следи да сваки полином са реалним коефицијентима може да се напише као производ линеарних и квадратних полинома, такође са реалним коефицијентима. Међутим, ова факторизација у општем случају не може да се сведе на факторизацију на линеарне факторе (а да се истовремено постигне да коефицијенти свих фактора буду реални), јер квадратни полином не мора да има реалне нуле. Другим речима, иредуцибилни реални полиноми су квадратни и линеарни, док су иредуцибилни комплексни полиноми линеарни. Произвољни полином може да се факторише над $\mathbf{C}$ као производ линеарних, а над $\mathbf{R}$ као производ линеарних и квадратних који немају реалне нуле.

Пример 24. У Примеру 90 смо видели факторизацију полинома

$$p(z) = z^4 - 1$$

над $\mathbf{C}$. Његова факторизација над $\mathbf{R}$ је

$$p(z) = (z-1)(z+1)(z^2+1).$$

Полином z^2+1 који се појављује у овој факторизацији нема реалних нула, па је иредуцибилан над $\mathbf{R}$, тј. не може да се напише као производ два линеарна полинома са реалним коефицијентима. ♯

Пример 25. Факторизација полинома $p(z) = z^3 - 1$ над $\mathbf{R}$ је

$$p(z) = (z-1)(z^2+z+1).$$

Квадратни полином у овој факторизацији нема реалних нула, јер је

$$z^2 + z + 1 = \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

за $z \in \mathbf{R}$.

У Задатку 114 на стр. 79 ћемо да видимо како се овај полином факторише над $\mathbf{C}$ на линеарне факторе. ♯

Задатак 91. Факторисати полином из Задатка 90 над $\mathbf{R}$. ✓

Пример 26. Једначина

$$az^2 + bz + c = 0, \quad \text{тј.} \quad z^2 + a^{-1}bz + a^{-1}c = 0$$

се решава *комплетирањем квадрата* на левој страни:

$$z^2 + a^{-1}bz + a^{-1}c = (z + a^{-1}b/2)^2 - (a^{-1}b/2)^2 + a^{-1}c.$$

Одатле следи да су

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

нуле полинома $p(z) = az^2 + bz + c$. Израз под кореном,

$$D = b^2 - 4ac$$

назива се *дискриминантом* квадратног полинома. Приметимо да квадратни полином има двоструку нулу $r = r_1 = r_2$ ако и само ако је $D = 0$. У том случају квадратни полином може да се напише у облику $a(z-r)^2$, тј. пропорционалан је потпуном квадрату. Специјално, монични (тј. такав да је $a = 1$) квадратни полином $x^2 + bx + c$ је потпун квадрат ако и само ако је његова дискриминанта једнака нули. ♯

Пример 27. (Елементарни симетрични полиноми. Вијетове[32] формуле) Изрази

$$\sigma_0 = 1, \quad \sigma_1 = \sum_{1\le i\le n} r_i, \quad \sigma_2 = \sum_{1\le i<j\le n} r_i r_j, \quad \sigma_3 = \sum_{1\le i<j<k\le n} r_i r_j r_k$$

итд, до $\sigma_n = r_2 r_2 \cdot \ldots \cdot r_n$, или, у општем случају,

$$\sigma_k = \sum_{1\le j_1<j_2<\ldots<j_k\le n} r_{j_1} r_{j_2} \cdot \ldots \cdot r_{j_k},$$

називају се *елементарним симетричним полиномима* променљивих $r_1, \ldots, r_n$. Ако су $r_1, \ldots, r_n$ нуле полинома

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$$

и $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n$ симетрични полиноми променљивих $r_1, \ldots, r_n$, онда је

$$\sigma_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}.$$

Ови изрази називају се *Вијетовим формулама.* Доказ може да се изведе индукцијом по n. За $n = 1$ тврђење је очигледно тачно. Претпоставимо да је оно тачно за полиноме степена n. Нека је p полином степена $n+1$. Из Основног става алгебре следи да је

$$p(z) = a_{n+1}(z - r_{n+1})q(z),$$

где је r_{n+1} нула полинома p, а $q(z)$ полином степена n чији је коефицијент уз z^n једнак јединици. Нека су $r_1, \ldots, r_n$ нуле полинома q (а тиме и полинома p). Из индуктивне претпоставке следи да је

$$q(z) = z^n - \sigma_1 z^{n-1} + \ldots + (-1)^n \sigma_n.$$

Одатле следи да је

$$p(z) = a_{n+1}(z - r_{n+1})(z^n - \sigma_1 z^{n-1} + \ldots + (-1)^n \sigma_n),$$

одакле, множењем, добијамо Вијетове формуле. ♯

Пример 28. (Кубна једначина) Једначина трећег степена

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad a \neq 0$$

своди се, сменом

$$x = t - \frac{b}{3a}, \tag{63}$$

на једначину

$$t^3 + pt + q, \quad \text{где је} \quad p = \frac{3ac - b^2}{3a^2},\ q = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2 d}{27a^3}.$$

Уведимо сада у једначину $t^3 + pt + q = 0$ смену

$$t = u + v, \tag{64}$$

где је u нова променљива, а v ћемо да изаберемо касније тако да максимално упрости једначину. Ако уврстимо (64) у једначину $t^3 + pt + q = 0$, после сређивања насталог израза добијамо

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0.$$

[32] Вијет (Francois Viète, 1540–1603), француски математичар

Изаберимо сада v тако да је $3uv + p = 0$, тј.

$$uv = -\frac{p}{3} \tag{65}$$

Тада је

$$u^3 + v^3 = -q. \tag{66}$$

Приметимо да (65) може да се напише и у облику

$$u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27},$$

што, заједно са (66) показује да u^3 и v^3 задовољавају Вијетове формуле (Пример 27 за $n = 2$), тј. да су u^3 и v^3 решења једначине

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Решавањем ове једначине поступком из Примера 26 добијамо u и v. Одатле, уз помоћ (64) налазимо t, а затим из (63) и x. Ово је тзв. Карданов[33] метод решавања кубних једначина. Сматра се да је овај метод открио Николо Тарталља[34] и открио га Кардану, који је обећао (и затим прекршио обећање) да ће овај метод да чува као тајну. ♯

Пример 29. (Једначина четвртог степена) Слично као у Примеру 28, једначина

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, \quad a \neq 0$$

сменом

$$x = t - \frac{b}{4a}$$

своди се на једначину облика

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0.$$

Ова једначина може да се напише у облику

$$(x^2 + p)^2 = px^2 - qx + (p^2 - r). \tag{67}$$

Уведимо, привремено, још једну променљиву y и напишимо (67) у облику

$$(x^2 + p + y)^2 = (p + 2y)x^2 - qx + (p^2 - r + 2py + y^2) \tag{68}$$

(другим речима, (68) се добија из (67) додавањем величине $2(x^2 + p)y + y^2$ на обе стране). Изаберимо сада y тако да израз на десној страни буде потпун квадрат. То значи, као што смо видели у Примеру 26, да дискриминанта квадратног полинома на десној страни треба да буде једнака нули, тј.

$$q^2 - 4(p + 2y)(p^2 - r + 2py + y^2) = 0.$$

Приметимо да је ово кубна једначина по y, коју можемо да решимо Кардановим поступком из Примера 28. Ако добијено решење уврстимо у (68), добијамо потпуне квадрате на обе стране. Скраћивањем квадрата једначину сводимо на квадратну, коју решавамо као у Примеру 26.

Овај метод решавања једначине четвртог степена открио је Карданов ученик Ферари[35] ♯

[33] Кардано (Gerolamo Cardano, 1501–1576), италијански математичар, лекар, астролог, коцкар и шахиста

[34] Тарталља (Niccolò Fontana Tartaglia, 1499/1500–1557), италијански математичар

[35] Ферари (Lodovico Ferrari, 1522–1565), италијански математичар

Напомена 8. Природно је поставити питање да ли постоје методи, слични методима из претходних примера, за решавање једначина петог и вишег реда. Прецизније, да ли се решење једначине петог (или вишег) реда може изразити полазећи од коефицијената и још неких рационалних константи (нпр. $1/2$ у формули решења квадратне једначине), помоћу операција сабирања, одузимања, множења, дељења, степеновања и кореновања. Одговор на ово питање је, у општем случају, *негативан*. До овог резултата су, независно један од другог, дошли Абел и Галоа[36]. ◇

Пример 30. **(Рационалне нуле полинома)** Некад је могуће наћи нуле полинома вишег степена са целобројним коефицијентима[37] на следећи начин. Нека је

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

полином са коефицијентима $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{Z}$. Ако је цео број $k \in \mathbf{Z}$ нула полинома p, онда је слободан коефицијент a_0 дељив са k. Заиста, претпоставимо да је $p(k) = 0$. Тада је

$$a_0 = -a_1 k - a_2 k^2 - \cdots - a_n k^n,$$

одакле следи $k|a_0$. Приметимо да је ово специјални случај Задатка 88 на стр. 62: целобројне нуле полинома p деле $p(0)$.

Општије, ако је рационалан број $\frac{k}{j}$ ($k \in \mathbf{Z}$, $j \in \mathbf{N}$), нула полинома p, онда је слободан коефицијент a_0 дељив са k, а настарији коефицијент a_n је дељив са j. Заиста, множењем обе стране једнакости $p(k/j) = 0$ са j^n добијамо

$$a_0 j^n + a_1 j^{n-1} k + \cdots + a_{n-1} j k^{n-1} + a_n k^n = 0,$$

одакле следи наше тврђење.

Ако на овај начин успемо да погодимо бар једну нулу полинома, тј. да нађемо r за које је $p(r) = 0$, онда можемо полином p да поделимо са $(x - r)$ и добијемо

$$p(x) = (x - r)q(x),$$

где је q полином степена мањег од n (дакле једноставнији од полинома p), чије нуле можда можемо да нађемо.

На пример, једначину трећег степена

$$3x^3 + 15x^2 - 12x - 60 = 0 \tag{69}$$

можемо да решимо на овај начин. Ако једначина (69) има целобројно решење, онда је то решење један од фактора (не обавезно простих) у факторизацији слободног коефицијента

$$60 = 1 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 5, \tag{70}$$

Провером закључујемо да је $p(2) = 0$, тј. $x = 2$ је заиста нула полинома. Можемо да наставимо и проверимо да ли су остали фактори у (70) нуле полинома (нпр. $x = \pm 4$ није, као ни $x = 60$, ни $x = 1...$), а можемо и да поделимо полином на десној страни у (69) са $x - 2$ и добијемо

$$3x^3 + 15x^2 - 12x - 60 = (x - 2)(3x^2 + 21x + 30),$$

---

[36] Галоа (Evariste Galois, 1811–1832), француски математичар

[37] Наравно, исти метод може да се примени и на налажење нула полинома са рационалним (а не само целобројним) коефицијентима, јер се у том случају једначина $p(x) = 0$ множењем са заједничким садржаоцем именилаца коефицијената своди на тражење нула полинома са целобројним коефицијентима.

а затим једначину $3x^2+21x+30=0$ решимо као у Примеру 26. Тако добијамо да су решења једначине (69) 2, -5 и $-\frac{1}{2}$. ♯

Задатак 92. Решити једначину (69) методом из Примера 28. ✓

Задатак 93. Решити једначину $x^4+2x^3+x^2-2x-2=0$. ✓

Задатак 94. Доказати да једначина

$$2x^3+3x^2+5=0$$

нема рационалних решења. ✓

Напомена 9. Помоћу метода из Примера 30 можемо да дамо још један доказ чињенице да је $\sqrt{2}$ ирационалан број: једначина $x^2-2=0$ нема рационалних решења, јер би именилац таквог решења морао да дели број 1, а бројилац 2. Једини такви бројеви су ± 2 и ± 1, а они очигледно нису решења. ◇

Задатак 95. Доказати да за $n \in \mathbf{N}$ важи

$$\sqrt{n} \in \mathbf{Q} \;\Leftrightarrow\; \sqrt{n} \in \mathbf{N}$$

Да ли важи уопштење:

$$\sqrt[k]{n} \in \mathbf{Q} \;\Leftrightarrow\; \sqrt[k]{n} \in \mathbf{N}$$

за све $k \in \mathbf{N}$? Упутство: видети Напомену 9. ✓

Задатак 96. Нека је $n \in \mathbf{N}$ потпун квадрат. Доказати да су једина целобројна решења једначине

$$x^2-ny^2=1 \tag{71}$$

$(x,y)=(\pm 1,0)$. ✓

Напомена 10. Једначина (71) назива се *Пеловом*[38] *једначином*. Ако n није потпун квадрат, као у Задатку 96, из Задатка 95 следи да је $\sqrt{n}$ ирационалан број. У том случају, решавању Пелове једначине

$$x^2-ny^2=1$$

(тј. налажењу њених *целобројних* решења) можемо да приступимо на следећи начин. Скуп

$$\mathbf{Z}[\sqrt{n}] := \{a+b\sqrt{n} \mid a,b \in \mathbf{Z}\}$$

је прстен. Пелова једначина може да се напише у облику

$$(x+y\sqrt{n})\cdot(x-y\sqrt{n})=1. \tag{72}$$

Множиоци на левој страни су елементи прстена $\mathbf{Z}[\sqrt{n}]$.

По угледу на дефинцију конјугата и модула комплексног броја, можемо да дефинишемо *конјугат и норму у прстену* $\mathbf{Z}[\sqrt{n}]$ са

$$\overline{x+y\sqrt{n}} = x-y\sqrt{n} \qquad \text{и} \qquad N(\alpha)=\alpha\cdot\overline{\alpha}.$$

Лако се види да је норма *мултипликативна*, тј. да важи

$$N(\alpha\cdot\beta)=N(\alpha)\cdot N(\beta) \qquad \text{за све} \qquad \alpha,\beta \in \mathbf{Z}[\sqrt{n}].$$

Једначина (72) нам каже да су решења Пелове једначине јединични елементи (тј. елементи чија је норма 1) прстена $\mathbf{Z}[\sqrt{n}]$. Приметимо да су јединични елементи инвертибилни у прстену $\mathbf{Z}[\sqrt{n}]$: из (72) следи да је инверз

[38] Пел (John Pell, 1611–1685), енглески математичар

јединичног елемента $x + y\sqrt{n}$ елемент $x - y\sqrt{n}$, одакле следи да је инверз јединичног елемента α елемент $\bar{\alpha}$.

Претпоставимо да осим тривијалног решења

$$(x, y) = (\pm 1, 0), \qquad \text{тј.} \qquad x + y\sqrt{n} = \pm 1$$

постоји и нетривијално решење $x_0 + y_0\sqrt{n}$, $x_0, y_0 \in \mathbf{Z}$, које је различито од ± 1. Тада су и

$$x_0 - y_0\sqrt{n}, \qquad -x_0 + y_0\sqrt{n}, \qquad -x_0 - y_0\sqrt{n}$$

такође решења једначине (72). Очигледно је да је бар једно од тих решења веће од 1.

Нека је α најмање такво решење, тј. најмање решење једначине (72) које је веће од 1. Показаћемо да су онда *сва* решења Пелове једначине (72) облика $\pm\alpha^m$, $m \in \mathbf{Z}$.

Заиста, нека је β произвољно решење Пелове једначине, тј. нека је

$$\beta \in \mathbf{Z}[\sqrt{n}], \qquad N(\beta) = 1.$$

Као и неколико пута до сада, комбиновањем Архимедове аксиоме и Бернулијеве неједнакости закључујемо да постоји $k \in \mathbf{Z}$ за које је

$$\alpha^k \leq \beta \leq \alpha^{k+1}.$$

Ако помножимо ову неједнакост са $\bar{\alpha}$ (сетимо се да је то инверз елемента α; читаоцу остављамо као задатак да покаже да је овај број позитиван) k пута, добијамо

$$1 \leq \bar{\alpha}^k \cdot \beta < \alpha. \tag{73}$$

Међутим, из мултипликативности норме следи да је

$$N(\bar{\alpha}^k \cdot \beta) = N(\bar{\alpha}^k) \cdot N(\beta) = 1,$$

па је $\bar{\alpha}^k \cdot \beta$ јединични елемент. Пошто је, по претпоставци, α најмањи јединични елемент већи од један, из (73) следи да је

$$\bar{\alpha}^k \cdot \beta = 1, \qquad \text{тј.} \qquad \beta = \alpha^k.$$

Може да се докаже да, ако n није потпун квадрат, Пелова једначина увек има нетривијално решење. Из претходне дискусије следи да она у том случају има бесконачно много целобројних решења. ◇

Задатак 97. Наћи све јединичне елементе прстена $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ и решити Пелову једначину $x^2 - 2y^2 = 1$. ✓

Задатак 98. Нека су r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 нуле полинома

$$p(z) = 3z^5 - 2z^4 + z^3 + 7z^2 - 11z + \sqrt[3]{2}.$$

(а) Израчунати

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 + r_5^2. \tag{74}$$

Упутство: доказати да је збир (74) једнак

$$\Big(\sum_{1\leq k\leq 5} r_k\Big)^2 - 2\Big(\sum_{1\leq i<j\leq 5} r_i r_j\Big)$$

и применити Вијетове формуле.

(б) Израчунати

$$\frac{1}{r_1+1}+\frac{1}{r_2+1}+\frac{1}{r_3+1}+\frac{1}{r_4+1}+\frac{1}{r_5+1}. \tag{75}$$

Упутство: ако је r нула полинома $a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$, доказати да је $1/r$ нула полинома $a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$, а да је $r+1$ нула полинома $a_0+a_1(z-1)+\cdots+a_n(z-1)^n$. Наћи полином такав да је сваки сабирак у (75) његова нула и применити Вијетове формуле. ✓

У Примеру 30 на стр. 67 смо видели која својства морају да имају рационални бројеви који су нуле полинома са целобројним (или, еквивалентно, рационалним) коефицијентима. Наравно, нуле полинома са рационалним (тј. целобројним) коефицијентима не морају да буду рационални бројеви, као што смо видели на примеру броја $\sqrt{2}$, који је нула полинома x^2-2. Нуле полинома са целобројним коефицијентима издвајамо следећом дефиницијом.

Дефиниција 29. Број $\alpha\in\mathbf{C}$ назива се *алгебарским бројем* ако постоји полином P са целим (или, еквивалентно, рационалним) коефицијентима, такав да је $P(\alpha)=0$. *Степен* алгебарског броја је најмањи степен полинома P таквог да је $P(\alpha)=0$. Другим речима, α је алгебарски број степена d ако је он нула неког полинома степена d са рационалним коефицијенима, и није нула ниједног полинома са рационалним коефицијентима који има степен мањи од d. Број је *трансцендентан* ако није алгебарски. ◊

Задатак 99. Доказати да је скуп алгебарских бројева пребројив. ✓

Пример 31. (Лиувилов број) Из Задатка 99 следи да постоје трансцендентни бројеви. Штавише, из њега следи да трансцендентних бројева има више него алгебарских. Али, није лако конструисати трансцендентан број! Први пример трансцендентног броја конструисао је Лиувил[39] 1844. године, када је доказао да број

$$L=10^{-1!}+10^{-2!}+10^{-3!}+10^{-4!}+\cdots$$

није алгебарски. Број L се по њему назива *Лиувиловим бројем*[40]. Трансцендентност броја L ћемо да докажемо у Глави 4 (Пример 46 на стр. 196). ♯

Задатак 100. Нека је $\alpha\in\mathbf{C}$ алгебарски број. Доказати да је

$$\mathbf{Q}[\alpha]:=\{c_0+c_1\alpha+\ldots+c_n\alpha^n\mid n\in\mathbf{N},\ c_k\in\mathbf{Q}\}$$

поље. Доказати да је ово поље најмање раширење поља $\mathbf{Q}$ које садржи α.

Упутство: специјални случајеви овог задатка су Пример 17 на стр. 38 и Напомена 6 на стр. 60. Искористити исту идеју.

Детаљније упутство: Треба да докажемо да је

$$\frac{1}{c_0+c_1\alpha+\ldots+c_k\alpha^k}\in\mathbf{Q}[\alpha]. \tag{76}$$

Пошто је α алгебарски број, он је нула неког полинома $p(x)$ са рационалним коефицијентима. Не умањујући општост, можемо да претпоставимо да је степен полинома p већи од k, где је k степен полинома

$$h(x)=c_0+c_1x+\ldots+c_kx^k$$

---

[39] Лиувил (Joseph Liouville, 1809–1882), француски математичар

[40] Прецизније, L је само један од тзв. Лиувилових бројева, које ћемо сусрести у Напомени 3 на стр. 146.

у имениоцу израза (76) – у супротном, дељењем полинома h са p добијамо $h(x) = p(x)q(x) + h_1(x)$, где је h_1 полином чији је степен мањи од степена полинома p. Пошто је $p(\alpha) = 0$, биће $h(\alpha) = h_1(\alpha)$, па именилац у (76) можемо да заменимо са $h_1(\alpha)$.

Дакле, претпоставимо да је k, тј. степен полинома h, мањи од степена полинома p. Поступком дељења полинома добијамо

$$p(x) = h(x)q(x) + r(x), \qquad \text{тј.} \qquad h(x)q(x) = p(x) - r(x)$$

где је степен полинома r мањи од k. Помножимо и поделимо (76) са $q(\alpha)$. Пошто је $p(\alpha) = 0$, израз (76) је једнак

$$\frac{q(\alpha)}{r(\alpha)}.$$

Треба да докажемо да је

$$\frac{1}{r(\alpha)} \in \mathbf{Q}[\alpha]. \tag{77}$$

Степен полинома у имениоцу израза (77) је мањи од оног у (76). Понављајући овај поступак највише k пута, стижемо до степена 0 у имениоцу, тј. до константе $c \in \mathbf{Q}$.

Доказ да је $\mathbf{Q}[\alpha]$ *најмање* раширење поља $\mathbf{Q}$ које садржи α следи из затворености за операције поља. ✓

Задатак 101**.** Нека је α алгебарски број и p полином степена m са рационалним коефицијентима, такав да је $p(\alpha) = 0$. Доказати да је

$$\mathbf{Q}[\alpha] = \{c_0 + c_1\alpha + \ldots + c_{m-1}\alpha^{m-1} \mid c_k \in \mathbf{Q}\}.$$

Описати $\mathbf{Q}[\sqrt{1 + \sqrt[3]{2}}]$. ✓

Задатак 102**. (Гаусови цели бројеви)** Доказати да је скуп

$$\mathbf{Z}[i] := \{a + bi \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$$

комутативни прстен са јединицом (елементе овог прстена називамо *Гаусовим целим бројевима*). Доказати да прстен $\mathbf{Z}[i]$ има тачно четири инвертибилна елемента: ± 1, $\pm i$. ✓

9.3. Неуређеност поља C. Приметимо да, за разлику од поља $\mathbf{R}$, поље $\mathbf{C}$ није уређено. Прецизније, важи следећа лема.

Лема 15**.** *Не постоји релација поретка* $\leq$ *на* $\mathbf{C}$ *таква да је* $(\mathbf{C}, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ *уређено поље.*

△ У доказу Леме 14 на стр. 60 видели смо да у сваком уређеном пољу важи $x^2 > 0$. Када би поље $\mathbf{C}$ било уређено, важило би $-1 = i^2 > 0$, тј. (на основу Задатка 1 (стр. 8) $1 < 0$. Међутим, из Примера 13 (стр. 21) следи да у сваком уређеном пољу важи $0 < 1$. ▽

9.4. Метричка и тополошка својства комплексне равни. Већ смо рекли да се реални број

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbf{R} \tag{78}$$

назива се *апсолутном вредношћу* или *модулом* комплексног броја z.

Лема 16**.** *Апсолутна вредност има следећа својства*

0. $|x + i \cdot 0| = |x|$, $|x + iy| \geq \max\{|x|, |y|\}$, *где је* $|\cdot|$ *у изразима на левој страни апсолутна вредност комплексног броја дефинисана формулом 78, а на десној апсолутна вредност реалног броја, дефинисана формулом (46) на страни 49.*
1. $|z| \geq 0$, $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
2. $|\lambda \cdot z| = |\lambda| \cdot |z|$
3. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
4. $|z| = |-z| = |\bar{z}|$.

△ Доказ тврђења 0–2. и 4. своди се на непосредну проверу. Докажимо тврђење 3. Приметимо да је за сваки комплексни број $z = x + iy$ важи $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq \max\{x, y\}$, па је

$$\operatorname{Re} z \leq |z|, \quad \operatorname{Im} z \leq |z|.$$

Користећи ове неједнакости, добијамо

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} \\ &= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\ &= z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 \\ &= |z_1|^2 + z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2} + |z_2|^2 \\ &= |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) + |z_2|^2 \\ &\leq |z_1|^2 + 2|z_1\bar{z}_2| + |z_2|^2 \\ &= |z_1|^2 + 2|z_1 z_2| + |z_2|^2 \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2. \end{aligned}$$

Тиме је доказано 3. ▽

Задатак 103. Доказати да је скуп $\mathbf{U}(1) := \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$ група у односу на множење комплексних бројева и да $z^{-1} = \bar{z}$ за свако $z \in \mathbf{U}(1)$. ✓

Дефиниција 30. Скуп $\mathbf{U}(1) := \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$ називамо *једнодимензионом унитарном групом* или *јединичним кругом*. Означавамо га и са $\mathbf{S}^1$; ознака $\mathbf{U}(1)$ обично се користи када желимо да истакнемо његову алгебарску (груповну) структуру, а $\mathbf{S}^1$ геометријску. Елементе скупа $\mathbf{S}^1$ називамо *јединичним комплексним бројевима*. За $z_0 \in \mathbf{S}^1$ скуп $\{\lambda z_0 \mid \lambda \in [0, +\infty)\}$ зовемо *полуправом* са почетком у нули.

Задатак 104. Доказати да је за свако $z \in \mathbf{S}^1 \setminus \{-1, 1\}$ количник

$$\frac{z+1}{z-1}$$

чисто имагинарни број. ✓

Задатак 105. Доказати је да за сваки број $z \in \mathbf{S}^1$, такав да је $z^{2n} \neq -1$, количник

$$\frac{z^n}{1+z^{2n}}$$

реалан број. ✓

Дефиниција 31. Пресликавање $d : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \to [0, +\infty)$ дефинисано са $d(z_1, z_2) = |z_2 - z_1|$ називамо *еуклидским растојањем* или *еуклидском метриком* у комплексној равни $\mathbf{C}$.

Из Леме 16 следи да d има следећа својства, аналогна својству метрике на реалној правој (в. стр. 6.1):

(M1) $d(z_1, z_2) \geq 0$ и $d(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2$
(M2) $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$
(M3) $d(z_1, z_3) \leq d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3)$.

Неједнакост (M3), као и неједнакост 3) у Леми 16, називамо *неједнакошћу троугла*. Еквиваленцију у (M1) називамо својством *недегенерисаности метрике*.

Задатак 106. Наћи растојање тачке

$$\frac{1+i}{\sqrt{3}i-1}$$

комплексне равни $\mathbf{C}$ од координатног почетка. ✓

Задатак 107. Доказати да за комплексне бројеве z, w важи *једнакост паралелограма*:

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2).$$

Зашто се ова једнакост тако зове? ✓

Дефиниција 32. Пресликавање $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ за које важи

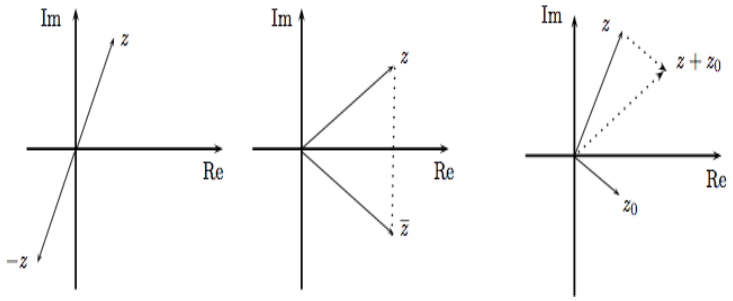
$$d(f(z_1), f(z_2)) = d(z_1, z_2) \tag{79}$$

назива се *изометријском трансформацијом* или *изометријом* комплексне равни.

Задатак 108. (а) Доказати да је скуп свих изометријских трансформација комплексне равни група у односу на операцију композиције пресликавања. Ова група се означава са $\mathbf{E}(2)$ и назива *Еуклидском групом*. Упутство: доказати прво да је свака изометрија бијекција, а затим да је скуп изометрија подгрупа групе $S_{\mathbf{C}}$ (Задатак 6 на стр. 10). Инјективност је лакше доказати, она следи из (79) и недегенерисаности метрике (M1). За доказ сурјективности искористити чињеницу да изометрија слика праве на праве (зашто?), па самим тим и троуглове на троуглове. За $w \in \mathbf{C}$ посматрати троугао са теменима $f(z_1)$, $f(z_2)$ и w и доказати да је он слика неког троугла.

(б) Доказати да је скуп свих изометријских трансформација комплексне равни које сликају нулу у нулу подргупа групе $\mathbf{E}(2)$. Ова подгрупа означава се са $\mathbf{O}(2)$ и назива *ортогоналном групом*. ✓

Пример 32. Из дефиниције метрике и особина модула следи да су пресликавања $z \mapsto -z$, $z \mapsto \bar{z}$, $z \mapsto -\bar{z}$, $z \mapsto z + z_0$ (за неко фиксирано $z_0 \in \mathbf{C}$) изометријске трансформације комплексне равни.



Изометријску трансформацију $z \mapsto -z$ називамо *централном рефлексијом* у односу на координатни почетак, $z \mapsto \bar{z}$ и $z \mapsto -\bar{z}$ *осним рефлексијама* у односу на реалну и имагинарну осу, а $z \mapsto z + z_0$ *транслацијом*. ♯

Следећом дефиницијом издвајамо подскупове комплексне равни који играју улогу интервала на реалној правој.

Дефиниција 33. За $z_0 \in \mathbf{C}$ и $r > 0$ скуп

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbf{C} \mid |z - z_0| < r\}$$

назива се *отвореним диском*, а скуп

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbf{C} \mid |z - z_0| \leq r\}$$

затвореним диском са центром у z_0 и полупречником r. Скуп $D(z_0, \varepsilon)$ назива се $\varepsilon-$ околином тачке z_0.

Имајући претходну дефиницију на располагању, тополошке појмове околине, тачке нагомилавања, изоловане тачке, отвореног и затвореног скупа, дефинисане на реалној правој, можемо да дефинишемо и у комплексној равни на потпуно исти начин. Тачка $z_0 \in \mathbf{C}$ се назива *тачком нагомилавања* скупа $A \subset \mathbf{C}$ ако свака њена ε–околина садржи тачку скупа $A \setminus \{z_0\}$. Скуп свих тачака нагомилавања означаваћемо са A'. Скуп $\overline{A} := A \cup A'$ назива се *затварањем* скупа A. Ако је $A = \overline{A}$ скуп A називамо *затвореним*. Тачка $a_0 \in A$ која није тачка нагомилавања назива се *изолованом тачком* скупа A. Подскуп $V \subset \mathbf{C}$ је *отворен* ако се може представити као унија отворених дискова. Из ове дефиниције директно следи карактеризација отворених скупова у $\mathbf{C}$ аналогна Леми 9 на страни 53. Отворен скуп који садржи тачку z_0 назива се њеном *отвореном околином*. Колекција свих отворених скупова у $\mathbf{C}$ назива се *топологијом* комплексне равни; означаваћемо је са $\tau_{\mathbf{C}}$. Топологија $\tau_{\mathbf{C}}$ има својства топологије $\tau_{\mathbf{R}}$ описана у Леми 10, стр. 53. *Руб* скупа $A \subset \mathbf{C}$ је скуп $\partial A := \overline{A} \cap \overline{(\mathbf{C} \setminus A)}$.

Задатак 109. Нека је $A = \{z \in \mathbf{C} \mid 0 < |z| < 1\} \cup \{1+i\}$. Наћи све изоловане тачке скупова A и $\mathbf{C} \setminus A$. Наћи све тачке нагомилавања ових скупова и њихове рубове. ✓

Задатак 110. Нека је

$$A = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re} z > 0 \ \wedge \ |z| \leq 1\} \quad \text{и} \quad B = \{z \in A \mid \operatorname{Re} z \in \mathbf{Q} \ \wedge \ \operatorname{Im} z \in \mathbf{Q}\}.$$

Наћи ∂A и ∂B. ✓

Подскуп $Z \subset \mathbf{C}$ се назива ограниченим, ако постоји $M > 0$ такво да је $|z| \leq M$ за свако $z \in Z$. Касније ћемо да докажемо да теорема аналогна Теореми 20 важи и за скупове у $\mathbf{C}$ (в. Теорему 3 на стр. 173).

9.5. Тригонометрија. Нека су

$$z_0 = x_0 + iy_0, \ z_1 = x_1 + iy_1 \ \in \ \mathbf{S}^1$$

два јединична комплексна броја у првом квадранту. Претпоставимо да је $x_0 > x_1 \geq 0$ (тада је $0 \leq y_0 < y_1$). Скуп

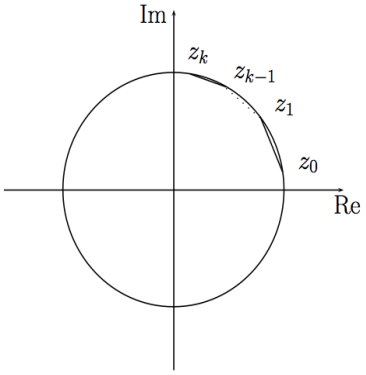
$$\{z \in \mathbf{S}^1 \mid x_1 \leq \operatorname{Re} z \leq x_0\}$$

називамо *луком* јединичног круга између тачака z_0 и z_1 или *луком* $\widehat{z_0 z_1}$. Нека је $w = x_0 + iy_1$. Тада је

$$d(z_0, z_1) \leq d(z_0, w) + d(w, z_1) = (y_1 - y_0) + (x_0 - x_1). \tag{80}$$

Нека су $z_0, z_1, \ldots, z_k$ комплексни бројеви за које важи

$$\begin{aligned} &z_0, z_1, \ldots, z_k \in \mathbf{S}^1, \\ &\operatorname{Re}(z_0) > \operatorname{Re}(z_1) > \cdots > \operatorname{Re}(z_k) \geq 0, \\ &\operatorname{Im}(z_k) > \operatorname{Im}(z_{k-1}) > \cdots > \operatorname{Im}(z_0) \geq 0. \end{aligned} \tag{81}$$



Бројеве $z_0, z_1, \ldots, z_k$ називамо *поделом* лука $\widehat{z_0 z_k}$. Применом (80) на сваки сабирак и скраћивањем сабирака супротног знака добијамо

$$d(z_0, z_1) + d(z_1, z_2) + \cdots + d(z_{k-1}, z_k) \leq \operatorname{Re}(z_0) - \operatorname{Re}(z_k) + \operatorname{Im}(z_k) - \operatorname{Im}(z_0) \leq 2.$$

Нека су $\zeta, \eta \in \mathbf{S}^1$ јединични комплексни бројеви. Видели смо да је скуп

$$L = \{d(z_0, z_1) + \cdots + d(z_{k-1}, z_k) \mid z_0 = \zeta,\ z_k = \eta,\ z_0, z_1, \ldots, z_k \text{ задовољавају (81)}\}$$

ограничен одозго, па има супремум.

Дефиниција 34. Број $\sup L$ из претходне конструкције називамо *дужином лука* јединичног круга између тачака ζ и η или *углом* између полуправих $\{\lambda\zeta \mid \lambda \in [0, +\infty)\}$ и $\{\lambda\eta \mid \lambda \in [0, +\infty)\}$.

Пресликавања $z \mapsto -z$, $z \mapsto \bar{z}$, $z \mapsto -\bar{z}$ пресликавају први квадрант у трећи, четврти и други редом. Осим тога, као што смо видели у Примеру 32, ова пресликавања чувају метрику. Пошто је појам угла (тј. дужине лука јединичног круга) изведен из појма метрике, дефинишемо угао између полуправих у осталим квадрантима користећи ове три изометрије. На пример, ако су l_1, l_2 две полуправе у четвртом квадранту, угао између њих дефинишемо као угао између њихових слика при пресликавању $z \mapsto \bar{z}$. На крају, угао између полуправих у разним квадрантима дефинишемо по адитивности. На пример, ако су z_1, z_2 јединични комплексни бројеви, такви да је z_1 у првом, а z_2 у другом квадранту, угао између њима одређених полуправих дефинишемо као збир углова између полуправих $\{\lambda z_1 \mid \lambda \in [0, +\infty)\}$ и $\{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re}(z) = 0,\ \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$ и полуправих $\{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re}(z) = 0,\ \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$ и $\{\lambda z_2 \mid \lambda \in [0, +\infty)\}$.

Специјално, угао између позитивне реалне полуосе $\{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re}(z) \geq 0,\ \operatorname{Im}(z) = 0\}$ и позитивне имагинарне полуосе $\{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re}(z) = 0,\ \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$ називамо *правим углом*. Двоструку вредност правог угла означавамо са π. $\Diamond$

Задатак 111. Доказати да је дужина лука адитивна, тј. да је

$$\widehat{z_0z_2} = \widehat{z_0z_1} + \widehat{z_1z_2},$$

за $\Im(z_0) < \Im(z_1) < \Im(z_2)$. ✓

Симбол π, који је почетно слово грчке речи $\pi\varepsilon\rho\iota\varphi\varepsilon\rho\iota\alpha$ – периферија (круг), за ознаку овог броја први је употребио Вилијем Џонс.[41]

Број π није рационалан. Ову чињеницу доказао је Јохан Ламберт[42] 1761. године (ми ћемо у Глави 6 изложити једноставнији доказ ове чињенице који је пронађен касније). Око век и по касније, Фердинанд Линдеман[43] доказао је да је број π *трансцендентан*, тј. да није нула ниједног полинома са целобројним (еквивалентно, рационалним) коефицијентима. Овиме је решен древни проблем о „квадратури круга".[44]

Избором довољног броја тачака $z_0, \ldots, z_k \in \mathbf{S}^1$ можемо да одредимо његових првих неколико децимала:

$$\pi = 3,1415926535897932\ldots$$

Управо на овај начин је Лудолф ван Џојлен[45] одредио првих 35 децимала броја π који се, по њему, зове и *Лудолфовим бројем*. Овај Лудолфов резултат је уграviран на његовом надгробном споменику. Пре Лудолфа, било је много разних апроксимација броја π, почев од доба древних Египћана и Вавилонаца. Архимед даје процену $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$. Лудолфов савременик Вијет[46] добио је израз за π у облику бесконачног производа

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots. \tag{82}$$

Међу осталим интересантним формулама за π су Валисова[47] формула

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot \ldots}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot \ldots} \tag{83}$$

и Лајбницова[48] формула

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots. \tag{84}$$

Угао између позитивне реалне полуосе и полуправе одређене координатним почетком и комплексним бројем z назива се *поларним углом* или *аргументом* броја z. Он има вредности у интервалу $[0, 2\pi)$. Означимо аргумент броја $z \in \mathbf{S}^1 \cap \mathbf{I}$ са $\arg(z)$, а са $\mathrm{Arg}\,(z)$ скуп

$$\mathrm{Arg}\,(z) = \{\arg(z) + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}.$$

---

[41] Џонс (William Jones, 1675–1749), енглески математичар

[42] Ламберт (Johann Heinrich Lambert, 1728–1777), швајцарско – немачки математичар

[43] Линдеман (Ferdinand von Lindemann, 1852–1939), немачки математичар

[44] Трансцендентност бројева e и π ћемо да докажемо у Примерима 4 и 5 у Глави 6.

[45] Лудолф ван Џојлен (Ludolf van Ceulen, 1540–1610), холандски математичар

[46] Вијет (Frans Vi, 1540–1603), француски математичар

[47] Валис (J. Wallis, 1616–1703), енглески математичар

[48] Лајбниц (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646–1716), немачки философ и математичар

Поделу комплексне равни на квадранте можемо да опишемо у терминима аргумента:

$$\mathbf{I} = \{z \in \mathbf{C} \mid 0 \leq \arg(z) \leq \tfrac{\pi}{2}\}, \qquad \mathbf{II} = \{z \in \mathbf{C} \mid \tfrac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq \pi\},$$
$$\mathbf{III} = \{z \in \mathbf{C} \mid \pi \leq \arg(z) \leq \tfrac{3\pi}{2}\}, \quad \mathbf{IV} = \{z \in \mathbf{C} \mid \tfrac{3\pi}{2} \leq \arg(z) \leq 2\pi\}.$$

Нека су $\zeta_1 = x_1 + iy_1, \zeta_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbf{S}^1 \cap \mathbf{I}$. Посматрањем подела

$$1 = z_1, z_2, \ldots, z_j = \zeta_1, z_{j+1}, \ldots, z_k = \zeta_2$$

лука $\widehat{1\zeta_2}$ лако видимо да за комплексне бројеве из првог квадранта важи

$$x_1 > x_2 \;\Rightarrow\; \arg(\zeta_1) < \arg(\zeta_2). \tag{85}$$

Одатле следи да је углом $\arg(z)$ број $z \in \mathbf{S}^1 \cap \mathbf{I}$ једнозначно одређен, тј. да је придруживање $z \mapsto \arg(z)$ инјекција скупа тачака из $\mathbf{S}^1$ које су у првом квадранту у интервал $[0, \frac{\pi}{2}]$. Применом Аксиоме супремума доказаћемо да је ово придруживање и сурјекција, дакле бијекција. Нека је $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Скупови

$$A = \{x \in [0,1] \mid x = \mathrm{Re}\,(z) \text{ за неко } z \in \mathbf{S}^1 \cap \mathbf{I} \text{ са } \arg(z) \leq \theta_0\},$$
$$B = \{x \in [0,1] \mid x = \mathrm{Re}\,(z) \text{ за неко } z \in \mathbf{S}^1 \cap \mathbf{I} \text{ са } \arg(z) \geq \theta_0\}$$

су ограничени и непразни ($i \in A$, $1 \in B$), па постоје $a = \sup A$ и $b = \inf B$. Тада из (85) следи да је $a \leq b$. Када би било $a < b$, тада би број $\frac{a+b}{2}$ припадао једном од скупова A и B, што је у контрадикцији са $a = \sup A$, $b = \inf B$. Значи, важи $a = b$. Сада се лако види да за број $z_0 \in \mathbf{S}^1$ за који је $\mathrm{Re}\,(z_0) = a = b$ задовољава $\arg(z_0) = \theta_0$, јер би $\arg(z_0) \neq \theta_0$ било у контрадикцији или са $a = \sup A$ или са $b = \inf B$.

Дефиниција 35. Нека је $z \in \mathbf{S}^1 \cap \mathbf{I}$ број чији је поларни угао θ. Реалне бројеве

$$\sin\theta := \mathrm{Im}\,(z), \quad \cos\theta := \mathrm{Re}\,(z)$$

називамо *синусом* и *косинусом* угла θ.

Из Дефиниције 35 и (78) следи $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

Дефиницију синуса и косинуса сада можемо да проширимо на све $\theta \in [0, 2\pi]$ – множење имагинарном јединицом i је изометријска трансформација комплексне равни која слика први квадрант у други, други у трећи, а трећи у четврти, па изрази у Дефиницији 35 имају смисла за свако $z \in \mathbf{S}^1$. Коначно, можемо да дефинишемо изразе $\sin\theta$ и $\cos\theta$ за свако $\theta \in \mathbf{R}$ формулама

$$\sin(\theta + 2k\pi) = \sin\theta, \quad \cos(\theta + 2k\pi) = \cos\theta, \quad \text{за свако } k \in \mathbf{Z}.$$

За овако дефинисане функције синус и косинус важи

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta, \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta.$$

Функције са овим својствима издвајамо следећом дефиницијом.

Дефиниција 36. Функција $f : (-a, a) \to \mathbf{C}$ назива се *парном* ако је $f(-x) = f(x)$, а *непарном* ако је $f(-x) = -f(x)$.

Функција $f(x) = x^n$ је парна за парно, а непарна за непарно n, чиме је и мотивисана терминологија из претходне дефиниције. Синус је непарна, а косинус парна функција.

Нека је $z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$.Тада је $\frac{z}{|z|} \in \mathbf{S}^1$, па је $\frac{z}{|z|} = \cos\theta + i\sin\theta$, тј.

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad \text{где је} \quad r = |z|. \tag{86}$$

Израз (86) називамо *тригонометријским записом* комплексног броја. Пар (r,θ) називамо *поларним координатама* комплексног броја $z = x + iy$ (или тачке $(x,y) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}$). Израз $\cos\theta + i\sin\theta$ означава се и са $\operatorname{cis}\theta$.

Лема 17. *Синус и косинус имају следећа својства:*

$$\begin{aligned}
&\sin(\theta+\tfrac{\pi}{2}) = \cos\theta,\ \cos(\theta+\tfrac{\pi}{2}) = -\sin\theta,\\
&\sin(\theta+\pi) = -\sin\theta,\ \cos(\theta+\pi) = -\cos\theta\\
&\sin(-\theta) = -\sin\theta,\quad \cos(-\theta) = \cos\theta,\\
&\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,\\
&\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta
\end{aligned}$$

△ У основи доказа је чињеница да за фиксирано $\eta\in\mathbf{S}^1$ пресликавање

$$r_\eta : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1,\quad z\mapsto \eta\cdot z$$

чува дужину лука. Заиста, пошто је $|\eta| = 1$, множење са η је изометрија:

$$d(\eta\cdot z_1, \eta\cdot z_2) = |\eta\cdot z_2 - \eta\cdot z_1| = |\eta(z_2-z_1)| = |\eta||z_2-z_1| = |z_2-z_1| = d(z_1,z_2).$$

Пошто је дефиниција дужине лука (Дефиниција 34) изведена из дефиниције растојања, следи да r_η чува дужину лука. Докажимо формуле

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,\quad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta. \tag{87}$$

Нека је

$$z = \operatorname{cis}\alpha,\quad w = \operatorname{cis}(\alpha+\beta). \tag{88}$$

Одатле, на основу адитивности дужине лука (Задатак 111 на стр. 76) следи да је дужина лука између тачака z и w једнака β. Пошто множење са $\eta = z^{-1}\in\mathbf{S}^1$ чува дужину лука, и дужина лука између 1 и $z^{-1}w$ једнака је β. Одатле следи да је $z^{-1}w = \operatorname{cis}\beta$, тј. $w = z\operatorname{cis}\beta$. Одатле и из (88) следи

$$\operatorname{cis}(\alpha+\beta) = \operatorname{cis}\alpha\cdot\operatorname{cis}\beta,$$

тј. $\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta) = (\cos\alpha+i\sin\alpha)\cdot(\cos\beta+i\sin\beta)$. Множењем израза на десној страни и изједначавањем реалних и имагинарних делова на десној и левој страни добијамо (87). Доказ осталих формула препуштамо читаоцу. ▽

Из Леме 17 следе све остале формуле за трансформације тригонометријских функција познате читаоцу из курса елементарне математике, и ми ћемо их све сматрати доказаним.

Задатак 112. (а) Доказати Моаврову [49] формулу

$$\operatorname{cis}^n\theta = \operatorname{cis}(n\theta),\quad n\in\mathbf{Z}$$

(б) Користећи Моаврову формулу доказати формуле

$$\sin(3\theta) = -4\sin^3\theta + 3\sin\theta,\qquad \cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.$$

Наћи формуле за синус и косинус четвороструког угла.

(в) Доказати да су решења једначине $z^n = r\operatorname{cis}\theta$ дата са

$$z = \sqrt[n]{r}\operatorname{cis}\frac{\theta+2k\pi}{n},\quad n\in\{0,1,\dots,n-1\}.$$

(г) Израчунати $(1+i)^{19}$ и $\sqrt[3]{1+i}$.

(д) Израчунати $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1+i}(i^9+i^{-9})^{99}\right)$ и $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1+i}(i^9-i^{-9})^{99}\right)$. ✓

[49] Де Моавр (Abraham De Moivre, 1667–1754), француски математичар

Задатак 113. Користећи Моаврову формулу доказати формуле

$$\cos(\alpha/2) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \qquad \sin(\alpha/2) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.$$

Објаснити избор знака испред корена. ✓

Задатак 114. Израчунати све три вредности $\sqrt[3]{1}$. Наћи факторизацију полинома $p(z) = z^3 - 1$ из Задатка 25 на стр. 64 на линеарне факторе над пољем $\mathbf{C}$.

Наћи факторизације полинома $q(z) = z^3 + 1$ на иредуцибилне полиноме над $\mathbf{R}$ и над $\mathbf{C}$. ✓

Задатак 115. Наћи нуле полинома

$$P(x) = (x+1)^6 - (x-1)^6.$$

Упутство: приметити да $x = 1$ није нула полинома, па је могуће увести нову непознату

$$\zeta = \frac{x+1}{x-1}$$

и свести задатак на решавање једначине $\zeta^6 = 1$ и линеарне једначине. ✓

Задатак 116. Нека је

$$\omega = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}.$$

Доказати да је

$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0.$$

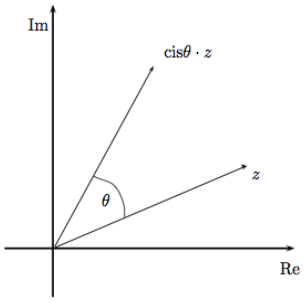
Упутство: опажање да је $\omega^5 = 1$ знатно скраћује рачун. ✓

Задатак 117. (а) Нека је $\theta_0 \in [0, 2\pi]$. Доказати да је пресликавање

$$R_{\theta_0} : z \mapsto \operatorname{cis}\theta_0 \cdot z$$

изометријска трансформација комплексне равни и да је

$$R_{\theta_0}(r\operatorname{cis}\theta) = r\operatorname{cis}(\theta + \theta_0).$$



Изометријску трансформацију R_{θ_0} називамо *централном ротацијом* са центром 0 и углом θ_0.

(б) Доказати да је скуп централних ротација са центром 0 подгрупа групе изометријских трансформација комплексне равни (в. Задатак 108). Ова подгрупа означава се са $\mathbf{SO}(2)$ и назива *специјалном ортогоналном групом*.

(в) Доказати да је пресликавање $\theta \mapsto R_\theta$ морфизам групе $\mathbf{U}(1)$ у групу $\mathbf{SO}(2)$. ✓

Напомена 11. Из курса елементарне еуклидске геометрије познато нам је да се свака изометријска трансформација равни може добити као композиција коначног броја осних рефлексија, при чему је тај број паран ако је трансформација директна (тј. ако чува оријентацију), а непаран у супротном случају. Записано на језику комплексних бројева, свака изометријска трансформација равни може да се запише као

$$f(z) = az + b \qquad \text{или} \qquad g(z) = a\overline{z} + b,$$

за неке $a \in \mathbf{S}^1$ и $b \in \mathbf{C}$. При томе, трансформација f чува, а трансформација g мења оријентацију равни $\mathbf{C}$. ◇

Задатак 118. Гусар је закопао благо на пустом острву на коме су се налазиле две стене и једно дрво. Место је одабрао на следећи начин. Од дрвета је ишао до једне стене бројећи кораке. Стигавши до ње скренуо је лево под правим углом и направио исто онолико корака колико је направио од дрвета до стене. Тачку до које је тако стигао је обележио са X. Затим је поновио исти поступак са дрветом и другом стеном, само што је овај пут, стигавши до друге стене, скренуо под правим углом десно. Тачку до које је на тај начин стигао, обележио је са Y. Благо је закопао на средини дужи XY.

Његов унук (такође гусар као и деда), вођен дедином причом о овој пустоловини, после 60 година стиже на исто острво са намером да ископа благо.

На своје велико изненађење и разочарење, открива да дрво из дедине приче више не постоји, нити је од њега остао икакав траг. Ипак, успева да нађе благо. Описати како.

Упутство: Вративши се разочаран и без блага у Европу, унук покушава да унесе мало радости у свој живот, па одлучује да се упише на Математички факултет. После годину дана марљивог рада и студирања на М смеру, сазнаје да је множење са $i = \sqrt{-1}$ ротација за прав угао на лево. Схвата и да број

$$✠ = \frac{z_1 + i(z_1 - z_0) + (z_2 - i(z_2 - z_0))}{2}$$

не зависи од z_0. Током летњег распуста поново разапиње једра, враћа се на острво и откопава благо. ✓

Пример 33. Нека су (z_1, z_2, z_3) и (w_1, w_2, w_3) две тројке неколинеарних тачака у комплексној равни. Троуглови $\triangle z_1 z_2 z_3$ и $\triangle w_1 w_2 w_3$ су директно слични[50] ако и само ако је

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1}, \tag{89}$$

или, еквивалентно, ако и само ако је

$$\begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Заиста, ови троуглови су директно слични ако и само ако су им по две странице пропорционалне и углови између њих подударни, тј.

$$\frac{|z_2 - z_1|}{|z_3 - z_1|} = \frac{|w_2 - w_1|}{|w_3 - w_1|} \quad \text{и} \quad \arg \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \arg \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1}$$

што је еквивалентно са (89).

Пошто осна рефлексија $z \mapsto \bar{z}$ мења оријентацију, следи да су троуглови $\triangle z_1 z_2 z_3$ и $\triangle w_1 w_2 w_3$ слични ако и само ако је

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1} \quad \text{или} \quad \frac{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}{\bar{z}_3 - \bar{z}_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1},$$

♯

Пример 34. Нека је $p \in \mathbf{N}$ и $\zeta = \operatorname{cis} \frac{2\pi}{p}$ и $\mathbf{Z}_p = \{\zeta^k \mid k \in \mathbf{Z}\}$. Из Моаврове формуле следи $\zeta^p = 1$, а одатле да је $\mathbf{Z}_p$ коначна подгрупа унитарне групе $\mathbf{U}(1)$ и има p елемената: сваки елемент $g \in \mathbf{Z}_p$ је степен броја ζ:

$$\mathbf{Z}_p = \{1, \zeta, \zeta^2, \ldots, \zeta^{p-1}\}.$$

Кажемо да је ζ *генератор* групе $\mathbf{Z}_p$. Група која је генерисана једним елементом назива се *цикличном групом*. Сваке две коначне цикличне групе са истим бројем елемената су изоморфне. Заиста, довољно је пресликати генератор једне у генератор друге и, користећи груповну операцију, продужити ово пресликавање до изоморфизма.

До групе $\mathbf{Z}_p$ се може доћи и полазећи од бесконачне цикличне групе $(\mathbf{Z}, +)$. Дефинишимо релацију еквиваленције

$$m \equiv n \pmod{p} \quad \Leftrightarrow \quad m - n \text{ је дељиво са } p;$$

[50] *Директна трансформација сличности* је трансформација сличности која чува оријентацију; троуглови су *директно слични* ако су слични и исто оријентисани.

ова релација назива се *конгруенцијом по модулу* p. Из сваке класе еквиваленције може се издвојити један од бројева $0, 1, \ldots, p-1$, па се количнички скуп $\mathbf{Z}/_{\equiv}$ може идентификовати са скупом остатака при дељењу са p:

$$\mathbf{Z}/_{\equiv} = \{0, 1, \ldots, p-1\}.$$

Скуп на десној страни може да се замени било којим другим скупом представника класа еквиваленције релације $\equiv \pmod{p}$; сваки такав скуп назива се *комплетним скупом остатака* по модулу p. Другим речима, подскуп $R \subset \mathbf{Z}$ је комплетан скуп остатака по модулу p ако има p елемената, и ако су остаци тих елемената при дељењу са p међусобно различити.

Из очигледне чињенице

$$m \equiv n \pmod{p} \quad \Leftrightarrow \quad m + k \equiv n + k \pmod{p} \tag{90}$$

следи да је операција сабирања добро дефинисана у количничком скупу $\mathbf{Z}/_{\equiv}$. Заиста, ако су $[m]$ и $[n]$ класе еквиваленције целих бројева m и n, из (90) следи да је са

$$[m] + [n] = [m + n]$$

добро дефинисано (тј. независно од представника m и n класа $[m]$ и $[n]$) сабирање у $\mathbf{Z}/_{\equiv}$, чиме је скуп $\mathbf{Z}/_{\equiv}$ снабдевен структуром групе (доказати!). Пошто су цикличне групе са једнаким бројем елемената изоморфне, следи да је овако добијена група изоморфна $\mathbf{Z}_p$. Тако смо дали два описа групе $\mathbf{Z}_p$, полазећи од *мултипликативне* групе $(\mathbf{U}(1), \cdot)$ и од *адитивне* групе $(\mathbf{Z}, +)$. ♯

Задатак 119. Наћи све подгрупе групе $(\mathbf{Z}_6, +)$. ✓

Задатак 120. Нека је $m_1 \equiv n_1 \pmod{p}$ и $m_2 \equiv n_2 \pmod{p}$. Доказати да је

$$m_1 \cdot m_2 \equiv n_1 \cdot n_2 \pmod{p}.$$

Извести закључак да је помоћу операције множења целих бројева добро дефинисана операција множења у $\mathbf{Z}_p$ и да је $(\mathbf{Z}_p, +, \cdot)$ комутативни прстен са јединицом. ✓

Задатак 121. (а) Доказати да за сваки цео број k важи

$$k^2 \equiv 0 \pmod{3} \quad \text{или} \quad k^2 \equiv 1 \pmod{3}.$$

(б) Нека је n непаран број. Доказати да је $n^2 \equiv 1 \pmod{8}$.
(в) Доказати да за сваки цео број m важи $m^3 - m \equiv 0 \pmod{3}$. ✓

Задатак 122. Нека су a и p узајамно прости цели бројеви и b произвољан цео број. Доказати да једначина

$$[a] \cdot [x] \equiv [b]$$

има јединствено решење $[x] \in \mathbf{Z}_p$, тј. да једначина

$$ax \equiv b \pmod{p}$$

има јединсвено решење $\pmod{p}$.

Упутство: Пошто су a и p узајамно прости, из Теореме 6 следи да постоје цели бројеви k и n такви да је $ka + np = 1$. Помножити обе стране са b и доказати егзистенцију решења. За доказ јединствености, претпоставити супротно, да постоје два решења x_1, x_2. Показати да је тада $a(x_1 - x_2)$ дељиво са p. Доказати да, пошто су a и p узајамно прости, одатле следи да је $x_1 - x_2$ дељиво са p, тј. да је $[x_1] = [x_2]$. ✓

Напомена 12. Приметимо да нам Задатак 122 сем информације да линеарне једначине у $\mathbf{Z}_p$ имају јединствено решење, обезбеђује и *поступак за њихово решавање*. Наиме, помоћу Еуклидовог алгоритма (тј. Последице 2 на стр. 31) налазимо бројеве k и n такве да је $ak + np = 1$ а затим, множењем са b, добијамо решење. ◇

Задатак 123. Доказати да једначина $ax \equiv b \pmod{p}$ има решење ако и само ако је број b дељив са највећим заједничким делитељем $d = (a, p)$ бројева a и p. Овај задатак говори само о егзистенцији, али не и јединствености решења. Доказати да је број решења ове једначине једнак d. ✓

Задатак 124. (а) Решити једначину $3x \equiv 7 \pmod{4}$.
(б) Наћи сва целобројна решења x, y једначине $3x + 4y = 7$. ✓

Задатак 125. Елемент a прстена са јединицом је *инвертибилан* ако постоји елемент b тог прстена, такав да је

$$a \cdot b = 1 \quad \text{и} \quad b \cdot a = 1.$$

Доказати да су 1 и 3 једини инвертибилни елементи прстена $\mathbf{Z}_4$. ✓

Пошто су сви елементи поља (сем нуле) инвертибилни, из претходног задатка следи да, у општем случају, $\mathbf{Z}_p$ није поље. Прецизније о томе нам говори следећи задатак.

Задатак 126. Доказати да је $(\mathbf{Z}_p, +, \cdot)$ поље ако и само ако је p прост број.
Упутство: Ако p није прост број, онда постоје цели бројеви $m < p$ и $n < p$ такви да је $mn = p$, тј. $mn \equiv 0 \pmod{p}$. То значи да у $\mathbf{Z}_p$ важи релација

$$[m] \cdot [n] = 0,$$

па $[m]$ и $[m]$ нису инвертибилни, јер би из $[n] \cdot b = 1$ следило, после множења обе стране са $[m]$, да је $[m] = 0$, што је немогуће због $mn = p$.
Обрнуто нека је p прост број. Треба доказати да је сваки елемент $[a] \in \mathbf{Z}_p \setminus \{0\}$ инвертибилан, тј. да једначина

$$[a] \cdot [x] = 1$$

има решење $[x] \in \mathbf{Z}_p$, за свако $a \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$. Показати да ово следи из Задатка 122. ✓

Ако је p прост број, поље $\mathbf{Z}_p$ се често означава и са $\mathbf{F}_p$.

Напомена 13. У складу са реченим у Напомени 12, можемо да приметимо да Задатак 126 даје ефективан начин за одређивање инверзног елемента у пољу $\mathbf{Z}_p$ када је p прост број. ◇

Задатак 127. (а) Наћи 2^{-1} у $\mathbf{Z}_7$.
(б) Да ли је 4 инвертибилан елемент прстена $\mathbf{Z}_{15}$? Ако јесте, наћи његов инверз. Колико инвертибилних елемената има прстен $\mathbf{Z}_{15}$? ✓

Задатак 128. Нека је $a \in \mathbf{Z}_p$.
(а) Доказати да је низ

$$a, a^2, a^3, a^4, \ldots \in \mathbf{Z}_p$$

периодичан почевши од неког a^n.
(б) На примеру $p = 8$ и $a = 2$ показати да периодичност низа из (а) не мора да почиње од првог члана.

(в) Ако је p прост број, доказати да је $a^p = a$, тј. да периодичност низа из (а) почиње од првог члана. Ово тврђење је познато као *Мала Фермаова*[51] *теорема*.

Упутство: применити Дирихлеов принцип (Задатак 71 на стр. 45) и Задатак 126. ✓

Задатак 129. **(Критеријуми дељивости)** Нека број $n \in \mathbf{N}$ има децимални запис

$$n = x_k \cdot 10^k + \cdots + x_3 \cdot 10^3 + x_2 \cdot 10^2 + x_1 \cdot 10 + x_0. \tag{91}$$

(а) Доказати да је број паран ако и само ако му је последња цифра у децималном запису, x_0, парна.

(б) Доказати да је број дељив са три ако и само ако му је збир цифара у децималном запису $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_k$ дељив са три.

(в) Доказати да је број дељив са 11 ако и само ако је алтернирајући збир његових цифара у децималном запису $x_0 - x_1 + x_2 - x_3 + \cdots + (-1)^k x_k$ дељив са 11.

(г) Извести сличне критеријуме дељивости са 4, 5, 6, 7, 9, 13.

Упутство: из $10 \equiv 1 \pmod 3$ следи $10^m \equiv 1^m = 1 \pmod 3$, па из (91) следи $n \equiv x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_k \pmod 3$, одакле следи тврђење (б). Слично, $10 \equiv -1 \pmod{11} \Rightarrow 10^m \equiv (-1)^m \pmod{11}$, одакле следи критеријум дељивости са 11. Слично се изводе и остали. ✓

Задатак 130. Доказати да у низу

$$11, 111, 1111, 11111, \ldots$$

не постоји број који је потпун квадрат.

Упутство: Доказати да је $111\cdots1 \equiv 3 \pmod 4$ и описати потпуне квадрате у $\mathbf{Z}_4$. ✓

9.6. Три неједнакости. Завршићемо ово поглавље доказом три важне неједнакости. Количници

$$\operatorname{tg}\theta := \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \quad \sec\theta := \frac{1}{\cos\theta}$$

називају се *тангенсом* и *секансом* угла θ. За тангенс се користи и ознака tan.

Лема 18. *За* $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ *важе следеће две неједнакости:* $\sin\theta \le \theta \le \operatorname{tg}\theta$.

△ Нека је $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$; тада је $z = \operatorname{cis}\theta$ у првом квадранту. Из

$$|z-1|^2 = (\cos\theta - 1)^2 + \sin^2\theta \ge \sin^2\theta$$

следи $\sin\theta \le d(1,z)$. Пошто је θ дужина лука $\widehat{1z}$, из Дефиниције 34 следи $\theta \ge d(1,z)$. Тиме је доказана прва неједнакост.

Нека је $1 = z_1, \ldots, z_k = z$ подела лука $\widehat{1,z}$ у првом квадранту, као у Дефиницији 34, при чему је $z_j = \operatorname{cis}\alpha_j$, $\alpha_j > \alpha_{j-1}$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_k = \theta$. Елементарне тригонометријске трансформације дају

$$\begin{aligned} |z_j - z_{j-1}| &\le |\operatorname{cis}\alpha_j - \operatorname{cis}\alpha_{j-1}| = 2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_j - \alpha_{j-1}) \\ &\le 2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_j - \alpha_{j-1})\tfrac{\cos\frac{1}{2}(\alpha_j - \alpha_{j-1})}{\cos(\alpha_j - \alpha_{j-1})} \\ &= \tfrac{\sin(\alpha_j - \alpha_{j-1})}{\cos(\alpha_j - \alpha_{j-1})} = \tfrac{\operatorname{tg}\alpha_j - \operatorname{tg}\alpha_{j-1}}{1 + \operatorname{tg}\alpha_j \operatorname{tg}\alpha_{j-1}} \\ &\le \operatorname{tg}\alpha_j - \operatorname{tg}\alpha_{j-1}, \end{aligned}$$

[51] Ферма (Pierre Fermat, 1601–1665), француски математичар

при чему прва неједнакост следи из $|\sec\alpha_{j-1}| \geq 1$, друга из својства косинуса $0 \leq x \leq y \leq \pi \Rightarrow \cos x \geq \cos y$, а трећа из $\operatorname{tg}\alpha \geq 0$ за $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Одатле следи

$$|z_2 - z_1| + |z_3 - z_2| + \cdots + |z_{k-1} - z_{k-2}| + |z_k - z_{k-1}| \leq \operatorname{tg}\theta,$$

што, на основу Дефиниције 34, даје другу неједнакост. ▽

Теорема 25. (Коши[52]–Шварцова[53] неједнакост) *За комплексне бројеве* $a_1, \ldots, a_k$, $b_1, \ldots, b_k$ *важи*

$$\Big|\sum_{j=1}^{k} a_j\bar{b}_j\Big|^2 \leq \sum_{j=1}^{k}|a_j|^2 \sum_{j=1}^{k}|b_j|^2.$$

△ Нека је $A = \sum_{j=1}^{k}|a_j|^2$, $B = \sum_{j=1}^{k}|b_j|^2$, $C = \sum_{j=1}^{k} a_j\bar{b}_j$. Можемо да претпоставимо $B > 0$ (у противном је $b_1 = \cdots = b_j = 0$ и тврђење је очигледно тачно). Тада из

$$\begin{array}{rcl} 0 & \leq & \sum|Ba_j - Cb_j|^2 = \sum(Ba_j - Cb_j)(B\bar{a}_j - \overline{C}\bar{b}_j) \\ & = & B^2\sum|a_j|^2 - B\overline{C}\sum a_j\bar{b}_j - BC\sum\bar{a}_jb_j + |C|^2\sum|b_j|^2 \\ & = & B^2A - B|C|^2 = B(AB - |C|^2) \end{array}$$

следи тражена неједнакост $|C|^2 \leq AB$. ▽

Напомена 14. Корисно је имати на уму геометријску интерпретацију Коши – Шварцове неједнакости. Нека су $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ вектори у тродимензионом простору $\mathbf{R}^3$. Њихове дужине су

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \quad \text{и} \quad |\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2},$$

а њихов скаларни производ $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})$ у координатама је дат са

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_2 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Чињеница да скаларни производ вектора није већи од производа њихових дужина може да се запише као

$$\Big|\sum_{k=1}^{3} a_kb_k\Big| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{3}|a_k|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{3}|b_k|^2}.$$

Коши–Шварцова неједнакост на очигледан начин уопштава ову геометријску чињеницу. На њу ћемо се вратити у Глави 7. ◇

10. Вежбе

(1) Да ли постоји природан број n, такав да је

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} \in \mathbf{N}?$$

(2) Која од следећих тврђења су тачна:
   (а) $(\exists n \in \mathbf{N})\,(\forall m \in \mathbf{N})\,\sqrt{nm} \in \mathbf{N}$,
   (б) $(\forall n \in \mathbf{N})\,(\exists m \in \mathbf{N})\,\sqrt{nm} \in \mathbf{N}$,
   (в) $(\exists n \in \mathbf{N})\,(n \geq 10 \wedge (\forall m \in \mathbf{N})\,\sqrt{nm^2} \in \mathbf{N})$,
   (г) $(\forall n \in \mathbf{N})\,(\exists p, q \in \mathbf{Q})\,pq + p = n$,

[52] Коши (Augustin Cauchy, 1789–1857), француски математичар
[53] Шварц (Karl Schwarz, 1843–1921), немачки математичар

(д) $(\forall a \in \mathbf{R})\,(\exists x \in \mathbf{R})\, x^2 + ax = 0$,
(ђ) $(\forall a \in \mathbf{R})\,(\exists x \in \mathbf{R})\, x^2 + 2ax + a = 0$,
(е) $(\exists a \in \mathbf{R})\,(\forall x \in \mathbf{R})\, x^2 - 2ax + a > 0$?

(3) Доказати да за свако $n \in \mathbf{N}$ важи

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ корена}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

(4) Доказати да бројеви $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ нису рационални.

(5) Израчунати (не користећи рачунар) $\sqrt{5}$ и $\sqrt[3]{5}$ са тачношћу 10^{-2}.

Упутство: $4 < 5 < 9$, па је $2 < \sqrt{5} < 3$. Тиме је одређена прва цифра броја $\sqrt{5}$. Понављањем овог поступка ($2, 2^2 < 5 < 2, 3^2$ итд) одредити другу и трећу.

(6) Доказати да је

$$\binom{2n}{0}^2 - \binom{2n}{1}^2 + \binom{2n}{2}^2 - \ldots - \binom{2n}{2n-1}^2 + \binom{2n}{2n}^2 = (-1)^n \binom{2n}{n}.$$

Упутство: видети Задатак 20 на стр. 25.

(7) Доказати да следеће једначине немају решења у скупу $\mathbf{Q}$:
(а) $x^6 + x - 1 = 0$ (б) $x^2 = 6$ (в) $2x^5 + 3x^3 + 7 = 0$.

(8) Да ли постоји полином P са целобројним коефицијентима, такав да су испуњена следећа два услова:
- пресликавање $P : \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$ је инјективно;
- пресликавање $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ није инјективно.

Упутство: посматрати полином $P(x) = 2x^3 - x$.

(9) Наћи све $n \in \mathbf{N}$ за које је $1 + 2 + \cdots + (n-1) \equiv 0 \pmod{n}$.

(10) Наћи сва целобројна решења једначине $1!+2!+\cdots+x! = y^2$. Упутство: доказати да квадрат целог броја не може да се завршава цифром 3.

(11) Нека су a, b, c цели бројеви и нека је $d = (a, b)$.

(а) Доказати да су сва решења једначине $ax+by = 0$ облика $x = \frac{b}{d}t$, $y = -\frac{a}{d}t$, $t \in \mathbf{Z}$. (Упутство: $\frac{a}{d}x = -\frac{b}{d}y$ и $(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$. Применити Задатак 53 на 35. страни.)

(б) Доказати да једначина $ax + by = c$ има целобројна решења ако и само ако $d|c$ и да су у том случају сва целобројна решења дата са $x = \frac{c}{d}x_0 + \frac{b}{d}t$, $y = \frac{c}{d}y_0 + \frac{a}{d}t$, $t \in \mathbf{Z}$, где су x_0, y_0 цели бројеви који задовољавају $ax_0 + by_0 = d$, а постоје на основу Теореме 6. (Упутство: Десна страна је дељива са d, па то мора да буде и лева. Ако је $ax + by = c$. Једно решење је $(\frac{c}{d}x_0, \frac{c}{d}y_0)$. Применити (а).)

(в) Наћи сва целобројна решења једначине $21x + 7y = 147$.

(г) Наћи сва целобројна решења једначине $2x + 4y = 5$.

(12) (а) Нека је p прост број већи од 2. Доказати да је $p \equiv 1 \pmod 4$ или $p \equiv 3 \pmod 4$.

(б) Доказати да постоји бесконачно много простих бројева конгруентних 3 по модулу 4.

Упутство за (б): Претпоставимо супротно, да су $3, p_1, p_2, \ldots, p_n$ сви прости бројеви који су конгруентни 3 по модулу 4. Посматрати број $m = 4p_1p_2\cdots p_n + 3$. Користећи (а) доказати да у факторизацији

броја m на просте бројеве постоји прост број облика $4k+3$. Доказати затим да ниједан од бројева $3, p_1, \ldots, p_n$ не дели m, што значи да то нису сви прости бројеви облика $4k+3$.

(13) Нека је p прост број. Доказати да је $n^2 \equiv 1 \pmod{p}$ ако и само ако $p \mid (n+1)$ или $p \mid (n-1)$.

Упутство: $n^2 \equiv 1 \pmod{p} \Leftrightarrow p \mid n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$.

(14) Нека су p и q узајамно прости природни бројеви. Написати

$$\frac{2p^2q + p^2 + pq + 2p + 1}{2pq + p + 2}$$

у облику верижног разломка.

(15) Доказати *Вилсонову*[54] *теорему:* Број $p \in \mathbf{N}$ је прост ако и само ако је

$$(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Упутство: ($\Rightarrow$) Ако је $p = 2$, конгруенција је очигледно тачна. Нека је p прост број већи од 2. Пошто је $\mathbf{Z}_p$ поље, сваки природан број $n < p$ има инверз $m < p$; $mn \equiv 1 \pmod{p}$. Из јединствености инверзног елемента у пољу, као и из чињенице да је $(a^{-1})^{-1} = a$, следи да се $\mathbf{Z}_p$ састоји од $(p-1)/2$ парова међусобно инверзних елемената и елемената који су сами себи инверз. Из Вежбе 13 следи да су једини елементи који су сами себи инверз 1 и $p-1$. Спарујући сваки елемент у производу са својим инверзом добијамо

$$2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (p-2) \equiv 1 \pmod{p}.$$

Помножити обе стране са $(p-1)$.

($\Leftarrow$) Претпоставимо да је $(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ и да p није прост, тј. $p = p_1 p_2$ за неке $p_1, p_2 \in \{2, 3, \ldots, p-1\}$. Доказати да би тада бројеви $(p-1)!$ и $(p-1)!+1$ били дељиви са p_1, па би и њихов збир био дељив са p_1 и извести одатле контрадикцију.

(16) Нека је p непаран прост број. Доказати да је $2(p-3)!+1 \equiv 0 \pmod{p}$.

(17) (а) Доказати *Кинеску теорему о остацима:* Нека су $n_1, n_2, \ldots, n_k$ природни бројеви, такви да су свака два узајамно проста: $(n_i, n_j) = 1$ за $i \neq j$. Тада, за произвољне целе бројеве $b_1, b_2, \ldots, b_k$ систем конгруенција

$$x \equiv b_1 \pmod{n_1}, \quad x \equiv b_2 \pmod{n_2}, \quad , \ldots, \quad x \equiv b_k \pmod{n_k}$$

има решење. Ово решење је јединствено по модулу $n_1 n_2 \cdots n_k$.

(б) Решити систем конгруенција $x \equiv 2 \pmod{5}$, $x \equiv 3 \pmod{7}$.

Упутство за (а): Нека је $m = n_1 n_2 \cdots n_k$ и $m_j = m/n_j$. Доказати да је $(m_j, n_j) = 1$ за све j. Закључити да свака од конгруенција $m_j x \equiv 1 \pmod{n_j}$ има јединствено $\pmod{n_j}$ решење x_j (видети Задатак 122 на стр. 82). Доказати да је $x = b_1 m_1 x_1 + b_2 m_2 x_2 + \cdots + b_k m_k x_k$ тражено решење система. За доказ јединствености $\pmod{m}$, претпоставити да је y друго решење. Тада је $x - y$ дељиво са сваким од бројева n_j. Пошто су свака два од њих узајамно проста, одатле следи да је $x - y$ дељиво и са њиховим производом m.

[54] Вилсон (John Wilson, 1741-1793), енглески математичар

(18) Нека је $n \in \mathbf{N}$, $R \subset \mathbf{Z}$ комплетан скуп остатака по модулу n (дефинисан у Примеру 34 на стр. 81) и $x \in \mathbf{Z}$ број који је узајамно прост са n. Доказати да је

$$xR := \{xr \mid r \in R\}$$

комплетан скуп остатака по модулу n.

Упутство: Нека за $r_1, r_2 \in R$ важи $xr_1 \equiv xr_2 \pmod{n}$. Користећи чињеницу да су x и n узајамно прости, доказати да је $r_1 \equiv r_2 \pmod{n}$, а затим, користећи чињеницу да је R комплетан скуп остатака, да је $r_1 = r_2$. Закључити одатле да скуп xR има n елемената.

(19) (а) Нека је $n \in \mathbf{N}$ и $\varphi(n)$ број елемената скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ који су узајамно прости са n. Функција φ назива се *Ојлеровом фи–функцијом*. Доказати да је број инвертибилних елемената у прстену $\mathbf{Z}_n$ једнак $\varphi(n)$. Упоредити овај резултат са Задатком 127 на стр. 83.

(б) Доказати да је природан број n прост ако и само ако је $\varphi(n) = n - 1$.

(в) Доказати *Ојлерову теорему*: Ако су бројеви x и n узајамно прости, онда је

$$x^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

(г) Доказати да је Ојлерова функција *мултипликативна*, тј. да важи $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ ако су m и n узајамно прости природни бројеви.

(д) Доказати да, за прост број p, важи $\varphi(p^n) = p^{n-1}(p-1)$.

(ђ) Израчунати $\varphi(1000)$.

Упутство: (в) $\varphi(n)$ је број елемената скупа $S = \{s \mid 1 \leq s \leq n, (s, n) = 1\}$. Користећи идеју из упутства за Вежбу 18, доказати да скупови S и xS дефинишу исте класе еквиваленције у односу на релацију конгруенције по модулу n. Закључити одатле да је

$$\prod_{s \in S} (xs) \equiv \prod_{s \in S} s \pmod{n}.$$

Пошто је $\varphi(n)$ број елемената скупа S, производ на десној страни је једнак $x^{\varphi(n)} \prod_{s \in S} s$. За доказ својства (г) доказати да, ако је $(m, n) = 1$, онда је $(a, mn) = 1$ ако и само ако је $(a, m) = 1$ и $(a, n) = 1$, па су скупови

$$\{a < mn \mid (a, mn) = 1\} \quad \text{и} \quad \{a < mn \mid (a, m) = 1 \text{ и } (a, n) = 1\}$$

еквипотентни. Доказати да је број елемената првог $\varphi(mn)$, а другог $\varphi(m)\varphi(n)$. Тврђење (д) следи из (г), а (ђ) из (д).

(20) (а) Применом Ојлерове теореме из Вежбе 19 доказати *Малу Фермаову теорему* Ако је p прост број и a природан број који није дељив са p, онда је

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Сетимо се да смо други доказ ове теореме видели у Задатку 128.

(б) Доказати да за сваки прост број p и сваки природан број a важи

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

Упутство: За (а) применити Ојлерову теорему из Вежбе 19. Ако a није дељиво са p, (б) следи из (а), а ако је a дељиво са p, онда су обе стране у (б) једнаке нули.

(21) Нека су p и q непарни прости бројеви, такви да је Мерсенов број M_q (видети Задатак 58 на стр. 35) дељив са p. Доказати да је $p \equiv 1 \pmod{q}$ и $p \equiv \pm 1 \pmod{8}$. Доказати да из $p|M_{31}$ следи

$$p \equiv 1 \pmod{248} \quad \text{или} \quad p \equiv 63 \pmod{248}. \tag{92}$$

На овај начин је Ојлер, у писму Бернулију из 1772, показао да је M_{31} прост број, проверавајући да ли прости бројеви мањи од $\sqrt{M_{13}}$ који задовољавају (92) деле M_{13}. Услов (92) му је омогућио да знатно редукује број кандидата за делитеља M_{13}. Нпр, прва два проста броја која задовољавају тај услов су $q = 311$ и $q = 1303$.

(22) Одредити последњу цифру броја 7^{999}.

Упутство: Пошто је $(7, 10) = 1$, из Ојлерове теореме (Вежба 19) следи да је $7^{\varphi(10)} \equiv 1 \pmod{10}$. Из Вежбе 19 (д) следи да је $\varphi(10) = \varphi(2 \cdot 5) = (2-1)(5-1) = 4$, па је

$$7^{999} \equiv 7^{249 \cdot 4 + 3} \equiv 7^3 \pmod{10}.$$

(23) (а) Наћи остатак при дељењу броја 5^{100} са 7.

(б) Доказати да је број $10! + 1$ дељив са 11.

(в) Наћи остатак при дељењу броја $5! \cdot 25!$ са 31.

(24) Нека је $P(x)$ неконстантан полином са целобројним коефицијентима. Доказати да постоји цео број k такав да број $P(k)$ није прост.

(25) Доказати да је $\cos 1^\circ$ ирационалан број. (Упутство: ако је $\cos 1^\circ \in \mathbf{Q}$ онда су, због $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ и $\cos 2^\circ$, $\cos 4^\circ$, $\cos 8^\circ$, $\cos 16^\circ$, $\cos 32^\circ$ рационални. $\cos 32^\circ = \cos(30^\circ - 2^\circ)$.)

(26) (а) Доказати да је $\cos(nx)$ полином n–тог степена по $\cos x$ са целобројним коефицијентима.

(б) Доказати да је $2\cos(nx)$ полином n–тог степена по $2\cos x$ са целобројним коефицијентимаи са водећим коефицијентом 1:

$$2\cos(nx) = (2\cos x)^n + a_{n-1}(2\cos x)^{n-1} + \ldots + a_1(2\cos x) + a_0,$$

за неке целе бројеве $a_0, \ldots, a_{n-1}$.

(в) Нека је $0 < r < 1/2$ рационалан број. Доказати да је

$$\cos(\pi r) \in \mathbf{Q} \;\Leftrightarrow\; r = \frac{1}{3}.$$

(27) Доказати да за $x \in (0, \pi)$ и $n \in \mathbf{N}$ важи

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos(2x) + \cdots + \cos(nx) = \frac{\sin((n + 1/2)x)}{2\sin(x/2)}.$$

(28) Доказати неједнакост

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n} \quad \text{за} \quad n \in \mathbf{N}.$$

(29) Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_n$ позитивни реални бројеви. Доказати да важе неједнакости

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}},$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. Величине које учествују у овим неједнакостима називају се *хармонијском*, *геометријском*, *аритметичком* и *квадратном* средином бројева $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Ако ове средине означимо са H_n, G_n, A_n, K_n, претходна неједнакост гласи

$$H_n \leq G_n \leq A_n \leq K_n.$$

Упутство: Не умањујући општост, можемо да претпоставимо да је

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n, \qquad a_1 < a_n.$$

Доказати прво да је

$$a_1 < A_n < a_n,$$

а затим доказати неједнакост

$$A_n(a_1 + a_n - A_n) - a_1 a_n = (a_1 - A_n)(A_n - a_n) > 0.$$

Доказати неједнакост

$$G_2 \leq A_2.$$

Применити затим метод индукције: претпоставити да је $G_{n-1} \leq A_{n-1}$. Применити ову неједнакост на аритметичку и геометријску средину бројева

$$a_1 + a_n - A_n, a_2, \ldots, a_{n-1}$$

и завршити доказ неједнакости $G_n \leq A_n$. Применити ову неједнакост на бројеве $a_1^{-1}, a_2^{-1}, \ldots, a_n^{-1}$ и доказати неједнакост $H_n \leq G_n$. За неједнакост $A_n \leq K_n$ искористити Коши–Шварцову неједнакост (Теорема 25).

(30) Доказати да за све природне бројеве $n > 2$ важе неједнакости

$$n^{n/2} < n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

(31) Доказати да за све природне бројеве $n \geq 2$ важи неједнакост

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - 1).$$

(32) Доказати да за све природне бројеве n важи неједнакост

$$\sqrt{n + \sqrt{n-1 + \sqrt{n-2 + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}} < \sqrt{n} + 1.$$

(33) Доказати неједнакост $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

(34) Доказати да за $a > 0$, $b > 0$ важи неједнакост

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}}$$

(35) Доказати да за реалне бројеве a, b, c важи неједнакост

$$|\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + c^2}| \leq |b - c|.$$

(36) Доказати да за $a > 0$ и $n \in \mathbf{N}$ важе неједнакости

$$1 + \frac{1 - a^{-1}}{n - 1 + a^{-1}} \leq \sqrt[n]{a} \leq 1 + \frac{a-1}{n}.$$

(37) Доказати да за природан број $n \geq 3$ важе неједнакости

$$1 < \sqrt[n]{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

(38) Доказати да за реалне бројеве $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ важи

$$|\max_{1\leq k\leq n} a_k - \max_{1\leq k\leq n} b_k| \leq \max_{1\leq k\leq n} |a_k - b_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k - b_k|.$$

(39) Доказати *Чебишевљеву*[55] *неједнакост*: Ако је

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \quad \text{и} \quad b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n,$$

онда је

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} \leq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{n}.$$

Упутство: поћи од неједнакости

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_k - a_j)(b_k - b_j) \geq 0.$$

Она важи због претпоставки о бројевима a_i, b_i: $(a_k - a_j)$ и $(b_k - b_j)$ су истог знака.

(40) Доказати да за позитивне реалне бројеве a, b, c важи неједнакост

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}.$$

Упутство: применити Чебишевљеву неједнакост из вежбе (39), а затим неједнакости између хармонијске, аритметичке и квадратне средине из вежбе (29).

(41) (а) Доказати *Шурову*[56] *неједнакост*:

$$x^r(x-y)(x-z) + y^r(y-z)(y-x) + z^r(z-x)(z-y) \geq 0 \quad \text{за} \quad x, y, z \geq 0, r > 0.$$

Упутство: не умањујући општост, можемо да претпоставимо да је $z \leq y \leq x$. Доказати да у том случају важи неједнакост

$$(x-y)[x^r(x-z) - y^r(y-z)] + z^r(x-z)(y-z) \geq 0$$

и из ње извести Шурову неједнакост.

(б) Доказати да, ако је r паран природан број, Шурова неједнакост важи за све реалне бројеве x, y, z.

(в) Доказати неједнакост

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x).$$

(42) Нека је су $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$ реални бројеви, такви да је

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \quad \text{и} \quad y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n$$

и нека је $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ произвољна пермутација. Доказати да је

$$x_1 y_n + \ldots + x_n y_1 \leq x_1 y_{\sigma(1)} + \ldots + x_n y_{\sigma(n)} \leq x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n.$$

Ово је тзв. *неједнакост прегруписавања*.

---

[55] Чебишев (Пафнутий Львович Чебышёв, 1821–1894), руски математичар

[56] Шур (Issai Shur, 1875–1941), немачки математичар

Упутство: довољно је доказати десну неједнакост; лева следи из ње заменом бројева $y_1, \ldots, y_n$ са $-y_1, \ldots, -y_n$. Доказати је за $n = 2$ (полазећи од неједнакости $(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \geq 0$), а затим применити индукцију по n. У индуктивном прелазу са n на $n+1$, уочити k које пермутација $\sigma : \{1, 2, \ldots, n+1\} \to \{1, 2, \ldots, n+1\}$ слика у $n+1$, тј. $\sigma(k) = n+1$. Из доказаног случаја за $n = 2$ следи да је

$$x_k y_{n+1} + x_{n+1} y_{\sigma(n+1)} \leq x_k y_{\sigma(n+1)} + x_{n+1} y_{n+1},$$

па је

$$x_1 y_{\sigma(1)} + \ldots + x_k y_{\sigma(k)} + \ldots + x_{n+1} y_{\sigma(n+1)} \leq x_1 y_{\sigma(1)} + \ldots + x_k y_{\sigma(n+1)} + \ldots + x_{n+1} y_{n+1}.$$

За доказ да израз на десној страни није већи од $x_1 y_1 + \ldots + x_{n+1} y_{n+1}$ применити индуктивну претпоставку и закључити да је

$$x_1 y_{\sigma(1)} + \ldots + x_k y_{\sigma(n+1)} + \ldots + x_n y_n \leq x_1 y_1 + \ldots + x_k y_k + \ldots + x_n y_n.$$

(43) Доказати да за ненегативне реалне бројеве a, b, c важи неједнакост

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 b + b^2 c + c^2 a.$$

Упутство: можемо да претпоставимо да је $a \leq b \leq c$ (тиме не умањујемо општост јер је тврђење симетрично по a, b, c). Тада је (пошто су a, b, c ненегативни) $a^2 \leq b^2 \leq c^2$. Применити неједнакост прегруписавања из вежбе (42).

(44) Нека су $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ и $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ реални бројеви, такви да је

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 = \sum_{k=1}^{n} \beta_k^2 = 1.$$

Користећи неједнакост троугла и неједнакост између геометријске и квадратне средине, доказати

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k \right| \leq 1.$$

Извести из ове неједнакости још један доказ Теореме 25.

(45) Доказати да за реалне бројеве $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geq 2)$ важи неједнакост

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right)^2 \leq (n-1) \left(2a_1 a_2 + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right).$$

(46) Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_n$ реални бројеви за које важи

$$|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| > 0$$

и нека је

$$A = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid \sum_{k=1}^{n} a_k x_k = 1\}.$$

Наћи

$$\min\{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \mid (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A\}.$$

(47) Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_n$ позитивни реални бројеви за које важи

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leq 1.$$

Доказати да је

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \geq n^2.$$

(48) Наћи све n–торке позитивних реалних бројева $a_1, a_2, \ldots, a_n$ за које важи једнакост

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

(49) Доказати да за непразне и ограничене подскупове A, B скупа $\mathbf{R}$ важи

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}, \quad \inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}.$$

(50) Наћи супремум и инфимум скупова

(а) $A = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbf{N}, m < n\}$ (б) $B = \{\frac{m}{|m|+n} \mid m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}\}$.

(51) Наћи

(а) $\inf\limits_{n\in\mathbf{N}} \sup\limits_{m\in\mathbf{N}} \frac{m-n}{m+n}$ (б) $\sup\limits_{m\in\mathbf{N}} \inf\limits_{n\in\mathbf{N}} \frac{m-n}{m+n}$

(в) $\inf\limits_{n\in\mathbf{N}} \sup\limits_{m\in\mathbf{N}} \frac{m}{m+n}$ (г) $\sup\limits_{m\in\mathbf{N}} \inf\limits_{n\in\mathbf{N}} \frac{m}{m+n}$.

(52) Израчунати

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} ij \quad \text{и} \quad \sum_{1\leq i\leq j\leq n} \frac{i}{j}.$$

(53) Доказати да постоје три тачке $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$ са својством да је за произвољну тачку $\xi \in \mathbf{C}$ бар једно од растојања

$$|\xi - z_1|, \qquad |\xi - z_2|, \qquad |\xi - z_3|$$

ирационалан број.

(54) Доказати да је за сваки комплексни број $z \in \mathbf{S}^1$

$$|z+1|^2 + |z-1|^2 = 4.$$

(55) Доказати да су за $(1+i)^{4k}$ и $i(1+i)^{4k+2}$ реални бројеви за све $k \in \mathbf{Z}$.

(56) (а) Доказати да је

$$\operatorname{cis}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{cis}\alpha}{\operatorname{cis}\beta}.$$

(б) Доказати да за свако $\theta \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi \mid n \in \mathbf{Z}\}$ постоји $C_\theta \in \mathbf{R}$, такво да је

$$C_\theta \operatorname{cis}\theta = 1 + i\tan\theta.$$

(в) Користећи (б) доказати формулу

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}.$$

Упутство: У (б) узети $C_\theta = \sec\theta$. За (в) помножити изразе из (б) за $\theta = \alpha$ и $\theta = -\beta$ и закључити да је

$$C_\alpha C_\beta \operatorname{cis}(\alpha - \beta) = (1 + \tan\alpha\tan\beta) + i(\tan\alpha - \tan\beta).$$

Применити затим (б) на $\theta = (\alpha - \beta)$ и закључити да је

$$C_{\alpha-\beta}\mathrm{cis}\,(\alpha-\beta) = 1 + i\tan(\alpha-\beta).$$

Изразити $\mathrm{cis}\,(\alpha-\beta)$ на два начина и упоредити добијене изразе.

(57) (а) Доказати да су тачке z_1, z_2, z_3 комплексне равни колинеарне ако и само ако је

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$$

реалан број.

(б) Доказати да су тачке z_1, z_2, z_3 комплексне равни колинеарне ако и само ако је

$$\begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

(58) Доказати да је тачка

$$T = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$$

тежиште троугла чија су темена тачке z_1, z_2, z_3 комплексне равни.

(59) (а) Нека је ω било који n–ти корен јединице различит од 1 (тј. $\omega = \mathrm{cis}\,(2ik\pi/n)$ за неко $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Доказати да је

$$1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1} = 0.$$

Приметимо да је ово уопштење Задатка 116 на стр. 79.

(б) Нека је $\omega = e^{2i\pi/3} = (-1 + \pm i\sqrt{3})/2$ један трећи корен из 1. Доказати да је троугао са теменима 1, ω и ω^2 једнакостраничан.

(в) Доказати да је троугао чија су темена тачке z_1, z_2, z_3 комплексне равни једнакостраничан ако и само ако је

$$z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3 = 0,$$

где је ω трећи корен из јединице уведен у (б).

Упутство: Идеја за (в) је слична као у Примеру 33 на стр. 81. Доказати да је троугао једнакостраничан ако и само ако је

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = -\omega^2$$

(приметимо да је количник на левој страни очигледно једнак $-\omega^2$ ако је $\triangle z_1 z_2 z_3 = \triangle 1\omega\omega^2$; у општем случају троугао је једнакостранични ако и само ако је $|z_3 - z_1|/|z_2 - z_1| = 1$ и угао код темена z_1 једнак $\pi/3 = \arg(-\omega^2)$). Одатле, после множења обе стране имениоцем $z_2 - z_1$ и примене (а), следи (в).

(60) Применом Вежбе 58 и Вежбе 59 доказати *Наполеонову*[57] *теорему* : Ако над страницама произвољног троугла $\triangle ABC$ конструишемо једнакостраничне троуглове $\triangle P_a BC$, $\triangle P_b AC$, $\triangle P_c AB$, онда тежишта T_a, T_b, T_c та три троугла формирају једнакостранични троугао $\triangle T_a T_b T_c$.

[57] Наполеон (Napoléon Bonaparte, 1769–1821), француски војсковођа

(61) Нека је $\triangle A_1A_2A_3$ оштроугли троугао и нека су H_1, H_2, H_3 подножја висина из темена A_1, A_2, A_3 редом. Доказати, применом Примера 33 на стр 81, да су троуглови $\triangle A_1A_2A_3$, $\triangle A_1H_2H_3$, $\triangle H_1A_2H_3$, $\triangle H_1H_2A_3$ слични.

Упутство: Не умањује општост, а поједностављује проблем, ако координатни систем поставимо тако да је $A_1 = (0,0)$, $A_2 = (c,0)$, $A_3 = (a,b)$.

(62) Доказати да је скуп $\mathbf{Z}[\sqrt{2}] = \{m + n\sqrt{2} \mid m,n \in \mathbf{Z}\}$ густ у $\mathbf{R}$.

Упутство: Претпоставити супротно – да је $\mathbf{Z}[\sqrt{2}] \cap (a, a+\varepsilon) = \emptyset$ за неко $\varepsilon > 0$. Пошто је скуп $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ густ у $\mathbf{R}$ ако и само ако је густ скуп $a + \mathbf{Z}[\sqrt{2}] := \{a + e \mid e \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]\}$, можемо, не умањујући општост, да претпоставимо да је $a = 0$. Закључити да је

$$\nu := \inf \mathbf{Z}[\sqrt{2}] \cap (0,+\infty) > 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{Z}[\sqrt{2}] \cap [0,s) = \{0\}.$$

Доказати затим да је $\nu \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ – у супротном би било $\nu = \inf \mathbf{Z}[\sqrt{2}] \cap (0,+\infty)$, па би постојали елементи $e_1, e_2 \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}] \cap (0,+\infty)$, такви да је

$$\nu \le e_1 < e_2 \le \nu + \frac{1}{2}\nu.$$

Одатле би следило $\mathbf{Z}[\sqrt{2}] \cap (0,+\infty) \ni e_2 - e_1 < \nu/2 < \nu$, што је контрадикција. Доказати затим да за свако $e \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ постоји цео број k, такав да је $e = k\nu$ (узети $k = [e/\nu]$ и из $k\nu \le e < (k+1)\nu$ закључити да је $e - k\nu \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}] \cap [0,\nu)$, односно $e - k\nu = 0$). Специјално, постоје цели бројеви k_1, k_2 такви да је $1 = k_1\nu$, $\sqrt{2} = k_2\nu$. Извести одатле контрадикцију.

(63) Уопштавајући вежбу (62) доказати да је подгрупа $(G,+)$ групе $(\mathbf{R},+)$ или густа или дискретна (дискретан скуп смо дефинисали у Дефиницији 22). Извести одатле још једно решење Задатка 62 на стр. 40 (видети и Пример 21 на стр. 52). Упутство: Нека је $\nu = \inf G \cap (0,+\infty)$. Доказати (користећи идеју Вежбе (62)) да из $n\nu > 0$ следи $G = \nu\mathbf{Z}$.

(64) Нека је E непребројив скуп тачака у комплексној равни $\mathbf{C}$. Доказати да постоји диск $D = \{z \mid |z| \le \rho\}$ са центром у нули у коме се налази непребројиво много тачака скупа E.

(65) Нека је P скуп тачака у равни са својством да је растојање између сваке две његове тачке веће од $\varepsilon > 0$. Доказати да је скуп P највише пребројив.

(66) Нека је S пребројив скуп правих које леже у равни σ. Доказати да постоји тачка $x \in \sigma$ која не припада ни једној правој скупа S.

(67) Нека је T пребројив скуп правих у тродимензионом еуклидском простору. Доказати да постоји права која не сече ни једну праву скупа T.

(68) Доказати да сваки бесконачни скуп има прави (непразан и различит од целог скупа) подскуп који је пребројив.

(69) Доказати да је сваки бесконачан подскуп пребројивог скупа пребројив.

(70) Доказати да се кардиналност непребројивог скупа не мења ако му се дода или одузме пребројив скуп.

(71) Нека је T пребројив скуп тачака на кругу $\mathbf{S}^1$. Да ли постоји угао θ, такав је $T \cap R_\theta(T) = \emptyset$ (R_θ је ротација око координатног почетка за угао θ)?

ГЛАВА 2

Функције реалне и комплексне променљиве

Операције и релације дефинисане на $\mathbf{C}$ преносе се на пресликавања произвољног скупа у подскуп комплексне равни. Прецизније, за два пресликавања $f_1 : X_1 \to \mathbf{C}$, $f_2 : X_2 \to \mathbf{C}$ и $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$ дефинишимо пресликавања

$$\begin{array}{l} f_1 + f_2 : X_1 \cap X_2 \to \mathbf{C}, \quad (f_1 + f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x), \\ \lambda f_1, \mu + f_1 : X_1 \to \mathbf{C}, \quad (\lambda f_1)(x) := \lambda \cdot f_1(x), \quad (\mu + f_1)(x) = \mu + f_1(x), \\ f_1 \cdot f_2 : X_1 \cap X_2 \to \mathbf{C}, \quad (f_1 \cdot f_2)(x) := f_1(x) \cdot f_2(x), \\ \frac{f_1}{f_2} : X_1 \cap X_2 \setminus \{x \in X_2 \mid f_2(x) = 0\} \to \mathbf{C}, \quad (\frac{f_1}{f_2})(x) := \frac{f_1(x)}{f_2(x)}. \end{array} \tag{1}$$

Ако је $X_1 = X_2$ дефинишемо релацију $f_1 \leq f_2 \Leftrightarrow (\forall x)\, f_1(x) \leq f_2(x)$.

Термин *функција* се често (мада то није опште прихваћена терминологија, па се понекад термини *функција* и *пресликавање* сматрају синонимима) користи за таква пресликавања, која имају вредности у скупу бројева, тј. за пресликавања $f : X \to Y$, где је $Y \subset \mathbf{C}$. Ми ћемо пресликавања $f : X \to Y$, где је $X \subset \mathbf{R}$ и $Y \subset \mathbf{R}$ или $Y \subset \mathbf{C}$ називати *функцијама реалне променљиве*; у првом случају говорићемо о *реалним*, а у другом о *комплексним* функцијама реалне променљиве. Функције $f : X \to Y$, где је $X \subset \mathbf{C}$ зваћемо *функцијама комплексне променљиве*.

1. Елементарне функције

У овом параграфу увешћемо појам елементарне функције *реалне* променљиве, али ћемо на одређеним местима говорити и о функцијама са доменом у пољу комплексних бројева.

1.1. Полиномске функције. Већ смо се сусрели са појмом полинома. Полиномска функција степена n је пресликавање

$$f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}, \quad f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, \tag{2}$$

са доменом $\mathcal{D}(f) = \mathbf{C}$. Ако су коефицијенти $a_0, \ldots, a_n$ реални, рестрикција функције (2) на подскуп $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$ дефинише функцију

$$f|_{\mathbf{R}} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}.$$

У општем случају, ако је $a_0, \ldots, a_n \in \mathbf{C}$ рестрикција функције (2) на $\mathbf{R}$ је функција

$$f|_{\mathbf{R}} : \mathbf{R} \to \mathbf{C}.$$

Специјално, полиномска функција функција $z \mapsto z^n$ назива се *степеном функцијом*.

1.2. Рационалне функције. Рационална функција је количник две полиномске функције:

$$f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}, \quad f(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m}. \tag{3}$$

Домен функције (3) је скуп $\mathcal{D}(f) = \{z \in \mathbf{C} \mid b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m \neq 0\}$. Ако су коефицијени a_j и b_j реални бројеви, рестрикција функције (3) на $\mathbf{R}$ је реална функција реалне промењиве, са доменом $\{x \in \mathbf{R} \mid b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m \neq 0\}$.

Означимо бројилац и именилац израза (3) са $A(z)$ и $B(z)$, тј. нека је

$$A(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, \qquad B(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m \tag{4}$$

и нека је

$$f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}, \quad f(z) = \frac{A(z)}{B(z)}. \tag{5}$$

Теорема 1. **(Дељење полинома)** *Ако је $m \leq n$, функција (5) може да се напише у облику*

$$f(z) = Q(z) + \frac{R(z)}{B(z)},$$

где је R полином степена мањег од m. Другим речима, за полиноме (4) постоје полиноми Q и R такви да је

$$A(z) = B(z)Q(z) + R(z), \tag{6}$$

при чему је степен полинома R мањи од m.

△ Нека су A и B полиноми (4) и нека је

$$B_1(z) = B(z) \cdot \frac{a_n}{b_m} z^{n-m} \qquad \text{и} \qquad A_1(z) = A(z) - B_1(z).$$

Тада је A_1 полином степена $n-1$ и важи

$$A(z) = \frac{a_n}{b_m} z^{n-m} B(z) + A_1(z).$$

Ако је $n - 1 < m$, тиме је доказано (6). Ако је $m \leq n - 1$, поновимо исти поступак за A_1 уместо A. После $n - m$ корака добијамо (4). ▽

Последица 1. *Ако је ξ нула полинома A, онда је*

$$A(z) = (z - \xi)Q(z)$$

за неки полином Q, чији је степен мањи од степена полинома A.

△ Из Теореме 1, примењене на $B(z) = z - \xi$, следи да је

$$A(z) = (z - \xi)Q(z) + R(z), \tag{7}$$

за неки полином R степена мањег од степена полинома B. Пошто је $B = z - \xi$ полином степена 1, следи да је R полином степена 0, тј. константа. Међутим, из $A(\xi) = 0$ и (7) следи да је $R \equiv 0$. ▽

Последица 2. *Ако су $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbf{C}$ нуле полинома A, онда је*

$$A(z) = a_n(z - \xi_1) \cdot \ldots \cdot (z - \xi_n).$$

△ Доказ следи из вишеструке примене Последице 1[1] ▽

[1]Овај доказ се суштински не разликује од оног који смо дали на стр. 62.

Напомена 1. У духу Напомене 7 на стр. 63, можемо да приметимо сличност Теореме 1 са Теоремом 5 на стр. 29, која говори о дељењу у прстену $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$. Комутативни прстен $(P, +, \cdot)$ без делитеља нуле се назива *еуклидским прстеном* ако за све $a, b \in P$, такве да је $b \neq 0$, постоје $q, r \in P$, такви да је $a = bq + r$. Теорема 1 каже да је *прстен полинома* $(\mathbf{C}[z], +, \cdot)$ са комплексним коефицијентима еуклидски. На исти начин се доказује да је за свако поље F прстен полинома $(F[z], +, \cdot)$ са коефицијентима у F еуклидски. $\diamond$

Лема 1. *Нека су $A(z)$ и $B(z)$ полиноми (4), при чему је $n \leq m$, и нека је $\xi \in \mathbf{C}$ комплексан број који није нула полинома B. Тада постоје полином P степена мањег од m и константа $C \in \mathbf{C}$, такви да је*

$$\frac{A(z)}{(z-\xi)B(z)} = \frac{C}{z-\xi} + \frac{P(z)}{B(z)}.$$

$\triangle$ Треба да докажемо да постоје полином P и константа C, такви да је

$$A(z) = CB(z) + (z-\xi)P(z). \tag{8}$$

Очигледно је да константа C мора да задовољава

$$A(\xi) = CB(\xi). \tag{9}$$

Пошто је, по претпоставци, $B(\xi) \neq 0$, условом (9) константа C је добро дефинисана. Треба још да докажемо постојање полинома P, таквог да важи (8), тј.

$$(z-\xi)P(z) = A(z) - CB(z). \tag{10}$$

Пошто је константа C изабрана тако да је ξ нула полинома $A(z) - CB(z)$, из Последице 1 следи да десна страна у (10) може да се напише као производ $(z-\xi)Q(z)$, где је Q неки полином степена мањег од n. Тада (10) постаје

$$(z-\xi)P(z) = (z-\xi)Q(z),$$

одакле добијамо тражени полином $P(z) = Q(z)$. $\triangledown$

Последица 3. *Нека је $A(z)$ полином степена n и $\xi_1, \ldots, \xi_m$ различити комплексни бројеви, при чему је $n < m$. Тада постоје константе $C_1, \ldots, C_m \in \mathbf{C}$, такве да је*

$$\frac{A(z)}{(z-\xi_1)\cdot\ldots\cdot(z-\xi_m)} = \frac{C_1}{(z-\xi_1)} + \ldots + \frac{C_m}{(z-\xi_m)}.$$

Приметимо да смо Лему 1 и доказали под претпоставком да ξ није нула полинома $B(z)$. Самим тим, Последица 3 важи под претпоставком да су све нуле $\xi_1, \ldots, \xi_m$ имениоца различите. На суштински исти начин (мада технички мало сложенији) се доказују и следећа лема и њена последица.

Лема 2. *Нека су $A(z)$ и $B(z)$ полиноми (4) и нека је $\xi \in \mathbf{C}$ комплексан број који није нула полинома B. Нека је k природан број, такав да је $n < m + k$. Тада постоје полином P степена мањег од m и константе $D_1, \ldots, D_k \in \mathbf{C}$, такве да је*

$$\frac{A(z)}{(z-\xi)^k B(z)} = \frac{D_1}{z-\xi} + \frac{D_2}{(z-\xi)^2} + \ldots + \frac{D_k}{(z-\xi)^k} + \frac{P(z)}{B(z)}.$$

Последица 4. *Нека је $A(z)$ полином степена n и $\xi_1, \ldots, \xi_m$ различити комплексни бројеви и $k_1, \ldots, k_n$ природни бројеви, при чему је $n < k_1 + k_2 + \ldots + k_m$. Тада постоје константе $C_{ij} \in \mathbf{C}$, такве да је*

$$\begin{aligned}\frac{A(z)}{(z-\xi_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(z-\xi_m)^{k_m}} &= \left(\frac{C_{11}}{(z-\xi_1)} + \frac{C_{12}}{(z-\xi_1)^2} + \ldots + \frac{C_{1k_1}}{(z-\xi_1)^{k_1}}\right) + \\ &+ \left(\frac{C_{21}}{(z-\xi_2)} + \frac{C_{22}}{(z-\xi_2)^2} + \ldots + \frac{C_{2k_2}}{(z-\xi_2)^{k_2}}\right) + \\ &+ \qquad \ldots \qquad + \\ &+ \left(\frac{C_{m1}}{(z-\xi_m)} + \frac{C_{m2}}{(z-\xi_m)^2} + \ldots + \frac{C_{mk_m}}{(z-\xi_m)^{k_m}}\right).\end{aligned}$$

Претпоставимо сада да су сви коефицијенти $a_0, \ldots, a_n$ и $b_0, \ldots, b_m$ у (4) реални бројеви. Нуле полинома B тада су или реални бројеви, или се јављају у паровима конјуговано комплексних бројева (видети (62) на стр. 63). Ако у изразу из Последице 4 групишемо сабирке у којима се појављују конјуговане нуле и сведемо их на заједнички именилац, добијамо сабирке чији су имениоци квадратни, а бројиоци линеарни, полиноми са реалним коефицијентима. Тако добијамо следеће тврђење.

Теорема 2. *Нека су*

$$A(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \quad \textit{и} \quad B(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$$

полиноми са реалним коефицијентима. Тада је

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k_i}\frac{C_{ij}}{(x-r_i)^j} + \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{l_i}\frac{D_{ij}x + E_{ij}}{(x^2+p_i x+q_i)^j},$$

за неке реалне бројеве r_i, p_i, q_i, C_{ij}, D_{ij}, E_{ij}. Константе r_i су реалне нуле полинома $B(x)$ вишеструкости k_i, а квадратни полиноми у другој суми немају реалних нула.

Пример 1. Покажимо како рационалну функцију

$$f(x) = \frac{x}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

можемо да напишемо у облику из Теореме 2. Пре свега, факторишимо именилац. Лако је видети да су нуле имениоца ± 1 и да је

$$f(x) = \frac{x}{(x+1)(x-1)^2}.$$

У складу са Теоремом 2, тражимо константе C_1, C_2 и C_3, такве да је

$$f(x) = \frac{C_1}{x+1} + \frac{C_2}{x-1} + \frac{C_3}{(x-1)^2}. \tag{11}$$

Свођењем десне стране на заједнички именилац и сређивањем добијеног израза добијамо

$$x = (C_1 + C_2)x^2 + (-2C_1 + C_3)x + (C_1 - C_2 + C_3),$$

тако да су тражене константе решења система линеарних једначина

$$C_1 + C_2 = 0, \qquad -2C_1 + C_3 = 1, \qquad C_1 - C_2 + C_3 = 0.$$

Решавањем овог система добијамо $C_1 = -1/4$, $C_2 = 1/4$, $C_3 = 1/2$, па је

$$\frac{x}{x^3 - x^2 - x + 1} = -\frac{1}{4(x+1)} + \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{2(x-1)^2}.$$

Именилац функције f смо разложили на линеарне факторе. Посматрајмо функцију

$$g(x) = \frac{x^2}{(x+1)(x-1)^2(x^2+x+1)(x^2+1)^2}$$

код које то није могуће. У том случају, уместо (11) пишемо

$$g(x) = \frac{C_1}{x+1} + \frac{C_2}{x-1} + \frac{C_3}{(x-1)^2} + \frac{D_1x+E_1}{x^2+x+1} + \frac{D_2x+E_2}{x^2+1} + \frac{D_3x+E_3}{(x^2+1)^2},$$

и одатле тражимо константе C_j, D_j, E_j. ♯

Задатак 1. Израчунати

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)2^k}{k(k+1)}.$$

Упутство: у Задатку 23 на стр. 25 смо већ видели сличну идеју, која је у духу Теореме 2. ✓

1.3. Експоненцијалне функције. Нека је $a > 0$. У Дефиницији 26 на стр. 56 смо дефинисали број a^x за свако $x \in \mathbf{R}$. Лако је видети да је $a^x > 0$. Функцију

$$f : \mathbf{R} \to (0, +\infty), \quad f(x) = a^x \tag{12}$$

са доменом $\mathcal{D}(f) = \mathbf{R}$ називамо *експоненцијалном функцијом*.

1.4. Тригонометријске функције. У Дефиницији 35 (стр. 77) смо дефинисали синус и косинус реалног броја. Функције

$$x \mapsto \sin x, \quad x \mapsto \cos x \tag{13}$$

имају домене $\mathcal{D}(\sin) = \mathcal{D}(\cos) = \mathbf{R}$. Фукције

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x} \tag{14}$$

се називају *тангенсом* и *секансом* и имају домен $\mathcal{D}(\operatorname{tg}) = \mathcal{D}(\sec) = \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$. Функције

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} \tag{15}$$

се називају *котангенсом* и *косекансом* и имају домен $\mathcal{D}(\operatorname{cotg}) = \mathcal{D}(\operatorname{cosec}) = \mathbf{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

1.5. Инверзне функције. Да би функција $f : X \to Y$ имала инверзну функцију $f^{-1} : f(Y) \to X$, неопходно је да буде 1–1.

1.5.1. *Корене функције.* У Дефиницији 25 на стр. 56 смо дефинисали n–ти корен *позитивног* броја. Степена функција $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^n$ је $1-1$ ако и само ако је n непаран број.

Нека је $n = 2k+1$. У том случају, дефинисана је инверзна функција

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f^{-1} = \sqrt[2k+1]{x},$$

где је $\sqrt[2k+1]{x} := -\sqrt[2k+1]{-x}$ за $x < 0$ и $\sqrt[2k+1]{0} = 0$. Ову функцију називамо *кореном функцијом*. Њен домен је $\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathbf{R}$.

Нека је $n = 2k$. Тада је рестрикција функције f на $[0, +\infty)$ 1–1, па има инверзну функцију. Приметимо да је и рестрикција функције f на интервал $(-\infty, 0]$ такође 1–1, па и она има инверзну функцију. Ове две инверзне функције називају се двема *гранама* корене функције. Означимо их са f_+^{-1} и

f_-^{-1}. Обе имају исти домен $\mathcal{D}(f_+^{-1}) = \mathcal{D}(f_-^{-1}) = [0, +\infty)$, али различите области вредности:

$$f_+^{-1} : [0, +\infty) \to [0, +\infty), \quad f_-^{-1} : [0, +\infty) \to (-\infty, 0].$$

1.5.2. *Логаритамске функције.* Ако је $a > 0$ и $a \neq 1$ експоненцијална функција (12) је 1–1.

Задатак 2. Доказати да је $f : \mathbf{R} \to (0, +\infty)$ НА. (Упутство: уколико не успете, сачекајте док стигнете до 111. стране) ✓

Инверзну функцију $f^{-1} : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ називамо *логаритамском функцијом* и означавамо са $\log_a x$. У случају $a = e$ (број e је дефинисан на стр. 26) пишемо $\ln x$ или $\log x$ уместо $\log_e x$.[2] Из ове дефиниције и из Тврђења 3 на стр. 57 следи да логаритамска функција има следећа својства:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad \log_a x^y = y \log_a x, \quad \log_a x \log_b a = \log_b x$$
$$(a > 1 \wedge y < x) \Rightarrow \log_a y < \log_a x, \quad (0 < a < 1 \wedge y < x) \Rightarrow \log_a x > \log_a y.$$

Задатак 3. Доказати да је $\log_{10} 2$ ирационалан број. Да ли је број $\log_{10} 3$ рационалан или ирационалан? ✓

1.5.3. *Инверзне тригонометријске функције.* Као и у случају степених функција са парним степеном, тригонометријске функције нису 1–1, али њихове рестрикције на поједине интервале јесу, па можемо да издвојимо више грана инверзних тригонометријских функција. По договору, главним гранама сматрамо оне које се добијају од рестрикције синуса на интервал $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, косинуса на интервал $[0, \pi]$, тангенса на $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, секанса на $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, котангенса на $(0, \pi)$ и косеканса на $(0, \pi)$. Ове, главне, гране називамо инверзним тригонометријским функцијама, или *аркус* (лат. arcus – лу̂к) функцијама и означавамо са arc испред ознаке за функцију:

$$\begin{array}{ll} \operatorname{arcsin} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], & \operatorname{arccos} : [-1, 1] \to [0, \pi], \\ \operatorname{arctg} : \mathbf{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), & \operatorname{arcsec} : \{x \in \mathbf{R} \mid |x| \geq 1\} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \\ \operatorname{arccotg} : \mathbf{R} \to (0, \pi), & \operatorname{arccosec} : \{x \in \mathbf{R} \mid |x| \geq 1\} \to (0, \pi). \end{array}$$

Задатак 4. Доказати оправданост ових дефиниција, тј. сурјективност рестрикција тригонометријских функција на интервале који су у претходној дефиницији домени инверзних функција. (Упутство: као за Задатак 2) ✓

1.6. Класа елементарних функција. Елементарним функцијама називаћемо функције које се могу добити из функција које смо до сада разматрали у овом параграфу, операцијама сабирања, множења, дељења и композиције. Дајемо прецизну дефиницију.

Дефиниција 1. Класа *елементарних функција* је најмања класа $\mathcal{E}$ реалних функција реалне промењиве која има својства

(e1) полиномске, корене, експоненцијалне, логаритамске, тригонометријске и инверзне тригонометријске функције припадају класи $\mathcal{E}$
(e2) $f, g \in \mathcal{E} \Rightarrow f + g, f \cdot g, \frac{f}{g} \in \mathcal{E}$ (са одговарајућим доменима)
(e3) за $X, Y, Z \subset \mathbf{R}$ и $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ важи $f, g \in \mathcal{E} \Rightarrow g \circ f \in \mathcal{E}$.

[2] Напуштамо школски обичај коришћења посебне ознаке за логаритам са основом 10.

Пример 2. (Хиперболичке функције) Функције

$$\operatorname{sh} x := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \operatorname{ch} x := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

(*хиперболички синус и косинус*) су елементарне функције, као и *хиперболички тангенс и котангенс*

$$\operatorname{th} x := \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{cth} x := \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}.$$

Хиперболички синус је непарна, а хиперболички косинус парна функција:

$$\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x, \qquad \operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x.$$

Ове функције задовољавају идентитет $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$. ♯

Задатак 5. Доказати да функција $x \mapsto \operatorname{sh} x$ бијективно пресликава $\mathbf{R}$ на $\mathbf{R}$ и да је њена инверзна функција

$$\operatorname{arsh} y = \log(y + \sqrt{1 + y^2}), \quad y \in \mathbf{R},$$

а да функција $x \mapsto \operatorname{ch} x$ бијективно пресликава сваки од интервала $(-\infty, 0]$, $[0, +\infty)$ на $[1, +\infty)$, па има две инверзне гране

$$\operatorname{arch}_- y = \log(y - \sqrt{y^2 - 1}), \qquad \operatorname{arch}_+ y = \log(y + \sqrt{y^2 - 1}).$$

Доказати да хиперболички тангенс има инверзну функцију

$$\operatorname{arth} y = \frac{1}{2} \log \frac{1 + y}{1 - y}, \quad |y| < 1$$

а хиперболички котангенс

$$\operatorname{arcoth} y = \frac{1}{2} \log \frac{y + 1}{y - 1}, \quad |y| > 1.$$

✓

2. Непрекидност

2.1. Појам непрекидности. Посматрајмо функцију

$$g : \mathbf{R} \setminus \{-2\} \to \mathbf{R}, \quad g(x) = \frac{3x^2 + 5x - 2}{x + 2}. \tag{16}$$

Израз на десној страни у (16) можемо да трансформишемо:

$$\frac{3x^2 + 5x - 2}{x + 2} = \frac{(3x - 1)(x + 2)}{x + 2} = 3x - 1$$

за $x \neq -2$. Последњи израз је дефинисан за свако $x \in \mathbf{R}$, док је израз у (16) дефинисан на скупу $\mathcal{D}(g) = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$. Функција

$$\tilde{g}(x) = 3x - 1$$

задовољава $g(x) = \tilde{g}(x)$ за свако $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2\}$, при чему g није дефинисана у тачки -2, док је $\tilde{g}(-2) = -7$. Функција

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} \frac{3x^2+5x-2}{x+2}, & x \neq -2, \\ -7, & x = -2. \end{cases}$$

се разликује од функције

$$h(x) = \begin{cases} \frac{3x^2+5x-2}{x+2}, & x \neq -2, \\ 1, & x = -2. \end{cases}$$

по својству *непрекидности у тачки* -2, које уводимо следећом дефиницијом.

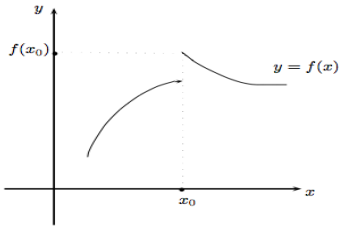
Дефиниција 2. Функција $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbf{R}$ је *непрекидна у тачки* $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ ако

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathcal{D}(f))\, |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Функција f је *непрекидна* ако је непрекидна у свакој тачки домена, тј. ако важи

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall y \in \mathcal{D}(f))(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathcal{D}(f))\, |x - y| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \quad (17)$$

Кажемо да је функција *прекидна у тачки* x_0 ако није непрекидна у тој тачки; у том случају тачку x_0 називамо *тачком прекида* функције f. ◊



Слика: прекид у тачки x_0

Задатак 6. Нацртати графике функција $\tilde{g}$ и h из дискусије која је претходила Дефиницији 2. Доказати да је функција $\tilde{g}$ непрекидна у тачки -2. За задато $\varepsilon > 0$ наћи $\delta > 0$ тако да важи

$$|x - (-2)| < \delta \;\Rightarrow\; |\tilde{g}(x) - \tilde{g}(-2)| < \varepsilon.$$

Доказати да функција h није непрекидна у тачки -2. ✓

2.2. Примери. Илустроваћемо појам непрекидности примерима.

Пример 3. Константна функција $f(x) \equiv c$ је непрекидна у свакој тачки свог домена. Заиста, пошто је $f(x) - f(y) = c - c = 0$, импликација из Дефиниције 2 у овом случају гласи

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall y \in U)(\exists \delta > 0)(\forall x \in U)\, |x - y| < \delta \;\Rightarrow\; 0 < \varepsilon$$

и очигледно је тачна. ♯

Пример 4. Функција $f(x) = |x|$ је непрекидна. Нека је $\varepsilon > 0$. Из Леме 7, 4. на 49 следи да је импликација из Дефиниције 2 тачна за $\delta = \varepsilon$. ♯

Пример 5. Функција *сигнум* (лат. signum – знак), дефинисана са

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

је прекидна у тачки 0 и непрекидна у свакој тачки $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Заиста, нека је $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Тада за свако $\delta > 0$ интервал $|x - 0| < \delta$ садржи пар a, $-a$ за неко $a \neq 0$. Из $|\operatorname{sgn} a - \operatorname{sgn}(-a)| = 2 > \varepsilon$ следи да је 0 тачка прекида функције sgn. Непрекидност у осталим тачкама следи из Примера 3. ♯

Пример 6. Функција $f(x) = x^n$ (за $n \in \mathbf{N}$) је непрекидна на скупу $\mathbf{R}$. Заиста, нека је $x_0 \in \mathbf{R}$. Тада је $x^n - x_0^n = (x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1})$. Лако се види да постоји $M > 0$ такво да за $x \in (x_0 - 1, x_0 + 1)$ важи $|x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}| < M$. Нека је $\varepsilon > 0$. Тада за $\delta = \min\{\varepsilon M^{-1}, 1\}$ важи импликација $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |x^n - x_0^n| < \varepsilon$. ♯

Пример 7. Функције $x \mapsto \sin x$ и $x \mapsto \cos x$ су непрекидне на скупу $\mathbf{R}$. Заиста,

$$|\sin x - \sin y| = \Big|2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}\Big| \le 2\Big|\sin\frac{x-y}{2}\Big| \le |x-y|,$$

где последња неједнакост следи из Леме 18. Одатле следи да за свако $\varepsilon > 0$, свако $\delta \le \varepsilon$ испуњава услове Дефиниције 2. Слично, из

$$|\cos x - \cos y| = \Big| -2\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2}\Big| \le 2\Big|\sin\frac{x-y}{2}\Big| \le |x-y|$$

следи непрекидност косинуса. ♯

Пример 8. Функција $x \mapsto a^x$ (за $a > 0$) је непрекидна на скупу $\mathbf{R}$. Доказаћемо то за $a > 1$, случај $a < 1$ се доказује аналогно, док је случај $a = 1$ размотрен у Примеру 3.

Докажимо прво непрекидност у нули. Из Тврђења 3 на стр. 57 следи да за $x \in \mathbf{R}$, важи

$$|x| < \frac{1}{n} \Rightarrow -a^{-\frac{1}{n}} < a^x < a^{\frac{1}{n}}. \tag{18}$$

Нека је $\varepsilon > 0$. Из Бернулијеве неједнакости и Архимедове аксиоме лако следи да

$$(\exists m \in \mathbf{N})\, n > m \Rightarrow (1+\varepsilon)^n > a.$$

Одатле, на основу Тврђења 3 на стр. 57 следи $a^{\frac{1}{n}} < (1+\varepsilon)$, тј. $a^{\frac{1}{n}} - 1 < \varepsilon$. Одатле лако следи $1 - a^{-\frac{1}{n}} < a^{-\frac{1}{n}}\varepsilon < \varepsilon$. Заједно са (18) сада имамо

$$-\varepsilon < a^x - 1 < \varepsilon,$$

одакле следи да $\delta = \frac{1}{n}$ задовољава услов Дефиниције 2. Тиме је доказана непрекидност у нули. Непрекидност у произвољној тачки $x_0 \in \mathbf{R}$ лако следи из $a^x - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{x-x_0} - 1)$ и непрекидности у нули. ♯

Пример 9. Функција $x \mapsto \log_a x$ (за $a > 0, a \ne 1$) је непрекидна на $(0, +\infty)$. Заиста, нека је $x_0 > 0$ и $\varepsilon > 0$. Претпоставимо да је $a > 1$, случај $a < 1$ третира се слично. Тада је

$$x_0 a^{-\varepsilon} < x < x_0 a^{\varepsilon} \Rightarrow -\varepsilon < \log_a \frac{x}{x_0} = \log_a x - \log_a x_0 < \varepsilon,$$

па за $\delta := \min\{x_0 - x_0 a^{-\varepsilon}, x_0 a^{\varepsilon} - x_0\} = x_0 - x_0 a^{-\varepsilon}$ важи

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |\log_a x - \log_a x_0| < \varepsilon,$$

одакле следи непрекидност функције $\log_a x$ у x_0. Касније ћемо дати још један доказ непрекидности логаритамске функције (в. Теорему 11 на стр 116). ♯

Задатак 7. Доказати да је функција $f(x) = x^{-1}$ непрекидна на свом домену. Наћи највеће $\delta > 0$ за које из $|x - 2| < \delta$ следи $|f(x) - f(2)| < 0,01$. ✓

Задатак 8. Доказати да је Хевсајдова[3] функција

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

прекидна у тачки $x = 0$ и непрекидна у свим осталим тачкама. ✓

Задатак 9. Испитати непрекидност функције $f(x) = [x]$ (цео део реалног броја). ✓

2.3. Још неке дефиниције непрекидности. Имајући у виду дефиницију отвореног скупа дату на стр. 53, добијамо следећу лему као једноставну преформулацију дефиниције непрекидности.

Лема 3. *Функција $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbf{R}$ је непрекидна у тачки $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ ако за сваку отворену околину V тачке $f(x_0)$ постоји отворена околина U тачке x_0 таква да важи $f(U \cap \mathcal{D}(f)) \subset V$.*

Задатак 10. Доказати да је свака функција непрекидна у свакој *изолованој* тачки свог домена. ✓

Напомена 2. Природно се поставља питање да ли је појам непрекидности везан искључиво за реалне функције реалне променљиве. Одмах видимо да импликација

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \tag{19}$$

а тиме и Дефиниција 2, има смисла и за комплексне функције комплексне променљиве. Заиста, Дефиницију 2 сматраћемо од сада и дефиницијом непрекидности комплексне функције комплексне променљиве, без потребе да је понављамо. Имајући у виду дефиницију отвореног скупа у $\mathbf{C}$ дату на стр. 74, појам непрекидности комплексних функција комплексне променљиве можемо да формулишемо и као у Леми 3.

Из $|\operatorname{Re} z|^2 \leq |z|^2 = |\operatorname{Re} z|^2 + |\operatorname{Im} z|^2$, $|\operatorname{Im} z|^2 \leq |z|^2 = |\operatorname{Re} z|^2 + |\operatorname{Im} z|^2$ следи да важи следећа лема.

Лема 4. *Комплексна функција $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbf{C}$ је непрекидна у тачки x_0 ако и само ако су непрекидне реалне функције $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f : \mathcal{D}(f) \to \mathbf{R}$, где је $(\operatorname{Re} f)(x) = \operatorname{Re}(f(x))$, $(\operatorname{Im} f)(x) = \operatorname{Im}(f(x))$.*

△ Доказ следи директно из

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re} f(x) - \operatorname{Re} f(x_0)|^2 &\leq |f(x) - f(x_0)|^2 \\ &= |\operatorname{Re} f(x) - \operatorname{Re} f(x_0)|^2 + |\operatorname{Im} f(x) - \operatorname{Im} f(x_0)|^2 \\ |\operatorname{Im} f(x) - \operatorname{Im} f(x_0)|^2 &\leq |f(x) - f(x_0)|^2 \\ &= |\operatorname{Re} f(x) - \operatorname{Re} f(x_0)|^2 + |\operatorname{Im} f(x) - \operatorname{Im} f(x_0)|^2 \end{aligned}$$

и дефиниције непрекидности импликацијом (19). ▽

Последица 5. *Пројекције $\pi_1, \pi_2 : \mathbf{C} \to \mathbf{R}$, $\pi_1(z) = \operatorname{Re} z$, $\pi_2 z = \operatorname{Im} z$ су непрекидне у свакој тачки.*

△ Доказ следи применом Леме 4 на непрекидну функцију $f(z) = z$. ▽

[3]Хевсајд (Oliver Heavside, 1850–1925), енглески математичар

Напомена 3. Импликација (19) може да се напише у терминима појма метрике (в. Дефиницију 31 на стр. 72), у виду $d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Дакле, једина специфичност поља комплексних бројева коју смо користили у Дефиницији 2 је постојање метрике у комплексној равни. Ово опажање ћемо касније искористити за уопштење појма непрекидности (в. Додатак 1).

Напомена 4. Нека су $f_1 : \mathcal{D}(f_1) \to \mathbf{C}$ и $f_2 : \mathcal{D}(f_2) \to \mathbf{C}$ две функције реалне или комплексне променљиве и нека је $x_0 \in \mathcal{D}(f_1) \cap \mathcal{D}(f_2)$. Претпоставимо да постоји отворена околина U тачке x_0, таква да је $f_1(x) = f_2(x)$ за свако $x \in U$. Тада је, на основу Дефиниције 2, очигледно да је функција f_1 непрекидна у тачки a ако и само ако је функција f_2 непрекидна у тој тачки. Другим речима, појам непрекидности у тачки зависи само од понашања функције у некој околини те тачке. Зато кажемо да је непрекидност *локално својство* функције.

Напомена 5. Имајући у виду Напомену 4, при разматрању особина функције $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbf{C}$ везаних за непрекидност у тачки $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ често ћемо се ограничити на посматрање њеног понашања у отвореној околини те тачке. При томе, тачка x_0 може да буде таква да ниједна њена отворена околина није садржана у $\mathcal{D}(f)$ (нпр. тачка 0 ако је $\mathcal{D}(f) = [0, 1]$). Зато уводимо следећи појам.

Дефиниција 3. Нека је $A \subset \mathbf{R}$. Тада је скуп V *отворен у скупу* A, ако постоји отворен скуп $U \subset \mathbf{R}$ такав да је $V = U \cap A$. Кажемо још и да је V *релативно отворен* у односу на A. Колекција свих подскупова скупа A који су отворени у A назива се *релативном топологијом скупа* A.

Скуп K је *затворен у скупу* A, ако постоји затворен скуп $L \subset \mathbf{R}$ такав да је $K = L \cap A$. Кажемо још и да је K *релативно затворен* у односу на A.

На пример, интервал $[0, \frac{1}{2})$ је отворена околина тачке $0 \in [0, 1]$ *у скупу* $[0, 1]$. Када говоримо о отвореним околинама тачке домена функције $\mathcal{D}(f)$, по правилу ћемо под тиме подразумевати скупове *отворене у скупу* $\mathcal{D}(f)$, без посебног наглашавања.

Лема 5. *Комплексна функција комплексне променљиве* $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbf{C}$ *је непрекидна ако и само ако је за сваки отворен скуп* $V \subset \mathbf{C}$ *скуп*

$$f^{-1}(V) := \{z \in \mathcal{D}(f) \mid f(z) \in V\}$$

отворен у $\mathcal{D}(f)$.

△ Доказ следи из Леме 3 и дефиниције отвореног скупа. ▽

Последица 6. *Комплексна функција комплексне променљиве* $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbf{C}$ *је непрекидна ако и само ако је за сваки затворен скуп* $K \subset \mathbf{C}$ *скуп*

$$f^{-1}(K) := \{z \in \mathcal{D}(f) \mid f(z) \in K\}$$

затворен у $\mathcal{D}(f)$.

△ Доказ следи из Леме 5, Леме 11 на стр. 53 и својства $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$. ▽

Задатак 11. Нека су

$$f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$$

непрекидне функције, такве да је $f(0) = g(0)$. Доказати да је функција

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \leq 0 \\ g(x), & x \geq 0 \end{cases}$$

непрекидна. ✓

2.4. Особине непрекидних функција. Из својства непрекидности функције у тачки можемо да изведемо неке закључке о понашању функције у околини те тачке. Један од њих је закључак о ограничености и локалној стабилности знака функције који издвајамо у лемама 6 и 7. Пре тога, дајемо следећу дефиницију.

Дефиниција 4. Функција $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbf{C}$ је *ограничена* на скупу $X \subset \mathcal{D}(f)$ ако постоји $M \geq 0$ за које важи $(\forall x \in X)\, |f(x)| \leq M$.

Из $|\operatorname{Re} z|^2 \leq |z|^2 = |\operatorname{Re} z|^2 + |\operatorname{Im} z|^2$, $|\operatorname{Im} z|^2 \leq |z|^2 = |\operatorname{Re} z|^2 + |\operatorname{Im} z|^2$ следи да је комплексна функција $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbf{C}$ ограничена ако и само ако су ограничене реалне функције $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f : \mathcal{D}(f) \to \mathbf{R}$.

Лема 6. *Нека је функција $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbf{C}$ непрекидна у тачки z_0. Тада је f ограничена у некој отвореној околини тачке z_0.*

△ Из напомене после Дефиниције 4 следи да је довољно размотрити случај реалне функције. Нека је $\varepsilon > 0$. Из дефиниције непрекидности следи да за неко $\delta > 0$ важи $z \in (z_0 - \delta, z_0 + \delta) \Rightarrow f(z_0) - \varepsilon < f(z) < f(z_0) + \varepsilon$, па је $|f(z)| < M = |f(z_0)| + \varepsilon$ у околини $|z - z_0| < \delta$ тачке z_0. ▽

Лема 7. *Нека је функција $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbf{R}$ непрекидна у тачки z_0.*

(а) *Ако је $f(z_0) > 0$, онда постоји отворена околина U тачке x_0 таква да је $f(z) > 0$ за све $z \in U$.*

(б) *Ако је $f(z_0) < 0$, онда постоји отворена околина U тачке z_0 таква да је $f(z) < 0$ за све $z \in U$.*

△ Нека је $f(z_0) > 0$ и $\varepsilon = \frac{1}{2} f(z_0)$. Тада из дефиниције непрекидности следи за неко $\delta > 0$ важи

$$|z - z_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(z) - f(z_0)| < \frac{1}{2} f(z_0).$$

Из последње неједнакости следи $f(z) > f(z_0) - \frac{1}{2} f(z_0) > 0$. Тиме је доказано (а), (б) се доказује на исти начин. ▽

Последица 7. *Ако комплексна функција $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbf{C}$ непрекидна у тачки z_0 и ако је $f(z_0) \neq 0$, онда постоји отворена околина U тачке z_0 таква да је $f(z) \neq 0$ за свако $z \in U$.*

△ Ако је $f(z_0) \neq 0$, онда је $\operatorname{Re} f(z_0) \neq 0$ или $\operatorname{Im} f(z_0) \neq 0$. Претпоставимо да је $\operatorname{Re} f(z_0) \neq 0$. Тада, према Леми 7, постоји отворена околина $U \ni z_0$ таква да је $\operatorname{Re} f(z) \neq 0$ за све $z \in U$. Али тада је и $f(z) \neq 0$ за $z \in U$. ▽

Алгебарске операције (1) чувају својство непрекидности. Прецизније, важи следећа теорема.

Теорема 3. *Нека је $Z \subset \mathbf{C}$ и нека су функције $f, g : Z \to \mathbf{C}$ непрекидне у тачки $z_0 \in Z$. Тада су непрекидне и функције $f + g$, $f \cdot g$ и, под условом да је $g(z_0) \neq 0$, $\frac{f}{g}$.*

$\triangle$ Нека је $\varepsilon > 0$.

Пошто су f и g непрекидне функције, за неко $\delta > 0$ важи

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \wedge |g(z) - g(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тада је $|(f+g)(z) - (f+g)(z_0)| \leq |f(z) - f(z_0)| + |g(z) - g(z_0)| < \varepsilon$, одакле следи да је $f + g$ непрекидна у z_0.

Из Леме 6 следи да за неку околину U тачке z_0 и неко $M \geq 0$ важи $(\forall z \in U)\, |f(z)| \leq M \wedge |g(z)| \leq M$. Из непрекидности функција f и g следи да за неко $\delta_1 > 0$ важи

$$|z - z_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2M} \wedge |g(z) - g(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Тада је, за $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$ и $|z - z_0| < \delta$,

$$\begin{aligned} |(f \cdot g)(z) - (f \cdot g)(z_0)| &= |f(z)g(z) - f(z)g(z_0) + f(z)g(z_0) - f(z_0)g(z_0)| \\ &\leq |f(z)||g(z) - g(z_0)| + |f(z) - f(z_0)||g(z_0)| \\ &\leq M|f(z) - f(z_0)| + M|g(z) - g(z_0)| \\ &< \tfrac{\varepsilon}{2M} + \tfrac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon, \end{aligned}$$

одакле следи да је $f \cdot g$ непрекидна у z_0.

Докажимо на крају да је, ако је $g(z_0) \neq 0$, $\frac{1}{g}$ непрекидна, одакле ће, на основу претходно доказаног, следити да је $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ непрекидна. Као у доказу Леме 7, из непрекидности функције g следи за неко $\delta_0 > 0$ важи

$$|z - z_0| < \delta_0 \;\Rightarrow\; |g(z) - g(z_0)| < \frac{1}{2}|g(z_0)|,$$

тј. $\frac{1}{2}|g(z_0)| \leq |g(x)| \leq \frac{3}{2}|g(x_0)|$, а за неко $\delta_1 > 0$ важи

$$|z - z_0| < \delta_0 \;\Rightarrow\; |g(z) - g(z_0)| < \frac{|g(z_0)|^2 \varepsilon}{2}.$$

Тада је, за $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$ и $|z - z_0| < \delta$,

$$\Big|\frac{1}{g(z)} - \frac{1}{g(z_0)}\Big| = \Big|\frac{g(z) - g(z_0)}{g(z)g(z_0)}\Big| \leq \frac{|g(z) - g(z_0|)}{\frac{1}{2}|g(z_0)||g(z_0)|} \leq \varepsilon,$$

тј. $\frac{1}{g}$ је непрекидна у z_0. $\triangledown$

Теорема 4. *Нека су X, Y подскупови комплексне равни $\mathbf{C}$ и*

$$f : X \to Y, \qquad g : Y \to \mathbf{C}$$

функције такве да је f непрекидна у тачки $x_0 \in X$, а g непрекидна у тачки $y_0 = f(x_0)$. Тада је функција $g \circ f$ непрекидна у тачки x_0.

$\triangle$ Нека је $\varepsilon > 0$. Из непрекидности функције g у y_0 следи да постоји $\delta_1 > 0$ са особином

$$|y - y_0| < \delta_1 \;\Rightarrow\; |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon.$$

Пошто је функција f непрекидна у тачки x_0 и $f(x_0) = y_0$, постоји $\delta > 0$ са особином

$$|x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - y_0| < \delta_1.$$

Из ове две импликације следи непрекидност функције $g \circ f$ у x_0. $\triangledown$

Задатак 12. Нека је $Z \subset \mathbf{C}$ и нека су

$$f, g : Z \Rightarrow \mathbf{R}$$

непрекидне функције. Доказати да су функције

$$M(z) = \max\{f(z), g(z)\} \qquad \text{и} \qquad m(z) = \min\{f(z), g(z)\}$$

непрекидне. Упутство: функције

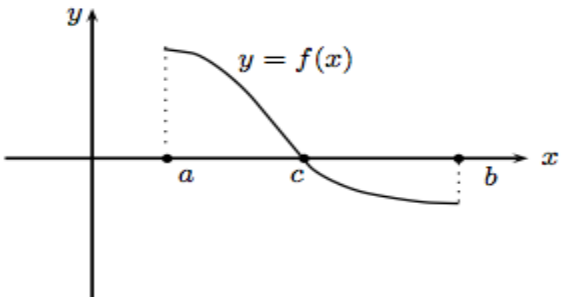
$$z \mapsto |f(z)| \qquad \text{и} \qquad z \mapsto |g(z)|$$

су непрекидне, као композиције непрекидних. Искористити идентитет

$$\max\{x, y\} = \frac{x + y + |x - y|}{2}$$

и сличан идентитет за минимум. ✓

Теорема 5. *Нека је функција $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ непрекидна на сегменту $[a, b]$ и нека важи $f(a) \cdot f(b) < 0$. Тада постоји тачка $c \in (a, b)$ таква да је $f(c) = 0$.*



△ Из $f(a) \cdot f(b) < 0$ следи да је вредност функције на једном крају интервала позитивна, а на другом негативна. Претпоставимо, не умањујући општост, да је $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Поделимо интервал $[a, b]$ на два дела тачком $\frac{a+b}{2}$. Ако је $f(\frac{a+b}{2}) = 0$, тачка $c = \frac{a+b}{2}$ испуњава услове теореме. Претпоставимо да је $f(\frac{a+b}{2}) \neq 0$, тј, не умањујући општост, $f(\frac{a+b}{2}) > 0$. Означимо $a_1 = \frac{a+b}{2}$, $b_1 = b$. На крајевима сегмента $[a_1, b_1]$ функција f има вредности различитог знака. Поновимо са сегментом $[a_1, b_1]$ исти поступак: поделимо га тачком $\frac{a_1+b_1}{2}$ на два интервала и означимо са $[a_2, b_2]$ онај од та два интервала на чијим крајевима функција f има вредности супротног знака. Продужимо тај процес даље.

Добијамо низ сегмената $[a_n, b_n]$, $n \in \mathbf{N}$ који задовољавају $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$. Пошто је дужина сегмента $[a_n, b_n]$ једнака $2^{-n}(b - a)$, следи да је

$$\inf\{b_n \mid n \in \mathbf{N}\} - \sup\{a_n \mid n \in \mathbf{N}\} \leq b_n - a_n \leq 2^{-n}(b - a)$$

за свако $n \in \mathbf{N}$, па је $\inf\{b_n \mid n \in \mathbf{N}\} - \sup\{a_n \mid n \in \mathbf{N}\} = 0$. Нека је

$$c := \inf\{b_n \mid n \in \mathbf{N}\} = \sup\{a_n \mid n \in \mathbf{N}\}. \tag{20}$$

Докажимо да је $f(c) = 0$. Претпоставимо супротно, да је $f(c) \neq 0$, тј, не умањујући општост, да је $f(c) > 0$. Тада, по Леми 7, постоји интервал $(c - \delta, c + \delta)$ на коме је функција f строго позитивна:

$$(\forall x \in (c - \delta, c + \delta))\, f(x) > 0. \tag{21}$$

Међутим, из (20) следи да $(\exists n)\,[a_n, b_n] \subset (c-\delta, c+\delta)$, па је (21) у контрадикцији са конструкцијом интервала $[a_n, b_n]$ по којој функција f има вредности супротног знака у тачкама a_n и b_n. $\bigtriangledown$

Последица 8. **(Теорема о међувредности)** *Ако је функција $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ непрекидна и $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$, онда за сваки број γ који је између α и β постоји $c \in [a,b]$ такво да је $f(c) = \gamma$.*

$\bigtriangleup$ Доказ следи применом Теореме 5 на функцију $g(x) = f(x) - \gamma$. $\bigtriangledown$

Последица 9. *Непрекидна функција слика интервал на интервал.*

$\bigtriangleup$ Доказ следи из Последице 8 и Леме 2 на стр. 21. $\bigtriangledown$

Пример 10. Пресликавање

$$f : [0, +\infty) \to [0, +\infty), \quad f(x) = x^n$$

је непрекидно и $1-1$, па из претходне теореме следи да је оно бијекција. Приметимо да смо овиме добили још један доказ Теореме 22 са 55. стране. $\sharp$

Задатак 13. Решити на сличан начин Задатке 2 и 4. $\checkmark$

Пример 11. Нека је функција $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ограничена и непрекидна. Тада f има *фиксну* (или *непокретну*) *тачку*, тј. постоји $c \in \mathbf{R}$ такво да је $f(c) = c$. Заиста, f је ограничена, па $(\exists m, M \in \mathbf{R})(\forall x \in \mathbf{R}) m \le f(x) \le M$. Посматрајмо функцију $h(x) = f(x) - x$; она је непрекидна и важи $m - x \le h(x) \le M - x$ за свако x. Одатле следи $h(m-1) \ge 1 > 0$, $h(M+1) \le -1 < 0$, па по Теореми о међувредности $(\exists c \in (m-1, M+1))h(c) = 0$, тј. $f(c) = c$. $\sharp$

Задатак 14. Нека је $f : [0,1] \to [0,1]$ непрекидна функција. Доказати да она има фиксну тачку. Дати пример непрекидне функције $g : (0,1) \to (0,1)$ која нема фиксну тачку. $\checkmark$

Пре формулације следеће теореме потребна нам је једна дефиниција. Нека је X произвољан скуп (не нужно подскуп у $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$).

Дефиниција 5. *Супремумом и инфимумом функције $f : X \to \mathbf{R}$* на скупу $A \subset X$ називамо величине

$$\sup_{x\in A} f := \sup\{f(x) \mid x \in A\}, \quad \inf_{x\in A} f := \inf\{f(x) \mid x \in A\}.$$

Уколико за неко $x_0 \in A$ важи $f(x_0) = \sup\limits_{x\in A} f$, број $f(x_0)$ називамо *максимумом функције f* и означавамо са $\max\limits_{x\in A} f$. У том случају кажемо да функција f *достиже свој максимум* на скупу A. Аналогно се дефинише и *минимум функције*.

Задатак 15. (а) Доказати да за $f, g : X \to \mathbf{R}$ и $A \subset X$ важи

$$\begin{aligned}
&\max_{x\in A} f = \max\{f(x) \mid x \in A\}, \quad \min_{x\in A} f = \min\{f(x) \mid x \in A\},\\
&\sup_{x\in A}(-f) = -\inf_{x\in A} f, \quad \inf_{x\in A}(-f) = -\sup_{x\in A} f,\\
&\sup_{x\in A}(f+g) \le \sup_{x\in A} f + \sup_{x\in A} g, \quad \inf_{x\in A}(f+g) \ge \inf_{x\in A} f + \inf_{x\in A} g,\\
&f, g \ge 0 \Rightarrow \sup_{x\in A}(f\cdot g) \le \sup_{x\in A}(f)\sup_{x\in A}(g), \ \inf_{x\in A}(f\cdot g) \ge \inf_{x\in A}(f)\inf_{x\in A}(g)
\end{aligned}$$

Показати примером да претходне неједнакости могу да буду и строге (упоредити ово са Лемом 1 на стр. 19).

(б) Ако је $f : X_1 \times X_2 \to \mathbf{R}$, $A_1 \subset X_1$, $A_2 \subset X_2$, доказати да је

$$\sup_{(x_1,x_2)\in(A_1\times A_2)} f(x_1,x_2) = \sup_{x_1\in A_1}\,(\sup_{x_2\in A_2} f(x_1,x_2)).$$

(в) Ако је $f_1 : X_1 \to \mathbf{R}$, $f_2 : X_2 \to \mathbf{R}$, $A_1 \subset X_1$, $A_2 \subset X_2$, доказати да је $\sup_{(x_1,x_2)\in(A_1\times A_2)} (f(x_1)+f(x_2)) = \sup_{x_1\in A_1} f(x_1) + \sup_{x_2\in A_2} f(x_2)$. ✓

Теорема 6. (Вајерштрасова теорема) *Нека је функција $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ непрекидна на сегменту $[a,b]$. Тада је f ограничена и достиже свој минимум и максимум.*

△ Из Леме 6 следи да за сваку тачку $x \in [a,b]$ постоји околина $U(x)$ таква да је f ограничена на $U(x)$. Скупови $U(x)$ покривају $[a,b]$. По Борел – Лебеговој теореми (стр. 50) постоји коначно потпокривање, тј. коначан скуп тачака $x_1,\dots,x_n \in [a,b]$ такав да скупови $U(x_1),\dots,U(x_n)$ покривају $[a,b]$. Пошто је $(\forall x \in U(x_k))\,|f(x)| \le M_k$, следи да је

$$(\forall x \in [a,b])\,|f(x)| \le M := \max\{M_1,\dots,M_n\},$$

што значи да је функција f ограничена.

Докажимо да f достиже максимум. Претпоставимо супротно – нека је $S = \sup_{x\in[a,b]} f$, али $f(x) < S$ за све $x \in [a,b]$. Тада је функција $g(x) := (S - f(x))^{-1}$ добро дефинисана и непрекидна (по Леми 3). Према управо доказаном тврђењу, свака непрекидна функција је ограничена на $[a,b]$. Међутим, по дефиницији супремума, $(\forall n \in \mathbf{N})(\exists x)\, S - f(x) < n^{-1}$, тј. $g(x) > n$, што значи да је g неограничена. Ова контрадикција показује да за неко $x_0 \in [a,b]$ важи $f(x_0) = S$, тј. f достиже максимум. Аналогно се доказује и да f достиже минимум. ▽

Пример 12. Функције

$$f : (-1,1) \to \mathbf{R},\ \ f(x) = x, \qquad g : [-1,1] \to \mathbf{R},\ \ g(x) = \begin{cases} x, & |x| \ne 1 \\ 0, & |x| = 1 \end{cases}$$

су ограничене и важи

$$\sup f(x) = \sup g(x) = 1, \qquad \inf f(x) = \inf g(x) = -1,$$

али ни једна од њих не достиже ни максимум ни минимум ни у једној тачки домена. Приметимо да оне не испуњавају услове Вајерштрасове теореме: функција f зато што јој домен није затворен интервал, а функција g зато што није непрекидна на свом домену (тачке прекида су ± 1). ♯

2.5. Равномерна непрекидност. Из Примера 6 на стр. 105 следи да је функција $f(x) = x^2$ непрекидна. Нека је $\varepsilon = 1$; нађимо δ тако да импликација

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \tag{22}$$

из дефиниције непрекидности важи у тачки $x_0 = 0$. У том случају, неједнакост $|f(x) - f(0)| < \varepsilon = 1$ је еквивалентна неједнакости $-1 < x^2 < 1$, која је задовољена за $x \in (-1,1)$, тј. за $|x - 0| < 1$. Закључујемо да је импликација (22) тачна за $\delta = 1$. Нека је сада $x_0 = 2$. Лако се види да у овој тачки за $\delta = 1$ које нам је у случају тачке $x_0 = 0$ обезбеђивало тачност импликације (22) у овом

случају то не чини: $|x-2|<1 \Rightarrow |x^2-2^2|<1$ *није* тачно, нпр. за $x=\frac{5}{2}$. Значи, за задато $\varepsilon>0$, избор $\delta>0$ које задовољава импликацију (22) зависи од тачке x_0.

Са друге стране, у Примеру 7 (стр. 105) смо видели да за функцију $f(x)=\sin x$ можемо, за задато $\varepsilon>0$, да нађемо једно $\delta>0$ тако да је импликација (22) тачна *за свако* x_0. Функције код којих је могућ овакав, *униформан* (тј. независан од тачке x_0) избор δ називамо *униформно* (или *равномерно*) *непрекидним*. Прецизирајмо то следећом дефиницијом.

Дефиниција 6. Функција $f:\mathcal{D}(f)\to\mathbf{C}$ се назива *униформно* (или *равномерно*) *непрекидном* ако важи

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall y\in\mathcal{D}(f))(\forall x\in\mathcal{D}(f))\,|x-y|<\delta \;\Rightarrow\; |f(x)-f(y)|<\varepsilon. \quad (23)$$

Појам равномерне непрекидности је јачи од појма непрекидности. Тачније, важи следећа лема.

Лема 8. *Равномерно непрекидна функција је непрекидна.*

△ Ако важи импликација (17) из Дефиниције 2 (стр. 104), онда важи и импликација (23). ▽

Пример 13. Функција $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^2$ је непрекидна, а није равномерно непрекидна. Приметимо да то *нисмо* доказали у разматрањима пре Дефиниције 6, где смо показали само да је за *једно* δ импликација (22) тачна за $x_0=0$, а није за $x_0=2$. Да бисмо доказали да f није равномерно непрекидна, потребно је показати више од тога – потребно је доказати да важи

$$(\exists\varepsilon>0)(\forall\delta>0)(\exists y\in\mathcal{D}(f))(\exists x\in\mathcal{D}(f))\,|x-y|<\delta\wedge|f(x)-f(y)|\geq\varepsilon. \quad (24)$$

Нека је $\varepsilon=1$. Посматрајмо бројеве $x_n=\sqrt{n+1}$ и $y_n=\sqrt{n}$. Тада је $x_n-y_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$. Јасно је да за свако $\delta>0$ постоје x_n,y_n такви да је $x_n-y_n<\delta$. Међутим, увек важи $f(x_n)-f(y_n)=1\geq\varepsilon$. Тиме је доказано (24). ♯

Теорема 7. (Канторова теорема) *Ако је функција $f:[a,b]\to\mathbf{C}$ непрекидна на ограниченом и затвореном интервалу $[a,b]$, онда је она и равномерно непрекидна.*

△ Нека је $\varepsilon>0$. Из дефиниције непрекидности следи да за свако $x\in[a,b]$ постоји δ_x за које важи $|x-y|<\delta_x\Rightarrow|f(x)-f(y)|<2^{-1}\varepsilon$. Нека је $U_x=(x-2^{-1}\delta_x,x+2^{-1}\delta_x)$ за свако x. Интервали U_x чине отворено покривање интервала $[a,b]$. Из Борел – Лебегове теореме (стр. 50) следи да постоји коначно потпокривање $U_{x_1},\ldots,U_{x_n}$. Нека је $\delta=\min\{2^{-1}\delta_{x_1},\ldots,2^{-1}\delta_{x_n}\}$. Тада важи

$$(\forall x)(\forall y)\,|x-y|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon. \quad (25)$$

Заиста, нека за $x,y\in[a,b]$ важи $|x-y|<\delta$. Пошто интервали $U_{x_1},\ldots,U_{x_n}$ покривају $[a,b]$, за свако $x\in[a,b]$ постоји U_{x_k} такво да је $x\in U_{x_k}$. Тада, из

$$|x_k-y|\leq|x_k-x|+|x-y|<2^{-1}\delta_{x_k}+\delta\leq2^{-1}\delta_{x_k}+2^{-1}\delta_{x_k}=\delta_{x_k}$$

следи да је $|f(y)-f(x_k)|<2^{-1}\varepsilon$, па је

$$|f(x)-f(y)|<|f(x)-f(x_k)|+|f(x_k)-f(y)|<2^{-1}\varepsilon+2^{-1}\varepsilon=\varepsilon,$$

одакле следи (25), а тиме и равномерна непрекидност функције f. ▽

Пример 13 показује да се услов ограничености интервала $[a,b]$ у Теореми 7 не може испустити. Покажимо да се не може испустити ни услов затворености.

Пример 14. Функција $f:(0,1)\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^{-1}$ је непрекидна, а није равномерно непрекидна. Заиста, непрекидност следи из непрекидности функције $g(x)=x$ и Теореме 3. Докажимо да f није униформно непрекидна. Нека је $\varepsilon=1$ и $\delta>0$ произвољно. Тада постоји $x\in(0,2^{-1}\delta)$ такво да је $x^{-1}\geq 1+2\delta^{-1}$. Нека је $y=2^{-1}\delta$. Тада је $|x-y|<\delta$ и $|f(x)-f(y)|\geq\varepsilon$. ♯

Читалац ће лако видети да смо у Примеру 14 заправо изложили доказ следеће леме.

Лема 9. *Ако је функција $f:(a,b)\to\mathbf{C}$ неограничена у свакој околини тачке a, онда она није равномерно непрекидна.*

Задатак 16. Доказати да су $f(x)=\sqrt{x}$ и $g(x)=\frac{\sin x^2}{\sqrt{x}}$ равномерно непрекидне функције. Упутство за g: доказати да за свако $\varepsilon>0$ постоји $M>0$ са особином да је $|g(x)|<\varepsilon/2$; на $[0,M]$ применити Канторову теорему. ✓

2.6. Непрекидност монотоних функција. Функцију $f:X\to\mathbf{R}$ називамо *растућом* ако важи

$$(\forall x_1,x_2\in X)\,x_1\leq x_2\Rightarrow f(x_1)\leq f(x_2),$$

а *опадајућом* ако важи

$$(\forall x_1,x_2\in X)\,x_1\leq x_2\Rightarrow f(x_1)\geq f(x_2).$$

Ако важи

$$(\forall x_1,x_2\in X)\,x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2),$$

функцију f називамо *строго растућом*, а ако важи

$$(\forall x_1,x_2\in X)\,x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2),$$

називамо је *строго опадајућом*. Понекад функције које су растуће, али не строго растуће, зовемо *неопадајућим*; док за функције које су опадајуће, али не строго опадајуће, користимо и термин *нерастуће*. Функцију која је растућа или опадајућа на целом домену називамо *монотоном*, што је еквивалентно дефиницији датој на стр. 36.

Теорема 8. *Монотона функција има највише пребројиво много тачака прекида.*

△ Претпоставимо, не умањујући општост да је f растућа и $x_0\in\mathcal{D}(f)$. Посматрајмо скупове

$$A_0:=\{f(x)\mid x<x_0\}\quad\text{и}\quad B_0:=\{f(x)\mid x>x_0\}.$$

Пошто је f растућа функција, следи да је скуп A ограничен одозго, а скуп B одоздо бројем $f(x_0)$. Нека је $a_0=\sup A_0$, $b_0=\inf B_0$. Тада, пошто је f растућа, следи

$$a_0\leq f(x_0)\leq b_0.$$

Ако је x_0 тачка прекида, онда је бар једна од претходне две неједнакости строга. Заиста, ако је $a_0=f(x_0)=b_0$ онда, по дефиницији супремума и инфимума, за свако $\varepsilon>0$ постоје бројеви $\alpha,\beta\in\mathcal{D}(f)$ такви да је $\alpha<x_0<\beta$ и

$$f(\alpha)-\frac{\varepsilon}{2}<a_0=f(x_0)=b_0<f(\beta)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Из последње неједнакости, на основу монотоности функције, следи

$$(\forall x \in (\alpha, \beta))\, |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

што је у супротности са прекидношћу функције f у x_0.

Овиме смо доказали да за сваку тачку прекида x_0 постоји интервал (a_0, b_0) такав да је

$$f(\mathcal{D}(f)) \cap (a_0, b_0) = \{f(x_0)\} \quad \text{или} \quad f(\mathcal{D}(f)) \cap (a_0, b_0) = \emptyset. \tag{26}$$

При томе различитим тачкама прекида одговарају различити интервали. Заиста, нека је x_1 тачка прекида различита од x_0, нпр. $x_1 < x_0$, и нека је (a_1, b_1) њој придружен интервал, на исти начин на који је (a_0, b_0) придружен тачки x_0. Нека су $t, s \in \mathcal{D}(f)$ такви да важи $x_1 < t < s < x_0$. Тада из монотоности функције f следи $f(t) \leq f(s)$, па је

$$b_1 := \inf\{f(x) \mid x > x_1\} \leq \sup\{f(x) \mid x < x_0\} = a_0,$$

па је $(a_0, b_0) \cap (a_1, b_1) = \emptyset$. Пошто у сваком интервалу постоји рационалан број, закључак теореме следи из пребројивости скупа $\mathbf{Q}$. $\triangledown$

Теорема 9. *Монотона функција $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ је непрекидна ако и само ако је $f((a, b))$ интервал.*

$\triangle$ Ако је f непрекидна онда је $f((a, b))$ интервал на основу Последице 9 на стр. 111. Обрнуто, ако је f монотона, онда свакој тачки прекида одговара интервал (a_0, b_0) такав да важи (26), што је у супротности са претпоставком да f слика интервал на интервал. $\triangledown$

Последица 10. *Ако строго монотона функција $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ слика интервал (a, b) на интервал (α, β), онда су и f и f^{-1} непрекидне функције.*

$\triangle$ Доказ следи из Теореме 9, јер f^{-1} слика (α, β) на (a, b). $\triangledown$

Из претходне Последице и Последице 9 на стр. 111 добијамо следећу последицу.

Последица 11. *Ако је строго монотона функција $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ непрекидна, онда је и f^{-1} непрекидна функција.*

Теорема 10. *Нека је $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ непрекидна. Тада је f инјективна ако и само ако је строго монотона.*

$\triangle$ Један смер је очигледан (и важи и без претпоставке о непрекидности): строго монотона функција је инјективна. Претпоставимо да је f инјективна и непрекидна, а да није строго монотона. Тада постоје тачке $x_1, x_2, x_3 \in [a, b]$ такве да је $x_1 < x_2 < x_3$, али да $f(x_2)$ није између $f(x_1)$ и $f(x_3)$. Претпоставимо, не умањујући општост да је $f(x_1)$ између $f(x_2)$ и $f(x_3)$. Применом Теореме 5 на интервал $[x_2, x_3]$ закључујемо да постоји тачка $c \in (x_2, x_3)$ таква да је $f(c) = f(x_1)$. Међутим, из $x_1 < x_2$ и $c \in (x_2, x_3)$ следи $x_1 \neq c$, што је у супротности са претпоставком о инјективности функције f. $\triangledown$

2.7. Непрекидност елементарних функција. Сада можемо да докажемо следећу теорему.

Теорема 11. *Елементарне функције су непрекидне.*

△ Непрекидност функција x^n, $\sin x$, $\cos x$, a^x смо доказали у Параграфу 2.2. Из Теореме 9 следи да оне сликају интервал (на коме су 1–1) на интервал. Непрекидност њима инверзних функција $\arcsin x$, $\arccos x$, $\log_a x$ сада следи из Теореме 10. Одатле, на основу Теореме 3 и Дефинције 1 следи непрекидност елементарних функција. ▽

Пример 15. Функција $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}+\cos(\log_{x^2+2}(x^6+6^x))}{x^4+4^x}$ је непрекидна на $\mathbf{R}$. ♯

2.8. Полунепрекидност. Суштина концепта непрекидности је у томе да се вредност непрекидне функције не мења много при малој промени променљиве. Нешто општији концепт је концепт *полунепрекидности одозго*, који описује функције чија се вредност не *повећава* много при малој промени променљиве. Слично се дефинише и појам функције која је *полунепрекидна одоздо*, као функције чија се вредност не *смањује* много при малој промени променљиве. Прецизна дефиниција је следећа.

Дефиниција 7. Функција $f : D \to \mathbf{R}$ је *полунепрекидна одозго* у тачки $x_0 \in D$ ако

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D)\ |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Слично, функција f је *полунепрекидна одоздо* ако

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D)\ |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ f(x_0) - \varepsilon < f(x).$$

Функција је *полунепрекидна одозго* (или *одоздо*) ако је таква у свакој тачки домена.

Приметимо да претходна дефиниција има смисла само за функције са вредностима у $\mathbf{R}$ (јер се подразумева поредак у скупу вредности), док домен D може да буде подскуп у $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$.

Задатак 17. Доказати да је функција

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$$

полунепрекидна одозго, а да није полунепрекидна одоздо у тачки $x = 0$. ✓

Задатак 18. Доказати да је функција

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

полунепрекидна одозго. Да ли је она и полунепрекидна одоздо? ✓

3. Гранична вредност

3.1. Тачке прекида. Посматрајмо функције $f, g : \mathbf{R} \setminus \{1\} \to \mathbf{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x > 1 \\ x - 1, & x < 1 \end{cases} \qquad \text{и} \qquad g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

После факторизације бројиоца и скраћивања, добијамо да је $g(x) = x + 1$ тамо где је g дефинисана, тј. на скупу $\mathbf{R} \setminus \{1\}$. Ако додефинишемо функцију g за $x = 1$, тј. дефинишемо функцију

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x), & x \neq 1 \\ 2, & x = 1, \end{cases}$$

добијамо функцију $\tilde{g} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ која је непрекидна у тачки $x = 1$. Приметимо да то не можемо да урадимо са функцијом f. Разлог је у томе што се функција f, за разлику од функције g, различито понаша на граници свог домена, тј. у тачки $x = 1$, са леве и десне стране, док функција f има једну, добро дефинисану *граничну вредност* у тој тачки. Приступимо строгој дефиницији овог појма.

3.2. Лимеси. Појам *граничне вредности*, или *лимеса* функције f дефинише се за тачке нагомилавања њеног домена $\mathcal{D}(f)$ (в. Дефиницију 22 на стр. 51). Важно је имати на уму да овај појам *не зависи* од вредности функције у тој тачки, нити од тога да ли је функција у тој тачки уопште дефинисана.

Дефиниција 8. Нека је x_0 тачка нагомилавања домена $\mathcal{D}(f)$ функције функције $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbf{R}$. Број y_0 је *гранична вредност* функције f у тачки x_0 ако

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathcal{D}(f))\, 0 < |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - y_0| < \varepsilon.$$

У том случају пишемо $y_0 = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ или „$f(x) \to y_0$ кад $x \to x_0$”.

Задатак 19. Нека је

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+6x+5}{x+5}, & x \neq -5 \\ \sqrt{2}, & x = -5 \end{cases}$$

и

$$L = \lim_{x \to -5} f(x).$$

(а) Наћи L.

(б) Наћи $\delta > 0$ тако да важи

$$0 < |x + 5| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - L| < \varepsilon$$

за $\varepsilon = 0,03$ и L нађено у (а).

(в) Да ли постоји $\delta > 0$ тако да важи

$$|x + 5| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - L| < \varepsilon$$

за $\varepsilon = 0,03$ и L нађено у (а)? ✓

Из Дефиниције 23 на стр. 53 видимо да појам лимеса можемо да формулишемо у терминима отворених скупова.

Лема 10. *Нека је x_0 тачка нагомилавања домена $\mathcal{D}(f)$ функције функције $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbf{R}$. Број y_0 је гранична вредност функције f у тачки x_0 ако за сваку отворену околину V тачке y_0 постоји отворена околина U тачке x_0 таква да је $f((U \setminus \{x_0\}) \cap \mathcal{D}(f)) \subset V$.*

Лема 11. *Лимес функције у тачки x_0 је јединствен.*

△ Нека y_0' и y_0'' задовољавају услове Дефинције 8, тј. $y_0' = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $y_0'' = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Тада за свако $\varepsilon > 0$ постоји x као у Дефинцији 8, па је

$$|y_0' - y_0''| = |y_0' - f(x) + f(x) - y_0''| \le |y_0' - f(x)| + |f(x) - y_0''| \le 2\varepsilon$$

за свако $\varepsilon > 0$. Одакле следи $y_0' = y_0''$. ▽

Приметимо да су Дефиниција 8 и Лема 10 сличне Дефиницији 2 и Леми 3. Једина разлика састоји се у захтеву $0 < |x - x_0|$ у Дефиницији 8. Као што смо рекли на почетку, он је везан са чињеницом да појам граничне вредности у тачки не зависи од вредности функције у тој тачки. Илуструјмо то следећим примером.

Пример 16. Функција

$$h(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0, \end{cases}$$

има граничну вредност у тачки $x_0 = 0$ и важи $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 1$, али није непрекидна у нули. Приметимо да је $h(0) \neq \lim\limits_{x\to 0} h(x)$. ♯

Претходним примером мотивисали смо следећу теорему.

Теорема 12. *Функција $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbf{R}$ је непрекидна у тачки $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ ако и само ако је $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

△ Доказ следи директно из Дефиниције 8 и Дефиниције 2. ▽

Задатак 20. Доказати да је непрекидна функција $f : (a, b) \to \mathbf{C}$ на *ограниченом* интервалу (a, b) равномерно непрекидна ако и само ако има лимесе у тачкама a и b. ✓

Пример 17. Риманова[4] функција

$$\mathcal{R}(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & x \in \mathbf{Q} \setminus \{0\},\ x = \frac{m}{n},\ m, n \text{ узајамно прости} \\ 0 & x \notin \mathbf{Q} \text{ или } x = 0 \end{cases}$$

је непрекидна у свакој ирационалној тачки и у нули, а прекидна у свакој рационалној тачки сем нуле.

Заиста, у $x_0 \in \mathbb{Q}$ је $f(x_0) > 0$. Пошто функција f није строго позитивна ни у једној околини тачке x_0, из Леме 7 на стр. 108 следи да је она прекидна у тој тачки.

Нека је x_0 ирационалан број. За произвољно $k \in \mathbf{N}$ у произвољном интервалу $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ постоји само коначно много тачака $\frac{m}{n}$ таквих да је $n < k$, па постоји околина $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ таква да је $(\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\mathcal{R}(x) < \frac{1}{k}$. Одатле следи да је $\lim\limits_{x\to x_0} \mathcal{R}(x) = 0$. ♯

Напомена 6. Као што смо у Напомени 2 појам непрекидности проширили и на функције $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbf{C}$, са $\mathcal{D}(f) \subset \mathbf{C}$, можемо да проширимо и појам граничне вредности. Заиста, и тај појам је потпуно дефинисан само у терминима растојања као и појам непрекидности (в. Напомену 3). Лема 11 и Теорема 12 важе и у овом у случају, са непромењеним доказима.

[4] Риман (Berhnard Riemann, 1826–1866), немачки математичар

Напомена 7. Егзистенција лимеса (и његова вредност) у тачки x_0 је локално својство, тј. зависи само од вредности функције у некој околини тачке x_0 (в. Напомену 4).

На сличан начин као и Лема 4 доказује се и следећа Лема.

Лема 12. *Нека је* $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbf{C}$ *комплексна функција. Тада је*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = z_0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to x_0} \operatorname{Re} f(x) = \operatorname{Re} z_0 \wedge \lim_{x\to x_0} \operatorname{Im} f(x) = \operatorname{Im} z_0.$$

Често се користи и следећа једноставна последица дефиниције лимеса.

Лема 13. $\lim_{z\to z_0} f(z) = 0$ *ако и само ако* $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = 0$.

△ Доказ следи директно из дефиниције граничне вредности. ▽

3.3. Бесконачни лимеси и лимеси у бесконачности. Нека је x_0 тачка нагомилавања скупа $\mathcal{D}(f)$. Тада

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \;\Leftrightarrow\; (\forall m < 0)(\exists \delta > 0)\, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < m,$$
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \;\Leftrightarrow\; (\forall M > 0)(\exists \delta > 0)\, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M,$$

дефинише бесконачне лимесе, а

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = y_0 \;\Leftrightarrow\; (\forall \varepsilon > 0)(\exists m < 0)\, x < m \Rightarrow |f(x) - y_0| < \varepsilon,$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = y_0 \;\Leftrightarrow\; (\forall \varepsilon > 0)(\exists M > 0)\, x > M \Rightarrow |f(x) - y_0| < \varepsilon$$

лимесе у бесконачности. Комбинацијом ове две дефиниције добијамо дефиниције бесконачних лимеса у бесконачности, нпр.

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty \;\Leftrightarrow\; (\forall M > 0)(\exists m < 0)\, x < m \Rightarrow f(x) > M.$$

Напомена 8. Имајући у виду дефиницију отворених околина у $\overline{\mathbf{R}}$ (Дефиниција 24 на стр. 53) појмове бесконачних лимеса и лимеса у бесконачности можемо да формулишемо на исти начин као у Леми 10. Особине лимеса дате у Лемама 11, 12 и 13 лако се преносе на лимесе у бесконачности и бесконачне лимесе (имајући у виду правила за рачунање у $\overline{\mathbf{R}}$ са стр. 21). Тачне формулације и модификације доказа препуштамо читаоцу.

Пример 18. $\lim_{x\to+\infty} (x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = +\infty$.

Заиста, $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = x^n(1 + a_{n-1}x^{-1} + \cdots + a_1 x^{-(n-1)} + a_0 x^{-n})$. Лако је видети да је лимес израза у загради једнак 1 (јер је лимес сваког сабирка у загради, сем првог, једнак нули), док је $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$. ♯

Задатак 21. Израчунати $\lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$. ✓

Задатак 22. Да ли Тврђење Задатка 20 на стр. 118 важи ако је интервал (a, b) неограничен, тј. ако је $a = -\infty$ или $b = +\infty$? ✓

Важан специјални случај лимеса у бесконачности је појам *конвергенције*, који се односи на функције дефинисане на скупу $\mathbf{N}$, тј. низове. Њега ћемо да размотримо детаљније у Глави 4.

3.4. Отклоњиви и неотклоњиви прекиди. Функција у Примеру 16 има граничну вредност у тачки прекида $x = 0$. Уколико променимо вредност функције у тој тачки, тј. ако дефинишемо функцију

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} h(x), & x \neq 0 \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

добијамо непрекидну функцију. То не можемо да урадимо са функцијама

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x > 0 \\ x-1, & x \leq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ x-1, & x \leq 0. \end{cases}$$

Систематизујмо ова опажања следећим дефиницијама.

Дефиниција 9. Број y_0 је *десни лимес* функције f у тачки x_0 ако важи

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\, x_0 < x < x_0 + \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - y_0| < \varepsilon.$$

Број y је *леви лимес* функције f у тачки x_0 ако важи

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\, x_0 - \delta < x < x_0 \;\Rightarrow\; |f(x) - y_0| < \varepsilon.$$

Десни лимес означавамо са $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ или $f(x_0 + 0)$, а леви са $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ или $f(x_0 - 0)$.

Задатак 23. Израчунати $\lim\limits_{x \to 1-0} e^{\frac{2}{x-1}}$. ✓

Очигледно важи следећа лема.

Лема 14. *Функција има лимес у тачки x_0 ако и само ако има леви и десни лимес и ови лимеси су једнаки:*

$$(\exists \lim_{x \to x_0} f(x)) \;\Leftrightarrow\; \big((\exists \lim_{x \to x_0 - 0} f(x)) \wedge (\exists \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)) \wedge \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x)\big).$$

Дефиниција 10. Функција f је *непрекидна са леве стране* у тачки x_0 домена ако је њен леви лимес у тачки x_0 једнак $f(x_0)$. Слично, функција f је *непрекидна са десне стране* у тачки x_0 домена ако је њен десни лимес у тачки x_0 једнак $f(x_0)$.

Задатак 24. Доказати да је функција

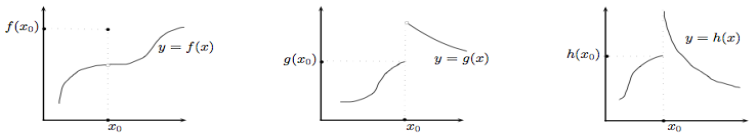
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 2, & x < 0 \\ 3, & x = 0 \end{cases}$$

полунепрекидна одозго у тачки 0 (видети Дефиницију 7 на стр. 116), али да није непрекидна ни са леве ни са десне стране у тој тачки. ✓

Дефиниција 11. Нека је $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ тачка прекида функција f. Кажемо да f има *отклоњив прекид* у тачки $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ ако је $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ (тј. ако постоји $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$), у супротном прекид називамо *неотклоњивим*. Неотклоњив прекид зовемо *прекидом прве врсте* ако постоје $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, али је $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, а *прекидом друге врсте* ако бар један од лимеса $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ не постоји.

Функције f, g и h из претходних разматрања су прекидне у 0. У тој тачки функција f неотклоњив прекид прве, функција g друге врсте, а функција h има отклоњив прекид, јер је $f(0-0) = -1 \neq 1 = f(0+0)$, $g(0+0)$ не постоји и $\lim_{x\to 0} h(x) = 1$.

Задатак 25. За сваку од функција на слици



одредити врсту прекида у тачки x_0. ✓

Задатак 26. Одредити тачке и врсте прекида функције

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-e^{x/(1-x)}}, & x \notin \{0,1\} \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

✓

Лема 15. *Нека је f растућа функција. Тада је*

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \sup\{f(x) \mid x < x_0\}, \qquad \lim_{x\to x_0+0} f(x) = \inf\{f(x) \mid x > x_0\}.$$

△ У доказу Теореме 8 смо доказали да $\sup\{f(x) \mid x < x_0\}$ и $\inf\{f(x) \mid x > x_0\}$ постоје. Нека је $s = \sup\{f(x) \mid x < x_0\}$ и $\varepsilon > 0$. По дефиницији супремума, за неко $x_1 < x_0$ важи $f(x_1) > s - \varepsilon$, тј. $s - f(x_1) < \varepsilon$. Због монотоности одатле следи $s - f(x) < \varepsilon$ за свако $x \in (x_1, x_0)$, тј. $f(x_0 - 0) = s$. Слично се доказује и друга једнакост. ▽

Последица 12. *Монотона функција има само прекиде прве врсте.*

Дефиниција 12. Нека је $X \subset \mathbf{C}$. *Модулом непрекидности* функције $f : X \to \mathbf{C}$ назива се функција

$$\omega_f(\delta) := \sup\{|f(z_1) - f(z_2)| \mid z_1, z_2 \in X,\ |z_1 - z_2| < \delta\}.$$

Задатак 27. Доказати да су модули непрекидности функција

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = x, \text{ и } g : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ g(x) = \sin x^2$$

$\omega_f(\delta) = \delta$ и $\omega_g(\delta) = 2$. ✓

Задатак 28. Доказати:

(а) Модул непрекидности је неопадајућа ненегативна функција, дефинисана за $\delta > 0$.

(б) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z_1, z_2 \in X)\, |z_1 - z_2| < \delta \Rightarrow |f(z_1) - f(z_2)| < \omega_f(0+0) + \varepsilon$.

(в) Ако је X интервал у $\mathbf{R}$ или диск у $\mathbf{C}$, онда је

$$\omega_f(\delta_1 + \delta_2) \leq \omega_f(\delta_1) + \omega_f(\delta_2).$$

(г) f је равномерно непрекидна ако и само ако је $\omega_f(0+0) = 0$. ✓

Пример 19. У Примеру 15 на стр. 26 смо дефинисали број e као

$$e := \sup\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \;\middle|\; n\in\mathbf{N}\right\}.$$

Развијањем по биномној формули и упрошћавањем биномних коефицијената као у (22) на стр. 26 добијамо

$$\begin{aligned}\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n}\left(\tfrac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}\left(1-\tfrac{j}{n}\right)\right)\\ &\le \sum_{k=0}^{n}\left(\tfrac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}\left(1-\tfrac{j}{n+1}\right)\right)\\ &\le \sum_{k=0}^{n+1}\left(\tfrac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}\left(1-\tfrac{j}{n+1}\right)\right)\\ &= \left(1+\tfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}.\end{aligned}$$

Тиме је доказано да је функција $f(x)=(1+\frac{1}{[x]})^{[x]}$ растућа, одакле, на основу Леме 15 следи да је

$$e=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]},$$

где је $[x]$ цео део реалног броја x (в. стр. 40). ♯

3.5. Особине лимеса. Сада ћемо доказати нека својства граничне вредности везана за алгебарске операције и релацију поретка у $\mathbf{R}$. Она важе и за леве и десне лимесе, али ћемо их, ради једноставности, формулисати само за лимесе.

Теорема 13. *Нека је z_0 тачка нагомилавања скупа $Z\subset\mathbf{C}$, $f,g:Z\to\mathbf{C}$ и*

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A,\qquad \lim_{z\to z_0} g(z)=B$$

Тада важи

$$\lim_{z\to z_0}(f+g)(z)=A+B,\quad \lim_{z\to z_0}(f\cdot g)(z)=A\cdot B$$

и, ако је $B\neq 0$ и $g(z)\neq 0$ на Z,

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f}{g}(z)=\frac{A}{B}.$$

△ Доказ је аналоган доказу Теореме 3 (или следи из ње имајући у виду Теорему 12). ▽

Следећа теорема описује особине лимеса везане за релацију поретка у $\mathbf{R}$.

Теорема 14. *Нека је z_0 тачка нагомилавања скупа $Z\subset\mathbf{C}$.*
1. Нека су $f,g:Z\to\mathbf{R}$ две функције такве да је

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A,\qquad \lim_{z\to z_0} g(z)=B$$

и $A<B$. Тада постоји околина U тачке z_0 таква да је $f(z)<g(z)$ за све $z\in U\cap Z\setminus\{z_0\}$.
2. Нека су $f,g:Z\to\mathbf{R}$ две функције такве да је $f<g$ и

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A,\qquad \lim_{z\to z_0} g(z)=B.$$

Тада је $A\le B$.

3. Нека су $f, g : Z \to \mathbf{R}$ две функције такве да је $f \leq g$ и

$$\lim_{z \to z_0} f(x) = A, \qquad \lim_{z \to z_0} g(z) = B.$$

Тада је $A \leq B$.

4. **(Теорема о три лимеса)** *Нека су $f, g, h : Z \to \mathbf{R}$ три функције такве да је $h \leq f \leq g$ и*

$$\lim_{z \to z_0} h(z) = C = \lim_{z \to z_0} g(z).$$

Тада је $\lim_{z \to z_0} f(z) = C$.

$\triangle$ Тврђења 2. и 3. следе из 1. Остаје да докажемо 1. и 4. Нека је $\varepsilon = \frac{B-A}{2}$. По дефиницији лимеса, постоји околина U тачке z_0 таква да је $|f(z) - A| < \varepsilon$ и $|g(z) - B| < \varepsilon$ за свако $z \in U \cap Z \setminus \{z_0\}$. Тада је

$$f(z) < \varepsilon + A = \frac{B-A}{2} + A = \frac{B+A}{2} = B - \frac{B-A}{2} = B - \varepsilon < g(z)$$

за свако $z \in U \cap Z \setminus \{z_0\}$. Тиме је доказано 1.

Нака су f, g и h као у 4. и $\varepsilon > 0$. Тада постоји $\delta > 0$ такво да ако је $0 < |z - z_0| < \delta$ важи

$$C - \varepsilon < h(z) < C + \varepsilon, \qquad C - \varepsilon < g(z) < C + \varepsilon.$$

Пошто је $h \leq f \leq g$ одатле следи $C - \varepsilon < f(z) < C + \varepsilon$, што доказује 4. $\triangledown$

Сада ћемо доказати Теорему о смени промењиве у лимесу. Формулисаћемо је прво у једноставнијем облику, у Леми 16, а затим у потпуном облику у Теореми 15.

Дефиниција 13. Бијекција $f : X \to Y$ назива се *хомеоморфизмом* ако су f и $f^{-1} : Y \to X$ непрекидна пресликавања.

Лема 16. *Нека функција $f : (a, b) \to \mathbf{C}$ има граничну вредност у тачки $x_0 \in [a, b]$, и нека је $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ хомеоморфизам. Тада је*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{t \to \varphi^{-1}(x_0)} f \circ \varphi(t).$$

$\triangle$ Нека је $\varphi^{-1}(x_0) = t_0$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ и $\varepsilon > 0$. Тада постоји $\delta_0 > 0$ за које важи

$$0 < |x - x_0| < \delta_0 \;\Rightarrow\; |f(x) - y_0| < \varepsilon. \tag{27}$$

Из непрекидности и бијективности функције φ следи да постоји $\delta > 0$ такво да важи

$$0 < |t - t_0| < \delta \;\Rightarrow\; 0 < |\varphi(t) - \varphi(t_0)| < \delta_0. \tag{28}$$

Из (27) и (28) следи $0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow |f \circ \varphi(t) - y_0| < \varepsilon$. $\triangledown$

Теорема 15. **(Теорема о смени промењиве у лимесу)** *Нека су $f : Y \to \mathbf{C}$ и $\varphi : X \to Y$ функције дефинисане на скуповима $X, Y \subset \mathbf{C}$ и z_0 тачка нагомилавања скупа Y и ζ_0 тачка нагомилавања скупа X. Претпоставимо да постоји $\lim_{z \to z_0} f(z)$.*

Ако за сваку отворену околину V тачке z_0 постоји отворена околина U тачке ζ_0 таква да је $\varphi(U \setminus \{\zeta_0\}) \subset V \setminus \{z_0\}$, онда функција $f \circ \varphi$ има лимес у тачки ζ_0 и важи $\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{\zeta \to \zeta_0} f \circ \varphi(\zeta)$.

$\triangle$ Доказ је у суштини исти као доказ Леме 16. $\triangledown$

Пример 20. Докажимо да је

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

У Леми 18 на стр. 84 смо доказали да за $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ важи $\sin x\le x\le \operatorname{tg} x$, одакле следи $\cos x\le\frac{\sin x}{x}\le 1$. На основу Теореме о три лимеса одатле следи $\frac{\sin x}{x}\to 1$ кад $x\to 0+0$. Сменом $t=-x$ и применом Теореме о смени променљиве добијамо $\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{t\to 0+0}\frac{\sin(-t)}{-t}=\lim\limits_{t\to 0+0}\frac{\sin t}{t}=1$. ♯

Задатак 29. Израчунати

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}.$$

✓

Задатак 30. Испитати непрекидност функције

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{|x|}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

у нули. ✓

Пример 21. Докажимо да је

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e. \tag{29}$$

Означимо са $\varphi(x)=[x]$ функцију цео део, уведену на стр. 40. Из неједнакости $[x]\le x<[x]+1$ следи

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}.$$

Из Теореме о три лимеса и Примера 19 следи $\lim\limits_{x\to+\infty}f\circ\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g\circ\varphi(x)=e$, одакле следи (29). ♯

Задатак 31. Доказати да је

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

Упутство: Приметити да је

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\left(\frac{x-1}{x}\right)^x=\left(\frac{x}{x-1}\right)^{-x}=\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{-x}$$

и у последњем изразу увести смену $t=x-1$. ✓

Пример 22. Нека је $\lambda\in\mathbf{R}$. Тада је

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\lambda}{x}\right)^x=e^\lambda.$$

Заиста из Примера 21 и непрекидности функције $y\mapsto y^\lambda$ следи да је

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x\lambda}=e^\lambda.$$

Ако је $\lambda>0$, сменом $t=x\lambda$ добијамо

$$\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{\lambda}{t}\right)^t=e^\lambda.$$

За $\lambda<0$ резонујемо слично као у Задатку 31, а случај $\lambda=0$ је тривијалан. ♯

Пример 23. Још један начин да се број e напише као лимес је

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e.$$

Заиста, сменом $t=x^{-1}$ из (29) добијамо десни лимес у нули, а леви лимес сводимо на њега помоћу Задатка 31. ♯

Задатак 32. Нека је

$$P(x)=c_0+c_1x+\ldots+c_mx^m,\qquad c_j\in\mathbf{C}$$

полином степена m. Доказати да је

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{P(x)}{e^x}=0.$$

Упутство: написати

$$\frac{P(x)}{e^x}=\frac{x^m}{e^x}\cdot\left(c_m+\frac{c_{m-1}}{x}+\ldots+\frac{c_0}{x^m}\right).$$

Искористити Пример 22 и доказати да је

$$e^x=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{x}{t}\right)^t>\left(\frac{x}{m+1}\right)^{m+1},$$

користећи идеју из Примера 19. ♯

Пример 24. Докажимо да је

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

Из Примера 23 следи да је

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=1.$$

У последњем кораку смо користили непрекидност логаритма и $\ln e=1$. ♯

Пример 25. Докажимо да је

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

Уведимо смену $t=e^x-1$, тј. $x=\ln(1+t)$. Тада је

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{1}{t}\ln(1+t)}=1,$$

на основу Примера 24. ♯

Задатак 33. Израчунати $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$. ✓

Пример 26. Докажимо да је

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^p-1}{x}=p.$$

Уведимо смену $(1+x)^p-1=t$. Тада је $p\ln(1+x)=\ln(1+t)$, па је

$$\frac{(1+x)^p-1}{x}=p\cdot\frac{t}{\ln(1+t)}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Из Примера 24 следи да оба количника на десној страни теже ка 1 кад $x\to 0$ (тј. $t\to 0$). ♯

3.6. Асимптотске релације. Нека је $z_0 \in \mathbf{C}$. На класи функција $f, g : Z \to \mathbf{C}$ дефинисаних на неком скупу $Z \subset \mathbf{C}$ коме је z_0 тачка нагомилавања уводимо следеће релације.

3.6.1. *Слабе асимптотске релације.*

$$f \preceq g \text{ кад } z \to z_0 \;\Leftrightarrow\; (\exists M > 0)(\exists \delta > 0)\, 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)| < M|g(z)|,$$
$$f \succeq g \text{ кад } z \to z_0 \;\Leftrightarrow\; f \preceq g \wedge g \preceq f \text{ кад } z \to z_0.$$

Уместо $f \preceq g$ пишемо и $f = O(g)$.

3.6.2. *Јаке асимптотске релације.*

$$f \ll g \text{ кад } z \to z_0 \;\Leftrightarrow\; (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\, 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)| < \varepsilon|g(z)|,$$
$$f \sim g \text{ кад } z \to z_0 \;\Leftrightarrow\; f - g \ll g \text{ кад } z \to z_0.$$

Уместо $f \ll g$ пишемо и $f = o(g)$.

Ако је $g \neq 0$ у околини тачке z_0, онда

1. $f = O(g)$ кад $z \to z_0$ означава да је за неко $M > 0$ $\frac{|f(z)|}{|g(z)|} < M$ у некој околини тачке z_0,
2. $f \succeq g$ кад $z \to z_0$ означава да је за неке $m, M > 0$ $m < \frac{|f(z)|}{|g(z)|} < M$ у некој околини тачке z_0,
3. $f = o(g)$ кад $z \to z_0$ означава да је $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{|f(z)|}{|g(z)|} = 0$,
4. $f \sim g$ кад $z \to z_0$ означава да је $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = 1$.

Симболе o и O називамо *Ландауовим*[5] *симболима*.

3.7. Асимптоте функције. Права $y = ax + b$, $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ назива се *косом асимптотом* функције f у $+\infty$ ако је $f(x) = ax + b + o(1)$ кад $x \to +\infty$. У том случају је

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax).$$

Права $y = b$, $b \in \mathbf{R}$ назива се *хоризонталном асимптотом* функције f у $+\infty$ ако је $f(x) = b + o(1)$ кад $x \to +\infty$.

Слично се дефинише и коса и хоризонтална асимптота у $-\infty$.

Права $x = b$ се назива *вертикалном асимптотом* функције f ако је

$$\lim_{x \to b+0} |f(x)| = +\infty \quad \text{или} \quad \lim_{x \to b-0} |f(x)| = +\infty.$$

Пример 27. Нека је $f(x) = |x+3|e^{-\frac{1}{x}}$. Права $y = -x-3$ је коса асимптота функције f у $-\infty$, права $y = x+2$ је њена коса асимптота у $+\infty$, а права $x = 0$ је вертикална асимптота. ♯

Задатак 34. Наћи асимптоте функције $f(x) = \cos\frac{1}{x}$. ✓

4. Вежбе

(1) Доказати да је скуп свих бијекција $f : [0,1] \to [0,1]$ таквих да је $f = f^{-1}$ непребројив. Да ли је непребројив подскуп овог скупа који се састоји од непрекидних бијекција са истим својством?

(2) Уопштити Задатак 3 на стр. 102: ако је n природан број, доказати да је број $\log_{10} n$ рационалан ако и само ако је $n = 10^k$ за неки природан број k. За које рационалне бројеве r је број $\log_{10} r$ рационалан?

[5] Ландау (Edmund Landau, 1877–1938), немачки математичар

(3) Наћи тачке и врсте прекида функције

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad f(x) = x + [x].$$

Доказати да је f инјекција и наћи домен и експлицитан израз за инверзну функцију f^{-1}.

(4) Доказати да је функција

$$f : [1/2, +\infty) \to \mathbf{R}, \qquad f(x) = [x] + (x - [x])^{[x]}$$

непрекидна. Доказати да f строго расте на $[1, +\infty)$.

(5) Доказати да је функција

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad f(x) = [x] \sin(\pi x)$$

непрекидна и нацртати њен график.

(6) Израчунати десни лимес L_+ функције $f(x) = x^2(x-2)|x-2|^{-1}$ у тачки $x = 2$, а затим, за $\varepsilon = 0,05$ наћи $\delta > 0$ тако да важи

$$2 < x < 2 + \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - L_+| < \varepsilon.$$

Формулисати и решити аналоган задатак за леви лимес L_-.

(7) Доказати, користећи формалну дефиницију граничне вредности (на $\varepsilon - \delta$ језику) у $-\infty$, да је

$$\lim_{x \to -\infty} 2^x = 0.$$

(8) Доказати, користећи формалне дефиниције граничних вредности (на $\varepsilon - \delta$ језику), да је

$$\lim_{x \to 1+0} e^{1/(1-x)} = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x \to 1-0} e^{1/(1-x)} = +\infty.$$

(9) Нека је

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \le 0 \\ ax^2 - 2x, & x > 0. \end{cases}$$

Наћи све $a \in \mathbf{R}$ за које f има непрекидну инверзну функцију f^{-1} и за те вредности a наћи f^{-1}.

(10) Ако је

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{x^2 - 4x + 4} = 1,$$

наћи

$$\lim_{x \to 2} f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{x - 2}.$$

(11) Нека је f реална функција реалне промењиве, таква је

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

Доказати да постоји интервал $I = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ такав да за $x \in I \setminus \{a\}$ важи $\operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} \alpha$.

(12) Израчунати

$$\lim_{x \to +\infty} x(\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x).$$

(13) Израчунати

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}}.$$

(14) Израчунати леви и десни лимес функције $(1+e^{1/x})^{-1}$ у нули.

(15) Израчунати

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+\alpha x)^p(1+\beta x)^q-1}{x},$$

за $p,q\in\mathbf{R}$, $\alpha,\beta\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$.

(16) Доказати да је

$$\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\cot^2 x}=e.$$

(17) Израчунати

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\sin x}.$$

(18) Нека су $a_1,a_1,\ldots,a_n$, $b_1,b_2,\ldots,b_n$ реални бројеви, такви да је

$$(\forall x\in(0,1))\ \left|\sum_{k=1}^{n}a_k\sin(b_kx)\right|\le\sin x.$$

Доказати да је

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_n\right|\le 1.$$

(19) Израчунати

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(x^2-x+1)}{\log(x^{10}+x^5+1)}.$$

(20) Нека су a,b,c позитивни реални бројеви. Доказати да је

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}}=(a^ab^bc^c)^{\frac{1}{a+b+c}}.$$

(21) Нека су $a_1,a_2,\ldots,a_n$ позитивни бројеви. Доказати да је

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{a_1^t+a_2^t+\cdots+a_n^t}{n}\right)^{1/t}=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

(22) Ако за функцију $f:[a-\varepsilon,a+\varepsilon]\to(0,+\infty)$ важи

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)+\frac{1}{f(x)}\right)=2,$$

доказати да је

$$\lim_{x\to a}f(x)=1.$$

(23) Нека за функцију $f:[a-\varepsilon,a+\varepsilon]\to\mathbf{R}\setminus\{0\}$ важи

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)+\frac{1}{|f(x)|}\right)=1.$$

Доказати да постоји

$$\lim_{x\to a}f(x)$$

и израчунати га.

(24) Израчунати

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right]\quad\text{и}\quad\lim_{x\to 0}\frac{b}{x}\left[\frac{x}{a}\right],$$

где су a и b позитивни реални бројеви.

(25) Доказати да је

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^k}{1+x+x^2+\cdots+x^k}\right)^{1+2x}=\frac{1}{e^2}$$

(26) Нека је $P(x)=x^{13}+x^7+x+1$. Израчунати

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{[P(x)]}{P([x])}.$$

(27) Одредити тачке и врсте прекида функције $f(x)=\operatorname{sgn}(\sin x)$.

(28) Нека је $f:[0,+\infty)\to\mathbf{R}$ непрекидна функција за коју постоји

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\alpha\in\mathbf{R}.$$

Доказати да је f ограничена.

(29) Нека је $f:\mathbf{R}\to(0,+\infty)$ непрекидна функција, таква да је

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0\quad\text{и}\quad\lim_{x\to-\infty}f(x)=0.$$

Доказати да

$$(\exists c\in\mathbf{R})\,(\forall x\in\mathbf{R})\;f(x)\le f(c).$$

(30) Нека је $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ непрекидна функција. Доказати да су функције

$$M(x)=\max_{a\le t\le x}f(t)\quad\text{и}\quad m(x)=\min_{a\le t\le x}f(t)$$

непрекидне.

(31) Нека је P полином. Доказати да функција $|P(x)|$ достиже минимум у некој тачки $c\in\mathbf{R}$.

(32) Нека је P полином који није идентички једнак нули. Доказати да

$$(\exists c\in\mathbf{R})\;|P(c)|=e^c.$$

(33) Нека је $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ непрекидна функција. Доказати да постоји $c\in[0,1]$, такво да је

$$(1-c)f(c)^2=c.$$

(34) Нека је $f:[-1,1]\to\mathbf{R}$ непрекидна функција и $f(-1)=f(1)$. Доказати да постоје $a,b\in[-1,1]$ за које је $|b-a|=1$ и $f(a)=f(b)$.

(35) Нека је $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ ограничена непрекидна функција. Доказати да постоји $c\in\mathbf{R}$ за које је $f(c)=c^3$.

(36) Нека је $f:\mathbf{R}\to(0,+\infty)$ непрекидна функција и $a_1,a_2,\cdots,a_n$ реални бројеви. Доказати да постоји $c\in\mathbf{R}$, такво да је

$$f(c)=\sqrt[n]{f(a_1)f(a_2)\cdots f(a_n)}.$$

(37) Нека је $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ непрекидна функција, таква да је $f(f(7))=7$. Доказати да је $f(c)=c$ за неко $c\in\mathbf{R}$.

(38) Нека су $f,g:[0,1]\to[0,1]$ непрекидна пресликавања, таква да је $f\circ g=g\circ f$. Доказати да је за неко $c\in[0,1]$ $f(c)=g(c)$. Упутство: Ако претпоставимо супротно, онда је, због непрекидности $g(x)-f(x)$ истог знака за све x. Претпоставимо да је $g(x)-f(x)>0$. Скуп $F=\{x\mid f(x)=x\}$ је непразан (видети Пример 11 на стр. 111). Нека је $c=\sup F$. Из непрекидности следи да је $c\in F$. Међутим, тада је и $g(c)\in F$, што је у супротности са $g(c)-f(c)>0$.

(39) Нека је $f : [0,1] \to [0,1]$ непрекидна функција, таква да је за неко $n \in \mathbf{N}$

$$\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n}(x) = x$$

за све $x \in [0,1]$. Ако је $f(0) = 0$ и $f(1) = 1$, доказати да је $f(x) = x$ за све $x \in [0,1]$. Упутство: доказати прво да је f 1–1. Одатле следи да f строго расте, јер кад би за неко $0 < a < b < 1$ било $f(b) < f(a)$ из непрекидности и $f(0) = 0$ следило би да за неко $c \in (0,a)$ важи $f(c) = f(b)$, што је у супротности са доказаним својством инјективности функције f. Из чињенице да f строго расте и $f^n(x) = x$ доказати да свака од претпоставки $\xi < f(\xi)$ и $f(\xi) < \xi$ доводи до контрадикције.

(40) Нека је $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ функција са особином да је за све $y \in \mathbf{R}$ скуп $f^{-1}(y)$ двочлан. Доказати да f није непрекидна. Упутство: нека је $f^{-1} = \{a,b\}$, $a < b$. Ако је f непрекидна, онда је f сталног знака на интервалу (a,b) (иначе $f^{-1}(0)$ не би био двочлан). Претпоставити да је f позитивна на (a,b) и доказати да је онда f негативна на $\mathbf{R} \setminus [a,b]$. Тада постоји $M = \max f$, па је скуп $f^{-1}(y)$ празан за $y > M$, што је у супротности са претпоставком да је овај скуп увек двочлан.

(41) Нека је $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ непрекидна функција, таква да је $f(0) = f(1)$. Доказати да за свако $n \in \mathbf{N}$ постоји $x \in [0,1]$ за које је $f(x) = f(x + \frac{1}{n})$. Упутство:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (f(k/n) - f((k+1)/n)) = f(0) - f(1) = 0,$$

па не могу сви сабирци да буду истог знака. Применити теорему о међувредности на функцију $x \mapsto f(x) - f(x + \frac{1}{n})$.

(42) Нека је $f : [a, +\infty) \to \mathbf{R}$ непрекидна функција и нека постоји

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \alpha \in \mathbf{R}.$$

Доказати да је f равномерно непрекидна.

(43) Испитати ограниченост и равномерну непрекидност функција:
(а) $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{1+x}$;
(б) $g : (0,1) \to \mathbf{R}$, $g(x) = \frac{1}{x}$;
(в) $h : (0,1] \to \mathbf{R}$, $h(x) = \sin \frac{\pi}{x}$.

(44) Нека је $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ равномерно непрекидна функција. Доказати да постоје позитивне константе A и B, такве да је $|f(x)| \leq A|x| + B$. Упутство: изабрати $\delta > 0$ такво да је $|f(x) - f(y)| < 1$ за $|x - y| < \delta$ и доказати (користећи неједнакост троугла) да је $|f(x) - f(0)| < n$ ако је $|x| < n\delta$ и, за тако изабрано x, $|f(x)| < |f(0)| + n$. Ако је $n_x := \min\{n \mid |x| < n\delta\}$, показати да је $|f(x)| < |f(0)| + n_x$ и $n_x < \delta^{-1}|x| + 1$.

(45) Функцију

$$f : \mathbf{Q} \to \mathbf{R}, \qquad f(q) = q$$

продужити на $\mathbf{R}$ тако да она
(а) има лимес у нули;
(б) има само десни лимес у нули.

(46) Нека је f непрекидна функција, таква да је $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{Q}$. Доказати да је f константна функција.

(47) Нека су $a_0, a_1, \ldots, a_n$, $b_0, b_1, \ldots, b_n$ реални бројеви, такви да је

$$a_0 < b_0 < a_1 < b_1 < \ldots < a_n < b_n.$$

Доказати да су све нуле полинома

$$P(x) = \prod_{k=0}^{n}(x + a_k) + 2\prod_{k=0}^{n}(x + b_k)$$

реалне.

(48) Нека је P полином степена n. Доказати да функција $x \mapsto \operatorname{sgn} P(x)$ има највише n тачака прекида.

(49) Испитати непрекидност функција $f, g, h : (0,1) \to \mathbf{R}$ дефинисаних на следећи начин. Нека је дат број $x \in (0,1)$ у децималном запису (при чему се не узима бесконачно много цифара 9 на крају, већ бесконачно много нула; нпр. узима се $x = 0,1$ уместо $x = 0,0999\ldots$).

(а) $f(x)$ је број који се добија кад се у децималном запису броја x обришу цифре на непарном месту иза децималне запете (нпр. $f(0,234698) = 0,368$, $f(0,158) = 0,5$).

(б) $g(x)$ је број који се добије кад се у децималном запису броја x на сваком месту уместо 0 напише 1, уместо 1 напише 2 итд, уместо 8 се напише 9, а уместо 9 се напише 0.

(в) $h(x)$ је број који се добије кад се у децималном запису броја x на сваком месту уместо 0 напише 9, уместо 1 напише 8 итд, уместо 4 се напише 5 и обрнуто – уместо 5 се напише 4, уместо 6 се напише 3 итд, уместо 9 се напише 0.

Упутство: Функције f и g су прекидне (у свакој околини тачке $x = 0,5$ се налази неки од бројева $0,49$; $0,499$; $0,4999$; ... – посматрати њихове вредности при пресликавањима f и g). Функција h је непрекидна (доказати да је $h(x) + x = 1$).

ГЛАВА 3

Извод функције реалне променљиве

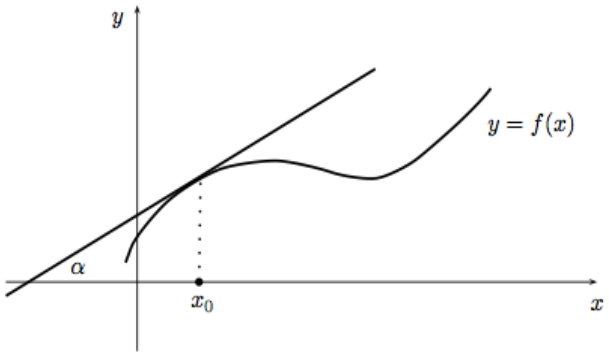
Нека је $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ непрекидна функција. Једначина тетиве њеног графика која спаја тачке $(x_0, f(x_0))$ и $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ је

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}(x - x_0),$$

а њен коефицијент правца, тј. тангенс угла између ње и позитивног дела x–осе је $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Коефицијент правца тангенте на график у тачки $(x_0, f(x_0))$ биће

$$f'(x_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

уколико овај лимес постоји.



Слика: $f'(x_0) = \mathrm{tg}\alpha$

1. Диференцијабилност

1.1. Дефиниција извода. Нека је дата функција $f : (a, b) \to \mathbf{C}$ и тачка $x_0 \in (a, b)$. Ако постоји лимес

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \tag{1}$$

он се назива *изводом функције* f у тачки x_0 и означава са $f'(x_0)$ или $\frac{df}{dx}(x_0)$. Тада кажемо да је функција f *диференцијабилна у тачки* x_0. Функцију зовемо *диференцијабилном* ако је она диференцијабилна у свакој тачки домена.

Класа диференцијабилних функција је ужа од класе непрекидних, тј. важи следећа лема.

Лема 1. *Ако је функција* $f : (a, b) \to \mathbf{C}$ *диференцијабилна у тачки* x_0, *онда је она у тој тачки и непрекидна.*

△ Пошто постоји лимес (1), важи

$$\lim_{h\to 0}(f(x_0+h)-f(x_0)) = \lim_{h\to 0} h\cdot\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0\cdot f'(x_0) = 0,$$

па је $\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$, тј. $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. ▽

Из дефиниције извода и Леме 12 на стр. 119 следи да је комплексна функција $f : (a,b) \to \mathbf{C}$ диференцијабилна ако и само ако су диференцијабилне реалне функције $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$ и да важи

$$f'(x_0) = (\operatorname{Re} f)'(x_0) + i(\operatorname{Im} f)'(x_0), \tag{2}$$

па је довољно да се у изучавању диференцијабилности ограничимо на реалне функције.

1.2. Примери. Израчунајмо изводе неких функција.

Пример 1. Нека је $f(x) \equiv c$ константна функција. Тада је

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = 0.$$

♯

Пример 2. Нека је $f(x) = x^n$, за неко $n \in \mathbf{N}$. Тада је

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}h^{k-1}x^{n-k} = nx^{n-1}$$

♯

Пример 3. Нека је $f(x) = |x|$. Из дефиниције апсолутне вредности и Примера 2 за $n = 1$ следи да је

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{за } x > 0 \\ -1, & \text{за } x < 0. \end{cases}$$

Пошто

$$\lim_{h\to 0}\frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0}\operatorname{sgn} h$$

не постоји, следи да функција $f(x) = |x|$ није диференцијабилна у нули (што је и у складу са нашом интуитивном представом о томе како изгледа график функције која у датој тачки има тангенту). Одавде видимо и да тврђење обрнуто Леми 1 не важи. ♯

Пример 4. Нека је $a > 0$ и $f(x) = a^x$. Тада је

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h} = \lim_{h\to 0} a^x\cdot\frac{a^h-1}{h} = a^x\log a.$$

♯

Задатак 1. Испитати диференцијабилност функције

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{за } x > 0 \\ e^{-x}, & \text{за } x \le 0. \end{cases}$$

✓

Пример 5. Нека је $a > 0$, $a \neq 1$ и $f(x) = \log_a x$, за $x > 0$. Тада је

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \tfrac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h} = \lim_{h\to 0} \tfrac{1}{h} \log_a \tfrac{x+h}{x} = \\ &= \lim_{h\to 0} \log_a \left(1+\tfrac{h}{x}\right)^{1/h} = \log_a e^{1/x} = \tfrac{1}{x}\log_a e. \end{aligned}$$

♯

Пример 6. Нека је $f(x) = \sin x$. Тада је

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\frac{2x+h}{2}}{h} = \cos x.$$

♯

Задатак 2. Нека је $f(x) = \cos x$. Доказати да је $f'(x) = -\sin x$. ✓

Задатак 3. Испитати диференцијабилност функције

$$f(x) = x^2\chi_{\mathbf{Q}}(x) = \begin{cases} x^2, & \text{за } x \in \mathbf{Q} \\ 0, & \text{за } x \notin \mathbf{Q}. \end{cases}$$

✓

1.3. Правила диференцирања.

Лема 2. **(Извод алгебарских комбинација)** *Нека су функције* $f, g : (a,b) \to \mathbf{C}$ *диференцијабилне у тачки* $x_0 \in (a,b)$ *и* $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$. *Тада важе следећа правила.*

(а) *Линеарност извода:*

$$(\lambda f + \mu g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0)$$

(б) *Лајбницово правило за извод производа:*

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0)$$

(в) *Правило за извод количника:*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

(ако је $g(x_0) \neq 0$*).*

△ (а) следи из

$$\begin{aligned} (\lambda f + \mu g)'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \tfrac{\lambda f(x_0+h)+\mu g(x_0+h)-\lambda f(x_0)-\mu g(x_0)}{h} \\ &= \lambda \lim_{h\to 0} \tfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + \mu \lim_{h\to 0} \tfrac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} \\ &= \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0). \end{aligned}$$

(б) следи из

$$\begin{aligned} (f\cdot g)'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \tfrac{f(x_0+h)\cdot g(x_0+h)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\tfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot g(x_0+h) + f(x_0)\cdot \tfrac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\right) \\ &= f'(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0). \end{aligned}$$

(в) следи из

$$\begin{aligned}\left(\tfrac{f}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x_0)g(x_0+h)}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\right)\\ &= \frac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.\end{aligned}$$

▽

Пример 7. Нека је $f(x)=\operatorname{tg} x$. Тада је

$$f'(x)=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Слично се доказује да је $(\operatorname{cotg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$. ♯

Лема 3. (Извод сложене функције) *Нека је функција $f:(a,b)\to(\alpha,\beta)$ диференцијабилна у тачки $x_0\in(a,b)$, а функција $g:(\alpha,\beta)\to\mathbf{C}$ диференцијабилна у тачки $y_0=f(x_0)$. Тада је функција $g\circ f:(a,b)\to\mathbf{C}$ диференцијабилна у тачки x_0 и важи*

$$(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))\cdot f'(x_0).$$

△ По дефиницији извода је

$$(g\circ f)'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{g(f(x_0+h))-g(f(x_0))}{h}. \tag{3}$$

Нека је $t=f(x_0+h)-f(x_0)=f(x_0+h)-y_0$. Пошто је функција f диференцијабилна у x_0, она је у тој тачки и непрекидна (Лема 1), па $t\to 0$ кад $h\to 0$. Одатле и из (3) следи

$$\begin{aligned}(g\circ f)'(x_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{g(f(x_0+h))-g(f(x_0))}{h}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{g(y_0+t)-g(y_0)}{t}\cdot\frac{t}{h}.\end{aligned}$$

Доказ Леме следи из $\frac{g(y_0+t)-g(y_0)}{t}\to g'(y_0)$ и $\frac{t}{h}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\to f'(x_0)$. ▽

Задатак 4. Наћи и исправити недостатак у претходном доказу, преписујући га на језику Ландауових симбола, на коме дефиниција извода гласи $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+o(h)$ кад $h\to 0$. ✓

Пример 8. Применом Леме 3 можемо да израчунамо извод функције

$$f:\mathbf{R}\setminus\{0\}\to\mathbf{R},\qquad f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}.$$

Добијамо

$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$$

за $x\neq 0$. ♯

Пример 9. Функција

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x} & \text{за } x\neq 0\\ 0 & \text{за } x=0\end{cases}$$

је диференцијабилна у свакој тачки. Заиста, за $x \neq 0$ њен извод налазимо користећи правила за рачунање извода, док за $x = 0$ извод можемо да израчунамо по дефиницији (1). Тако добијамо

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{за } x \neq 0 \\ 0 & \text{за } x = 0 \end{cases}$$

Приметимо да функција $x \mapsto f'(x)$ има прекид у нули, јер за свако $\delta > 0$ постоји $n \in \mathbf{N}$ такво да је $\frac{1}{n\pi} < \delta$. Пошто је $f'(\frac{1}{n\pi}) = \pm 1$, следи да f' нема лимес у нули. ♯

Задатак 5. Нека је

$$f(x) = \begin{cases} |x|^p \sin \frac{1}{x} & \text{за } x \neq 0 \\ 0 & \text{за } x = 0. \end{cases}$$

За које p је ова функција непрекидна? За које p је она диференцијабилна? За које p је њен извод непрекидан? ✓

Пример 10. Нека је $f(x) = x^\alpha$ за неко $\alpha \in \mathbf{R}$. Тада је $\log f(x) = \alpha \cdot \log x$. Одатле, диференцирањем и применом правила за извод сложене функције, добијамо

$$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \alpha \cdot \frac{1}{x},$$

тј.

$$f'(x) = \frac{\alpha}{x} f(x) = \frac{\alpha}{x} x^\alpha.$$

Одатле следи $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, што је уопштење Примера 2. ♯

Пример 11. Нека је $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$. Тада је

$$\log f(x) = \frac{1}{3}(\log(x+1) - \log(x-1)).$$

Диференцирањем добијамо

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right),$$

одакле следи

$$f'(x) = -\frac{2}{3} \frac{\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}}{x^2 - 1}.$$

♯

Задатак 6. Одредити домен и израчунати извод функције $f(x) = x^x$. ✓

Лема 4. **(Извод инверзне функције)** *Нека је $f : X \to Y$ бијекција и $f^{-1} : Y \to X$ њена инверзна функција. Ако је*

(1) *функција f диференцијабилна у тачки x_0,*
(2) *$f'(x_0) \neq 0$,*
(3) *f^{-1} непрекидна у тачки $y_0 = f(x_0)$*

тада је функција f^{-1} диференцијабилна у тачки y_0 и важи

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

△ По дефиницији извода је

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(y_0+h) - f^{-1}(y_0)}{h}. \tag{4}$$

Нека је

$$f^{-1}(y_0+h) - f^{-1}(y_0) = t. \tag{5}$$

Пошто је $f^{-1}(y_0) = x_0$, из (5) добијамо $h = f(x_0+t) - f(x_0)$. Из (5) и непрекидности функције f^{-1} и y_0 следи да $t \to 0$ кад $h \to 0$ (овде користимо непрекидност f^{-1} у тачки y_0, као и чињеницу да је f^{-1} бијекција, па је $f^{-1}(y_0+h) = f^{-1}(y_0)$ само за $h = 0$). Одатле и из (4) добијамо

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{t}{f(x_0+t) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

▽

Из претходне теореме и Последице 11 на стр. 115 следи

Последица 1. *Нека је $f : (a,b) \to (\alpha,\beta)$ непрекидна монотона функција и $f^{-1} : (\alpha,\beta) \to (a,b)$ њена инверзна функција. Ако је функција f диференцијабилна у тачки x_0 и $f'(x_0) \neq 0$, тада је функција f^{-1} диференцијабилна у тачки $y_0 = f(x_0)$ и важи*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Задатак 7. Нека је $f : X \to Y$ диференцијабилна у x_0 и $f^{-1} : Y \to X$ диференцијабилна у $y_0 = f(x_0)$. Доказати да је тада $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$. Приметимо да одатле следи $f'(x_0) \neq 0$, што је у Леми 4 потребно као претпоставка. (Упутство: применити Лему 3)

Да ли Лема 4 може да се примени на функцију $f(x) = x^3$ у тачки $x_0 = 0$ и зашто? ✓

Из претходног задатка видимо да услов (2) у Леми 4 не може да се изостави. Следећи пример показује да је и услов (3) неопходан.

Пример 12. **(Бијекција са изводом различитим од 0 и недиференцијабилним инверзом)** Нека је

$$S = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N} \right\}.$$

Посматрајмо низ природних бројева

$$c_n = n + [\sqrt{n} - 1],$$

где је $[\cdot]$ цео део. Обележимо природне бројеве који *не припадају* низу c_n са

$$m_1 < m_2 < m_3 \cdots .$$

Приметимо да је низ m_k бесконачан (бројеви облика $k^2 + k - 2$ за $k > 1$ нису чланови низа c_n). Дефинишимо функцију

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} x, & x \notin S \cup \mathbf{N} \\ 1/c_n, & x \in S \\ 1/m_k, & x = 2k,\ k \in \mathbf{N} \\ k+1, & x = 2k-1,\ k \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

Пошто су сви чланови низа c_n различити, лако је видети да је f бијекција. У околини нуле је $f(x) = x$ ван S и $f(1/n) = c_n$, а пошто је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{n} = 1,$$

следи да је $f'(0) = 0$. Међутим,

$$\lim_{k\to\infty} f^{-1}(1/m_k) = +\infty,$$

па f^{-1} није чак ни непрекидна, па тим пре ни диференцијабилна, у нули. ♯

Пример 13. Нека је $f(x) = \arcsin x$. Тада је

$$f'(x) = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y}, \quad \text{где је } x = \sin y.$$

Одатле и из $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$ следи $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. ♯

Задатак 8. Доказати да је
(а) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
(б) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
(в) $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$. ✓

Задатак 9. Нека је P полином. Доказати да је коефицијент уз x у полиному $P(x + a)$ једнак $P'(a)$. ✓

Задатак 10. Доказати да је, за $n > 1$,

$$\binom{n}{1} - 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} n \binom{n}{n} = 0.$$

Упутство: функцију $f(x) = 1 - (1 - x)^n$ написати на други начин помоћу биномне формуле; диференцирати оба израза и уврстити $x = 1$. ✓

Задатак 11. Нека је $C = \{(x, \sqrt{x}) \mid x \geq 0\} \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

(а) Наћи угао између x–осе и тангенте на криву C у тачки са x–координатом $\frac{3}{4}$.
(б) Наћи тачку на кривој C у којој тангента сече x–осу под углом $\frac{\pi}{4}$.
(в) Наћи тангенту на криву C која пролази кроз тачку $(-1, 0)$.

✓

1.4. Десни и леви извод. Уколико постоје лимеси

$$f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0+0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0-0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

они се називају *десним и левим изводима* функције f у тачки x_0. Очигледно је да је функција диференцијабилна у тачки x_0 ако и само ако у тој тачки има леви извод једнак десном изводу.

Задатак 12. Доказати да је функција $f : (a, b) \to \mathbf{C}$ која има леви и десни извод у тачки $x_0 \in (a, b)$ непрекидна у тој тачки. ✓

1.5. Извод имплицитно задате функције. Ако једначина

$$F(x,y)=0 \tag{6}$$

има јединствено решење по y, њом је задата функција $y=f(x)$. Њен извод можемо да израчунамо диференцирањем обе стране једначине (6), користећи правило за извод сложене функције.

Пример 14. Функција $y=f(x)$ задата је једначином

$$y^3+3x^2y+\sqrt{x^3}+x+1=0. \tag{7}$$

Израчунајмо $f'(0)$. Диференцирањем једначине (7) добијамо

$$3y^2y'+6xy+3x^2y'+\frac{3}{2}\sqrt{x}+1=0. \tag{8}$$

Из (7) следи да је $f(0)=-1$, па стављајући $x=0$, $y=-1$ у (8) добијамо $f'(0)=-\frac{1}{3}$. ♯

1.6. Извод параметарски задате функције. Нека је функција $y=f(x)$ задата параметарски:

$$x=x(t),\quad y=y(t);\quad a\le t\le b.$$

Тада је $y(t)=f(x(t))$, па је

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}},$$

при чему прва једнакост следи из правила за извод сложене, а друга из правила за извод инверзне функције.

Задатак 13. Нека је a позитивна константа. Крива задата, у поларним координатама, са

$$r=a(1+\cos\theta)$$

назива се *кардиоидом*.

(а) Скицирати ову криву криву и видети зашто је добила име[1].

(б) Наћи тачке у којима је тангента на кардиоиду хоризонтална.

Упутство: (б) Ако у Декартове координате, изражене преко поларних,

$$x=r\cos\theta,\qquad y=r\sin\theta,$$

уврстимо $r=a(1+\cos\theta)$, добијамо параметарску једначину кардиоиде. ✓

Приметимо да једнакост

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \tag{9}$$

има облик „дељења бројиоца и имениоца са dt". Иако на први поглед изгледа да та интерпретација нема смисла, јер смо израз $\frac{dy}{dx}$ увели само као ознаку за y', видећемо да једнакост (9) може управо тако да се интерпретира. Да бисмо то видели, потребан нам је појам диференцијала функције.

[1]Превод грчке речи *καρδια* (кардиа) је *срце* (али и *унутрашњи живот*, *намера*, *ум*, *карактер*, *духовни центар*).

1.7. Диференцијал функције. Нека је $f : (a, b) \to \mathbf{C}$ диференцијабилна функција. Из дефиниције извода следи да важи

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + o(h) \quad \text{кад} \quad h \to 0. \tag{10}$$

Други члан на десној страни израза (10) назива се *диференцијалом функције* и означава са $df(x)h$. Прецизније, диференцијал функције f је пресликавање

$$df : (a, b) \times \mathbf{R} \to \mathbf{C}, \quad df(x, h) = f'(x)h.$$

Очигледно је да је диференцијал линеаран по другој променљивој; прецизније, за свако фиксирано $x \in (a, b)$ пресликавање $h \mapsto f'(x)h$ је линеарно. Ово пресликавање означавамо са $df(x)$ и називамо *диференцијалом функције f у тачки x*:

$$df(x) : \mathbf{R} \to \mathbf{C}, \quad df(x)(h) = f'(x)h. \tag{11}$$

Специјално, диференцијал функције $f(x) = x$ у свакој тачки је пресликавање $dx(h) = h$. Имајући то у виду, израз (11) можемо да напишемо као $df(x)(h) = f'(x)dx(h)$. Ова једнакост важи за свако h, тј. функције $df(x)$ и $f'(x)dx$ су једнаке (као функције по h):

$$df(x) = f'(x)dx, \quad \text{или} \quad f'(x) = \frac{df(x)}{dx}. \tag{12}$$

Из једнакости (2) следи

$$df(x) = d(\operatorname{Re} f)(x) + id(\operatorname{Im} f)(x).$$

2. Основне теореме диференцијалног рачуна

У овом параграфу ћемо доказати неке теореме које нам омогућавају да на основу особина извода испитујемо понашање и својства функције.

2.1. Теореме о средњој вредности.

Теорема 1. (Фермаова теорема) *Нека функција $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ достиже свој максимум или минимум у тачки $c \in (a, b)$. Ако је функција f диференцијабилна у тачки c, онда је $f'(c) = 0$.*

$\triangle$ Претпоставимо да f достиже у тачки c минимум, тј. да је $f(c) \leq f(x)$ за свако x. Тада је, за $h > 0$

$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h} \geq 0,$$

а за $h < 0$

$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h} \leq 0.$$

Преласком на лимес кад $h \to 0$, из прве неједнакости закључујемо да је $f'(c) \geq 0$, а из друге да је $f'(c) \leq 0$, што заједно даје $f'(c) = 0$. $\triangledown$

Напоменимо да је $x_0 \in X$ тачка *локалног минимума* функције $f : X \to \mathbf{R}$ ако

$$(\exists \delta > 0)(\forall x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta))\, f(x_0) \leq f(x). \tag{13}$$

Ако важи

$$(\exists \delta > 0)(\forall x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta))\, f(x_0) < f(x) \tag{14}$$

кажемо да је x_0 тачка *строгог локалног минимума*. Тачке *локалног максимума* и *строгог локалног максимума* се дефинишу заменом симбола $\leq$ и $<$ у (2.1) и (14) симболима $\geq$ и $>$. Из Теореме 1 следи

Последица 2. (Потребан услов постојања локалног екстремума) *Да би функција $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ имала локални екстремум у тачки $c \in (a,b)$ неопходно је да буде испуњен један од следећа два услова: или f није диференцијабилна у c, или је $f'(c) = 0$.*

Пример 15. На примеру функције $f(x) = x^3$ која нема локални екстремум у 0 иако је $f'(0) = 0$ видимо да услов из Последице 2 није и довољан. ♯

Пример 16. Последица 2 даје потребан услов постојања екстремума у *унутрашњој* тачки. Функција $f : [0,1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + x$ има минимум у 0, а максимум у 1, иако је $f'(x) = 3x^2 + 1 \neq 0$ за свако x ♯

Теорема 2. (Ролова[2] теорема) *Нека је функција $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ непрекидна на $[a,b]$ и диференцијабилна на (a,b) и нека је $f(a) = f(b)$. Тада постоји тачка $c \in (a,b)$ таква да је $f'(c) = 0$.*

△ Пошто је функција f непрекидна, из Вајерштрасове теореме (Теорема 6 на стр. 112) следи да она на сегменту $[a,b]$ достиже свој максимум и минимум. Ако је једна од тачака у којима се ове вредности достижу унутрашња тачка интервала (a,b), из Фермаове теореме следи да је извод функције f у тој тачки једнак нули, чиме је доказ завршен. Ако се и максимум и минумум достижу у рубним тачкама a и b, онда из услова $f(a) = f(b)$ следи да је f константна, па је $f' \equiv 0$ (Пример 1). ▽

Задатак 14. Доказати да једначина

$$a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx = 0$$

има бар једно решење на интервалу $(0,\pi)$. Упутство: на функцију

$$f(x) = a_1 \sin x + \frac{a_2}{2} \sin 2x + \cdots + \frac{a_n}{n} \sin nx$$

применити Ролову теорему ✓

Напомена 1. Ролова теорема *не важи* за функције са вредностима у $\mathbf{C}$. На пример, функција

$$f : [0, 2\pi] \to \mathbf{C}, \qquad f(x) = \cos x + i \sin x$$

је диференцијабилна и важи $f(0) = f(2\pi) = 1$, али њен први извод $f'(x) = -\sin x + i \cos x$ је увек различит од нуле. ◇

Теорема 3. (Кошијева теорема) *Нека су функције $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ и $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ непрекидне на $[a,b]$ и диференцијабилне на (a,b) и нека је $g'(x) \neq 0$ за свако $x \in (a,b)$. Тада постоји тачка $c \in (a,b)$ таква да је*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

△ Функција $F(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$ задовољава услове Ролове теореме, па постоји $c \in (a,b)$ такво да је $F'(c) = 0$, што је еквивалентно са

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c). \tag{15}$$

По претпоставци је $g'(c) \neq 0$. Важи и $g(b) - g(a) \neq 0$, јер би у супротном из Ролове теореме следило да за неко $c_o \in (a,b)$ важи $g'(c_o) = 0$, што је у

[2]Рол (M. Rolle, 1652–1719), француски математичар

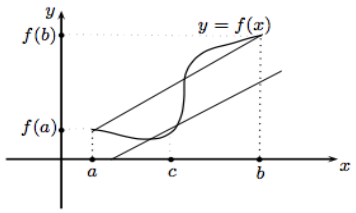
супротности са претпоставком да је $g'(x) \neq 0$ за свако $x \in (a,b)$. Одатле следи да обе стране у (15) можемо да поделимо са $(g(b)-g(a))g'(c)$, што доказује тврђење теореме. ▽

Теорема 4. (Лагранжова[3] теорема) *Нека је функција $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ непрекидна на $[a,b]$ и диференцијабилна на (a,b). Тада постоји тачка $c \in (a,b)$ таква да је*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c). \tag{16}$$

△ Доказ следи из Кошијеве теореме, за $g(x) = x$. ▽

Напомена 2. Лагранжова теорема има очигледну геометријску интерпретацију: израз на десној страни у (16) је нагиб тангенте у тачки c, а на левој нагиб тетиве која спаја тачке $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$.



Лагранжова теорема каже да постоји тачка на графику диференцијабилне функције у којој је тангента паралелна тетиви која спаја две тачке на графику.

Приметимо да исту интерпретацију има и Кошијева теорема, за график параметарски задате криве $x = f(t), y = g(t)$. ◇

Последица 3. *Ако функција $f : X \to \mathbf{R}$ има ограничен први извод, онда је она равномерно непрекидна.*

△ Доказ следи из $|f(x)-f(y)| = |f'(c)(x-y)| < L|x-y|$ и дефиниције равномерне непрекидности. ▽

Задатак 15. Доказати да обрнуто није тачно: равномерно непрекидна диференцијабилна функција може да има неограничен први извод. (Упутство: видети Задатак 16 на 114. страни) ✓

Последица 4. *Нека је $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ диференцијабилна функција. Тада је $f'(x) = 0$ за све $x \in (a,b)$ ако и само ако је функција f константна.*

△ Један смер је очигледан: извод константне функције је нула (Пример 1). Претпоставимо обрнуто, да је $f'(x) = 0$ за све $x \in (a,b)$. Из Лагранжове теореме следи

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c) = 0,$$

тј. $f(x_1) = f(x_2)$ за све $x_1, x_2 \in (a,b)$. ▽

Последица 5. (Критеријуми монотоности) *Ако је $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ диференцијабилна функција, важи свака од следећих импликација:*

$$\begin{array}{lcll} f' > 0 & \Rightarrow & f \text{ је строго растућа} & \Rightarrow f' \geq 0 \\ f' \geq 0 & \Rightarrow & f \text{ је неопадајућа} & \Rightarrow f' \geq 0 \\ f' < 0 & \Rightarrow & f \text{ је строго опадајућа} & \Rightarrow f' \leq 0 \\ f' \leq 0 & \Rightarrow & f \text{ је нерастућа} & \Rightarrow f' \leq 0. \end{array}$$

[3]Лагранж (J. Lagrange, 1736–1813), француски математичар

△ Нека је $x_1 < x_2$. Из Лагранжове теореме следи

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c)$$

за неко $c \in (x_1, x_2)$. Последњи израз је ненегативан ако је $f'(x) \geq 0$, а строго позитиван ако је $f'(x) > 0$. Слично се доказују и остале импликације. ▽

Пример 17. Извод функције $f(x) = x^3$ је $f'(x) = 3x^2 \geq 0$. Одатле следи да је ова функција неопадајућа. Приметимо да важи и више: f је строго растућа функција, али извод није строго позитиван: $f'(0) = 0$. ♯

Задатак 16. Доказати да је диференцијабилна функција $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ строго растућа ако и само ако је $f'(x) \geq 0$ и скуп

$$\{x \in (a, b) \mid f'(x) > 0\}$$

свуда густ у (a, b). ✓

Задатак 17. Нека је $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ диференцијабилна функција која има непрекидан први извод. Да ли за свако $c \in (a, b)$ постоје тачке $x_1, x_2 \in [a, b]$, такве да је

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(c)?$$

Упутство: видети Задатак 17. ✓

Из Последице 5 изводимо довољан услов постојања локалних екстремума у терминима првог извода.

Последица 6. **(Довољан услов постојања екстремума)** *Ако је функција $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ диференцијабилна свуда сем можда у тачки x_0 и непрекидна у x_0, онда важе следеће импликације:*

$$\begin{array}{lcl}
(\forall x \in (a, x_0))f'(x) < 0 \wedge (\forall x \in (x_0, b))f'(x) < 0 & \Rightarrow & f \textit{ нема екстремум у } x_0 \\
(\forall x \in (a, x_0))f'(x) < 0 \wedge (\forall x \in (x_0, b))f'(x) > 0 & \Rightarrow & x_0 \textit{ је локални минимум} \\
(\forall x \in (a, x_0))f'(x) > 0 \wedge (\forall x \in (x_0, b))f'(x) < 0 & \Rightarrow & x_0 \textit{ је локални максимум} \\
(\forall x \in (a, x_0))f'(x) > 0 \wedge (\forall x \in (x_0, b))f'(x) > 0 & \Rightarrow & f \textit{ нема екстремум у } x_0.
\end{array}$$

△ Из Последице 5 следи да функција која задовољава претпоставку прве импликације строго опада на $(a, b) \setminus \{x_0\}$. Пошто је f непрекидна у x_0 следи да она узима и веће (за $x < x_0$) и мање (за $x > x_0$) вредности од $f(x_0)$, па x_0 није екстремум.

Ако f задовољава претпоставку друге импликације, онда она, на основу Последице 5, расте на (a, x_0), а опада на (x_0, b), па из непрекидности у тачки x_0 следи да у тој тачки f има локални минимум.

Слично се доказују и остале импликације. ▽

Задатак 18. (а) Да ли су локални екстремуми чије постојање утврђује Последица 6 строги?

(б) Да ли Последица 6 важи и ако се знакови строгих неједнакости $>$ и $<$ замене знаковима $\geq$ и $\leq$?

(в) Да ли у тврђењима Последице 6 важе и обрнуте импликације? (Одговор: не!)

(г) Доказати да функција

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

има строги локални минимум у 0, али да се то не може утврдити применом Последице 6. ✓

Задатак 19. Доказати да је извод функције

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

у тачки $x = 0$ позитиван, али да функција није монотона ни у у једном интервалу који садржи нулу. ✓

Претходни задатак показује да, у општем случају, из вредности извода у тачки није могуће закључити ништа о монотоности функције. Међутим, уз додатну претпоставку о непрекидности првог извода, то је могуће:

Задатак 20. Нека је $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ диференцијабилна функција, чији је први извод f' непрекидан[4] и нека је $f'(t_0) < 0$ за неко $t_0 \in (a, b)$. Доказати да је функција f опадајућа на неком интервалу $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$. ✓

Задатак 21. Наћи грешку у следећем расуђивању: нека је f функција из Примера 9 на 136. страни. Применом Лагранжове теореме добија се

$$\frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = 2c \sin \frac{1}{c} - \cos \frac{1}{c}$$

за неко $c \in (0, x)$. Из $0 < c < x$ следи да $c \to 0$ кад $x \to 0$, па је

$$0 = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{c \to 0} (2c \sin \frac{1}{c} - \cos \frac{1}{c}).$$

Очигледно је да је расуђивање погрешно јер последњи лимес не постоји. Где је направљена грешка? ✓

Задатак 22. (а) **(Извод детерминанте)** Нека су функције f_k, g_k, h_k ($k \in \{1, 2, 3\}$) диференцијабилне у тачки x_0. Доказати да се детерминанта

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & g_1(x) & h_1(x) \\ f_2(x) & g_2(x) & h_2(x) \\ f_3(x) & g_3(x) & h_3(x) \end{vmatrix}$$

диференцира по правилу

$$\Delta' = \begin{vmatrix} f_1' & g_1' & h_1' \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2' & g_2' & h_2' \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3' & g_3' & h_3' \end{vmatrix}.$$

(б) Нека су функције $f, g, h : [a, b] \to \mathbf{R}$ непрекидне на $[a, b]$ и диференцијабилне на (a, b) и нека је

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f(a) & g(a) & h(a) \end{vmatrix}.$$

Доказати да Δ испуњава услове Ролове теореме. Њеном применом на $h(x) \equiv 1$ доказати Кошијеву, а применом на $h(x) \equiv 1$, $g(x) = x$ Лагранжову теорему. ✓

[4] Диференцијабилна функција чији је извод непрекидан назива се *функцијом класе* C^1 или C^1*–функцијом*

Пример 18. (Лиувилова теорема) На стр. 70 смо дефинисали алгебарске бројеве степена d. Следећа теорема је везана за њих.

Нека је $\alpha \in \mathbf{R}$ алгебарски број степена d. Тада постоји константа $C \geq 0$ таква да за сваки рационалан број p/q, $p \in \mathbf{Z}$ $q \in \mathbf{N}$ важи

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{C}{q^d}. \tag{17}$$

Докажимо ово тврђење. Нека је

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_d x^d, \qquad a_0, \ldots, a_d \in \mathbf{Z}, \qquad a_d \neq 0$$

полином степена d, такав да је $P(\alpha) = 0$. Тада је $P(p/q) \neq 0$ (у противном би било $P(x) = (x - p/q)P_1(x)$ за неки полином P_1 са рационалним коефицијентима степена мањег од d, одакле би следило $P_1(\alpha) = 0$, што је у супротности са претпоставком да је α степена d). Множењем броја $P(p/q) \neq 0$ са q^d добијамо $q^d P(p/q) \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, тј.

$$|q^d P(p/q)| \geq 1. \tag{18}$$

Пошто је $P(\alpha) = 0$, из Лагранжове теореме следи

$$\left|\frac{P(p/q)}{(p/q) - \alpha}\right| \leq \max |P'(c)|, \tag{19}$$

где је израз на десној страни максимум по свим c између α и p/q. Претпоставимо да је $|\alpha - (p/q)| \geq 1$ (у супротном, (17) важи за $C = 1$). Нека је

$$M = \max_{\alpha - 1 \leq c \leq \alpha + 1} |P'(c)|.$$

Из (18) и (19) следи

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{Mq^d}$$

за $p/q \in [\alpha - 1, \alpha + 1]$. Тиме је доказано да важи (17), са $C = \min\{1, 1/M\}$. ♯

Напомена 3. Лиувилова теорема, о којој је било речи у Примеру 18, мотивише следећу дефиницију: број $\alpha \in \mathbf{R}$ је *Лиувилов*, ако за сваки природан број d постоје бројеви $p \in \mathbf{Z}$ и $q \in \mathbf{N}$, такви да је

$$0 < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^d}. \tag{20}$$

Из Лиувилове теореме следи да је сваки Лиувилов број трансцендентан. Сетимо се да смо термин *Лиувилов број* већ користили за број

$$L = 10^{-1!} + 10^{-2!} + 10^{-3!} + 10^{-4!} + \cdots$$

о коме смо говорили у Примеру 31 на стр. 70. У Глави 4 ћемо видети да је L заиста Лиувилов број у смислу дефиниције дате у овој напомени[5]. Управо на овај начин је Лиувил доказао да је број L трансцендентан. ◇

[5]Прецизније, L је само један од Лиувилових бројева, тј. бројева који задовољавају (20).

2.2. Дарбуова теорема. Нека је f диференцијабилна функција. Иако изводна функција f' не мора да буде непрекидна (в. Пример 9), она има следеће својство, карактеристично за непрекидне функције (в. Последицу 8 на стр. 111).

Теорема 5. (Дарбуова[6] теорема) *Нека је $f : (a_0, b_0) \to \mathbf{R}$ диференцијабилна функција и $a_0 < a < b < b_0$. Нека је γ број који је између $f'(a)$ и $f'(b)$. Тада постоји тачка $c \in (a, b)$ таква да је $f'(c) = \gamma$.*

$\triangle$ Претпоставимо, не умањујући општост, да је $f'(a) < \gamma < f'(b)$. Ако је $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \gamma$, доказ следи из Лагранжове теореме, јер је $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ за неко c. Претпоставимо да је $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} > \gamma$. Нека је

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{за } x > a \\ f'(a) & \text{за } x = a. \end{cases}$$

Функција ϕ је непрекидна на $[a, b]$ и важи $\phi(a) = f'(a) < \gamma < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \phi(b)$, па постоји тачка $x_0 \in (a, b)$ таква да важи $\phi(x_0) = \gamma$. Доказ сада следи из Лагранжове теореме, јер је

$$\gamma = \phi(x_0) = \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} = f'(c)$$

за неко $c \in (a, x_0)$. Случај $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} < \gamma$ третира се аналогно. $\triangledown$

Задатак 23. Да ли први извод има и својство непрекидних функција из Вајерштрасове теореме (Теорема 6 на стр. 112): ако је $f'(x)$ дефинисано и коначно за свако x из ограниченог сегмента $[a, b]$, онда је f' ограничено? Одговор: не. Упутство: доказати да је функција

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x \le 0 \\ x^{3/2} \sin(1/x), & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

диференцијабилна у свакој тачки. Израчунати десни лимес извода у нули. ✓

Задатак 24. Доказати да ако постоји $\lim_{x \to x_0 + 0} f'(x)$ онда постоји и $f'_+(x_0)$ (в. стр. 139) и

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f'(x) = f'_+(x_0).$$

Да ли важи и обрнуто? Упутство: за питање о обрнутом тврђењу видети Задатак23, или Пример 9 на стр. 136. ✓

Задатак 25. Доказати да функција $f'(\cdot)$ може да има само прекиде друге врсте. ✓

2.3. Неодређени облици. Лопиталова правила. Аксиомама реалних бројева и правилима за рачунање у проширеном скупу реалних бројева која смо дали на 21. страни нису дефинисани изрази облика

$$\frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad 1^\infty, \quad \infty^0, \quad \frac{0}{0}, \quad 0^0.$$

Ови изрази, као лимеси, могу да буду једнаки било ком реалном броју, као и $\pm\infty$. Следећа теорема омогућава нам да некад израчунамо лимесе облика $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

[6] Дарбу (Darboux, 1842–1917), француски математичар

Теорема 6. (Лопиталова[7] правила) *Нека су функције $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ и $g : (a, b) \to \mathbf{R}$ диференцијабилне на (a, b) и нека је $g'(x) \neq 0$ за свако $x \in (a, b)$ $(-\infty \leq a \leq b \leq +\infty)$. Нека је*

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

Тада у сваком од следећа два случаја

1. $\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a+0} g(x) = 0$
2. $\lim_{x \to a+0} g(x) = \infty$

важи

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Аналогно тврђење важи и за $\lim_{x \to b-0}$.

$\triangle$ Претпоставимо да важи $\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a+0} g(x) = 0$. Тада су функције

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{за } x \in (a, b) \\ 0 & \text{за } x = a \end{cases} \qquad \text{и} \qquad G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{за } x \in (a, b) \\ 0 & \text{за } x = a \end{cases}$$

непрекидне на $[a, b)$ и диференцијабилне на (a, b). Из Кошијеве теореме следи да за свако $x \in (a, b)$ постоји тачка $c \in (a, x)$ таква да важи

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \tag{21}$$

Пошто је $a < c < x$, из $x \to a + 0$ следи $c \to a + 0$. Одатле и из (21) следи тврђење теореме у првом случају.

Претпоставимо сада да је $\lim_{x \to a+0} g(x) = \infty$. Нека је $\varepsilon > 0$. Из

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

следи да постоји $s > a$ такво да је

$$A - \varepsilon < \frac{f'(x)}{g'(x)} < A + \varepsilon \quad \text{за} \quad x < s. \tag{22}$$

Нека је $\beta \in (a, s)$. Пошто је $\lim_{x \to a+0} g(x) = \infty$, постоји $\beta_1 \in (a, \beta)$ такво да је, за свако $\alpha \in (a, \beta_1)$, $g(\alpha) - g(\beta) > 0$. Из Кошијеве теореме и (22) следи

$$A - \varepsilon < \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{g(\alpha) - g(\beta)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} < A + \varepsilon,$$

одакле, после множења позитивним бројем $g(\alpha) - g(\beta)$ добијамо

$$(A - \varepsilon)\left(1 - \frac{g(\beta)}{g(\alpha)}\right) + \frac{f(\beta)}{g(\alpha)} < \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} < (A + \varepsilon)\left(1 - \frac{g(\beta)}{g(\alpha)}\right) + \frac{f(\beta)}{g(\alpha)}.$$

Пошто

$$(A + \varepsilon)\left(1 - \frac{g(\beta)}{g(\alpha)}\right) + \frac{f(\beta)}{g(\alpha)}$$

[7]Лопитал (G.F. de l'Hospital, 1661–1704), француски математичар

тежи ка $A+\varepsilon$ кад $\alpha \to a+0$, можемо да изаберемо $\delta > 0$ такво да је

$$\alpha \in (a, a+\delta) \;\Rightarrow\; (A+\varepsilon)\left(1-\frac{g(\beta)}{g(\alpha)}\right)+\frac{f(\beta)}{g(\alpha)} < A+2\varepsilon$$

и сличо

$$\alpha \in (a, a+\delta) \;\Rightarrow\; (A-\varepsilon)\left(1-\frac{g(\beta)}{g(\alpha)}\right)+\frac{f(\beta)}{g(\alpha)} > A-2\varepsilon.$$

Пошто је ε произвољно, одатле следи тврђење теореме. ▽

Задатак 26. Доказати да Лопиталово правило важи и у случајевима
(а) $a = -\infty$ (и, аналогно, $b = +\infty$)
(б) $A = \pm\infty$.
Упутство: оба тврђења могу да се докажу анализом доказа Теореме 6, или сменом $t = 1/x$ за тврђење (а), односно посматрањем количника $g(x)/f(x)$ уместо $f(x)/g(x)$ у тврђењу (б) (осим случаја када $g(x) \to \infty$). ✓

Задатак 27. Упоредити расуђивање у доказу Лопиталове теореме са погрешним расуђивањем из Задатка 21 на 145. страни. ✓

Задатак 28. Доказати да не важи обрнуто тврђење у Лопиталовим правилима, тј. да из постојања $\lim \frac{f}{g}$ не следи постојање $\lim \frac{f'}{g'}$. (Упутство: нека је f функција из Примера 9, $g(x) = x$ и $a = 0$.) ✓

Пример 19. Из Лопиталовог правила следи $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{q^x} = 0$ за $q > 1$. ♯

Пример 20. Пример 19 лако се уопштава на следећи начин: ако је $q > 1$, онда за свако $\beta \in \mathbf{R}$ важи $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^\beta}{q^x} = 0$. Заиста, ако је $\beta \le 0$ тврђење је очигледно тачно, а за $\beta > 0$ оно следи из $\frac{x^\beta}{q^x} = \left(\frac{x}{(q^{1/\beta})^x}\right)^\beta$ и Примера 19. ♯

Пример 21. Нека је $a > 1$. Тада је

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log_a x}{x} = 0. \tag{23}$$

Заиста, сменом $t = \log_a x$, тј. $x = a^t$, (23) се своди на Пример 19. ♯

Задатак 29. Израчунати $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log_a x}{x}$ за $0 < a < 1$. ✓

Пример 22. Нека је $a > 1$ и $\alpha \in \mathbf{R}$. Тада је

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\log_a x)^\alpha}{x} = 0. \tag{24}$$

Заиста, сменом $t = \log_a x$, тј. $x = a^t$, (23) се своди на Пример 20. ♯

Пример 23. Нека је $a > 1$, $q > 1$ и нека су α, β, γ реални бројеви. Из Примера 20 и 22 лако следи да је

$$\lim_{x\to+\infty} (\log_a x)^\alpha x^\beta q^{\gamma x} = +\infty$$

ако је $\gamma > 0 \vee (\gamma = 0 \wedge \beta > 0) \vee (\gamma = 0 \wedge \beta = 0 \wedge \alpha > 0)$,

$$\lim_{x\to+\infty} (\log_a x)^\alpha x^\beta q^{\gamma x} = 0$$

ако је $\gamma < 0 \vee (\gamma = 0 \wedge \beta < 0) \vee (\gamma = 0 \wedge \beta = 0 \wedge \alpha < 0)$ и

$$\lim_{x\to+\infty} (\log_a x)^\alpha x^\beta q^{\gamma x} = 1$$

ако је $\alpha = \beta = \gamma = 0$. ♯

Задатак 30. Израчунати
(а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$
(б) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/x}$. ✓

Задатак 31. Да ли је логички исправно израчунати

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

применом Лопиталовог правила? (Одговор: не!) ✓

Задатак 32. Да ли Задатак 24 на стр. 147 може да се реши помоћу Лопиталовог правила? ✓

Задатак 33. Нека је $f:(a,+\infty)\to\mathbf{R}$ диференцијабилна функција и нека је $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+f'(x))=A$. Доказати да је $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$. ✓

3. Изводи вишег реда. Тејлорова формула

Нека је $f:(a,b)\to\mathbf{C}$ диференцијабилна функција. Ако је њена изводна функција $f':(a,b)\to\mathbf{C}$ диференцијабилна у тачки $x_0\in(a,b)$, њен извод $(f')'(x_0)$ називамо *другим изводом* функције f и означавамо са $f''(x_0)$ или $\frac{d^2f(x_0)}{dx^2}$.

Индуктивно се дефинише *n–ти извод* $f^{(n)}(x)$ са

$$f^{(0)}(x)=f(x),\quad f^{(n)}(x)=(f^{(n-1)})'(x).$$

За n–ти извод се користи још и ознака $\frac{d^nf(x_0)}{dx^n}$. Функцију која има n–ти извод називамо *n пута диференцијабилном*. Функцију која је n пута диференцијабилна за свако n називамо *бесконачно пута диференцијабилном*.

Извод n–тог реда је линеаран, тј.

$$(\lambda f+\mu g)^{(n)}(x)=\lambda f^{(n)}(x)+\mu g^{(n)}(x)$$

за константе $\lambda,\mu\in\mathbf{C}$ и n пута диференцијабилне функције f и g. За производ n пута диференцијабилних функција важи *уопштено Лајбницово правило*

$$(fg)^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$$

које се лако доказује индукцијом (задатак!).

За композицију $g\circ f$ n пута диференцијабилних функција f и g важи ди Брунова[8] формула

$$(g\circ f)^{(n)}(x)=\sum\frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_n!}g^{(k)}(y)\left(\frac{f^{(1)}(x)}{1!}\right)^{k_1}\left(\frac{f^{(2)}(x)}{2!}\right)^{k_2}\cdots\left(\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\right)^{k_n},\tag{25}$$

где је $k=k_1+k_2+\cdots+k_n$ и где се сумирање врши по свим $k_1,k_2,\dots,k_n$ таквим да је $k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n$. Ова формула може да се докаже на следећи начин. Пре свега, приметимо да је $(g\circ f)^{(n)}(x)$ свакако израз облика

$$\sum C(n,k_1,k_2\dots,k_n)g^{(k)}(y)\left(f^{(1)}(x)\right)^{k_1}\left(f^{(2)}(x)\right)^{k_2}\cdots\left(f^{(n)}(x)\right)^{k_n},\tag{26}$$

[8]Франческо ди Бруно, (Francesco Faà di Bruno, 1825–1888), италијански свештеник и математичар

за неке константе $C(n, k_1, k_2 \ldots, k_n)$ које не зависе од f и g. Да бисмо нашли те константе, узмимо функције

$$f(x) = a_1 x + \cdots + a_n x^n, \qquad g(y) = y^k.$$

Тада из уопштења Њутнове биномне формуле (формула (20) на стр. 26) следи да је

$$g \circ f(x) = \sum \frac{k!}{k_1! k_2! \cdots k_n!} \left(\prod_{j=1}^{n} a_j^{k_j} \right) x^{k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n}, \tag{27}$$

где се сума врши по свом $k_1, \ldots, k_n$ таквим да је $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = k$. Извод реда n овог полинома можемо да израчнамо експлицитно. Коефицијенте $C(n, k_1, k_2 \ldots, k_n)$ добијамо упоређивањем вредности n–тог извода полинома $(g \circ f)^{(n)}$ добијеног експлицитним диференцирањем формуле (27) n пута са изразом добијеним заменом $x = 0$ у (26).

Задатак 34. Колико пута је функција $f(x) = |x|^3$ диференцијабилна у нули? ✓

Задатак 35. Доказати да је функција

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{за } x > 0 \\ 0 & \text{за } x \leq 0 \end{cases}$$

бесконачно пута диференцијабилна. ✓

Следећи задатак даје важан пример бесконачно диференцијабилне функције која је позитивна на интервалу и једнака нули ван њега.

Задатак 36. Доказати да је функција

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2(1-x)^2} & \text{за } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{за } x \notin (0, 1) \end{cases}$$

бесконачно пута диференцијабилна. ✓

Задатак 37. Доказати да је функција

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2(1-x)^2} & \text{за } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{за } x \leq 0 \\ 1 & \text{за } x \geq 1 \end{cases}$$

бесконачно пута диференцијабилна. Ово је пример монотоне бесконачно диференцијабилне функције која је константна на $(-\infty, 0]$ и $[1, +\infty)$ и строго монотона на $[0, 1]$. ✓

Задатак 38. Да ли је функција из Примера 14 на стр. 140 двапут диференцијабилна у нули? ✓

Задатак 39. За које p је функција из Задатка 5 на 137. страни k пута диференцијабилна? ✓

Задатак 40. Функција $y = f(x)$ дата је у параметарском облику

$$x = t + t^3, \; y = e^t + t$$

Израчунати $f''(0)$. ✓

Пример 24. Полиномска функција $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m$ је бесконачно пута диференцијабилна и важи $p^{(n)}(0) = n!a_n$ за $0 \leq n \leq m$ и $p^{(n)}(x) = 0$ за $n > m$. Одатле следи да полином можемо да напишемо у облику $p(x) = \sum_{n=1}^{m} \frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n$. ♯

Пример 24 можемо да уопштимо на следећи начин. Нека је функција $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ n пута диференцијабилна у тачки $x_0 \in (a, b)$. Полином

$$P_n(x_0, x; f) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

назива се Тејлоровим[9] полиномом степена n функције f у тачки x_0. Разлика

$$r_n(x_0, x; f) = f(x) - P_n(x_0, x; f)$$

назива се n–тим остатком Тејлорове формуле

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + r_n(x_0, x; f).$$

За $x_0 = 0$ Тејлорова формула се често назива Меклореновом.[10] Важи следећа теорема.

Теорема 7. *Нека је функција $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ n пута диференцијабилна у тачкама затвореног интервала са крајевима $x, x_0 \in (a, b)$, нека је њен n–ти извод непрекидан у свим тачкама тог затвореног интервала и нека постоји $n + 1$ извод у тачкама отвореног интервала са крајевима x, x_0. Нека је $P_n(x_0, x; f)$ Тејлоров полином функције f и $r_n(x_0, x; f)$ остатак. Тада важи*

(а) $r_n(x_0, x; f) = \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(c)(x - c)^n(x - x_0)$ *за неко c између x и x_0*

(б) $r_n(x_0, x; f) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)(x - x_0)^{n+1}$ *за неко c између x и x_0*

Формула (а) назива се Кошијевом, а формула (б) Лагранжовом формом остатка.

△ Нека је $F(t) = f(x) - P_n(t, x; f)$, тј.

$$F(t) = f(x) - \big(f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x - t) + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n\big).$$

Тада је

$$\begin{aligned} F'(t) &= -f'(t) + \tfrac{f'(t)}{1!} - \tfrac{f''(t)}{1!}(x - t) + \tfrac{f''(t)}{1!}(x - t) - \\ &\quad - \tfrac{f'''(t)}{2!}(x - t)^2 + \cdots - \tfrac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n = \\ &= -\tfrac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n. \end{aligned} \tag{28}$$

Нека је G произвољна функција дефинисана и непрекидна на затвореном интервалу са крајевима x и x_0 и диференцијабилна у унутрашњим тачкама тог интервала, таква да је G' свуда различито од нуле. Из Кошијеве теореме следи да постоји тачка c између x и x_0 таква да је

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F'(c)}{G'(c)}. \tag{29}$$

[9] Тејлор (B. Taylor, 1685–1731), енглески математичар

[10] Меклорен (K. Maclaurin, 1698–1746), енглески математичар

Пошто је $F(x) - F(x_0) = 0 - F(x_0) = -r_n(x_0, x; f)$, из (28) и (29) следи

$$r_n(x_0, x; f) = \frac{G(x) - G(x_0)}{n! G'(c)} f^{(n+1)}(c)(x-c)^n.$$

Специјално, за $G(t) = x - t$ добијамо формулу (а), а за $G(t) = (x-t)^{n+1}$ формулу (б). $\triangledown$

Напомена 4. У Примеру 2 на стр. 267 видећемо још један начин извођења Тејлорове формуле.

Напомена 5. (Пеанов облик остатка) Ако је функција $f^{(n+1)}$ ограничена онда из (б) следи $r_n(x_0, x; f) = o((x-x_0)^n)$ кад $x \to x_0$; овај остатак назива се *Пеановом* формом остатка. Тејлорова формула са овом формом остатка је тачна и при много слабијим претпоставкама – довољно је претпоставити да функција f има првих n извода у тачки x_0. Доказ је последица следећег задатка.

Задатак 41. (а) Нека је функција $\psi : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbf{R}$ n пута диференцијабилна у тачки x_0 и нека је

$$\psi(x_0) = \psi'(x_0) = \cdots = \psi^{(n)}(x_0) = 0.$$

Доказати да је $\psi(x) = o((x-x_0)^n)$ кад $x \to x_0$. (Упутство: применити индукцију по n. За $n = 1$ тврђење дефиниција првог извода. Нека је ψ функција за коју тврђење важи за природан број n. Применити индуктивну претпоставку на функцију $\psi'(\cdot)$ и искористити Лагранжову теорему

$$\psi(x) = \psi(x) - \psi(x_0) = \psi'(c)(x - x_0)$$

и индуктивну претпоставку)

(б) Извести из (а) доказ тврђења из Напомене 5. (Упутство: нека је $\psi(x) = f(x) - P_n(x_0, x; f)$) ✓

Пример 25. Непосредним израчунавањем извода у тачки $x_0 = 0$ добијамо

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{k=0}^{n} \tfrac{x^k}{k!} + r_n(0, x; e^x) \\
\sin x &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \tfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + r_{2n+1}(0, x; \sin x) \\
\cos x &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \tfrac{x^{2k}}{(2k)!} + r_{2n}(0, x; \cos x) \\
\log(1+x) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \tfrac{x^k}{k} + r_n(0, x; \log(1+x)) \\
(1+x)^\alpha &= \sum_{k=0}^{n} \tbinom{\alpha}{k} x^k + r_n(0, x; (1+x)^\alpha),
\end{aligned}$$

где је

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - k + 1)}{k!}.$$

Последња формула уопштава биномну формулу (Лема 5 на 24. страни) ♯

У Последици 6 на 144. страни видели смо довољан услов постојања локалног екстремума у терминима првог извода. Следеће тврђење даје довољан услов у терминима извода вишег реда.

Тврђење 1. **(Довољан услов постојања локалног екстремума)** *Нека је функција* $f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbf{R}$ *n пута диференцијабилна у тачки* x_0 *и нека је*

$$f^{(k)}(x_0) = 0 \text{ за } k < n, \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Тада:

(1) *Ако је n непаран број* x_0 *није тачка екстремума.*
(2) *Ако је n паран број* x_0 *је тачка локалног екстремума и то*
   (а) *тачка максимума ако је* $f^{(n)}(x_0) < 0$,
   (б) *тачка минимума ако је* $f^{(n)}(x_0) > 0$.

△ Тачка x_0 је тачка локалног екстремума ако је знак израза $f(x) - f(x_0)$ сталан у некој околини тачке x_0. Из Тејлорове формуле са остатком у Пеановом облику следи

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \alpha(x)(x - x_0)^n,$$

где $\alpha(x) \to 0$ кад $x \to x_0$. Одатле следи да знак разлике $f(x) - f(x_0)$ зависи само од знака израза $f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$. Ако је n непаран број, знак овог израза се мења у зависности од тога да ли је x са леве или са десне стране тачке x_0, па x_0. Ако је n парно, овај знак је сталан и зависи само од знака $f^{(n)}(x_0)$. ▽

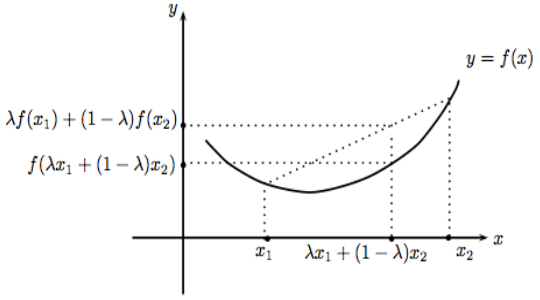
Пример 26. (Упутство за лако памћење Тврђења 1) И без примене диференцијалног рачуна лако је видети да функција $f(x) = x^n$ има локални екстремум у 0 ако и само ако је n паран број. У том случају, ради се о тачки локалног минимума. ♯

4. Конвексне функције

Функција $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ назива се *конвексном* ако за произвољне две тачке $x_1, x_2 \in (a, b)$ важи

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2) \quad \text{за} \quad 0 \leq \lambda \leq 1. \tag{30}$$

Геометријски, овај услов значи да се дуж која спаја било које две тачке графика функције налази изнад тог графика.



Слика: конвексна функција

Уколико важи обрнута неједнакост

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2) \quad \text{за} \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

функција f се назива *конкавном*.. Ако је функција $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ конвексна на интервалу $[a, c]$ а конкавна на интервалу $[c, b]$ (или конкавна на интервалу $[a, c]$

а конвексна на интервалу $[c, b]$), тачка c се назива *превојном тачком* функције f.

Нека је $x_1 < x_2$ и $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$. Тада је $\lambda = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$, па неједнакост (30) можемо да напишемо у облику

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

Одатле, после множења са $x_2 - x_1$ добијамо

$$(x_2 - x)f(x_1) + (x_1 - x_2)f(x) + (x - x_1)f(x_2) \geq 0.$$

Ако напишемо $x_2 - x_1 = x_2 - x + x - x_1$, из претходне неједнакости лако добијамо

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}. \tag{31}$$

Геометријски, ова неједнакост значи да је, за фиксирано x, коефицијент правца праве која спаја тачке $(x, f(x))$ и $(\alpha, f(\alpha))$ растућа функција од α. Одатле се, имајући у виду да растућа функција има леви и десни лимес у свакој тачки (видети Лему 15 на 121. страни) , лако изводи следеће тврђење:

Задатак 42. Доказати да конвексна функција $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ има леви и десни извод у свакој тачки $x_0 \in (a, b)$ и да је

$$f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0).$$

Уз помоћ Задатка 12 на стр. 139 закључити да је свака конвексна функција непрекидна. ✓

Задатак 43. Нека је $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ конвексна функција и $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$.

(а) Доказати да је

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

(б) Доказати да за све $c \in (a, b)$ важи $f'_-(c) \leq f'_+(c)$.

(в) Доказати да се за сваки број k такав да је $f'_-(c) \leq k \leq f'_+(c)$ график функције $y = f(x)$ налази изнад праве L задате једначином $y = f(c) + k(x - c)$, при чему, ако је f строго конвексна, њен график и права L имају тачно једну заједничку тачку.

(г) Доказати да се график диференцијабилне конвексне функције налази изнад сваке своје тангенте. ✓

Претпоставимо да је конвексна функција f диференцијабилна. Прелазећи у (31) на лимес, прво кад $x \to x_1$, а затим кад $x \to x_2$, добијамо

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2),$$

што значи да је функција f' растућа. Специјално, ако је f два пута диференцијабилна, онда је $f'' \geq 0$.

У претходним разматрањима смо доказали следеће тврђење.

Тврђење 2. *Нека је $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ конвексна функција. Тада важи:*

1. *Функција f има леви и десни извод у свакој тачки.*
2. *Функција f је непрекидна.*
3. *Ако је функција f диференцијабилна, њен извод је растућа функција.*

4. *Ако је функција f два пута диференцијабилна, онда је $f'' \geq 0$.*

Следеће тврђење је асимптотска верзија тврђења (г) у Задатку 43

Тврђење 3. *Нека је $f : [a, +\infty) \to \mathbf{R}$ строго конвексна функција и L њена асимптота. Тада се график функције f налази строго изнад праве L.*

$\triangle$ Не умањујући општост, можемо да претпоставимо да је L права $y = 0$ (у противном, ако је $y = ax + b$ једначина праве L, посматрамо строго конвексну функцију $f(x) - (ax + b)$), тј. да је

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0. \tag{32}$$

Треба да докажемо да је f строго позитивна.

Докажимо прво да је f опадајућа функција. Заиста, када би за неке $x_1 < x_2$ било $f(x_1) < f(x_2)$, величина

$$\lambda := \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

би била позитивна. Из конвексности би следило да је за све $x > x_2$

$$\lambda = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2},$$

тј. $f(x) \geq f(x_2) + \lambda(x - x_2) \to +\infty$ кад $x \to +\infty$, што је у супротности са (32).

Претпоставимо да f није строго позитивна, тј. да је $f(c) \leq 0$ за неко c. Пошто f опада, одатле би следило да је за све $x \geq c$

$$0 = \lim_{t \to +\infty} f(t) \leq f(x) \leq f(c) \leq 0,$$

тј. да је $f \equiv 0$ на $[c, +\infty)$, што је у супротности са претпоставком да је f строго конвексна функција. $\triangledown$

Задатак 44. (а) Доказати да је збир конвексних функција конвексна функција.

(б) Ако је f конвексна, а g растућа конвексна функција, доказати да је функција $g \circ f$ конвексна. ✓

Задатак 45. Нека је $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ конвексна функција.

(а) Доказати да ако f достиже максимум у некој унутрашњој тачки интервала (a, b), онда је $f \equiv const$.

(б) Нека су $x_1, x_2 \in (a, b)$ фиксиране тачке. Доказати да је (30) или строга неједнакост за свако λ, или једнакост за свако λ. (Упутство: применити (а) на функцију $F(x) = f(x) - L(x)$, где је $y = L(x)$ једначина праве која спаја тачке $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$) ✓

Задатак 46. Нека је $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ строго конкавна функција, са особином

$$f(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0.$$

Доказати да је f строго растућа.

Упутство: из строге конкавности функције f следи да је

$$\frac{f(c) - f(b)}{c - b} < \frac{f(c) - f(a)}{c - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

за све $0 \leq a < b < c$. Ако за неке $a < b$ важи $f(b) \leq f(a)$, онда је за све $x > b$ важи $f(x) < f(b) + kx$, где је $k < 0$, па $f(x)$ сече x–осу у некој тачки $x_0 > 0$, што је супротно претпоставци да је f различито од нуле за $x > 0$. ✓

Задатак 47. Нека је $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ двапут диференцијабилна функција и $c\in(a,b)$ превојна тачка. Доказати да је $f''(c)=0$. Да ли је $f'(c)=0$? ✓

Следећа лема је уопштење неједнакости (30).

Лема 5. **(Јенсенова неједнакост)**[11] *Нека је $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ конвексна функција, $x_1,\dots,x_n$ тачке интервала (a,b) и $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ ненегативни бројеви, такви да је $\lambda_1+\cdots+\lambda_n=1$. Тада важи неједнакост*

$$f(\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n)\le\lambda_1f(x_1)+\cdots+\lambda_nf(x_n).$$

△ Доказ изводимо индукцијом. За $n=2$ Лема се своди на неједнакост (30). Претпоставимо да неједнакост важи за $n-1$ тачака. Претпоставимо, не умањујући општост, да су $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ реални бројеви такви да је $\lambda_n\neq0$ и $\lambda_1+\cdots+\lambda_n=1$. Нека је $\mu=\lambda_2+\cdots+\lambda_n$. Тада из (30) следи

$$\begin{aligned}f(\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n)&=f(\lambda_1x_1+\mu(\tfrac{\lambda_2}{\mu}x_2+\cdots+\tfrac{\lambda_n}{\mu}x_n))\\&\le\lambda_1f(x_1)+\mu f(\tfrac{\lambda_2}{\mu}x_2+\cdots+\tfrac{\lambda_n}{\mu}x_n).\end{aligned}$$

Пошто је $\frac{\lambda_2}{\mu}+\cdots+\frac{\lambda_n}{\mu}=1$, по индуктивној претпоставци важи

$$f\left(\frac{\lambda_2}{\mu}x_2+\cdots+\frac{\lambda_n}{\mu}x_n\right)\le\frac{\lambda_2}{\mu}f(x_2)+\cdots+\frac{\lambda_n}{\mu}f(x_n).$$

Из претходне две неједнакости следи доказ Леме. ▽

Пример 27. **(Јангова неједнакост)**[12] Функција $f(x)=-\log x$ је конвексна (јер је $f''(x)=\frac{1}{x^2}>0$), па важи

$$\log(\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n)\ge\lambda_1\log(x_1)+\cdots+\lambda_n\log(x_n),$$

одакле следи

$$x_1^{\lambda_1}\cdot\dots\cdot x_n^{\lambda_n}\le\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n$$

за $x_k\ge0$, $\lambda_k\ge0$, $\lambda_1+\cdots+\lambda_n=1$. У случају $n=2$ ова неједнакост се обично записује у виду

$$a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{q}}\le\frac{1}{p}a+\frac{1}{q}b\quad\text{за }a>0,\ b>0,\ p>1\text{ и }\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.\tag{33}$$

Специјално, ако је $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=\frac{1}{n}$ добијамо

$$\sqrt[n]{x_1\cdot\ldots\cdot x_n}\le\frac{x_1+\cdots+x_n}{n},$$

што је неједнакост између геометријске и аритметичке средине. ♯

Задатак 48. Нека је $a_1\ge0,a_2\ge0,\dots,a_n\ge0$ и

$$H_n=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}},\qquad G_n=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

$$A_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},\qquad K_n=\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$$

(хармонијска, геометријска, аритметичка и квадратна средина). Доказати да је

$$\min\{a_1,a_2,\dots,a_n\}\le H_n\le G_n\le A_n\le K_n\le\max\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$$

и да било која једнакост важи ако и само ако је $a_1=a_2=\ldots=a_n$. ✓

[11] Јенсен (I. L. Jensen, 1859–1925)

[12] Јанг (W. Young, 1882–1946), енглески математичар

Напомена 6. Задатак 48 може да се уопшти на *средине реда t*; то су величине

$$S_t = \left(\frac{a_1^t + a_2^t + \cdots + a_n^t}{n}\right)^{1/t}.$$

Специјално, $S_{-1} = H_n$, $S_1 = A_n$, $S_2 = K_n$. Из Вежбе (21) на стр. 128 следи да има смисла рећи да је $S_0 = G_n$. Сем тога,

$$S_{-\infty} = \lim_{t\to-\infty} S_t = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, \quad S_{+\infty} = \lim_{t\to+\infty} S_t = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

Функција $t \mapsto S_t$ је растућа, па важи

$$S_{-\infty} \le S_{-1} \le S_0 \le S_1 \le S_2 \le S_{+\infty},$$

што је тврђење Задатка 48. Сетимо се и елементарних доказа неких од ових неједнакости из Вежбе 29 на стр. 89. ◇

Задатак 49. Нека је $a > 0$, $b > 0$, $0 < p < 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Доказати да тада важи

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \ge \frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b.$$

Упутство: наћи нуле првог извода функције $f(x) = x^\lambda - \lambda x + \lambda - 1$ и доказати да је за $\lambda > 1$ тачка $x = 1$ њен апсолутни минимум, одакле следи $f(x) \ge 0$. Ставити $p = \frac{1}{\lambda}$, $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$ и $x = \frac{a}{b}$. ✓

Приметимо да методом Задатка 49 можемо да докажемо и неједнакост 33 без позивања на конвексност. Довољно је приметити да у случају $\lambda < 1$ функција f из Задатка 49 има максимум у тачки $x = 1$.

Пример 28. (Хелдерова неједнакост)[13] Функција $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^p$ је конвексна за $p > 1$ (јер је $f''(x) = p(p-1)x^{p-2}$). Из Јенсенове неједнакости следи

$$\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right)^p \le \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^p. \tag{34}$$

Нека је q такво да је $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ и нека су a_k и b_k ненегативни бројеви. Стављајући

$$\lambda_k = \frac{b_k^q}{\sum_{j=1}^n b_j^q}, \quad x_k = \frac{a_k \sum_{j=1}^n b_j^q}{b_k^{\frac{1}{p-1}}}$$

у (34) добијамо

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \le \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Последња неједнакост се назива *Хелдеровом неједнакошћу.* ♯

Задатак 50. Доказати да за $p < 1$, $p \ne 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ и $a_k \ge 0$, $b_k \ge 0$ важи

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \ge \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Упутство: за $0 < p < 1$ функција $f(x) = -x^p$ је конвексна. ✓

[13] Хелдер (Otto Hölder, 1859–1937), немачки математичар

Задатак 51. **(Неједнакости Минковског)**[14] Нека су a_k, b_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ ненегативни бројеви. Доказати да важи

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}b_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{за } p \geq 1$$

и

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}b_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{за } p < 1, p \neq 0.$$

Упутство: приметити да је

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p = \sum_{k=1}^{n}a_k(a_k+b_k)^{p-1} + \sum_{k=1}^{n}b_k(a_k+b_k)^{p-1},$$

применити Хелдерове неједнакости на сваки од сабирака на десној страни и поделити обе стране добијених неједнакости са $\left(\sum(a_k+b_k)^p\right)^{1/q}$. ✓

5. Вежбе

(1) Израчунати $\lim\limits_{x\to 0} x(\sqrt{1+3x}-1)^{-1}$
   (а) помоћу Лопиталовог правила;
   (б) помоћу Тејлоровог полинома;
   (в) без помоћи Лопиталовог правила и Тејлоровог полинома.

(2) Израчунати $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$.

(3) Израчунати

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x+1)\sqrt{x}+2\sqrt{x}-3x-1}{(x+15)\sqrt{x+3}-6x-26}.$$

(4) Наћи $f'(x)$ ако је функција $y = f(x)$ задата имплицитно са $x^2+2xy-y^2 = 4x$.

(5) Нека је $y = \sqrt[5]{\frac{x^2+1}{x+1}}$. Израчунати $\frac{dy}{dx}$. Упутство: диференцирати $\log y$; овиме се рачун и сређивање израза поједностављује.

(6) Скицирати криве
   (а) $y = x^3+x^2-4x-4$;
   (б) $r = 2+\sin\theta$;
   (в) $y = f(x)$ ако је $f : \mathbf{R}\setminus\{0\} \to \mathbf{R}$ парна функција за коју важи $f(1) = 0$ и $f'(x) = x^{-1}$.

(7) Наћи тачке пресека парабола

$$r = \frac{1}{1-\cos\theta} \quad \text{и} \quad r = \frac{3}{1+\cos\theta}$$

и наћи угао између њихових тангенти у свакој тачки пресека.

(8) Да ли функција $f(x) = x+\sin x$ има екстремне вредности? Ако има, наћи их.

(9) Нека је $f(x) = x^2+\lambda x^{-1}$.
   (а) За које $\lambda \in \mathbf{R}$ функција f има минимум у тачки $x = -3$?
   (б) За које $\lambda \in \mathbf{R}$ функција f има минимум у тачки $x = 2$?
   (в) За које $\lambda \in \mathbf{R}$ функција f има превој у тачки $x = 1$?
   (г) За које $\lambda \in \mathbf{R}$ функција f има максимум?

[14] Минковски (Hermann Minkowski, 1864–1909), немачки математичар и физичар

(10) Два путника полазе из исте тачке. Први се креће брзином 3 километра на сат према истоку, а други брзином 2 километра на сат ка североистоку. Којом брзином се растојање између њих мења после 15 минута?

(11) Доказати биномну формулу (Лема 5 на стр. 24) помоћу диференцијалног рачуна. (Упутство: показати прво да се општи случај своди на случај $y = 1$.)

(12) Нека је P полином степена $n > 1$ који има n различитих реалних корена $x_1, \ldots, x_n$ и коефицијент a_n уз x^n и нека је Q полином степена не већег од $n-1$. Доказати да је

$$P'(x_k) = a_n \prod_{j \neq k} (x_j - x_k) \quad \text{и} \quad \frac{Q(x)}{P(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{Q(x_k)}{P'(x_k)(x - x_k)}$$

за $x \in \mathbf{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$. Израчунати збир

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{P'(x_k)}.$$

(13) Становници два града која се налазе на истој страни реке праволинијског тока праве пумпу која ће их снабдевати водом. Растојање између првог града и реке је p, између другог града и реке q, а растојање између градова је r. Доказати да дужина цеви мора да буде бар $\sqrt{r^2 + 4pq}$.

(14) Нека су $f_1, f_2, \ldots, f_n$ диференцијабилне функције, чија вредност тачки a није једнака нули. Доказати да је

$$\frac{\left(\prod_{k=1}^{n} f_k\right)'(a)}{\prod_{k=1}^{n} f_k(a)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k'(a)}{f_k(a)}.$$

(15) Нека су $f_1, f_2, \ldots, f_n$, $g_1, g_2, \ldots, g_n$ диференцијабилне функције чија вредност у тачки a није једнака нули. Доказати да је

$$\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{f_k}{g_k}\right)'(a) = \prod_{k=1}^{n} \frac{f_k(a)}{g_k(a)} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{f_k'(a)}{f_k(a)} - \frac{g_k'(a)}{g_k(a)}\right).$$

(16) Нека је $f : [1, +\infty) \to \mathbf{R}$ диференцијабилна функција таква да је

$$\frac{1}{x} \leq f'(x) \leq x.$$

Доказати да је

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^3} = 0.$$

(17) Доказати да за позитивне бројеве x, y, a, b важи неједнакост

$$\left(\frac{x+y}{a+b}\right)^{x+y} \leq \left(\frac{x}{a}\right)^{x} \left(\frac{y}{b}\right)^{y}.$$

Када важи једнакост? Доказати уопштење

$$\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{\sum_{k=1}^{n} a_k}\right)^{\sum_{k=1}^{n} x_k} \leq \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{x_k}{a_k}\right)^{x_k}$$

за позитивне бројеве $x_1, \ldots, x_n$, $a_1, \ldots, a_n$.

(18) Доказати да за $a \geq 0$, $b \geq 0$ важи

$$a + b \geq 1 \;\Rightarrow\; a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}.$$

(19) Доказати да за позитивне бројеве $a_1, a_2, \ldots, a_n$ важи неједнакост

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geq n.$$

(20) Доказати да је за све $m, n \in \mathbf{N}$

$$\frac{m+n}{2} \leq (m^m n^n)^{\frac{1}{m+n}} \leq m + n.$$

(21) Доказати неједнакости

$$1^1 2^2 3^3 \cdots n^n \leq \left(\frac{2n+1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} \quad \text{и} \quad \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n} > \frac{2}{3}$$

за $n \in \mathbf{N}$.

(22) Наћи број решења једначине
(а) $x^3 - 6x^2 + 9 = 10$,
(б) $e^x = cx^2$, $c \in \mathbf{R}$.

(23) Функција $f : (-a, a) \to \mathbf{R}$ је диференцијабилна и задовољава услове

$$f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 - f(x)f(y)}, \qquad \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 1.$$

Наћи f. Упутство: упоредити изразе који се добију диференцирањем дате функционалне једначине по x и по y и закључити да је $f'(x) = 1 + f(x)^2$. Тражена функција је тангенс у околини нуле. Пошто тангенс није дефинисан за све реалне бројеве, тражена функција не постоји ако је $a > \pi/2$. Ако је $a < \pi/2$ решење је $f(x) = \operatorname{tg} x$.

(24) Нацртати следеће криве (тј. испитати функције):
(а) $y = (x-2)^{2/3}(x+1)^{1/3}$
(б) $y = \arcsin \frac{x}{\sqrt{2x^2+4x+4}}$
(в) $y = x \log \frac{x}{x-1}$
(г) $y = \frac{1}{\log(1+\frac{1}{|x|})} - |x|$.

(25) Нацртати криву задату параметарски са $x = t - \log t$, $y = t \log t$.

(26) Доказати неједнакост

$$\left| \frac{1}{1+a} - \frac{1}{1+b} \right| \leq |a - b|$$

за позитивне реалне бројеве a, b.

(27) Доказати неједнакости
(а) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$
(б) $|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|$,
за све $x, y \in \mathbf{R}$.

(28) Доказати *Жорданову*[15] *неједнакост*

$$\frac{2x}{\pi} < \sin x < x \quad \text{за} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

[15] Жордан (Camille Jordan, 1838–1922), француски математичар

(29) Доказати неједнакост

$$\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3} \quad \text{за} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

(30) Доказати неједнакост

$$x^e \leq e^x \quad \text{за} \quad x \geq 0.$$

(31) Доказати да за $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset (0, \pi)$ важи неједнакост

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \sin x_k} \leq \sin\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right).$$

Упутство: доказати да је функција $\log(\sin x)$ конкавна.

(32) Доказати да за $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset (0, \pi)$ важи неједнакост

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \sin\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \sin x_k}.$$

(33) Нека су $x_1, x_2, \ldots, x_n$ позитивни реални бројеви, такви да је

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$$

и нека је $a > 0$. Доказати неједнакост

$$\sum_{k=1}^{n} \left(x_k + \frac{1}{x_k}\right)^a \geq \frac{(n^2+1)^a}{n^{a-1}}.$$

Упутство: доказати да је функција $x \mapsto (x + x^{-1})^a$ конвексна за $a \geq 1$ и искористити Јенсенову неједнакост (Лема 5 на стр. 157). Друго решење (за $a \geq 1$): применити Коши–Шварцову неједнакост (стр. 85) на суму

$$n^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} 1\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}\frac{1}{\sqrt{x_k}}\right)^2$$

и доказати да је

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geq n^2.$$

Затим искористити конвексност функције $x \mapsto x^a$ за $a \geq 1$. Случај $0 < a < 1$ испитати одвојено.

(34) Нека су $x_1, x_2, \ldots, x_n$ позитивни реални бројеви. Доказати неједнакост

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \geq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} e^{\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k} - \frac{n}{2\sum_{k=1}^{n} x_k}}.$$

(35) Нека је функција $f : [0,1] \Rightarrow \mathbf{R}$ непрекидна на $[0,1]$ и диференцијабилна на $(0,1)$. Доказати да постоји $c \in (0,1)$, такво да важи

$$f(1) - f(0) = \frac{1}{2}(f'(c) + f'(1-c)).$$

(36) Нека је функција $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ непрекидна на $[a,b]$ и диференцијабилна на (a,b) и нека је $f(a) = a$, $f(b) = b$. Доказати да постоје различите тачке $\xi, \eta \in (a,b)$, такве да је

$$\frac{1}{f'(\xi)} + \frac{1}{f'(\eta)} = 2.$$

Упутство: користећи непрекидност, доказати да постоји $c \in (a,b)$ за које је $f(c) = (a+b)/2$, а затим применити Лагранжеву теорему на интервале $[a,c]$ и $[c,b]$.

(37) Функција $f : [0,+\infty) \to \mathbf{R}$ непрекидна на $[0,+\infty)$, диференцијабилна на $(0,+\infty)$, задовољава услов $f(0) = 0$ и њен извод f' расте. Доказати да је

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

растућа функција.

(38) Нека је $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ диференцијабилна функција која задовољава услов

$$f'(x) + (f(x))^2 \geq -1 \quad \text{за све } x \in (a,b),$$

и нека је

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = +\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x \to b-0} f(x) = -\infty.$$

Доказати да је $b - a \geq \pi$.

(39) Нека је $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ двапут диференцијабилна функција која задовољава услов

$$f''(x) + e^x f(x) = 0 \quad \text{за све } x \in \mathbf{R}.$$

Доказати да за свако $T \in \mathbf{R}$ функција f ограничена на интервалу $[T,+\infty)$. Упутство: доказати да је функција $g(x) = (f(x))^2 + (f'(x))^2$ ненегативна и опадајућа.

(40) Нека је $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ диференцијабилна функција која има ограничен први извод и нека је $g(x) = x^2 + f(x)$.

(а) Израчунати

$$\lim_{x \to \pm\infty} g(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{g(x)}{\sqrt{1+x^4}}.$$

(б) Доказати да функција g није равномерно непрекидна на $\mathbf{R}$.

(41) Нека је функција f дефинисана у околини тачке x и нека у тој тачки има други извод. Доказати да је

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}.$$

Показати примером да лимес на десној страни може да постоји и ако $f''(x)$ не постоји.

(42) Нека је $f : (-\varepsilon, 1+\varepsilon) \to \mathbf{R}$ двапут диференцијабилна функција и нека је $f(0) = f(1)$. Ако је

$$(\forall x \in (0,1))\ |f''(x)| \leq M,$$

доказати да је

$$\sup_{x \in (0,1)} |f'(x)| \leq \frac{M}{2}.$$

Упутство: Написати $f(1)$ помоћу Тејлоровог полинома у околини тачке x. Урадити исто са $f(0)$ и одузети добијене изразе.

(43) Нека је $f : (a, +\infty) \to \mathbf{R}$ двапут диференцијабилна функција и нека је

$$\sup_{x>a} |f^{(k)}(x)| = M_k < +\infty$$

за $k \in \{0, 1, 2\}$. Доказати Адамар[16] – Колмогоров[17] – Ландауову неједнакост

$$M_1^2 \leq 4M_0M_2.$$

Доказати одатле да ако функција f има ограничен други извод, онда важи импликација

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0.$$

Упутство: развити $f(x + 2h)$ у Тејлоров полином са остатком у Лагранжовом облику. Закључити да је $M_0 - M_1h + M_2h^2 > 0$, одакле следи да је дискриминанта овог квадратног тринома негативна.

(44) Нека је $0 \leq \varepsilon < 1$. Доказати да постоји функција $y = f(x)$ задата једначином

$$y - \varepsilon \sin y = x$$

и наћи њен извод.

(45) (а) Нека је $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ диференцијабилна функција која је периодична са периодом T. Доказати да је њен извод $f'(x)$ периодична функција, са истим периодом T.

(б) Нека је P полином. Доказати да је функција $\sin(P(x))$ периодична ако и само ако степен полинома P није већи од 1.

(46) Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ненегативни реални бројеви. Доказати неједнакости

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k e^{-a_k} \leq \frac{1}{e}, \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^2 e^{-a_k} \leq \frac{4}{e^2}, \qquad \prod_{k=1}^{n} a_k \leq \left(\frac{3}{e}\right)^n e^{\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} a_k}.$$

(47) Наћи

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} \left(\frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-1|}\right).$$

Да ли се овај супремум достиже у некој тачки?

(48) Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_n$ реални бројеви, такви да је

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_n.$$

Наћи

$$\inf_{x\in\mathbf{R}} \sum_{k=1}^{n} (x - a_k)^2.$$

Да ли се овај инфимум достиже у некој тачки?

---

[16] Адамар (Jacques Hadamard, 1865–1963), француски математичар

[17] Колмогоров (Андрей Николаевич Колмогоров, 1903–1987), руски математичар

(49) Нека је $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ конвексна диференцијабилна функција. Доказати да је

$$(\forall x \in (a, b))\ f(x) = \max_{t \in (a,b)} (f(t) + f'(t)(x - t)).$$

Дати геометријску интерпретацију ове једнакости. Формулисати и доказати аналогно тврђење за конкавне функције.

Упутство: применити Лагранжеву теорему и чињеницу да први извод конвексне функције расте.

(50) За које $p \in \mathbb{R}$ функција

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(x) = x + p \sin x$$

има диференцијабилну инверзну функцију f^{-1}?

(51) У зависности од реалног параметра p одредити број решења следећих једначина:

(а) $\log x = px$;
(б) $x^3 + 3x^2 - px + 5 = 0$;
(в) $x^3 \log x = x - p$;
(г) $pe^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}$;
(д) $2x^3 \log x + x^2 = 4x - p$;
(ђ) $x + \sin x + p = 0$.

ГЛАВА 4

Низови и редови

1. Конвергенција низова

1.1. Примери. Понављајући дефиницију лимеса у бесконачности дату на стр. 119, кажемо да низ z_n комплексних бројева има граничну вредност z_∞, или да *конвергира ка* $z_\infty \in \mathbf{C}$, ако важи

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})\, n > n_0 \;\Rightarrow\; |z_n - z_\infty| < \varepsilon. \tag{1}$$

У том случају пишемо $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_\infty$ или „$z_n \to z_\infty$ кад $n \to \infty$". За низ који није конвергентан кажемо да је *дивергентан*. Напомена 8 на стр. 119, наравно, важи и за лимесе низова. Аналогија Напомене 7 на стр. 119 је очигледна чињеница да конвергенција низа не зависи од понашања коначног броја његових чланова.

Напомена 1. Лимес низа можемо да посматрамо као специјалан случај лимеса функције у бесконачности. Прецизније, ако је z_n низ комплексних бројева, њему можемо да придружимо функцију

$$f : [1, +\infty) \to \mathbf{C}, \qquad f(x) = z_{[x]}.$$

Тада је

$$z_\infty = \lim_{n\to\infty} z_n \;\Leftrightarrow\; z_\infty = \lim_{x\to\infty} f(x).$$

Имајући ово у виду, нећемо понављати неке већ доказане ставове о лимесима функција за лимесе низова. ◇

Пример 1. Низ $x_n = \frac{1}{n}$ је конвергентан и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ јер је $|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ за $n > [\varepsilon^{-1}]$. Слично се показује да је $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$. ♯

Пример 2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ јер је $|\frac{n}{n+1} - 1| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ за $n > [\varepsilon^{-1}]$. ♯

Пример 3. Низ $a_n = (-1)^n$ је дивергентан. Заиста, претпоставимо да је $\lim_{n\to\infty} a_n = a_\infty$. Нека је $0 < \varepsilon < 2^{-1}$. Из (1) следило би да $(\exists n_0 \in \mathbf{N})\, n > n_0 \Rightarrow |a_n - a_\infty| < \varepsilon < 2^{-1}$. Тада би за свако $n > n_0$ важило

$$\begin{aligned} 2 &= |(-1)^{2n} - (-1)^{2n+1}| = |a_{2n} - a_{2n+1}| = |a_{2n} - a_\infty + a_\infty - a_{2n+1}| \\ &\le |a_{2n} - a_\infty| + |a_\infty - a_{2n+1}| < \varepsilon + \varepsilon < 2^{-1} + 2^{-1} = 1, \end{aligned}$$

што је контрадикција. ♯

Пример 4. Из неједнакости $-\frac{1}{n} \le \frac{\sin n}{n} \le \frac{1}{n}$, Теореме о три лимеса (Теорема 14, 4, на стр. 122) и Примера 1 следи $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$. ♯

Пример 5. Нека је $0 < \theta < 2\pi$. Тада бар један од низова $a_n = \sin n\theta$ и $b_n = \cos(n\theta)$ дивергира. Заиста, ако би оба низа конвергирала, преласком на лимес у

$$\sin n\theta + \sin(n-2)\theta = 2\cos\theta \sin(n-1)\theta,$$
$$\cos n\theta + \cos(n-2)\theta = 2\cos\theta\cos(n-1)\theta$$

добијамо

$$2a_\infty = 2\cos\theta a_\infty, \qquad 2b_\infty = 2\cos\theta b_\infty. \tag{2}$$

Преласком на лимес у $\cos^2 n\theta + \sin^2 n\theta = 1$ добијамо $a_\infty^2 + b_\infty^2 = 1$. Одатле следи да је бар један од бројева a_∞, b_∞ различит од нуле, па из (2) добијамо $\cos\theta = 1$, што је у супротности са $0 < \theta < 2\pi$. ♯

Пример 6. Нека је $q \in \mathbf{R}$.

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1 \\ 1, & q = 1 \\ +\infty, & q > 1 \\ \text{не постоји}, & q < -1. \end{cases}$$

Заиста, нека је $|q| < 1$ и $\varepsilon > 0$. Тада је $|q|^{-1} - 1 > 0$, па из Бернулијеве неједнакости и Архимедове аксиоме следи

$$|q|^{-n} = (1 + (|q|^{-1} - 1))^n > 1 + n(|q|^{-1} - 1) > \varepsilon^{-1}$$

за довољно велико n, тј. $|q^n| < \varepsilon$. То, по дефиницији, значи да $q^n \to 0$ кад $n \to \infty$. Ако је $q = 1$ имамо константан низ $q^n \equiv 1$ који конвергира ка 1. Случај $q = -1$ је размотрен у Примеру 3. Нека је $|q| > 1$ и M произвољан позитиван број. Применом Бернулијеве неједнакости добијамо $|q^n| = (1 + |q| - 1)^n > 1 + n(|q| - 1) > M$ за довољно велико M. По дефиницији бесконачног лимеса то значи да Случај $|q^n| \to \infty$ кад $n \to \infty$. Ако је при томе $q > 1$, имамо $q^n \to \infty$ кад $n \to \infty$. Ако је $q < -1$, онда је $q^{2n} > M$, $q^{2n+1} < -M$ за довољно велико n, што значи да се бесконачно много тачака низа q^n налази ван било ког отвореног подскупа у $\mathbf{R}$, различитог од целог $\mathbf{R}$, па $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ не постоји за $q < -1$. ♯

Пример 7. Низ $\zeta_n = z^n$ у $\mathbf{C}$ конвергира ако и само ако је $|z| < 1$ или $z = 1$. Заиста, ако је $z = 1$ имамо константан низ, а за $|z| < 1$ из Примера 6 следи да $|z^n| = |z|^n \to 0$ кад $n \to \infty$, па на основу Леме 13 z^n конвергира ка нули. Ако је $|z| > 1$, из Примера 6 следи да $|z^n| = |z|^n \to \infty$ кад $n \to \infty$, па је низ ζ_n неограничен, дакле дивергентан. На крају, нека је $|z| = 1$ и $z \neq 1$, тј. $z = \cos\theta + i\sin\theta$ за $0 < \theta < 2\pi$. Тада је $z^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$, па резултат следи из Примера 5 и Леме 12 на стр. 119.

До последњег закључка, о томе да за $|z| = 1$ z^n конвергира ако и само ако је $z = 1$, можемо да дођемо и на следећи начин. Претпоставимо да z^n конвергира ка ζ_∞. Преласком на лимес у $z^n = zz^{n-1}$ добијамо $\zeta_\infty = z\zeta_\infty$, одакле следи $z = 1$. ♯

Пример 8. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Заиста, нека је $x_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Тада је

$$n = (1 + x_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_n^k. \tag{3}$$

Из Тврђења 3 на стр. 3 следи да је за $n > 1$ $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n]{1} = 1$, па је $x_n > 0$. Одатле следи да су сви сабирци у претходној суми позитивни, па је цела сума већа од њеног другог сабирка, тј. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_n^k > \binom{n}{2} x_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} x_n^2$. Одатле и из (3) следи $x_n < \sqrt{\frac{2}{n+1}}$, па $x_n \to 0$, тј. $\sqrt[n]{n} \to 1$ кад $n \to \infty$. ♯

Пример 9. Низ $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ је конвергентан. Заиста

$$a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1}^2 - \sqrt{n}^2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \to 0$$

кад $n \to \infty$. ♯

Напомена 2. Аналогије Теореме 13 на стр. 122 и Теореме 14 иза ње, важе и за лимесе низова, имајући у виду Напомену 1. ◇

Задатак 1. Нека је $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ скуп свих комплексних низова, $b(\mathbf{C})$ његов подскуп свих ограничених комплексних низова, тј.

$$b(\mathbf{C}) = \{z_n \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}} \mid (\exists M, m)\, m \leq |z_n| \leq M\},$$

$c(\mathbf{C})$ скуп свих конвергентних комплексних низова и $c_0(\mathbf{C})$ скуп свих комплексних низова који конвергирају ка нули.

(а) Доказати да су сваки од ових скупова има структуру прстена у односу на операције $+$ и $\cdot$ дефинисане у Примеру 12 на стр. 14 за случај $X = \mathbf{N}$ и $P = \mathbf{C}$.

(б) Доказати да је $c_0(\mathbf{C})$ идеал у $c(\mathbf{C})$ (видети Дефиницију 3 на стр. 13).

(в) Доказати да је $c_0(\mathbf{C})$ идеал у $b(\mathbf{C})$.

(г) Доказати да $c(\mathbf{C})$ није идеал у $b(\mathbf{C})$.

(д) Да ли је $c_0(\mathbf{C})$ идеал у $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$? ✓

1.2. Неодређени облици. Подсетимо се да аксиомама реалних бројева и правилима за рачунање у проширеном скупу реалних бројева која смо дали на 21. страни нису дефинисани изрази облика

$$\frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad 1^{\infty}, \quad \infty^0, \quad \frac{0}{0}, \quad 0^0. \tag{4}$$

Читалац који је решио Задатак 21 на 119. страни видео је да израз $\frac{\infty}{\infty}$, као лимес, може да буде једнак било ком реалном броју, као и $\pm\infty$. Другим речима, ако $a_n \to \infty$, $b_n \to \infty$, лимес низа $\frac{a_n}{b_n}$ је неодређен, тј. зависи од тога какви су конкретни низови a_n и b_n. Исто важи за остале изразе (4), који се називају *неодређеним облицима*. Следећа теорема омогућава нам да некад израчунамо лимесе облика $\frac{\infty}{\infty}$. Читалац ће у њој препознати „дискретну" верзију Лопиталових правила (стр. 148).

Теорема 1. **(Штолцова[1] теорема)** *Нека је b_n растући низ реалних бројева такав да $b_n \to +\infty$ кад $n \to \infty$. Ако постоји $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \in \overline{\mathbf{R}}$, онда постоји и $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ и*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}.$$

[1]Штолц (Otto Stolz, 1842–1905), аустријски математичар

△ Претпоставимо прво да је $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=L$ коначан. Нека је $\varepsilon>0$. Тада постоји $n_0\in\mathbf{N}$, такво да за $k\geq n_0$ важи

$$L-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{a_{k+1}-a_k}{b_{k+1}-b_k}<L+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Пошто је низ b_n растући, тј. $b_{k+1}-b_k>0$, множењем претходне неједнакости са $b_{k+1}-b_k$ добијамо

$$\Big(L-\frac{\varepsilon}{2}\Big)(b_{k+1}-b_k)<a_{k+1}-a_k<\Big(L+\frac{\varepsilon}{2}\Big)(b_{k+1}-b_k)$$

за $k\geq n_0$, па је

$$\Big(L-\frac{\varepsilon}{2}\Big)\sum_{k=n_0}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)<\sum_{k=n_0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)<\Big(L+\frac{\varepsilon}{2}\Big)\sum_{k=n_0}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)$$

за свако $n>n_0$. Пошто је $\sum_{k=n_0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=a_n-a_{n_0}$, $\sum_{k=n_0}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)=b_n-b_{n_0}$, одатле добијамо

$$\Big(L-\frac{\varepsilon}{2}\Big)(b_n-b_{n_0})<a_n-a_{n_0}<\Big(L+\frac{\varepsilon}{2}\Big)(b_n-b_{n_0}).$$

Дељењем ових неједнакости позитивним бројем $b_n-b_{n_0}$ добијамо

$$L-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{a_n-a_{n_0}}{b_n-b_{n_0}}<L+\frac{\varepsilon}{2},$$

тј.

$$\Big|\frac{a_n-a_{n_0}}{b_n-b_{n_0}}-L\Big|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Одатле добијамо

$$\Big|\frac{a_n}{b_n}-L\Big|=\Big|\frac{a_{n_0}-Lb_{n_0}}{b_n}+\Big(1-\frac{b_{n_0}}{b_n}\Big)\Big(\frac{a_n-a_{n_0}}{b_n-b_{n_0}}-L\Big)\Big|\leq\Big|\frac{a_{n_0}-Lb_{n_0}}{b_n}\Big|+\Big|\frac{a_n-a_{n_0}}{b_n-b_{n_0}}-L\Big|.$$

Други сабирак на десној страни је мањи од $\frac{\varepsilon}{2}$ за $n>n_0$. Пошто $b_n\to\infty$, постоји $n_1\in\mathbf{N}$ такво да је први сабирак на десној страни мањи од $\frac{\varepsilon}{2}$ за $n>n_1$. Одатле следи

$$n>\max\{n_0,n_1\}\ \Rightarrow\ \Big|\frac{a_n}{b_n}-L\Big|<\varepsilon,$$

што значи да је $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=L$.

Случај $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=+\infty$ своди се на претходни. Тада је, за довољно велико n, $a_{n+1}-a_n>b_{n+1}-b_n$, па је низ a_n растући (почев од неког члана) и $a_n\to+\infty$ кад $n\to\infty$. Применом доказаног тврђења на $\frac{b_n}{a_n}$ добијамо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=0,$$

тј. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=+\infty$. ▽

Последица 1. **(Кошијева теорема)** *Ако низ a_n конвергира и $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a_\infty$, онда конвергира и низ аритметичких средина*

$$A_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

и важи $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=a_\infty$.

△ Доказ следи из Штолцове теореме. ▽

Последица 2. *Ако низ a_n конвергира ка a_∞, онда конвергира и низ његових хармонијских средина*

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

и важи $\lim_{n\to\infty} H_n = a_\infty$.

△ Следи из претходне последице, примењене на $1/H_n$. ▽

Последица 3. *Нека је $a_n > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_\infty$. Тада низ $G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ геометријских средина конвергира и важи*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a_\infty.$$

△ Доказ следи из примене Штолцове теореме на $\log G_n$ или из неједнакости $H_n \le G_n \le A_n$ и претходне две последице. ▽

Пример 10. Нека је

$$a_n = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n}.$$

Из Штолцове теореме и Примера 8 следи $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. ♯

Пример 11. Нека је x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ низ позитивних бројева такав да постоји

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n-1}}.$$

Тада је низ $\sqrt[n]{x_n}$ конвергентан и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}.$$

Ово тврђење може да се изведе и из Последице 3 примењене на геометријске средине чланова низа

$$y_n = \frac{x_n}{x_{n-1}},$$

где је $x_0 = 1$. ♯

Задатак 2. Нека је $k \in \mathbf{N}$. Израчунати $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^k} - \frac{n}{k+1}\right)$. ✓

1.3. Конвергенција и непрекидност. Појам непрекидности и лимеса функције може се свести на појам лимеса низа.

Лема 1. *Нека је $\xi \in \mathbf{C}$ тачка нагомилавања скупа $Z \subset \mathbf{C}$. Тада постоји низ $z_n \in Z$ такав да је $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \xi$.*

△ Нека је $B(\xi, \frac{1}{n}) = \{z \in \mathbf{C} \mid |z - \xi| < \frac{1}{n}\}$. По дефиницији тачке нагомилавања, за свако $n \in \mathbf{N}$ скуп $Z \cap B(\xi, \frac{1}{n})$ је непразан, тј. за свако n постоји тачка $z_n \in Z \cap B(\xi, \frac{1}{n})$. Из $|z_n - \xi| < \frac{1}{n}$ следи $z_n \to \xi$ кад $n \to \infty$. ▽

Теорема 2. *Ако је ξ тачка нагомилавања скупа Z онда је $A = \lim\limits_{z\to\xi} f(z)$ ако и само ако за сваки низ $z_n \in Z \setminus \{\xi\}$ важи*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \xi \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} f(z_n) = A. \tag{5}$$

△ Нека је $A = \lim_{z\to\xi} f(z)$ и $\lim_{n\to\infty} z_n = \xi$. Нека је $\varepsilon > 0$. Тада

$$(\exists\delta > 0)\, 0 < |z - \xi| < \delta \;\Rightarrow\; |f(z_n) - A| < \varepsilon.$$

Пошто $z_n \to \xi$ кад $n \to \infty$ и $z_n \neq \xi$, $(\exists n_0 \in \mathbf{N}) n > n_0 \Rightarrow 0 < |z_n - \xi| < \delta$. Из ове две импликације следи $f(z_n) \to A$ кад $n \to \infty$.

Претпоставимо сада да за сваки низ $z_n \in Z \setminus \{\xi\}$ важи (5) и да A није лимес функције f у тачки z_0. Тада

$$(\exists\varepsilon > 0)(\forall n \in \mathbf{N})(\exists z_n \in Z)\, 0 < |z_n - \xi| < \frac{1}{n} \wedge |f(z_n) - A| \geq \varepsilon.$$

Тада низ z_n конвергира ка ξ, али $f(z_n)$ не конвергира ка A, што је у супротности са (5). ▽

Последица 4. *Нека је $Z \subset \mathbf{C}$. Функција $f : Z \to \mathbf{C}$ f је непрекидна у тачки $\zeta \in Z$ ако и само ако за сваки низ $z_n \in Z$ важи*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \zeta \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(\zeta).$$

△ Доказ следи из Теореме 12 и Теореме 2. ▽

Задатак 3. Нека је $x_n > 0$ и $\lim_{n\to\infty} x_n = x_\infty$. Доказати да је

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} = x_\infty.$$

Упутство: посматрати низ $a_n = \log_a \sqrt[n]{x_1 \cdot \cdots \cdot x_n}$ и искористити непрекидност логаритамске и експоненцијалне функције и Штолцову теорему. ✓

Пример 12. Дирихлеова[2] функција

$$\chi_{\mathbf{Q}} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad \chi_{\mathbf{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbf{Q} \\ 0 & x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$$

је прекидна у свакој тачки. Заиста, из густине скупа $\mathbf{Q}$ на реалној правој следи да за сваку тачку $x_0 \in \mathbf{R}$ постоји низ $q_n \in \mathbf{Q}$ такав да $q_n \to x_0$, а тиме $\chi_{\mathbf{Q}}(q_n) \to 1$, кад $n \to \infty$. Са друге стране, постоји и низ ирационалних бројева α_n који конвергира ка x_0, јер у сваком интервалу $(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n})$ постоји ирационалан број (иначе би $\mathbf{Q}$ био непребројив). За такав низ важи $\chi_{\mathbf{Q}}(\alpha_n) \to 0$ кад $n \to \infty$. Одатле, на основу Теореме 2 следи да Дирихлеова функција нема лимес ни у једној тачки, па у свакој тачки има неотклоњив прекид. ♯

Задатак 4. Доказати да је функција

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbf{Q} \\ 0, & x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$$

непрекидна у нули, а прекидна у свим осталим тачкама. ✓

Задатак 5. Доказати да је функција $f : [0,1] \to \mathbf{R}$, дефинисана са

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbf{Q} \\ x^2, & x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$$

непрекидна у 0 и 1 и предкидна у свим тачкама интервала $(0,1)$. ✓

[2] Дирихле (Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805–1859), немачки математичар

Задатак 6. Доказати да је функција

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in \mathbf{Q} \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$$

непрекидна у свим тачкама скупа $\{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$ и прекидна у свим осталим тачкама. ✓

Задатак 7. Нека је функција $f : (-1, 1) \to \mathbf{R}$ непрекидна у нули, таква да је $f(x) = f(x^2)$ за све $x \in (-1, 1)$. Доказати да је f константна функција.
Упутство: Доказати да је $f(x) = f(0)$ ($x^n \to 0$ кад $n \to \infty$). ✓

Задатак 8. Из Последице 4, Леме 1 и дефиниције затвореног скупа извести други доказ Последице 6 са стр. 107. ✓

1.4. Поднизови. Тачке нагомилавања. Подниз низа $n \mapsto z_n$ је низ $k \mapsto z_{n(k)}$, где је $k \mapsto n(k)$ неко строго растуће пресликавање.

Лема 2. *Ако је* $\lim_{n\to\infty} z_n = z_\infty$, *онда је* $\lim_{k\to\infty} z_{n(k)} = z_\infty$ *за сваки подниз* $z_{n(k)}$.

△ Доказ следи директно из дефиниције конвергенције. ▽

Дефиниција 1. Тачка $\zeta \in \mathbf{C}$ је тачка нагомилавања низа $z_n \in \mathbf{C}$ ако постоји подниз $z_{n(k)}$ такав да је $\lim_{k\to\infty} z_{n(k)} = \zeta$.

Пример 13. Низ $a_n = (-1)^n + n^{-1}$ има две тачке нагомилавања, $a_{2n} \to 1$, $a_{2n-1} \to -1$ кад $n \to \infty$. Низ $b_n = n+(-1)^n(n+n^{-1})$ има једну тачку нагомилавања, нулу. Низ $z_n = i^n + n^{-1}$ има четири тачке нагомилавања. У Теореми 15 на стр. 46 смо видели да се скуп рационалних бројева може поређати у низ; из Теореме 12 на 40. страни следи да тај низ има бесконачно много тачака нагомилавања. ♯

Лема 3. *Ако* $z_n \to z_\infty$ *кад* $n \to \infty$, *онда је* z_∞ *једина тачка нагомилавања низа* z_n.

△ Доказ следи из Леме 2. ▽

Теорема 3. **(Болцано–Вајерштрасова теорема за низове)** *Сваки ограничен низ комплексних бројева има тачку нагомилавања.*

△ Нека је $z_n = x_n + iy_n$ ограничен низ, тј. $|z_n| < M$. Пошто је $|z_n| = \sqrt{|x_n|^2 + |y_n|^2}$, и низови x_n, y_n су ограничени, па је довољно доказати теорему за реалне низове.

Нека је a_n ограничен низ реалних бројева. Скуп $A = \{a_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ је ограничен. Ако је он коначан, онда постоји бар једна тачка $a \in A$ таква да је $a_n = a$ за бесконачан скуп индекса $n_1, n_2, \ldots$, па је $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$ конвергентан (тачније, константан) подниз низа a_n који конвергира ка a. Ако је скуп A бесконачан, онда он, по Теореми 20 на стр. 52 има тачку нагомилавања a. По дефиницији тачке нагомилавања, за свако $n \in \mathbf{N}$ постоји $a_{k(n)} \in (a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n})$. Пошто, по дефиницији тачке нагомилавања, у свакој околини тачке a има бесконачно много тачака скупа A, бројеви $k(n)$ могу бити изабрани тако да је $k(n) < k(n + 1)$, тј. тако да је $a_{k(n)}$ подниз низа a_n. Из $a_{k(n)} \in (a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n})$ следи да $a_{k(n)}$ конвергира ка a. ▽

Тврђење обрнуто тврђењу претходне леме није, у општем случају, тачно: тачка 0 је једина тачка нагомилавања низа b_n из Примера 13, а овај низ неограничен, па зато и дивергентан.

Дефиниција 2. Највећу тачку нагомилавања низа $x_n \in \mathbf{R}$ називамо његовим *горњим лимесом* или *лимесом супериором* и означавамо са $\overline{\lim} x_n$ или $\limsup x_n$. Најмању тачку нагомилавања низа $x_n \in \mathbf{R}$ називамо његовим *доњим лимесом* или *лимесом инфериором* и означавамо са $\underline{\lim} x_n$ или $\liminf x_n$.

Лема 4. *За низ реалних бројева a_n важи еквиваленција*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n = L.$$

$\triangle$ $\underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n = L$ ако и само ако је лимес сваког подниза низа a_n једнак L, што је еквивалентно са $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. $\triangledown$

Дефиниција 3. Нека је $\zeta \in \mathbf{C}$ тачка нагомилавања скупа $Z \subset \mathbf{C}$. *Горњи лимес* или *лимес супериор* функције $f : Z \to \mathbf{R}$ у тачки ζ (у ознаци $\overline{\lim}_{z\to\zeta} f(z)$ или $\limsup_{z\to\zeta} f(z)$) је супремум скупа тачака нагомилавања свих низова $f(z_n)$, где $Z \setminus \{\zeta\} \ni z_n \to \zeta$ кад $n \to \infty$, тј.

$$\overline{\lim_{z\to\zeta}} f(z) = \sup\{\overline{\lim} f(z_n) \mid z_n \in Z \setminus \{\zeta\},\ \lim_{n\to\infty} z_n = \zeta\}.$$

Доњи лимес или *лимес инфериор* функције $f : Z \to \mathbf{R}$ у тачки ζ (у ознаци $\underline{\lim}_{z\to\zeta} f(z)$ или $\liminf_{z\to\zeta} f(z)$) је инфимум скупа тачака нагомилавања свих низова $f(z_n)$, где $Z \setminus \{\zeta\} \ni z_n \to \zeta$ кад $n \to \infty$.

Лема 5. *Функција f има граничну вредност у тачки $z_0 \in \overline{\mathcal{D}(f)}$ ако и само ако је*

$$\liminf_{z\to\zeta} f(z) = \limsup_{z\to\zeta} f(z) = \lim_{z\to\zeta} f(z).$$

$\triangle$ Доказ следи из Леме 4 и Теореме 2. $\triangledown$

Задатак 9. Доказати да је функција $f : D \to \mathbf{R}$ полунепрекидна одоздо (видети стр. 116) у тачки $\zeta \in D$ ако и само ако важи

$$\liminf_{z\to\zeta} f(z) \geq f(\zeta).$$

Формулисати и доказати одговарајуће тврђење за полунепрекидност одозго. ✓

Задатак 10. (а) Нека је a_n низ у $\mathbf{R}$ и $\overline{a}_n = \sup_{k\geq n} a_n$, $\underline{a}_n = \inf_{k\geq n} a_n$. Доказати да је

$$\overline{\lim} a_n = \lim_{n\to\infty} \overline{a}_n = \inf_{n\in\mathbf{N}} \overline{a}_n, \quad \underline{\lim} a_n = \lim_{n\to\infty} \underline{a}_n = \sup_{n\in\mathbf{N}} \underline{a}_n$$

(б) Нека је $\zeta \in \mathbf{C}$ тачка нагомилавања домена $Z \subset \mathbf{C}$ функције $f : Z \to \mathbf{R}$, $\delta > 0$ и $B(\zeta, \delta) = \{z \in \mathbf{C} \mid |z - \zeta| < \delta\}$. Дефинишимо

$$\overline{f}(\delta) := \sup f(Z \cap B(\zeta, \delta)), \quad \underline{f}(\delta) := \inf f(Z \cap B(\zeta, \delta)).$$

Доказати да је

$$\overline{\lim}_{z\to\zeta} f(z) = \lim_{\delta\to 0+0} \overline{f}(\delta) = \inf_{\delta>0} \overline{f}(\delta), \quad \underline{\lim}_{z\to\zeta} f(z) = \lim_{\delta\to 0+0} \underline{f}(\delta) = \sup_{\delta>0} \underline{f}(\delta).$$

(в) Нека су $f, g : A \to \mathbf{R}$ две функције (или два низа, ако је $A = \mathbf{N}$). Доказати да важи

$$\lim_{a\to\alpha} f(z) = \eta \Leftrightarrow \underline{\lim}_{a\to\alpha} f(z) = \overline{\lim}_{a\to\alpha} f(z) = \eta$$

$$\overline{\lim}(-f) = -\underline{\lim} f, \quad \underline{\lim}(-f) = -\overline{\lim} f$$

$$f \le g \;\Rightarrow\; \underline{\lim} f \le \underline{\lim} g \wedge \overline{\lim} f \le \overline{\lim} g$$

$$\overline{\lim} f + \underline{\lim} g \le \overline{\lim}(f+g) \le \overline{\lim} f + \overline{\lim} g,$$

$$\underline{\lim} f + \underline{\lim} g \le \underline{\lim}(f+g) \le \underline{\lim} f + \overline{\lim} g.$$

Ако је $f \ge 0$ и $g \ge 0$ онда је

$$\overline{\lim} f \cdot \underline{\lim} g \le \overline{\lim}(f\cdot g) \le \overline{\lim} f \cdot \overline{\lim} g,$$

$$\underline{\lim} f \cdot \underline{\lim} g \le \underline{\lim}(f\cdot g) \le \underline{\lim} f \cdot \overline{\lim} g.$$

Ако је $f > 0$, онда је

$$\overline{\lim}\frac{1}{f} = \frac{1}{\underline{\lim} f}, \quad \underline{\lim}\frac{1}{f} = \frac{1}{\overline{\lim} f}.$$

Упутство: видети Задатак 15 на 111. страни. ✓

Пример 14. Испитајмо конвергенцију низа a_n дефинисаног са $a_1 = 1$ и

$$a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}. \tag{6}$$

Индукцијом се лако показује да је $a_n > 0$. Преласком на $\overline{\lim}$ у (6) и применом својстава из Задатка 10 (в) добијамо

$$\overline{\lim} a_n = \frac{1}{1+\underline{\lim} a_n}, \tag{7}$$

Слично, преласком на $\underline{\lim}$ у (6) добијамо

$$\underline{\lim} a_n = \frac{1}{1+\overline{\lim} a_n}. \tag{8}$$

Решавањем система (7) (8) од две једначине са две непознате $\overline{\lim} a_n$, $\underline{\lim} a_n$ добијамо $\overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, па је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. ♯

Задатак 11. Нека је a_n низ позитивних бројева са особином

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_0)\,(\forall n > n_0)\,(\forall k)\, a_{n+k} \le a_n + \varepsilon.$$

Доказати да низ a_n конвергира.

(Упутство: применити на неједнакост $a_{n+k} \le a_n + \varepsilon$ горњи лимес по k, а затим на новодобијену неједнакост применити доњи лимес по n; закључити да су доњи и горњи лимес једнаки) ✓

Задатак 12. Нека за низ a_n важи

$$0 \le a_{m+n} \le a_m + a_n.$$

Доказати да низ $\frac{a_n}{n}$ конвергира. Доказати да без прве неједнакости, тј. само под претпоставком

$$a_{m+n} \le a_m + a_n$$

низ $\frac{a_n}{n}$ или конвергира или му је лимес $-\infty$ и да је

$$\lim \frac{a_n}{n} = \inf \frac{a_n}{n}.$$

Ово тврђење је познато као Фекетеова[3] лема. ✓

Пример 15. Израчунајмо горњи и доњи лимес функције

$$f : \mathbf{C} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}, \qquad f(z) = \frac{z^2 - \bar{z}^2}{i|z|^2}$$

у нули. Преласком на поларни запис $z = r\mathrm{cis}\,\theta$ добијамо $f(r\mathrm{cis}\,\theta) = 2\sin 2\theta$, одакле следи да је (у ознакама из Задатка 10) $\overline{f}(\delta) \equiv 2$, $\underline{f}(\delta) \equiv -2$. Из Задатка 10 сада следи $\overline{\lim}_{z\to 0} f(z) = 2$, $\underline{\lim}_{z\to 0} f(z) = -2$. ♯

Пример 16. Нека је $a_n \geq 0$. Тада је

$$\underline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \underline{\lim}\sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim}\sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n},$$

или, еквивалентно,

$$\overline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n} < R \;\Rightarrow\; \overline{\lim}\sqrt[n]{a_n} < R \quad \text{и} \quad \underline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n} > r \;\Rightarrow\; \underline{\lim}\sqrt[n]{a_n} > r. \tag{9}$$

Заиста, нека је $\overline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n} < R$. Тада за неко $\varepsilon \in (0, R)$ постоји $n_0 \in \mathbf{N}$, такво да је $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq R - \varepsilon$, па је

$$\frac{a_{n+1}}{(R-\varepsilon)^{n+1}} \leq \frac{a_n}{(R-\varepsilon)^n} \leq \cdots \leq \frac{a_{n_0}}{(R-\varepsilon)^{n_0}}$$

за $n \geq n_0$. Одатле следи да је $(\forall n > n_0)\, a_n \leq C(R-\varepsilon)^n$, где је $C = \frac{a_{n_0}}{(R-\varepsilon)^{n_0}}$, тј.

$$\sqrt[n]{a_n} \leq (R-\varepsilon)\sqrt[n]{C}.$$

Преласком на $\overline{\lim}$ (и коришћењем $\lim\sqrt[n]{C} = 1$) добијамо неједнакост (9) за $\overline{\lim}$. Неједнакост за $\underline{\lim}$ доказује се на исти начин. ♯

Пример 17. Из Примера 16 следи да, ако постоји $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$, онда постоји и $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ и важи

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n},$$

чиме смо дали други доказ тврђења из Примера 11 на стр. 171. ♯

1.5. Монотони низови. Низ a_n реалних бројева зовемо *монотоним* (*растућим* или *опадајућим*) ако је пресликавање $a : (\mathbf{N}, \leq) \to (\mathbf{R}, \leq)$, $n \mapsto a_n$ монотоно (*растуће* или *опадајуће*) у смислу дефиниције на стр. 36 (или на стр. 114). Доказ следеће теореме је аналоган доказу Леме 15 на стр. 121.

Теорема 4. *Сваки монотон и ограничен низ је конвергентан.*

△ Нека је a_n растући и ограничен низ. Тада је скуп $A = \{a_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ ограничен. Нека је $a_\infty = \sup A$. Тада $a_n \to a_\infty$ кад $n \to \infty$. Заиста, из дефиниције супремума следи да за свако $\varepsilon > 0$ постоји $n_0 \in \mathbf{N}$ такво да је $a_\infty - \varepsilon < a_{n_0} < a_\infty$. Из монотоности низа a_n следи да је $a - \varepsilon < a_n < a$ за свако $n \geq n_0$, што значи да је $a_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. ▽

Лема 6. *Ако је низ a_n растући и неограничен, онда $a_n \to +\infty$ кад $n \to \infty$. Ако је низ b_n опадајући и неограничен, онда $b_n \to -\infty$ кад $n \to \infty$.*

---

[3] Фекете (Mihály Fekete, 1886–1957), мађарско–израелски математичар

$\triangle$ Нека је $M > 0$. По претпоставци, низ a_n није ограничен одозго, па постоји $n_0 \in \mathbf{N}$ за које је $a_{n_0} > M$. Тада је, због монотоности, $a_n > M$ за свако $n > n_0$, што, по дефиницији бесконачног лимеса значи да је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. На сличан начин се доказује и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$. $\triangledown$

Пример 18. Нека је $q > 1$. Докажимо да је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{q^n} = 0.$$

Нека је $a_n = \frac{n}{q^n}$. Тада је

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{nq} a_n. \tag{10}$$

Пошто је $\frac{n+1}{qn} \to \frac{1}{q} < 1$, за довољно велико n важи $a_{n+1} < a_n$, тј. низ a_n је, почев од неког n, опадајући. Пошто је $a_n > 0$, низ x_n је ограничен одоздо, па $a_n \to a_\infty$ кад $n \to \infty$. Преласком на лимес у (10) добијамо $a_\infty = q^{-1} a_\infty$, одакле, због $q > 1$, следи $a_\infty = 0$. ♯

Задатак 13. Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{q^n}$ за $q \le 1$. ✓

Задатак 14. Нека је $q \in \mathbf{C}$, $|q| < 1$ и $k \in \mathbf{N}$. Доказати да је

$$\lim_{n\to\infty} n^k q^n = 0.$$

Упутство: нека је $a_n = |n^k q^n|$. Доказати да је $\frac{a_{n+1}}{a_n} = (1 + 1/n)^k |q|$. Закључити да је a_n опадајући низ који је ограничен одоздо, па зато конвергира. Преласком на лимес у $a_{n+1} = (1 + 1/n)^k |q| a_n$ закључити да $a_n \to 0$. ✓

Пример 19. Користећи Задатак 14 можемо да дамо још један доказ чињенице да је

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1. \tag{11}$$

Нека је $\varepsilon > 0$ и $q = 1/(1 + \varepsilon)$. Из Задатка 14 следи да је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(1+\varepsilon)^n} = 0,$$

па постоји $n_0 \in \mathbf{N}$, такво да је за $n \ge n_0$

$$\frac{n}{(1+\varepsilon)^n} < 1.$$

одатле следи $\sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon$. Пошто $\sqrt[n]{\cdot}$ растућа функција, важи $1 = \sqrt[n]{1} \le \sqrt[n]{n}$, па добијамо да је

$$1 < \sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon, \qquad \text{тј.} \quad |\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$$

за $n \ge n_0$. ♯

Задатак 15. Доказати (11) применом Лопиталовог правила. ✓

Пример 20. Нека је $a > 0$. Из Архимедове аксиоме следи да је $an_0 \ge 1$ за неко $n_0 \in \mathbf{N}$, па је за $n \ge n_0$

$$\frac{1}{n} \le \frac{1}{n_0} \le a \le n_0 \le n, \quad \text{тј.} \quad \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \le \sqrt[n]{a} \le \sqrt[n]{n}.$$

Пошто је $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, одатле следи да је $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ ♯

Пример 21. Докажимо да је за свако $z \in \mathbf{C}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z^n}{n!} = 0.$$

Пошто је $|\frac{z^n}{n!}| = \frac{|z|^n}{n!}$ и $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, довољно је доказати да је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{n!} = 0$$

за свако $q \geq 0$. Нека је $a_n = \frac{q^n}{n!}$. Тада је

$$a_{n+1} = \frac{q}{n+1} a_n, \tag{12}$$

па је $a_{n+1} < a_n$ почев од неког n. Пошто је a_n и ограничен одоздо ($a_n > 0$), он има граничну вредност a_∞. Преласком на лимес у (12) добијамо $a_\infty = 0$. ♯

Пример 22. Низ

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

је растући, јер је $s_{n+1} - s_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$. Докажимо да је он ограничен одозго. Из $k^2 > k(k-1)$ следи $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, па је

$$s_n < 1 + \Big(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\Big) + \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Big) + \cdots + \Big(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\Big) + \Big(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\Big) = 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

Одатле следи да је s_n конвергентан. ♯

Пример 23. У Примеру 15 на стр. 26 смо дефинисали број e као

$$e := \sup\Big\{\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n \;\Big|\; n \in \mathbf{N}\Big\}.$$

Том приликом смо доказали и да је низ $(1 + \frac{1}{n})^n$ ограничен. Докажимо да је он и монотоно растући. Развијањем по биномној формули и упрошћавањем биномних коефицијената као у (22) на стр. 26 добијамо

$$\begin{aligned}
\Big(1 + \tfrac{1}{n}\Big)^n &= \sum_{k=0}^{n} \Big(\tfrac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \Big(1 - \tfrac{j}{n}\Big)\Big) \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \Big(\tfrac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \Big(1 - \tfrac{j}{n+1}\Big)\Big) \\
&\leq \sum_{k=0}^{n+1} \Big(\tfrac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \Big(1 - \tfrac{j}{n+1}\Big)\Big) \\
&= \Big(1 + \tfrac{1}{n+1}\Big)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Тиме је доказано да је низ

$$x_n = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n$$

растући, одакле следи да је он конвергентан и да важи

$$e := \lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n.$$

♯

Задатак 16. Доказати да је низ

$$y_n = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{n+1}$$

опадајући и да је његов лимес e. ✓

Пример 24. Докажимо да је e ирационалан број. Из (22) и (23) на стр. 26 следи

$$e \le \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

за свако n. Са друге стране, из (22) следи да је за свако $m \ge n$

$$\Big(1 + \frac{1}{m}\Big)^m = \sum_{k=0}^{m} \Big(\frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \Big(1 - \frac{j}{m}\Big)\Big) \ge \sum_{k=0}^{n} \Big(\frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \Big(1 - \frac{j}{m}\Big)\Big). \tag{13}$$

Прелазећи на $\lim\limits_{m\to\infty}$, из (13) видимо да је

$$e \ge 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

Одатле и из (22) на стр. 26 следи

$$e = \lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}\Big). \tag{14}$$

Означимо низ на десној страни у (14) са x_n. Тада је

$$\begin{aligned} 0 < x_{n+k} - x_n &= \tfrac{1}{(n+1)!} + \cdots + \tfrac{1}{(n+k)!} \\ &= \tfrac{1}{(n+1)!}\Big(1 + \tfrac{1}{n+2} + \tfrac{1}{(n+2)\cdot(n+3)} + \cdots + \tfrac{1}{(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k)}\Big) \\ &< \tfrac{1}{(n+1)!}\Big(1 + \tfrac{1}{n+2} + \tfrac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \tfrac{1}{(n+2)^{k-1}}\Big) \\ &< \tfrac{1}{(n+1)!}\tfrac{n+2}{n+1} < \tfrac{1}{n!n} \end{aligned}$$

(у последњем кораку користили смо неједнакост $\frac{n+2}{(n+1)^2} < \frac{1}{n}$). Преласком на $\lim\limits_{k\to\infty}$ добијамо

$$0 < e - x_n < \frac{1}{n!n},$$

тј.

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta}{n!n} \tag{15}$$

за неко $\theta \in (0,1)$. Када би било $e = \frac{m}{n}$ за неке целе бројеве m и n, из (15) би, после множења са $n!n$, следило $m = k + \theta$ за неко $k \in \mathbf{N}$, што је немогуће због $\theta \in (0,1)$. ♯

Пример 25. Нека је $\lambda \in \mathbf{R}$. Из Примера 23 и непрекидности функције $y \mapsto y^\lambda$ следи да је $\lim\limits_{m\to\infty}(1 + \frac{1}{m})^{m\lambda} = e^\lambda$. Сменом $n = m\lambda$ добијамо

$$\lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{\lambda}{n}\Big)^n = e^\lambda. \tag{16}$$

На исти начин као у Примеру 24 доказује се да је низ $(1 + \frac{\lambda}{n})^n$ растући за свако $\lambda \in \mathbf{R}$, па се лимес у (16) може заменити супремумом. ♯

Задатак 17. Доказати да је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}.$$

Упутство: искористити Пример 17 на стр. 176. ✓

1.6. Кошијеви низови. Појам Кошијевог низа, на који се односи следећа дефиниција, увео је Болцано, за реалне низове.

Дефиниција 4. Низ z_n комплексних бројева је *Кошијев* ако

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})\, m, n > n_0 \;\Rightarrow\; |z_m - z_n| < \varepsilon.$$

Теорема 5. **(Кошијев критеријум конвергенције низова)** *Низ $z_n \in \mathbf{C}$ конвергира ако и само ако је Кошијев.*

$\triangle$ Претпоставимо да низ z_n конвергира ка z_∞. Нека је $\varepsilon > 0$. Тада постоји $n_0 \in \mathbf{N}$ такво да важи $n > n_0 \Rightarrow |z_n - z_\infty| < 2^{-1}\varepsilon$. Тада за $m, n > n_0$ важи

$$|z_m - z_n| = |z_m - z_\infty + z_\infty - z_n| \le |z_m - z_\infty| + |z_\infty - z_n| < 2^{-1}\varepsilon + 2^{-1}\varepsilon = \varepsilon,$$

што значи да је низ z_n Кошијев.

Претпоставимо сада да је низ z_n Кошијев. Нека је $\varepsilon > 0$. Тада је, за неко $n_0 \in \mathbf{N}$ $|z_n - z_{n_0}| < \varepsilon$, тј.

$$|z_{n_0}| - \varepsilon < |z_n| < |z_{n_0}| + \varepsilon \tag{17}$$

за свако $n \ge n_0$. Пошто чланова низа са индексом мањим од n_0 има коначно много, из (17) следи да је низ z_n ограничен, па из Теореме 3 следи да низ z_n има конвергентан подниз $z_{k(n)}$. Означимо лимес овог подниза са z_∞. Нека је $\varepsilon > 0$. Тада за неко $n_1 \in \mathbf{N}$ важи $n > n_1 \Rightarrow |z_{k(n)} - z_\infty| < 2^{-1}\varepsilon$. Пошто је низ Кошијев, за неко $n_2 \in \mathbf{N}$ важи $n > n_2 \Rightarrow |z_n - z_{k(n)}| < 2^{-1}\varepsilon$. Нека је $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Тада за $n > n_0$ важи

$$|z_n - z_\infty| = |z_n - z_{k(n)} + z_{k(n)} - z_\infty| \le |z_n - z_{k(n)}| + |z_{k(n)} - z_\infty| < 2^{-1}\varepsilon + 2^{-1}\varepsilon = \varepsilon,$$

тј. z_n конвергира ка z_∞. $\triangledown$

Помоћу карактеризације лимеса преко низова (Теорема 2 на стр. 171) добијамо следећу последицу Теореме 5.

Последица 5. **(Кошијев критеријум егзистенције лимеса)** *Нека је $X \subset \mathbf{C}$ и η тачка нагомилавања скупа X. Тада постоји $\lim\limits_{z\to\eta} f(z)$ ако и само ако*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z, w \in X)\; 0 < |z-\eta| < \delta \wedge 0 < |w-\eta| < \delta \;\Rightarrow\; |f(z)-f(w)| < \varepsilon. \tag{18}$$

$\triangle$ Нека важи (18) и нека је z_n низ у X који конвергира ка η. Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно и δ такво да важи (18). Пошто $z_n \to \eta$, за довољно велико n_0 важи

$$n \ge n_0 \;\Rightarrow\; |z_n - \eta| < \delta,$$

па Из (18) следи да је низ $f(z_n)$ Кошијев. Из Теореме 5 следи да он конвергира ка неком $A \in \mathbf{C}$. Нека је w_n други низ који конвергира ка η. Тада низ $f(w_n)$ конвергира ка неком $B \in \mathbf{C}$. Из (18) лако следи да је тада $A = B$. Заиста, за произвољно ε_1 постоји δ такво да важи (18). Пошто су за довољно велико n и z_n и w_n у δ–околини тачке η, из (18) следи да је $|f(z_n) - f(w_n)| < \varepsilon_1$ за све

осим коначно много n. Преласком на лимес добијамо $|A-B| \leq \varepsilon_1$, а одатле, пошто је ε_1 произвољно, $A = B$.

Према Теореми 2 на стр. 171 то значи да је $\lim\limits_{z\to\eta} f(z) = A$.

Обрнуто, нека је $\lim\limits_{z\to\eta} f(z) = A$ и $\varepsilon > 0$. По дефиницији лимеса

$$(\exists \delta > 0)\ |z-\eta| < \delta \ \Rightarrow\ |f(z) - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тада, ако су z и w тачке скупа X за које важи $|z-\eta| < \delta$ и $|w-\eta| < \delta$, онда је

$$|f(z) - f(w)| = |f(z) - A + A - f(w)| \leq |f(z) - A| + |A - f(w)| < \varepsilon,$$

чиме је (18) доказано. ▽

Последица 5 се некад формулише помоћу појма *осцилације функције*.

Дефиниција 5. Нека је $X \subset \mathbf{C}$ и $f : X \to \mathbf{R}$ ограничена функција и $A \subset X$. Број

$$\omega(f, A) := \sup_{x_1, x_2 \in A} |f(x_1) - f(x_2)|$$

назива се *осцилацијом функције* f на скупу A. Нека је x_0 тачка нагомилавања скупа X. Број

$$\omega(f, x_0) := \lim_{\delta \to 0} \omega(f, X \cap B(x_0, \delta)),$$

где је $B(x_0, \delta)$ лопта са центром x_0 и полупречником δ, назива се *осцилацијом функције f у тачки x_0*.

Ако је $f : X \to \mathbf{R}$ реална функција и

$$\begin{array}{c} M(f, x_0, \delta) = \sup\{f(x) \mid x \in X,\ |x - x_0| < \delta\}, \\ m(f, x_0, \delta) = \inf\{f(x) \mid x \in X,\ |x - x_0| < \delta\}. \end{array} \quad ,$$

онда се осцилација у тачки x_0 може написати и у виду

$$\omega(f, x_0) = \lim_{\delta \to 0} \big(M(f, x_0, \delta) - m(f, x_0, \delta)\big).$$

Последицу 5 сада можемо да формулишемо на следећи начин.

Последица 6. *Функција $f : X \to \mathbf{C}$ је непрекидна у тачки x_0 ако и само ако је $\omega(f, x_0) = 0$.*

Задатак 18. Нека је $a \in \mathbf{R}$ и $f : [0, a) \to \mathbf{R}$ непрекидна функција. Доказати да је f равномерно непрекидна ако и само ако постоји

$$\lim_{x \to a-0} f(x).$$

Доказати да један смер ове еквиваленције не важи за бесконачне интервале: дати пример равномерно непрекидне функције $g : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ која нема лимес у $+\infty$. Да ли важи други смер за бесконачне интервале? ✓

Пример 26. Низ $a_n = (-1)^n$ из Примера 3 на стр. 167 није Кошијев, јер је $|a_{n+1} - a_n| = 2$ за свако $n \in \mathbf{N}$. То је још један начин да се види да овај низ дивергира. ♯

Пример 27. Низ

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

дивергира јер је

$$|s_{2n} - s_n| = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

па низ s_n није Кошијев. Приметимо да је

$$\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$$

јер је низ s_n растући и дивергентан. ♯

Задатак 19. Користећи Пример 23 на стр. 178 и Задатак 16 иза њега доказати неједнакости

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Помоћу њих доказати да је низ

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$$

опадајући и позитиван, па због тога и конвергентан. Гранична вредност овог низа позната је као *Ојлерова константа*, и означава се са c или γ. Њених првих неколико цифара је

$$\gamma = 0,57721566490153286060651 20...$$

Није познато да ли је Ојлерова констана рационалан или ирационалан број. ✓

Пример 28. Нека је $I = [a, b]$ или $I = (-\infty, +\infty)$. Функција

$$F : I \to I$$

назива се *контракцијом* ако постоји константа q, $0 < q < 1$, таква да је

$$|F(\alpha) - F(\beta)| < q|\alpha - \beta|$$

за све $\alpha, \beta \in I$. Таква функција назива се *контракцијом*. Свака контракција има јединствену *фиксну* или *непокретну тачку*, тј. тачку $c \in I$ такву да је $F(c) = c$.

Заиста, нека је $x_0 \in I$ произвољна тачка и нека је

$$x_{n+1} = F(x_n), \quad \text{за} \quad n \geq 1.$$

Тада је

$$|x_{n+1} - x_n| \leq q|x_n - x_{n-1}| \leq \ldots \leq q^n|x_1 - x_0|.$$

Одатле следи

$$|x_n - x_{n+m}| \leq |x_n - x_{n+1}| + \cdots + |x_{n+m-1} - x_{n+m}| \leq |x_1 - x_0| \sum_{k=n}^{n+m-1} q^k.$$

Користећи формулу за збир геометријског низа, одавде добијамо

$$|x_n - x_{n+m}| \leq \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|$$

Пошто је $0 < q < 1$, $q^n \to 0$, па из последње неједнакости следи да је низ x_n Кошијев, дакле конвергентан. Ако његову граничну вредност означимо са

c, из рекурентне формуле следи, преласком на лимес (приметимо да је свака контракција равномерно непрекидна),

$$c = F(c).$$

Тачка c је јединствена, јер из $F(c_1) = c_1$ и чињенице да је F контракција следи

$$|c - c_1| = |F(c) - F(c_1)| \leq q|c - c_1|,$$

што је, због $0 < q < 1$, могуће само ако је $c = c_1$. ♯

2. Њутнов метод решавања једначина

Нека је

$$f : [a, b] \to \mathbf{R}$$

конвексна функција са позитивним првим изводом, таква да је $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. По Теореми о међувредности за непрекидне функције, постоји $c \in (a, b)$ такво да је $f(c) = 0$. Из претпоставке о позитивности првог извода следи да f строго расте, па је такво c јединствено.

Њутнов метод, или *метод тангенте*, налажења тачке c, односно решавања једначине $f(x) = 0$, састоји се у следећем. Изаберимо произвољну тачку $x_0 \in (a, b)$. Ради одређености, претпоставимо $x_0 > 0$. Једначина тангенте на график функције $y = f(x)$ у тачки $(x_0, f(x_0))$ је

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Ова права сече x–осу у тачки

$$x_1 = x_0 - (f'(x_0))^{-1} f(x_0).$$

Поновимо овај поступак са тачком x_1 у улози x_0, а затим са добијеном пресечном тачком x_2 тангенте у тачки $(x_1, f(x_1))$ са x–осом итд. Другим речима, конструишимо рекурентни низ

$$x_{n+1} = x_n - (f'(x_n))^{-1} f(x_n).$$

Пошто график конвексне функције лежи изнад тангенте у произвољној тачки, следи да је $f(x_n) > 0$, па из претпоставке о позитивности првог извода следи да је низ x_n опадајући. Овај низ је ограничен одоздо тачком c (и то закључујемо из чињенице да је график конвексне функције изнад тангенте). Одатле следи да је x_n конвергентан. Ако његов лимес означимо са x_∞, из рекурентне формуле следи

$$x_\infty = x_\infty - (f'(x_\infty))^{-1} f(x_\infty),$$

односно $f(x_\infty) = 0$. Из јединствености решења једначине $f(x) = 0$ следи да је $x_\infty = c$.

Претпоставимо да функција f има непрекидан и позитиван први извод. Ако уместо посматраног низа x_n посматрамо низ

$$a_{n+1} = a_n - (f'(a_0))^{-1} f(a_n),$$

где је $a_0 \in I$ произвољна тачка, говоримо о *модификованом Њутновом методу*, који се од Њутновог разликује по томе што се у конструкцији низа a_n вредност првог извода израчунава само у једном, у тачки a_0 (што за функције са сложеним изразом за први извод некад знатно олакшава конструкцију).

Чињеница да низ a_n конвергира ка решењу једначине $f(x) = x$ следи из Примера 28. Заиста, нека је

$$F(x) = x - (f'(a_0))^{-1} f(x).$$

Из Лагранжеве теореме о средњој вредности следи да је

$$|F(\alpha) - F(\beta)| = |(f'(a_0))^{-1} f'(\xi) - 1| \cdot |\alpha - \beta|$$

за неко $\xi \in (\alpha, \beta)$. Из непрекидности првог извода следи да је за неки интервал $J \subset I$ који садржи тачку a_0

$$\xi \in J \;\Rightarrow\; |(f'(a_0))^{-1} f'(\xi) - 1| \leq q < 1,$$

па је $F : J \to J$ контракција. Из Примера 28 следи да F има јединствену фиксну тачку c. Пошто је, по претпоставци, $f'(a_0) > 0$, из $F(c) = c$ следи $f(c) = 0$.

Пример 29. Низ

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}, \qquad x_0 = p$$

конвергира за свако $p > 0$. Заиста, применом Њутновог метода на функцију

$$f(x) = x^2 - 2$$

закључујемо $x_n \to \sqrt{2}$ кад $n \to \infty$, без обзира на избор почетног члана $p > 0$. ♯

Напомена 3. (Рекурентно задати низови) Више пута смо се сусрели са низовима a_n који задовољавају једначину

$$a_{n+1} = g(a_n) \tag{19}$$

где је g нека функција реалне променљиве, или, општије,

$$a_{n+1} = h(n, a_n, a_{n-1} \ldots, a_{n-k}), \tag{20}$$

где је h функција више реалних променљивих. За такве низове кажемо да су *рекурентно задати*. Јасно је да је низ задат једначином (19) потпуно одређен ако је задат први члан a_1 (тзв. *почетни услов*), а низ (20) ако су задати почетни услови $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$.

Врло ретко из израза којим је низ рекурентно задат можемо да нађемо експлицитан израз за тај низ, као што је био случај са линеарним диференцним једначинама (видети Задатак 33 на стр. 27 и пар задатака иза њега, у којима је било речи о низовима типа (20), где је функција h била линеарна функција две променљиве). Много чешће, закључке о конвергенцији морамо да доносимо посредно, на основу особина функција које фигуришу у њиховом рекурентном задавању, као што је то било у случају низова типа (19) које смо разматрали у вези са Њутновим методом решавања једначина.

Претпоставимо да је низ a_n задат рекурентном формулом (19), где је g непрекидна функција. Ако низ конвергира, онда је његова гранична вредност a_∞ решење једначине $g(x) = x$, јер из (19) следи

$$a_\infty = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} g(a_n) = g(a_\infty),$$

због непрекидности функције g. Дакле, ако је функција g непрекидна, налажење лимеса низа (19) своди се на решавање једначине $g(x) = x$, *под условом да низ* a_n *конвергира*. Утврдити да ли a_n конвергира је често најсадржајнији део

проблема и, као што смо видели код Њутновог метода, често следи из неких додатних својстава функције g.

Претпоставимо, на пример, да је $g(x) \leq x$. Тада из (19) следи да је $a_{n+1} \leq a_n$, па је низ a_n опадајући. Слично, ако је $g(x) \geq x$, низ a_n је растући. То значи да, ако је $g(x) - x$ константног знака, низ a_n је монотон, па конвергира ако и само ако је ограничен и преостаје још да се испита питање његове ограничености.

Општије, чак и ако $g(x) - x$ није константног знака, али ако можемо да закључимо да a_n остаје на интервалу на коме је $g(x) - x$ константног знака, видимо да је низ a_n монотон.

Тако смо конвергенцију низа из Примера 29 могли да испитамо, без позивања на Њутнов метод, на следећи начин. Лако је скицирати график функције

$$g : (0, +\infty) \to (0, +\infty), \qquad g(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$$

и видети да он сече праву $y = x$ само у тачки $x = \sqrt{2}$. У складу са претходно реченим, то значи да је $\sqrt{2}$ једини могући лимес низа x_n (у случају да он уопште конвергира). Сем тога, из тока функције g се види да је $g(x) > x$ за $0 < x < \sqrt{2}$ и $g(x) < x$ за $x > \sqrt{2}$. Важно је приметити и да је g опадајућа на $(0, \sqrt{2}]$, а растућа на $[\sqrt{2}, +\infty)$.

Одатле лако следи да, ако први члан низа припада интервалу $(\sqrt{2}, +\infty)$, онда и цео низ припада том интервалу – пошто g на том интервалу расте, важи импликација

$$x_n > \sqrt{2} \;\Rightarrow\; x_{n+1} = g(x_n) > g(\sqrt{2}) = \sqrt{2},$$

тј. низ x_n је ограничен одоздо са $\sqrt{2}$. Пошто је $g(x) > x$ на $(\sqrt{2}, +\infty)$, следи да је низ x_n опадајући. Одатле закључујемо да x_n конвергира и то, као што смо видели, ка $\sqrt{2}$.

Ако је $x_1 \in (0, \sqrt{2})$, из чињенице да g на том интервалу опада следи да је низ

$$x_2 = g(x_1) > g(\sqrt{2}) = \sqrt{2},$$

па чланови низа x_n за $n \geq 2$ припадају интервалу $(\sqrt{2}, +\infty)$. Одатле, као и у случају $x_1 \in (\sqrt{2}, +\infty)$, следи да низ x_n конвергира ка $\sqrt{2}$.

Случај $x_1 = \sqrt{2}$ је тривијалан, јер се тада ради о константном низу. ◇

Задатак 20. Испитати конвергенцију низа

$$a_{n+1} = 2a_n + 1$$

у зависности од почетног услова a_1. Упутство: доказати, користећи дискусију из Напомене 3 да a_n конвергира ако и само ако је $a_1 = -1$. ✓

Задатак 21. Испитати конвергенцију низа

$$a_{n+1} = \frac{1 - a_n}{2}$$

у зависности од почетног услова a_1. Упутство: функција $g(x) = (1 - x)/2$ је опадајућа $g(x) = x$ ако и само ако је $x = 1/3$. Ако је први члан $a_1 < 1/3$, онда је, због тога што g опада, $a_2 > 1/3$. Из истог разлога је $a_3 < 1/3$, $a_4 > 1/3$ итд, па низ a_n не остаје на интервалу на коме је $g(x) - x$ константног знака (исти закључак важи и ако је први члан $a_1 > 1/3$). Међутим, постоји и следећа правилност: сваки други члан низа a_n остаје на интервалу на коме g не мења

знак. Доказати да одатле следи да поднизови a_{2n} и a_{2n+1} конвергирају (они задовољавају рекурентне једначине

$$a_{2n+2} = g(g(a_{2n})), \qquad a_{2n+1} = g(g(a_{2n-1}))$$

и $g \circ g$ је растућа функција, јер је композиција две опадајуће). Да ли конвергира и низ a_n? ✓

Задатак 22. Испитати конвергенцију низова

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}, \;\; x_1 = 1 \qquad \text{и} \qquad y_{n+1} = \sqrt{1 + y_n}, \;\; y_1 = 1.$$

Упоредити овај задатак са Задатком 51 на стр. 33. ✓

Задатак 23. На стр. 34 увели смо Фибоначијев низ – низ F_n задат са

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Користећи Задатак 33 на стр. 27 (или резултат Задатка 52 на стр. 34) одредити F_n у функцији од n. Доказати да је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \phi,$$

где је ϕ *златни пресек*[4]. Општије, доказати да је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+p}}{F_n} = \phi^p.$$

Специјално,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = -\psi,$$

где је $\psi = -\phi^{-1}$ (видети Задатак 51 на стр. 33). ✓

Задатак 24. Испитати конвергенцију низа

$$a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$$

у зависности од почетног услова a_1. ✓

Задатак 25. Испитати конвергенцију низа

$$a_{n+1} = q a_n$$

у зависности од почетног услова a_1 и параметра q. ✓

Задатак 26. Испитати конвергенцију низа

$$a_{n+1} = q a_n + r \tag{21}$$

у зависности од почетног услова a_1 и параметара q и r. Упутство: Ако је y_n произвољан низ који задовољава једначину (21), онда је свако друго решење те једначине облика $a_n = x_n + y_n$, где је x_n низ који задовољава једначину из Задатка 25. Доказати да једначина (21) има константно решење $y_n \equiv C$

[4]На стр. 33 смо видели да је златни пресек однос између две величине које имају својство да је однос веће од њих према мањој једнак односу њиховог збира према већој; другим речима, златни пресек је решење једначине $(a + A)/A = A/a$ по A/a.

(израчунати C!) и уз помоћ Задатка 25 показати да је опште решење једначине (21)

$$a_n = \frac{r}{1-q} + Bq^n.$$

(Приметимо сличност овог задатка са Задатком 34 на стр. 28 – ради се о методу налажења општег решења нехомогених једначина помоћу општег решења хомогених и погађања једног партикуларног решења нехомогене). ✓

3. Бесконачни редови и бесконачни производи

У Примерима 22 и 27 смо се сусрели са низовима чији су чланови суме. При томе се број сабирака бесконачно увећава кад $n \to \infty$. Такви низови називају се *бесконачним редовима*, или само *редовима*. У овом параграфу започећемо њихово детаљније изучавање.

Нека је z_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ низ комплексних бројева. Индуктивно дефинишимо низове s_n и p_n на следећи начин.

$$s_0 = z_0, \qquad s_{n+1} = s_n + z_{n+1}, \tag{22}$$

$$p_0 = z_0, \qquad p_{n+1} = p_n \cdot z_{n+1}, \tag{23}$$

тј. $s_n = \sum_{k=0}^{n} z_k$, $p_n = \prod_{k=0}^{n} z_k$. У овој глави изучаваћемо питања везана за конвергенцију оваквих низова.

3.1. Конвергенција реда и производа. Низове који задовољавају (22) или (23) издвајамо следећом дефиницијом.

Дефиниција 6. *Бесконачни ред* (или само *ред*) комплексних бројева са *општим чланом* z_n и *парцијалним сумама* s_n је уређени пар (z_n, s_n) комплексних низова за које важи (22).

Бесконачни производ комплексних бројева са *општим чланом* z_n и *парцијалним производима* p_n је уређени пар (z_n, p_n) комплексних низова за које важи $z_n \neq 0$ и (23).

Условом $z_n \neq 0$ у дефиницији производа искључили смо тривијални производ. Уместо „ред (z_n, s_n)" и „производ (z_n, p_n)" говоримо и о „реду $\sum z_n$" и „производу $\prod z_n$".

Дефиниција 7. Бесконачни ред (z_n, s_n) *конвергира* ако конвергира низ s_n. Граничну вредност $\lim_{n\to\infty} s_n$ називамо *сумом реда* и означавамо са $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$.

Бесконачни производ (z_n, p_n) *конвергира* ако конвергира низ p_n и ако је $\lim_{n\to\infty} p_n \neq 0$. Граничну вредност $\lim_{n\to\infty} p_n$ означавамо са $\prod_{n=0}^{\infty} z_n$.

Ако ред (или производ) не конвергира, кажемо да он *дивергира*.

Приметимо да, по претходној дефиницији, производ *дивергира* не само ако $\lim_{n\to\infty} p_n$ не постоји или је бесконачан, већ и ако је $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$. Овај, на први поглед неприродан, услов уводимо да бисмо производе могли да третирамо као „мултипликативно записане" редове, што поједностављује формулације и доказе неких од теорема које следе.

3.2. Општи члан и остатак реда и производа. Ако одбацимо првих неколико чланова конвергентног реда $\sum z_n$ добијамо низ

$$r_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} z_k.$$

Овај низ назива се *остатком реда* $\sum z_n$. Слично, *остатком производа* $\prod z_n$ називамо низ

$$\rho_n := \prod_{k=n+1}^{\infty} z_k.$$

Лема 7. *Ако је r_n остатак конвергентног реда $\sum z_n$, онда је $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$. Ако је ρ_n остатак конвергентног производа $\prod z_n$, онда је $\lim_{n\to\infty} \rho_n = 1$.*

$\triangle$ Нека је $s_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} z_n$. Тада је

$$s_\infty = s_n + r_n,$$

одакле, преласком на лимес добијамо $s_\infty = s_\infty + \lim_{n\to\infty} r_n$, тј. $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$. Доказ другог тврђења је само мултипликативни запис доказа првог: нека је $p_\infty = \prod_{n=0}^{\infty} z_n$. Тада је

$$p_\infty = p_n \cdot \rho_n,$$

па преласком на лимес добијамо $p_\infty = p_\infty \cdot \lim_{n\to\infty} \rho_n$, тј. $\lim_{n\to\infty} \rho_n = 1$, јер је, по дефиницији конвергенције производа $p_\infty \neq 0$. $\triangledown$

Лема 8. *Ако ред $\sum z_n$ конвергира, онда је $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$. Ако производ $\prod z_n$ конвергира, онда је $\lim_{n\to\infty} z_n = 1$.*

$\triangle$ Нека су s_n парцијалне суме конвергентног реда $\sum z_n$. Нека је $\varepsilon > 0$. Из Кошијевог критеријума конвергенције низова (стр. 180) следи да постоји такав број $n_0 \in \mathbf{N}$ да важи $m, n > n_0 \Rightarrow |s_m - s_n| < \varepsilon$. Специјално, $n > n_0 \Rightarrow |z_{n+1}| = |s_{n+1} - s_n| < \varepsilon$, што значи да је $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$. Доказ другог тврђења је мултипликативни запис доказа првог. $\triangledown$

Последица 7. *Ако је $x_n \in \mathbf{R}$ низ реалних бројева и $\prod x_n$ конвергентан производ, онда је $x_n > 0$ за све n осим, можда, њих коначно много.*

Напомена 4. Тврђење обрнуто тврђењу Леме 8 није тачно у општем случају: ред $\sum \frac{1}{n}$ дивергира (Пример 27 на стр. 182), иако је $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

3.3. Примери. У Глави 2 смо се већ сусрели са неким примерима редова (Примери 22 и 27, ред (14) на стр. 179). Даћемо још неколико примера.

Пример 30. Из Леме 8 и Примера 5 на стр. 168 лако следи да ред $\sum \sin n\theta$ конвергира ако и само ако $\theta = k\pi$ за неко $k \in \mathbf{Z}$. Ред $\sum \cos n\theta$ дивергира за свако $\theta \in \mathbf{R}$. $\sharp$

Пример 31. (Геометријски ред) Ред $\sum z^n$ конвергира ако и само ако је $|z| < 1$ и тада важи

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Заиста, из $(1-z)\sum_{k=0}^{n} z^k = \sum_{k=0}^{n}(z^k - z^{k+1}) = 1 - z^{n+1}$ следи

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} z^k = \lim_{n\to\infty}\frac{1-z^n}{1-z}$$

за $z \neq 1$. Лимес на десној страни је једнак $\frac{1}{1-z}$ ако је $|z| < 1$ и не постоји ако је $|z| \geq 1$, $z \neq 1$ (Пример 7 на стр. 168). За $z = 1$ је

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} z^k = \sum_{k=1}^{n} 1^k = n \to \infty$$

кад $n \to \infty$. ♯

Пример 32. Ред $\sum \ln(1+\frac{1}{n})$ дивергира, јер
$s_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1) - \ln k) = \ln(n+1) \to \infty$ кад $n \to \infty$. ♯

На сличан начин се решава и следећи задатак.

Задатак 27. Доказати да ред $\sum\left(\frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha}\right)$ за конвергира ако и само ако је $\alpha \geq 0$. ✓

Пример 33. Пример 32 и Задатак 27 лако се уопштавају на следећи начин. Нека је z_n произвољан низ комплексних бројева. Тада ред $\sum(z_n - z_{n+1})$ конвергира ако и само ако конвергира низ z_n. При томе важи

$$\sum_{k=j}^{\infty}(z_k - z_{k+1}) = z_j - \lim_{n\to\infty} z_n.$$

Доказ следи из

$$\sum_{k=j}^{n}(z_k - z_{k+1}) = z_j - z_{n+1},$$

преласком на $\lim_{n\to\infty}$. ♯

Пример 34. Ред $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$ конвергира, јер је

$$\begin{aligned} s_n &= \textstyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-1} = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-1)(k+1)} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right) = \\ &= \textstyle\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left[\left(\frac{1}{k-1} + \frac{1}{k}\right) - \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right), \end{aligned}$$

па $s_n \to \frac{3}{4}$ кад $n \to \infty$. ♯

Задатак 28. Испитати конвергенцију редова
(а) $\sum\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ (б) $\sum\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ (в) $\sum\frac{2^n+(-1)^n}{3^n}$ (г) $\sum\frac{2^n}{n}$
и, у случајевима када су конвергентни, одредити им суме. ✓

Пример 35. Бесконачни производ $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ конвергира. Заиста, важи

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\frac{k^2-1}{k^2} = \prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n} \to \frac{1}{2},$$

кад $n \to \infty$. ♯

Пример 36. Бесконачни производ $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+z^{2^n}\right)$ конвергира ако и само ако је $|z|<1$ и тада важи

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+z^{2^n}\right)=\frac{1}{1-z}.$$

Заиста, нека је $p_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+z^{2^k}\right)$. Множењем са $1-z$ добијамо

$$(1-z)p_n=(1-z)(1+z)(1+z^2)\cdot\ldots\cdot(1+z^{2^n})=1-z^{2^{n+1}},$$

одакле, на основу Примера 7 на стр. 168 следи резултат тврђења. ♯

Задатак 29. Доказати да је $\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\theta}{2^n}=\frac{\sin\theta}{\theta}$ за $0<\theta<\pi/2$ и извести одатле формулу (82) на стр. 76. ✓

Задатак 30. Низ a_n је дефинисан са

$$a_1=1,\qquad a_{n+1}=(n+1)(1+a_n).$$

Доказати да производ

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)$$

конвергира и израчунати његову вредност.

Упутство: искористити чињеницу да је

$$1+\frac{1}{a_n}=\frac{1+a_n}{n(1+a_{n-1})}$$

и $1+a_n=2n!$. ✓

Пример 37. Ред $\sum\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ конвергира. Нека је

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Тада је $s_{2n}-s_{2(n-1)}=\frac{(-1)^{2n-2}}{2n-1}+\frac{(-1)^{2n-1}}{2n}>0$ и $s_{2n+1}-s_{2(n-1)+1}=\frac{(-1)^{2n-1}}{2n}+\frac{(-1)^{2n}}{2n+1}<0$, па је подниз s_{2n} растући, а подниз s_{2n+1} опадајући. При томе важи $s_1>s_{2n+1}=s_{2n}+\frac{1}{2n+1}>s_{2n}>s_2$, па су оба подниза ограничена. Одатле следи да су s_{2n} и s_{2n+1} конвергентни. Из $s_{2n+1}=s_{2n}+\frac{1}{2n+1}$ следи да је $\lim_{n\to\infty}s_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}s_{2n}$, па низ s_n конвергира. ♯

Приметимо да је једино својство низа $b_n=\frac{1}{n}$ које смо користили у Примеру 37 својство да је он опадајући и да тежи нули. Другим речима, на потпуно исти начин доказује се следеће тврђење.

Тврђење 1. (Лајбницово правило) *Нека је b_n опадајући низ реалних бројева и нека је $\lim_{n\to\infty}b_n=0$. Тада ред $\sum(-1)^{n-1}b_n$ конвергира.*

3.4. Апсолутна конвергенција. У Примеру 27 на стр. 182 смо видели да ред $\sum \frac{1}{n}$ дивергира, а у Примеру 37 да ред $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ конвергира. Кажемо да такав ред *неапсолутно конвергира*. Прецизирајмо то следећом дефиницијом.

Дефиниција 8. Нека је z_n низ комплексних бројева. Кажемо да ред $\sum z_n$ *апсолутно конвергира* ако конвергира ред $\sum |z_n|$. Ако ред $\sum |z_n|$ дивергира, а $\sum z_n$ конвергира, кажемо да он *неапсолутно конвергира*.

Тврђење 2. *Сваки апсолутно конвергентан ред је конвергентан; тј. ако ред $\sum |z_n|$ конвергира, онда конвергира и ред $\sum z_n$.*

△ Нека је

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} |z_k|, \qquad s_n = \sum_{k=1}^{n} z_k.$$

Пошто је ред $\sum |z_n|$ конвергентан, низ σ_n је Кошијев. Из

$$|s_n - s_m| = \Big| \sum_{k=m+1}^{n} z_k \Big| \le \sum_{k=m+1}^{n} |z_k| = |\sigma_n - \sigma_m| \quad \text{за } n > m$$

следи да је и низ s_n Кошијев, дакле конвергентан. ▽

Пример 37 и Пример 27 на стр. 182 показују да тврђење обрнуто Тврђењу 2 није тачно.

3.5. Сабирање редова. Почнимо са следећом једноставном последицом Теореме 13 са 122. стране.

Лема 9. *Нека су $\sum z_n$ и $\sum w_n$ конвергентни комплексни редови и $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$. Тада ред $\sum(\lambda z_n + \mu w_n)$ конвергира и важи*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda z_n + \mu w_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} z_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} w_n.$$

Специјално, ред $\sum z_n$ конвергира ако и само ако конвергирају редови $\sum \operatorname{Re} z_n$ и $\sum \operatorname{Im} z_n$ и важи $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n + i \sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n$.

△ По дефиницији бесконачне суме важи

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda z_n + \mu w_n) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (\lambda z_k + \mu w_k) \\
&= \lim_{n\to\infty} \Big(\lambda \sum_{k=1}^{n} z_k + \mu \sum_{k=1}^{n} w_k \Big) \\
&= \lambda \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} z_k + \mu \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} w_k \\
&= \lambda \sum_{n=1}^{\infty} z_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} w_n,
\end{aligned}$$

што је и требало доказати. ▽

Последица 8. *Нека су $z_{1n}, z_{2n}, \dots, z_{kn}$ комплексни низови, такви да редови $\sum z_{mn}$ конвергирају за свако $m \in \{1, 2, \dots, k\}$ и нека су $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ комплексни бројеви. Тада ред $\sum_{n=1}^{\infty} \big(\sum_{m=1}^{k} \lambda_m z_{mn} \big)$ конвергира и важи*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{m=1}^{k} \lambda_m z_{mn} \Big) = \sum_{m=1}^{k} \lambda_m \Big(\sum_{n=1}^{\infty} z_{mn} \Big).$$

3.6. Уопштени асоцијативни закон. Следеће тврђење и напомена после њега показују под којим условима асоцијативност сабирања можемо да уопштимо на бесконачне суме.

Тврђење 3. *Нека је $\sum z_n$ конвергентан ред, $n \to k(n)$ растуће пресликавање, такво да је $k(1) = 1$, и $w_n = \sum_{m=k(n)}^{k(n+1)-1} z_n$. Тада $\sum w_n$ конвергира и важи*

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} w_n, \quad mj. \quad \sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=k(n)}^{k(n+1)-1} z_n.$$

$\triangle$ Конвергенција низа парцијалних сума реда $\sum w_n$ се своди на конвергенцију поднизова низа парцијалних сума реда $\sum z_n$, а сваки подниз конвергентног низа је конвергентан. $\triangledown$

Напомена 5. Обрнуто није тачно: из Примера 31 следи да ред $\sum (-1)^n$ дивергира, али $\sum \big((-1)^n - (-1)^{n+1} \big) = \sum 0 = 0$ конвергира.

Пример 38. Уз неке додатне услове, у Тврђењу 8 важи и обрнута импликација. На пример, нека је a_n низ позитивних реалних бројева и $n \to k(n)$ строго растуће пресликавање, такво да је $k(1) = 1$. Ако је

$$b_n = \sum_{k=k(n)}^{k(n+1)-1} a_k,$$

онда редови

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{k(n)-1} a_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$$

истовремено конвергирају или дивергирају. Заиста, ако је први ред конвергентан, конвергенција другог следи из Тврђења 8. Претпоставимо да конвергира ред $\sum (-1)^{n-1} b_n$ и нека је

$$s_n = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{k(m)-1} a_m, \qquad \sigma_n = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} b_m.$$

За свако $k \in \mathbf{N}$ постоји $n \in \mathbf{N}$ такво да је $k(n) < k \le k(n+1)$, одакле следи

$$\sigma_{k(n+1)} = s_k \pm (a_{k+1} + a_{k+1} + \dots + a_{k(n+1)}).$$

Одатле следи

$$|\sigma_{k(n+1)} - s_k| = a_{k+1} + a_{k+1} + \dots + a_{k(n+1)} \le b_{n+1} \to 0$$

кад $k \to \infty$ (што је еквивалентно са $n \to \infty$), јер $(-1)^n b_{n+1}$, као општи члан конвергентног реда, тежи нули. $\sharp$

4. Редови са позитивним члановима

4.1. Монотоност. Ако је $a_n \geq 0$ за свако n, ред $\sum a_n$ називаћемо *редом са позитивним члановима* (иако при томе дозвољавамо и $a_n = 0$). У том случају, из

$$s_{n+1} - s_n = \sum_{k=0}^{n+1} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k = a_{n+1} \geq 0$$

следи да је низ s_n растући, па из Теореме 4 и Леме 6 у Глави 2 добијамо следећи резултат.

Тврђење 4. *Ред са позитивним члановима конвергира ако и само ако је низ његових парцијалних сума ограничен.*

Пример 39. Ред $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ дивергира јер је

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} > n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n},$$

па је низ парцијалних сума неограничен. ♯

Пример 40**.** Уопштимо резултате Примера 22 на стр. 178, Примера 27 на стр. 182 и Примера 39. Посматрајмо ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}. \tag{24}$$

У Примеру 27 на стр. 182 смо видели да су парцијалне суме реда $\sum \frac{1}{n}$ неограничене. Ако је $p \leq 1$, онда је $\frac{1}{k^p} \geq \frac{1}{k}$, па је $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} \geq \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Одатле следи да су и парцијалне суме реда $\sum \frac{1}{n^p}$ неограничене, тј. тај ред дивергира за $p \leq 1$.

Нека је $p > 1$. Групишимо чланове парцијалних сума реда на следећи начин:

$$s_{2^n} = \Big(1 + \frac{1}{2^p}\Big) + \Big(\frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p}\Big) + \Big(\frac{1}{5^p} + \cdots + \frac{1}{8^p}\Big) + \cdots + \Big(\frac{1}{(2^{n-1}+1)^p} + \cdots + \frac{1}{(2^n)^p}\Big).$$

Пошто је

$$\frac{1}{(2^{k-1}+1)^p} + \cdots + \frac{1}{2^{p(k-1)}} < 2^{k-1} \cdot \frac{1}{(2^{k-1})^p} = \Big(\frac{1}{2^{p-1}}\Big)^{k-1},$$

парцијалне суме s_{2^n} су мање од парцијалних сума геометријског реда $\sum q^n$ са $q = \frac{1}{2^{p-1}} < 1$, дакле ограничене. Одатле и из монотоности следи да су све парцијалне суме s_n ограничене, тј. ред $\sum \frac{1}{n^p}$ је конвергентан за $p > 1$. ♯

Пример 41**.** Специјални случај реда (24) из Примера 40 је хармонијски ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

који је дивергентан. Ако из хармонијског реда избацимо све сабирке чији именилац у декадном запису садржи цифру 7, добијамо конвергентан ред.

Заиста, у интервалу $[10^{m-1}, 10^m]$ има $9^m - 9^{m-1}$ природних бројева који не садрже цифру 7 (упоредити са Задатком 68 на стр. 43). Одатле следи да

су парцијалне суме реда који се добије кад се из хармонијског реда избаце ти чланови мање од

$$\frac{9-1}{1}+\frac{9^2-9}{10}+\frac{9^3-9^2}{100}+\ldots=(9-1)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^k=80,$$

па тај ред конвергира. ♯

Пример 42. Нека је $\alpha\in\mathbf{R}$ и

$$a_n=\binom{\alpha}{n}:=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Користећи дивергенцију хармонијског реда, показаћемо да овај низ конвергира ако је $\alpha>-1$. Изаберимо неко $n_0\geq\alpha$ и приметимо да је

$$|a_n|=\binom{\alpha}{n_0}e^{\sum_{k=n_0}^{n-1}\log\frac{k-\alpha}{k+1}}. \tag{25}$$

Пошто је

$$\log\frac{k-\alpha}{k+1}=\log\left(1-\frac{\alpha+1}{k+1}\right)\leq-\frac{\alpha+1}{k+1},$$

из (25) следи

$$|a_n|\leq\binom{\alpha}{n_0}e^{-\sum_{k=n_0}^{n-1}\frac{\alpha+1}{k+1}}.$$

Одавде и из

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n_0}^{n-1}\frac{1}{k+1}=+\infty$$

(дивергенција хармонијског реда) следи је за $\alpha>-1$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

Остаје да размотримо случај $\alpha\leq-1$. Из

$$\binom{\alpha}{n+1}=\frac{\alpha-n}{n+1}\binom{\alpha}{n}$$

следи да је низ $|a_n|$ растући за $\alpha\leq-1$. Пошто за $\alpha\notin\mathbf{N}$ важи

$$a_{n+1}=-a_n,$$

за све $n>\alpha$, следи да за $\alpha\leq-1$ низ a_n дивергира. ♯

4.2. Поредбени принципи. Конвергенција или дивергенција реда са позитивним члановима често се установљава поређењем са другим редом, чију конвергенцију или дивергенцију смо већ установили.

Теорема 6. *Нека је $0\leq a_n\leq b_n$. Тада из конвергенције реда $\sum b_n$ следи конвергенција реда $\sum a_n$, а из дивергенције реда $\sum a_n$ следи дивергенција реда $\sum b_n$.*

△ Пошто се ради о редовима са позитивним општим члановима, њихова конвергенција је еквивалентна ограничености низа њихових парцијалних сума (Тврђење 4). Ако $\sum b_n$ конвергира, низ његових парцијалних сума је ограничен, па из $a_n\leq b_n$ следи да је и низ парцијалних сума реда $\sum a_n$ ограничен, па и тај ред конвергира.

Ако ред $\sum a_n$ дивергира, онда и ред $\sum b_n$ дивергира – супротна претпоставка дала би контрадикцију са управо доказаним тврђењем. $\bigtriangledown$

Теорема 7. *Нека су $\sum a_n$ и $\sum b_n$ редови са позитивним члановима, такви да је $b_n \neq 0$ и постоји*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = C \in [0, +\infty].$$

Тада

1. *ако је $C < +\infty$ и ред $\sum b_n$ конвергира, онда конвергира и ред $\sum a_n$,*
2. *ако је $C > 0$ и ред $\sum b_n$ дивергира, онда дивергира и ред $\sum a_n$.*

$\bigtriangleup$ Нека је $C < +\infty$ и ред $\sum b_n$ конвергира. Из дефиниције лимеса следи да постоји $n_0 \in \mathbf{N}$ такво да за $n > n_0$ важи $\frac{a_n}{b_n} < 2C$, тј. $a_n < 2Cb_n$. Резултат првог тврђења сада следи из Теореме 6.

Претпоставимо да је $C > 0$ и ред $\sum b_n$ дивергира. Тада је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = C^{-1} < +\infty,$$

па ред $\sum a_n$ дивергира, јер, када би он конвергирао, из управо доказаног тврђења следило би да конвергира и ред $\sum b_n$. $\bigtriangledown$

Теорема 8. *Нека су $\sum a_n$ и $\sum b_n$ редови са позитивним члановима, такви да важи $a_n \neq 0$, $b_n \neq 0$ и*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Тада из конвергенције реда $\sum b_n$ следи конвергенција реда $\sum a_n$, а из дивергенције реда $\sum a_n$ следи дивергенција реда $\sum b_n$.

$\bigtriangleup$ После множења неједнакости

$$\frac{a_2}{a_1} \leq \frac{b_2}{b_1}, \quad \frac{a_3}{a_2} \leq \frac{b_3}{b_2}, \quad \cdots \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{b_n}{b_{n-1}}$$

и скраћивања, добијамо $\frac{a_n}{a_1} \leq \frac{b_n}{b_1}$, тј. $a_n \leq Cb_n$, где је $C = a_1 b_1^{-1}$. Одатле, на основу Теореме 6, следи доказ. $\bigtriangledown$

Пример 43. Вратимо се још једном реду $\sum \frac{1}{n^p}$. Из Примера 24 на стр. 125 следи да је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1,$$

па из Теореме 7 и Примера 32 добијамо још један доказ дивергенције реда $\sum \frac{1}{n}$. Одатле, из $\frac{1}{n} < \frac{1}{n^p}$ за $p < 1$ и из Теореме 6 следи дивергенција реда $\sum \frac{1}{n^p}$ за $p < 1$.

Нека је $p > 1$, тј. $p = 1+\alpha$ за неко $\alpha > 0$. Тада из Бернулијеве неједнакости лако следи

$$\frac{1}{n^{\alpha+1}} < \frac{1}{\alpha}\Big(\frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha}\Big).$$

Пошто ред $\sum \big(\frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha}\big)$ конвергира (Задатак 27), из Теореме 6 следи да $\sum \frac{1}{n^p}$ конвергира за $p > 1$. $\sharp$

Задатак 31. Да ли конвергира ред $\sum \frac{1}{n^{1+1/n}}$? (Одговор: не!) ✓

Пример 44. Пошто је за свако $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^{\varepsilon}} = 0,$$

ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^p}$$

конвергира за све $p > 1$, на основу поредбеног става са редом $\sum \frac{1}{n^{p-\varepsilon}}$, где је $0 < \varepsilon < 1 - p$. ♯

Задатак 32. Нека је $\nu(n)$ број цифара природног броја n. Испитати конвергенцију реда

$$\sum \frac{\nu(n)}{n^p}.$$

Упутство: доказати да је $\log_{10} n < \nu(n) \leq \log_{10} n + 1$. ✓

Пример 45. Ред

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1 \right)$$

конвергира. Заиста, применом Тејлорове формуле са остатком у Пеановом облику добијамо

$$n^{\frac{1}{n^2+1}} = e^{\frac{\log n}{n^2+1}} - 1 = 1 + \frac{\log n}{n^2+1} + o\left(\frac{\log n}{n^2+1}\right) - 1 \sim \frac{\log n}{n^2}$$

кад $n \to \infty$, па закључак следи из Примера 44 и поредбеног принципа. ♯

Задатак 33. Испитати конвергенцију редова
(а) $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$
(б) $\sum \frac{1}{\sqrt{n^2(n+1)}}$
(в) $\sum \frac{n!}{n^n}$
(г) $\sum \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$
(д) $\sum \frac{1}{(\log\log n)^{\log n}}$
(г) $\sum \frac{1}{(\log n)^{\log\log n}}$. ✓

Пример 46. **(Лиувилов број)** У Примеру 31 на стр. 70 смо рекли да је први пример трансцендентног броја конструисао Лиувил, доказавши да број

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!} \tag{26}$$

није алгебарски. Приметимо да је $10^{-n!} \leq 10^{-n}$. Пошто геометријски ред $\sum(1/10)^n$ конвергира, одатле следи, применом поредбеног принципа, да и ред на десној страни у (26) конвергира.

Докажимо да је број L трансцендентан. Претпоставимо супротно, да је L алгебарски број степена d (видети Дефиницију 29 на стр. 70) и нека је $\varepsilon > 0$ произвољан број. Нека је природан број, такав да је

$$k \geq d \qquad \text{и} \qquad k! > \log_{10}(2\varepsilon^{-1}). \tag{27}$$

Број $10^{-1!}+10^{-2!}+\ldots+10^{-k!}$ је свакако рационалан, и може да се напише у облику

$$\sum_{n=1}^{k} 10^{-n!} = p/q, \qquad p \in \mathbf{Z}, \qquad q = 10^{-k!}.$$

Лако је видети да је

$$L - \frac{p}{q} = \sum_{n=k+1}^{\infty} 10^{-n!} \leq 2 \cdot 10^{-(k+1)!}. \tag{28}$$

Из (27)следи

$$\frac{10^{dk!})}{10^{(k+1)!}} = 10^{(d-k-1)k!} \leq 10^{-k!} < \frac{\varepsilon}{2},$$

па из (28) добијамо

$$\left| L - \frac{p}{q} \right| < \frac{\varepsilon}{10^{dk!}} = \frac{\varepsilon}{q^d}.$$

Пошто је $\varepsilon > 0$ произвољно, последњи израз је у супротности са Лиувиловом теоремом о којој је било речи у Примеру 18 на стр. 146. ♯

4.3. Веза конвергенције реда и производа. У Последици 7 смо видели да су сви чланови конвергентног производа реалних бројева, сем можда њих коначно много, позитивни. Пошто конвергенција производа не зависи од коначног броја његових чланова, при изучавању конвергенције бесконачних производа претпостављаћемо да су сви његови чланови позитивни. [5]

Лема 10. *Нека је $a_n > 0$. Производ $\prod a_n$ конвергира ако и само ако конвергира ред $\sum \ln a_n$. При томе важи*

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = e^{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln a_n}.$$

△ Нека је $p_n = \prod\limits_{k=1}^{n} a_k$. Из непрекидности логаритамске и експоненцијалне функције следи да низ p_n конвергира ако и само ако конвергира низ $\ln p_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln a_k$. Одатле следи тврђење леме. ▽

Лема 11. *Нека је $x_n > 0$. Тада производ $\prod(1+x_n)$ конвергира ако и само ако конвергира ред $\sum x_n$.*

△ Из Леме 8 следи да је и за конвергенцију реда $\sum x_n$ и производа $\prod(1+x_n)$ неопходан услов $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Одатле, на основу Примера 24 на стр. 125, следи

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+x_n)}{x_n} = 1.$$

---

[5] Ова претпоставка је природна и из следећег разлога. Производ је „мултипликативно записан ред". Другим речима, појам реда у групи $(\mathbf{R},+)$ одговара појму производа у њој изоморфној групи $(\mathbf{R}_+,\bullet)$. Један изоморфизам ових структура је $\log : (\mathbf{R}_+,\bullet) \to (\mathbf{R},+)$. Тако добијамо тврђења за производе која су аналогна тврђењима за редове. Нпр, као што општи члан конвергентног реда тежи нули (неутралу у $(\mathbf{R},+)$), тако и општи члан конвергентног производа тежи јединици (неутралу у $(\mathbf{R}_+,\bullet)$). Уопште, можемо да говоримо о „уопштеним редовима" у свакој групи $(G,\diamond)$ у којој има смисла појам лимеса (а тиме и непрекидности). Такве групе, у којима је груповна операција непрекидна, називају се *тополошким групама (в.* [**9**]*)*.

Доказ сада следи из Теореме 7 и Леме 10. ▽

Пример 47. Производ $\prod \left(1+\frac{1}{n^p}\right)$ конвергира ако и само ако је $p>1$. ♯

Задатак 34. Нека је a_n растући неограничен низ реалних бројева. Доказати да ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}}$$

дивергира. (Упутство: $1-\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}}=\frac{a_n}{a_{n+1}}$.) ✓

Пример 48. Скуп тачака нагомилавања низа

$$z_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{i}{k}\right),$$

где је $i=\sqrt{-1}\in\mathbf{C}$ је кружница. Заиста, из

$$|z_n|=\sqrt{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)}$$

и Примера 47 следи да постоји $r_\infty:=\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|$. Пошто је

$$\operatorname{Arg}(z_n)=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Arg}\left(1+\frac{i}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{arctg}\frac{1}{k},$$

из дивергенције реда $\sum\operatorname{arctg}\frac{1}{n}$ и конвергенције низа $\operatorname{arctg}\frac{1}{n}$ ка нули следи да је скуп тачака z_n свуда густ на кружници $S=\{z\in\mathbf{C}\mid |z|=r_\infty\}$ (задатак!). ♯

4.4. Критеријуми конвергенције. Већ смо се упознали са поредбеним критеријумима конвергенције редова са позитивњим члановима. Даћемо сада још неке критеријуме.

Тврђење 5. **(Кошијева теорема)** *Нека је a_n опадајући низ позитивних бројева. Тада ред $\sum a_n$ конвергира ако и само ако конвергира ред $\sum 2^n a_{2^n}$.*

△ Из позитивности и монотоности низа a_n следи

$$\sum_{k=1}^{2^n} a_k < a_1+(a_2+a_3)+\cdots+(a_{2^n}+\cdots+a_{2^{n+1}-1})<\sum_{k=1}^{n}2^k a_{2^k}$$
$$\sum_{k=1}^{2^n} a_k = a_1+a_2+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2^{n-1}+1}+\cdots+a_{2^n})>\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}2^k a_{2^k},$$

одакле следи доказ тврђења. ▽

Пример 49. Резултат Примера 40 може се добити и применом Тврђења 5: ред $\sum\frac{1}{n^p}$ конвергира ако и само ако конвергира ред $\sum 2^n\frac{1}{2^{pn}}=\sum\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n$. Последњи ред конвергира ако и само ако је $p<1$ (Пример 31). Приметимо да ово, у суштини, није нови приступ испитивању конвергенције овог реда – метод доказа Тврђења 5 је управо метод из Примера 40. ♯

Пример 50. Ред $\sum\frac{1}{n(\ln n)^r}$ конвергира ако и само ако је $r>1$. Заиста, за $r=1$ ред $\sum\frac{1}{n\ln n}$ дивергира јер дивергира ред $\sum 2^n\frac{1}{2^n\ln 2^n}=\frac{1}{\ln 2}\sum\frac{1}{n}$. За $r<1$ је $\frac{1}{n(\ln n)^r}>\frac{1}{n\ln n}$ па ред дивергира на основу поредбеног принципа.

Нека је $r > 1$. Тада ред $\sum 2^n \frac{1}{2^n (\ln 2^n)^r} = \frac{1}{(\ln 2)^r} \sum \frac{1}{(n \ln n)^r}$ конвергира на основу Теореме 7, јер је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n \ln n)^r}}{\frac{1}{n^r}} = 0,$$

а ред $\sum \frac{1}{n^r}$ конвергира за $r > 1$. ♯

Пример 51. Из претходног примера, Примера 21 на стр. 149 и принципа поређења следи да ред $\sum \frac{1}{n^p (\ln n)^r}$ конвергира ако је

1. $p > 1$
2. $p = 1$ и $r > 1$,

а дивергира у осталим случајевима. Заиста, нека је $p > 1$ и нека је $p_1 \in (1, p)$. Тада је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^p (\ln n)^r}}{\frac{1}{n^{p_1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p-p_1} (\ln n)^r} = 0,$$

па резултат следи из конвергенције реда $\sum \frac{1}{n^{p_1}}$ и Теореме 7. Случај $p = 1$ је разматран у Примеру 50. Нека је $p < 1$ и нека је $p_1 \in (p, 1)$. Тада је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^p (\ln n)^r}}{\frac{1}{n^{p_1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{p_1-p}}{(\ln n)^r} = +\infty,$$

па резултат следи из дивергенције реда $\sum \frac{1}{n^{p_1}}$ и Теореме 7. ♯

Пример 52. Ред $\sum \frac{1}{n^p (\ln n)^r e^{tn}}$ конвергира ако је

1. $t > 0$
2. $t = 0$ и $p > 1$
3. $t = 0$, $p = 1$ и $r > 1$,

а дивергира у осталим случајевима. Заиста, случај $t = 0$ размотрен је у Примеру 51, а резултат у случајевима $t > 0$ и $t < 0$ следи из Примера 31, Примера 23 на стр. 149 и Теореме 7. ♯

4.5. Кошијев и Даламберов тест. Поредбени принципи, примењени на геометријски ред $\sum q^n$ (Пример 31) дају нам следећа два критеријума конвергенције.

Теорема 9. **(Кошијев тест)** *Нека је $a_n \geq 0$ низ ненегативних реалних бројева. Ред $\sum a_n$*

1. *конвергира ако је $\overline{\lim}\, \sqrt[n]{a_n} < 1$*
2. *дивергира ако је $\overline{\lim}\, \sqrt[n]{a_n} > 1$*

△ Ако је $\overline{\lim}\, \sqrt[n]{a_n} < 1$, онда постоји $q \in (0, 1)$ такво да је $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ (тј. $a_n \leq q^n$) за све n осим, евентуално, њих коначно много. Одатле, на основу Теореме 6 и конвергенције реда $\sum q^n$ за $q < 1$ (Пример 31) следи да ред $\sum a_n$ конвергира.

Слично, ако је $\overline{\lim}\, \sqrt[n]{a_n} > 1$, постоји $r > 1$ такво да да неки подниз низа $\sqrt[n]{a_n}$ конвергира ка r. Тада за $1 < q < r$ важи $\sqrt[n]{a_n} \geq q$ (тј. $a_n \geq q^n$) бесконачно много природних бројева n, па a_n не тежи нули. Одатле, на основу Леме 8, следи да ред $\sum a_n$ дивергира. ▽

Последица 9. *Нека је z_n низ комплексних бројева. Ред $\sum z_n$*

1. *апсолутно конвергира ако је $\overline{\lim}\, \sqrt[n]{|z_n|} < 1$*
2. *дивергира ако је $\overline{\lim}\, \sqrt[n]{|z_n|} > 1$.*

△ Доказ првог тврђења следи из Тврђења 2. Доказ другог тврђења следи, као у доказу Теореме 9, из чињенице да у том случају $|z_n|$, па тиме ни z_n, не тежи нули. ▽

Задатак 35. Доказати да ред

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$$

конвергира. ✓

Теорема 10. **(Даламберов[6] тест)** *Нека је $a_n \geq 0$ низ ненегативних реалних бројева. Ред $\sum a_n$*

1. *конвергира ако је $\overline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$*
2. *дивергира ако је $\underline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$.*

△ Ако је $\overline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, онда постоје $q \in (0,1)$ и $n_0 \in \mathbf{N}$ такви да је $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ за $n \geq n_0$. Одатле следи $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{q^{n+1}}{q^n}$, односно

$$\frac{a_{n+1}}{q^{n+1}} \leq \frac{a_n}{q^n} \leq \cdots \leq \frac{a_{n_0}}{q^{n_0}}$$

за $n > n_0$, па је

$$(\forall n > n_0)\, a_n \leq Cq^n,$$

где је $C = \frac{a_{n_0}}{q^{n_0}}$. Одатле, на основу Теореме 6 и конвергенције реда $\sum q^n$ за $0 < q < 1$ следи да ред $\sum a_n$ конвергира.

Ако је $\underline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, онда постоје $q > 1$ и $n_0 \in \mathbf{N}$ такви да је $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q$ за $n \geq n_0$. Одатле следи да је $a_{n+1} \geq qa_n > a_n$, тј. да је низ a_n растући, почевши од a_{n_0}, па не тежи нули. Из Леме 8 следи да $\sum a_n$ дивергира. ▽

Последица 10. *Нека је z_n низ комплексних бројева. Ред $\sum z_n$*

1. *апсолутно конвергира ако је $\overline{\lim}\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} < 1$*
2. *дивергира ако је $\underline{\lim}\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} > 1$.*

△ Доказ првог тврђења следи из Тврђења 2. Доказ другог тврђења следи, као у доказу Теореме 10, из чињенице да у том случају $|z_n|$, па тиме ни z_n, не тежи нули. ▽

Задатак 36. Доказати да ред

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1! + 2! + \cdots + n!}{(2n)!}$$

конвергира. ✓

Напомена 6. Нека је $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n^2}$. Тада је

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}}{y_n} = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{y_n} = 1.$$

Међутим, ред $\sum x_n$ дивергира, а ред $\sum y_n$ конвергира. Одатле видимо да, ако је $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = 1$ (или $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$), Кошијев (или Даламберов) критеријум не дају одговор о конвергенцији.

[6] Даламбер (Jean le Rond d'Alambert, 1717–1783) француски математичар и философ

Напомена 7. Из Примера 16 на стр. 176 следи да је Кошијев критеријум моћнији од Даламберовог: ако конвергенцију (или дивергенцију) реда $\sum a_n$ можемо да установимо применом Даламберовог теста, онда можемо да је установимо и применом Кошијевог. Да обрнуто није тачно показује следећи пример.

Пример 53. Посматрајмо ред

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+\cdots.$$

За овај ред је

$$\underline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0<1,\quad \overline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n=+\infty>1,$$

па Даламберов критеријум не даје никакав одговор о његовој конвергенцији. Међутим,

$$\underline{\lim}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{\frac{1}{3^n}}=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \overline{\lim}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{\frac{1}{2^n}}=\frac{1}{\sqrt{2}}<1,$$

одакле, на основу Кошијевог критеријума закључујемо да ред конвергира. Општије, ово важи за сваки ред облика

$$a+b+a^2+b^2+a^3+b^3+\cdots,$$

где је $0<a<b<1$. ♯

Задатак 37. Испитати конвергенцију редова
(а) $\sum\frac{1}{(\log n)^n}$
(б) $\sum n!\left(\frac{x}{n}\right)^n$, $x\geq 0$
(в) $\sum\left(\frac{x}{n}\right)^n$, $x\geq 0$
(г) $\sum\left(\frac{a_n}{n}\right)^n$, $a_n\geq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. ✓

4.6. Рабеов критеријум. Применом поредбених принципа на ред $\sum\frac{1}{n^p}$ (Пример 40) добијамо следеће тврђење.

Теорема 11. (Рабеов[7] тест) *Нека је $a_n\geq 0$. Ако постоји $q>1$ такво да је*

$$n\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\Big)\geq q$$

онда ред $\sum a_n$ конвергира. Ако је

$$n\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\Big)\leq 1$$

онда ред $\sum a_n$ дивергира.

△ Претпоставимо да постоји q за које је задовољена прва неједнакост. Нека је $p\in(q,1)$. Из Примера 26 на стр. 125 следи да је

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p-1}{\frac{1}{n}}=p,$$

[7]Рабе (Joseph Ludwig Raabe, 1801–1859), швајцарски математичар

па је за довољно велико n,

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p - 1}{\frac{1}{n}} < q, \quad \text{тј.} \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^p < 1 + \frac{q}{n}.$$

Одатле следи

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^p,$$

односно

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^p = \frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}}.$$

Конвергенција реда $\sum a_n$ сада следи из Теореме 8 и конвергенције реда $\sum \frac{1}{n^p}$.

Претпоставимо сада да важи друга неједнакост из поставке теореме. Из ње следи

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{n}{n+1} = \frac{\frac{1}{(n+1)}}{\frac{1}{n}},$$

па из Теореме 8 и дивергенције реда $\sum \frac{1}{n}$ следи дивергенција реда $\sum a_n$. ▽

Пример 54. Ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n}, \qquad \text{где је} \qquad \binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \tag{29}$$

апсолутно конвергира ако је $\alpha \geq 0$. Заиста, пошто је за $n > \alpha$

$$n\Big(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} - 1\Big) = n\frac{1+\alpha}{n-\alpha} \geq \frac{1+\alpha}{n} = 1+\alpha,$$

закључак следи из Рабеовог критеријума. ♯

Задатак 38. Доказати да ред (54) неапсолутно конвергира за $-1 < \alpha < 0$ и дивергира за $\alpha \leq -1$.

Упутство: за конвергенцију у случају $-1 < \alpha < 0$ искористити Лајбницово правило (Тврђење 1 на стр. 190) и Пример 42 на стр 194; за доказ да је та конвергенција неапсолутна, као и за доказ дивергенције за $\alpha \leq -1$ искористити Рабеов тест. ✓

Задатак 39. Испитати конвергенцију реда

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\alpha}{n}$$

у зависности од $\alpha \in \mathbf{R}$.

✓

Задатак 40. Испитати конвергенцију редова
(а) $\sum \frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdot\ldots\cdot(x+n)}$, $x > 0$
(б) $\sum \frac{(nx)^n}{n!}$, $x \geq 0$. ✓

4.7. Кумеров критеријум. Сада ћемо да формулишемо критеријум који уопштава Даламберов и Рабеов, и даје нове критеријуме.

Теорема 12. (Кумеров[8] тест) *Нека је c_n низ позитивних бројева, такав да ред $\sum \frac{1}{c_n}$ дивергира, и нека је a_n низ позитивних бројева. Тада ред $\sum a_n$*

1. *конвергира ако за неко $\delta > 0$ важи $c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \geq \delta$*
2. *дивергира ако је $c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \leq 0$.*

△ Нека је $c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \geq \delta > 0$. Множењем позитивним бројем a_{n+1} добијамо $c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1} \geq \delta a_{n+1} > 0$. Одатле следи да је $c_n a_n$ опадајући низ позитивних бројева, па он конвергира. Пошто је

$$\sum_{k=1}^{n} (c_k a_k - c_{k+1} a_{k+1}) = c_1 a_1 - c_{n+1} a_{n+1},$$

ред $\sum (c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1})$ конвергира, па на основу поредбеног принципа конвергира и ред $\sum a_n$.

Ако је $c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \leq 0$, онда је

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{\frac{1}{c_{n+1}}}{\frac{1}{c_n}},$$

па на основу Теореме 8 следи да ред $\sum a_n$ дивергира. ▽

Последица 11. *За $c_n \equiv 1$ добијамо Даламберов тест.*

Последица 12. *За $c_n = n$ добијамо Рабеов тест.*

Последица 13. (Бертранов[9] тест) *Нека је $a_n > 0$. Тада ред $\sum a_n$*

1. *конвергира ако је $\lim\limits_{n\to\infty} \ln n \big[n\big(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\big) - 1\big] > 1$*
2. *дивергира ако је $\lim\limits_{n\to\infty} \ln n \big[n\big(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\big) - 1\big] < 1$.*

△ Доказ следи из Кумеровог теста за $c_n = n \ln n$. ▽

4.8. Гаусов критеријум. Докажимо једну важну последицу до сада разматраних критеријума.

Теорема 13. (Гаусов[10] критеријум) *Нека је $a_n > 0$ и*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^2},$$

где су λ и μ константе, а θ_n ограничен низ. Тада ред $\sum a_n$ конвергира ако је

1. *$\lambda > 1$*
2. *$\lambda = 1$ и $\mu > 1$,*

а дивергира у осталим случајевима.

△ Случајеви $\lambda > 1$ и $\lambda < 1$ следе из Даламберовог критеријума. Случајеви $\lambda = 1$, $\mu > 1$ и $\lambda = 1$, $\mu < 1$ следе из Рабеовог критеријума. Случај $\lambda = 1$, $\mu = 1$ следи из Бертрановог критеријума. ▽

Задатак 41. Испитати конвергенцију реда $\sum \big(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\big)^p$. ✓

[8] Кумер (Ernst Eduard Kummer, 1810–1893), немачки математичар

[9] Бертран (Joseph Louis Frans Bertrand, 1822–1900), француски математичар

[10] Гаус (Carl Friedrich Gauss, 1777–1855), немачки математичар

Задатак 42. Испитати конвергенцију реда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)!}{(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+a)(2+\frac{1}{\sqrt{3}}+a)\cdots(n-1+\frac{1}{\sqrt{n}}+a)}$$

у зависности од реалног параметра a. ✓

5. Редови са произвољним члановима

5.1. Парцијално сумирање. Нека су a_n и b_n два низа комплексних бројева и нека је, за $0 < m \leq n$,

$$A_n = \sum_{k=m}^{n} a_k \quad \text{и} \quad A_{-1} = 0.$$

Из $a_k = A_k - A_{k-1}$ следи да важи

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=m}^{n} A_k b_k - \sum_{k=m}^{n} A_{k-1} b_k,$$

Пошто је $\sum\limits_{k=m}^{n} A_{k-1} b_k = \sum\limits_{k=m-1}^{n-1} A_k b_{k+1}$, добијамо

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n - A_{m-1} b_m. \tag{30}$$

Ова формула назива се *Абеловом сумационом формулом.* Некада се она формулише у облику

$$\sum_{k=m}^{n} b_{k+1}(a_{k+1} - a_k) + \sum_{k=m}^{n} a_k (b_{k+1} - b_k) = a_{n+1} b_{n+1} - a_m b_m, \tag{31}$$

који се лако доказује множењем чланова на левој страни и скраћивањем. Приметимо да (30) следи применом (31) на низове A_n и b_n (уместо a_n и b_n)..

Пример 55. У Глави 1 смо видели да је

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{и} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{32}$$

Покажимо како ове суме могу да се изведу из Абелове сумационе формуле. Да бисмо извели прву, посматрајмо низове $a_k = k$ и $b_k = k$. Тада је

$$a_{k+1} - a_k = 1 \qquad \text{и} \qquad b_{k+1} - b_k = 1,$$

па из (31) следи

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1) + \sum_{k=1}^{n} k = (n+1)^2 - 1,$$

одакле следи

$$2\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1).$$

Тиме смо доказали прву формулу у (32). Да бисмо доказали другу, посматрајмо низове $a_k = k^2 - k$ и $b_k = k - 1/2$. Сада је

$$a_{k+1} - a_k = 2k \qquad \text{и} \qquad b_{k+1} - b_k = 1,$$

па из (31) добјамо

$$\sum_{k=1}^{n}\left(k+\frac{1}{2}\right)2k+\sum_{k=1}^{n}(k^2-k)=(n+1)n\left(n+\frac{1}{2}\right).$$

Одатле се, после сређивања, добија друга формула у (32). ♯

Задатак 43. Применом Абелове сумационе формуле израчунати

$$\sum_{k=1}^{n}k^3.$$

Упутство: узети $a_k=k^2$ и $b_k=(k-1)^2$. ✓

Задатак 44. Применом Абелове сумационе формуле израчунати

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{3^k}\quad\text{и}\quad\sum_{k=1}^{n}(a+kd)q^k,$$

за $d\neq 0$, $q\notin\{0,1\}$. ✓

5.2. Дирихлеов и Абелов критеријум. Помоћу Абелове сумационе формуле извешћемо два критеријума конвергенције редова.

Теорема 14. **(Дирихлеов тест)** *Нека је a_n низ комплексних бројева и b_n монотон низ реалних бројева. Претпоставимо да је*

1. *низ $A_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ парцијалних сума реда $\sum a_n$ ограничен*
2. $\lim_{n\to\infty}b_n=0$.

Тада ред $\sum a_nb_n$ конвергира.

△ Доказаћемо да из формуле (30) следи да је низ $\sum_{k=1}^{n}a_kb_k$ Кошијев. Нека је $\varepsilon>0$.

По претпоставци теореме низ A_n је ограничен, тј. $|A_n|\leq C$ за неко $C>0$, па је

$$|A_k(b_k-b_{k+1})|\leq M|b_k-b_{k+1}|. \tag{33}$$

Можемо, не умањујући општост, да претпоставимо да је монотон низ b_n опадајући (ако b_n је растући, онда је $-b_n$ опадајући, а ако тврђење теореме важи када се b_n замени са $-b_n$, важиће и за b_n). Тада је

$$\sum_{k=0}^{n}M|b_k-b_{k+1}|=M\sum_{k=0}^{n}(b_k-b_{k+1})=M(b_0-b_{n+1}). \tag{34}$$

Пошто по претпоставци низ b_n конвергира, из (34) следи да и ред $\sum M|b_k-b_{k+1}|$ конвергира. Одатле, на основу (33) и поредбеног теста, следи да ред $\sum A_k(b_k-b_{k+1})$ (апсолутно) конвергира, па је низ његових парцијалних сума Кошијев. То значи да је за довољно велике m и n апсолутна вредност суме на десној страни у (30) мања од $\frac{\varepsilon}{3}$.

Пошто низ b_n тежи нули, а низ A_n је ограничен, оба сабирка на десној страни у (30) теже нули кад $m,n\to\infty$. Одатле следи да је, за довољно велике m и n, сваки од њих мањи од $\frac{\varepsilon}{3}$. Сабирањем добијамо да је за довољно велике m и n израз на десној страни у (30) мањи од ε. ▽

Теорема 15. **(Абелов тест)** *Нека је a_n низ комплексних бројева и b_n монотон низ реалних бројева. Претпоставимо да важи*

1. *ред $\sum a_n$ конвергира*
2. *постоји $\lim_{n\to\infty} b_n$.*

Тада ред $\sum a_n b_n$ конвергира.

△ Нека је $\lim_{n\to\infty} b_n = b_\infty$; тада је $\lim_{n\to\infty} b_n - b_\infty = 0$. Приметимо да је

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k b_\infty + \sum_{k=1}^{n} a_k (b_k - b_\infty).$$

Ред $\sum a_k$ конвергира по претпоставци, а ред $\sum a_k(b_k - b_\infty)$ конвергира на основу Теореме 14. ▽

Као последицу, добијамо још један доказ Тврђења 1 (стр. 190).

Последица 14. **(Лајбницово правило)** *Нека је b_n опадајући низ реалних бројева и нека је $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Тада ред $\sum(-1)^{n-1} b_n$ конвергира.*

△ Доказ следи из Теореме 14 за $a_n = (-1)^{n-1}$. ▽

Пример 56. Ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$$

апсолутно конверира за $p > 1$, неапсолутно конвергира за $0 < p \leq 1$ и дивергира за $p \leq 0$. Заиста, апсолутна конвергенција за $p > 1$ је установљена у Примеру 51 (случај $r = 0$). Ако је $0 < p \leq 1$, ред конвергира по Лајбницовом правилу. Ако је $p \leq 0$, ред дивергира јер му општи члан не тежи нули. ♯

Пример 57. Ред

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos \frac{n^2\pi}{n+1}}{\log^2 n}$$

конвергира. Заиста,

$$\cos \frac{n^2\pi}{n+1} = (-1)^n \cos\left(\frac{n^2\pi}{n+1} - n\pi\right) = (-1)^n \cos \frac{n\pi}{n+1}.$$

Ред $\sum \frac{(-1)^n}{\log^2 n}$ конвергира, по Лајбницовом правилу, а низ $\cos \frac{n\pi}{n+1}$ је монотон и ограничен, па закључак следи из Абеловог теста. ♯

Задатак 45. Доказати да ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$$

конвергира. ✓

Задатак 46. Испитати конвергенцију реда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\log n}$$

у зависности од параметра $x \in \mathbf{R}$. ✓

Задатак 47. Нека је $\sum a_n$ конвергентан ред. Доказати да су редови

$$\sum \frac{a_n}{\log n}, \quad \sum \frac{n+1}{n} a_n, \quad \sum \sqrt[n]{n} a_n$$

конвергентни. ✓

6. Операције са редовима

6.1. Двоструки редови. У Последици 8 на стр. 191 видели смо да коначна и бесконачна сума комутирају, тј. да важи

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{m=1}^{k} z_{mn} \Big) = \sum_{m=1}^{k} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} z_{mn} \Big).$$

Следећи пример показује да, у општем случају, две бесконачне суме не комутирају.

Пример 58. Нека је

$$a_{mn} = \begin{cases} 0, & m < n, \\ -1, & n = m \\ 2^{n-m}, & m > n. \end{cases}$$

У облику бесконачне матрице, a_{mn} можемо да напишемо као

$$(a_{mn}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -1 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -1 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \end{pmatrix}$$

Тада је, за фиксирано n, сума n–те колоне

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} = \sum_{m=1}^{n-1} a_{mn} + (-1) + \sum_{m=n+1}^{\infty} a_{mn} = 0 + (-1) + \sum_{m=n+1}^{\infty} 2^{n-m} = -1 + 1 = 0,$$

а за фиксирано m сума m–те врсте је

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = \sum_{n=1}^{m-1} a_{mn} + (-1) + \sum_{n=m+1}^{\infty} a_{mn} = \sum_{n=1}^{m-1} 2^{n-m} + (-1) + 0 = -2^{-m},$$

па је $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{mn} = -2 \neq 0 = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{mn}$. ♯

Следећа теорема даје један услов под којим две бесконачне суме комутирају, тј. услов под којим је дозвољено изменити поредак сумирања. Нека је дата бесконачна матрица

$$(z_{mn}) = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} & \cdots \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & z_{24} & \cdots \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} & z_{34} & \cdots \\ z_{41} & z_{42} & z_{43} & z_{44} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \end{pmatrix}$$

У теореми 14 на стр. 45 смо видели да се њени елементи могу поређати у низ. Наравно, то је могуће учинити на више начина, тј. добијени низ није јединствен. Означимо са w_n било који од тих низова.

Теорема 16. *Ако ред* $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|$ *конвергира, онда конвергирају и редови*

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_{mn}, \quad \sum_{m=1}^{\infty} z_{mn}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} z_{mn}, \quad \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} z_{mn}$$

и важи $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} z_{mn} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} z_{mn}$.

$\triangle$ Нека је $C = \sum_{n=1}^{\infty} |w_n|$. Тада је, за свако m,

$$\sum_{n=1}^{N} |z_{mn}| \le C.$$

Одатле следи да ред $\sum_{n=1}^{\infty} z_{mn}$ (апсолутно) конвергира. Даље, важи

$$\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{\infty} |z_{mn}| \le C,$$

одакле следи да и ред $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} z_{mn}$ конвергира. На исти начин се доказује да и преостала два реда конвергирају.

Нека је $W = \sum_{n=1}^{\infty} w_n$. Докажимо да је

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} z_{mn} = W \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} z_{mn} = W. \tag{35}$$

Нека је $\varepsilon > 0$. Из конвергенције реда $\sum |w_n|$ и Леме 7 на стр. 188 следи да постоји $k \in \mathbf{N}$ такво да је

$$\Big|W - \sum_{j=1}^{k} w_j\Big| \le \sum_{j=k+1}^{\infty} |w_j| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{36}$$

За довољно велике $m_0, n_0 \in \mathbf{N}$ елементи $w_1, \ldots, w_k$ су садржани међу бројевима z_{mn} за $m \le m_0$, $n \le n_0$. Тада је за $r > m_0$, $s > n_0$ разлика

$$\sum_{m=1}^{r}\sum_{n=1}^{s} z_{mn} - \sum_{j=1}^{k} w_j$$

једнака суми чланова низа w_j са $j > k+1$, па из (36) следи

$$\Big|\sum_{m=1}^{r}\sum_{n=1}^{s} z_{mn} - \sum_{j=1}^{k} w_j\Big| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Одатле, преласком на $\lim_{s\to\infty}$, добијамо

$$\Big|\sum_{m=1}^{r}\sum_{n=1}^{\infty} z_{mn} - \sum_{j=1}^{k} w_j\Big| \le \frac{\varepsilon}{2}. \tag{37}$$

Из (36) и (37) следи

$$\Big|\sum_{m=1}^{r}\sum_{n=1}^{\infty} z_{mn} - W\Big| < \varepsilon,$$

чиме је доказана прва једнакост у (35); на исти начин се доказује и друга. $\bigtriangledown$

Последица 15. *Ако ред* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_{mn}|$ *конвергира за свако* $m \in \mathbf{N}$ *и ако ред* $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_{mn}|$ *конвергира, тада ред* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |w_n|$ *конвергира и важи*

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} z_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty} w_n. \tag{38}$$

$\bigtriangleup$ По претпоставци је $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_{mn}| = C < +\infty$. Нека је $k \in \mathbf{N}$. Тада је, за довољно велике r, s

$$\sum_{n=1}^{r} |w_n| \le \sum_{m=1}^{r}\sum_{n=1}^{s} |z_{mn}| < C,$$

одакле следи да ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |w_n|$ конвергира. Једнакост (38) сада следи из претходне теореме. $\bigtriangledown$

Последица 16. *Нека је* $a_{mn} \ge 0$. *Тада је* $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{mn} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{mn}$.

Приметимо да, под условима Теореме 16, следи да резултат двоструког сумирања не зависи од начина на који су чланови двоструког низа z_{mn} поређани у низ w_n. У таквом случају, израз $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_{mn}$ (тј. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{mn}$) означавамо са $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} z_{mn}$ и називамо га *двоструким редом.*

6.2. Уопштени комутативни закон. Последица комутативног закона за сабирање је да за сваку n-торку $z_1, \dots, z_n$ комплексних бројева и произвољну пермутацију $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ важи

$$\sum_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k=1}^{n} z_{\sigma(k)}.$$

У општем случају, ово није тачно за бесконачне редове.

Теорема 17. **(Риманова теорема)** *Нека је* x_n *низ у* $\mathbf{R}$, *такав да ред* $\sum x_n$ *неапсолутно конвергира. Тада за свако* $\alpha \in \{-\infty\} \cup \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ *постоји пермутација* $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, *таква да је*

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_{\sigma(k)} = \alpha.$$

$\bigtriangleup$ Нека је $\alpha \in \mathbf{R}$ произвољан број. Нека су x_n^+ и x_n^- позитивни и негативни део броја x_n, дефинисани формулом (48) на стр. 49. Из

$$x_n^+ = \frac{1}{2}(|x_n| + x_n), \qquad x_n^- = \frac{1}{2}(|x_n| - x_n),$$

дивергенције реда $\sum |x_n|$ и конвергенције реда $\sum x_n$ следи да редови $\sum x_n^+$ и $\sum x_n^-$ дивергирају. Нека је p_n n-ти по реду члан низа x_n који је позитиван, а q_n n-ти по реду члан низа x_n који није позитиван. Очигледно важи

$$\sum_{k=1}^{n} p_k \geq \sum_{k=1}^{n} x_k^+ \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{n} q_k \leq -\sum_{k=1}^{n} x_k^-,$$

па је

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = +\infty \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{n} q_k = -\infty. \tag{39}$$

Тражену пермутацију σ дефинишемо индуктивно. Нека је $\sigma(1) = 1$. Претпоставимо да су $x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}$ већ дефинисани. Ако је $\sum\limits_{k=1}^{n} x_{\sigma(n)} \leq \alpha$, дефинишемо $x_{\sigma(n+1)}$ као први од чланова низа p_n који нису међу $x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}$. Ако је $\sum\limits_{k=1}^{n} x_{\sigma(n)} > \alpha$, дефинишемо $x_{\sigma(n+1)}$ као први од чланова низа q_n који нису међу $x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}$.

Докажимо да је $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\sigma(k)} = \alpha$. Нека је $\varepsilon > 0$. Пошто $\sum x_n$ конвергира, x_n тежи нули, па постоји $n_0 \in \mathbf{N}$ такво да за $n \geq n_0$ важи $|x_n| < \varepsilon$. Одатле следи да постоји $n_1 \in \mathbf{N}$ такво да за $n \geq n_1$ важи

$$|x_{\sigma(n)}| < \varepsilon. \tag{40}$$

Из (39) следи да постоји природан број $n_2 \geq n_1$ такав да је

$$\alpha - \varepsilon < \sum_{k=1}^{n_2} x_{\sigma(k)} < \alpha + \varepsilon. \tag{41}$$

Заиста, када би за свако $n \geq n_1$ било $\sum\limits_{k=1}^{n} x_{\sigma(k)} \leq \alpha - \varepsilon$, по дефиницији пермутације σ то би значило да после члана $x_{\sigma(n_1)}$ можемо да додајемо чланове низа p_n и никад не добијемо збир већи од α, што је у супротности са (39). Слично се доказује да не може да се деси да за свако $n \geq n_1$ важи $\sum\limits_{k=1}^{n} x_{\sigma(k)} \geq \alpha + \varepsilon$. Сада из (40) и (41) следи

$$\alpha - \varepsilon < \sum_{k=1}^{n} x_{\sigma(k)} < \alpha + \varepsilon$$

за свако $n \geq n_2$, тј. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_{\sigma(k)} = \alpha$.

Ако је $\alpha = +\infty$, доказ се изводи на сличан начин. Нека је α_n низ реалних бројева, такав да $\alpha_n \to +\infty$ кад $n \to \infty$. Тражену пермутацију σ опет дефинишемо индуктивно, с том разликом што најпре додајемо чланове низа све док је $\sum\limits_{k=1}^{n_1} x_{\sigma(k)} < \alpha_1$, затим чланове низа q_n све док је $\sum\limits_{k=1}^{n_2} x_{\sigma(k)} > \alpha_1$, после тога опет чланове низа p_n, али сада све док је $\sum\limits_{k=1}^{n_3} x_{\sigma(k)} < \alpha_2$, затим чланове низа q_n све док је $\sum\limits_{k=1}^{n_4} x_{\sigma(k)} > \alpha_2$ итд. Случај $\alpha = -\infty$ разматра се аналогно. $\triangledown$

Задатак 48. Нека је x_n низ у $\mathbf{R}$, такав да ред $\sum x_n$ неапсолутно конвергира. Доказати, користећи идеју доказа Риманове теореме, да за произвољне $\alpha, \beta \in \{-\infty\} \cup \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ такве да је $\alpha \leq \beta$ постоји пермутација $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, таква да је $\underline{\lim} \sum_{k=1}^{n} x_{\sigma(k)} = \alpha$ и $\overline{\lim} \sum_{k=1}^{n} x_{\sigma(k)} = \beta$. ✓

Задатак 49. Нека је $z_n \in \mathbf{C}$ низ комплексних бројева, такав да ред $\sum z_n$ неапсолутно конвергира. Да ли за свако $\zeta \in \mathbf{C}$ постоји пермутација $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, таква да је $\sum_{k=1}^{\infty} z_{\sigma(k)} = \zeta$? (Одговор: не!) ✓

Напомена 8. Важи следећа комплексна аналогија Риманове теореме (видети [**28**]): *Ако је $\sum z_n$ неапсолутно конвергентан ред са комплексним члановима, онда постоји права $L \subset \mathbf{C}$ таква да за свако $\zeta \in L$ постоји пермутација $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, таква да је $\sum_{k=1}^{\infty} z_{\sigma(k)} = \zeta$.* Из њега следи Риманова теорема као специјални случај ($\operatorname{Im} z_n = 0$, $L = \mathrm{Re}$–оса).

За апсолутно конвергентне редове важи следећа теорема.

Теорема 18. *Нека је ред $\sum z_n$ апсолутно конвергентан. Тада свака његова пермутација конвергира истој суми.*

△ Нека је σ дата пермутација и нека је $\varepsilon > 0$. Пошто $\sum z_n$ апсолутно конвергира, за неко $n_0 \in \mathbf{N}$ важи

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} |z_k| < \varepsilon.$$

Изаберимо број $m \in \mathbf{N}$, такав да је $\{1, 2, \ldots, n_0 - 1\} \subset \{\sigma(1), \ldots, \sigma(m)\}$. Тада за свако $n \geq m$ важи

$$\Big| \sum_{k=1}^{\infty} z_k - \sum_{k=1}^{n} z_{\sigma(k)} \Big| \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} |z_k| < \varepsilon. \tag{42}$$

Пошто је $\varepsilon > 0$ произвољно, преласком на лимес у (42)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} z_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} z_k.$$

▽

Задатак 50. Доказати Теорему 18 за апсолутно конвергентан *реални* ред $\sum x_n$ на други начин, пишући $x_n = x_n^+ - x_n^-$ и користећи чињеницу да је сума реда са позитивним члановима једнака супремуму низа његових парцијалних сума.

✓

6.3. Множење редова. Следећа теорема уопштава дистрибутивни закон.

Теорема 19. *Нека су a_n и b_n низови комплексних бројева, такви да*

1. *ред $\sum a_n$ апсолутно конвергира и $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$,*
2. *ред $\sum b_n$ конвергира и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$.*

Нека је $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. *Тада ред* $\sum c_n$ *конвергира и важи* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = A \cdot B$.

$\triangle$ Нека је

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_n, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_n, \quad C_n = \sum_{k=0}^{n} c_n, \quad r_n = B - B_n.$$

Тада је

$$\begin{aligned} C_n &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + \cdots + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0) = \\ &= a_0B_n + a_1B_{n-1} + \cdots + a_nB_0 = \\ &= a_0(B - r_n) + a_1(B - r_{n-1}) + \cdots + a_n(B - r_0) = \\ &= A_nB - (a_0r_n + a_1r_{n-1} + \cdots + a_nr_0). \end{aligned}$$

Пошто је $\lim_{n\to\infty} A_nB = AB$, остаје још да се докаже да је

$$\lim_{n\to\infty} (a_0r_n + a_1r_{n-1} + \cdots + a_nr_0) = 0. \tag{43}$$

Нека је $\varepsilon > 0$. Пошто ред $\sum a_n$ апсолутно конвергира, сума $A^* = \sum |a_n|$ је коначна. Из конвергенције реда $\sum b_n$ следи да постоји $n_0 \in \mathbf{N}$ такво да је $|r_n| < \varepsilon(2A^*)^{-1}$ за $n \geq n_0$. Тада је

$$\begin{aligned} |a_0r_n + \cdots + a_nr_0| &\leq |a_0r_n + \cdots + a_{n-n_0-1}r_{n_0+1}| + |a_{n-n_0}r_{n_0} \cdots + a_nr_0| \\ &\leq \tfrac{\varepsilon}{2} + |a_{n-n_0}r_{n_0} \cdots + a_nr_0|. \end{aligned} \tag{44}$$

Пошто општи члан a_n конвергентног реда $\sum a_n$ тежи нули кад $n \to \infty$, за фиксирано n_0 тежи нули и последњи члан у (44), тј. постоји $n_1 \in \mathbf{N}$ такво да за $n \geq n_1$ важи

$$|a_{n-n_0}r_{n_0} \cdots + a_nr_0| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{45}$$

Из (44) и (45) следи (43). $\triangledown$

Дефиниција 9. Нека су a_n и b_n комплексни низови. Низ

$$a_n * b_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

назива се *конволуцијом* низова a_n и b_n. $\Diamond$

Помоћу појма конволуције множење може да се формулише на следећи начин. Нека је $l^1(\mathbf{C})$ скуп свих комплексних низова z_n, таквих да ред $\sum |z_n|$ конвергира. Тада је структура $(l^1(\mathbf{C}), +, *, \mathbf{e})$, са операцијама

$$(a_n, b_n) \mapsto a_n + b_n \qquad \text{и} \qquad (a_n, b_n) \mapsto a_n * b_n$$

прстен са јединицом $\mathbf{e} := (1, 0, 0, \ldots)$. Из Теореме 19 следи

Теорема 20. *Пресликавање*

$$\sum_{n=0}^{\infty} : (l^1(\mathbf{C}), +, *, \mathbf{e}) \to (\mathbf{C}, +, \cdot, 1)$$

је морфизам прстенова са јединицом.

Напомена 9. У доказу Теореме 19 видели смо да ако један од редова $\sum a_n$, $\sum b_n$ конвергира апсолутно, а други конвергира, онда конвергира и ред $\sum c_n$ и једнак је њиховом производу. Природно је поставити следеће питање. Претпоставимо да знамо да сва три реда конвергирају, без претпоставке о апсолутној конвергенцији. Да ли је тада сума реда $\sum c_n$ једнака производу сума редова $\sum a_n$ и $\sum b_n$? Видећемо ускоро да је одговор на ово питање потврдан (Последица 17 на стр. 222).

7. Степени редови

7.1. Полупречник конвергенције. Нека је c_n низ комплексних бројева и $a \in \mathbf{C}$. Ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

је функција комплексне променљиве z и назива се *степеним редом* са коефицијентима c_n и центром у a. Следећа теорема показује да је област дефинисаности ове функције диск у комплексној равни (евентуално без неких тачака на граничној кружници).

Теорема 21. *Претпоставимо да ред* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ *конвергира за* $z = z_0$. *Нека је* $\rho := |z_0 - a|$. *Тада ред апсолутно конвергира за свако* z *такво да је* $|z-a| < \rho$.

△ Пошто ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z_0-a)^n$ конвергира, важи $c_n(z_0-a)^n < M$, па из

$$c_n(z-a)^n = c_n(z_0-a)^n\big(\frac{z-a}{z_0-a}\big)^n$$

следи $|c_n(z-a)^n| < Mq^n$, где је

$$q = \big|\frac{z-a}{z_0-a}\big| < 1.$$

Одатле, на основу поредбеног принципа и конвергенције геометријског реда $\sum q^n$ за $q < 1$ следи доказ теореме. ▽

Полупречник највећег диска на коме степени ред конвергира назива се његовим *полупречником конвергенције*. Следећа теорема даје један начин да се он израчуна.

Тврђење 6. *Нека је* c_n *низ комплексних бројева и*

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|}},$$

при чему је $R = 0$ *ако је* $\overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|} = +\infty$ *и* $R = +\infty$ *ако је* $\overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|} = 0$. *Тада степени ред* $\sum c_n(z-a)^n$ *апсолутно конвергира ако је* $|z-a| < R$, *а дивергира ако је* $|z-a| > R$.

△ Доказ следи из Последице 9. ▽

Наравно, применом Даламберовог критеријума (уместо Кошијевог), полупречник конвергенције можемо да израчунамо као

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|},$$

уколико овај лимес постоји.

Пример 59. Полупречник конвергенције степеног реда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ је $+\infty$, па тај ред апсолутно конвергира за све $z \in \mathbf{C}$. ♯

Пример 60. Редови $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ и $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$ су апсолутно конвергентни за све $z \in \mathbf{C}$. ♯

Пример 61. Полупречник конвергенције реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n}$ је 1. ♯

Пример 62. Полупречник конвергенције реда $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$ је 1. ♯

Задатак 51. Доказати да степени ред

$$s(z) := \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n,$$

где су F_n Фибоначијеви бројеви, конвергира на диску $|z| < \phi^{-1}$, где је ϕ златни пресек (видети Задатак 23, на стр. 186) и да је на том диску

$$s(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}.$$

✓

7.2. Непрекидност и диференцијабилност степеног реда. Следећа теорема даје једно важно својство степеног реда.

Теорема 22. *Нека је R полупречник конвергенције реда $\sum c_n(z-a)^n$. Тада је функција*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

непрекидна на скупу $D_R := \{z \in \mathbf{C} \mid |z-a| < R\}$.

△ Претпоставимо да је $a = 0$, што само поједностављује ознаке, а не мења суштину доказа. Нека је $z_0 \in D_R$, тј. $|z_0| = \rho_0 < R$. Нека је $\rho_0 < \rho < R$. Ако је $|z| < \rho$, тада важи

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &= \left| \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z^n - z_0^n) \right| \le \sum_{n=0}^{\infty} |c_n||z^n - z_0^n| \\ &= |z - z_0| \sum_{n=0}^{\infty} |c_n||z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \cdots + z z_0^{n-2} + z_0^{n-1}| \\ &\le |z - z_0| \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| n \rho^{n-1}. \end{aligned}$$

Пошто је R полупречник конвергенције реда $\sum c_n z^n$ (дакле $R = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|}}$) и $\rho < R$, важи

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n| n \rho^{n-1}} = \rho \overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|} = \frac{\rho}{R} < 1,$$

па из Кошијевог критеријума следи да ред $\sum |c_n| n\rho^{n-1}$ конвергира. Означимо његову суму са S. Нека је $\varepsilon > 0$. Тада, ако је $|z| < \rho$ и $|z - z_0| < \varepsilon S^{-1}$ важи $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$, одакле следи непрекидност функције f у z_0. $\bigtriangledown$

На сличан начин се доказује и следећа теорема.

Теорема 23. *Нека је*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n,$$

и нека је R полупречник конвергенције степеног реда на десној страни. Тада је функција $f : (a-R, a+R) \to \mathbf{C}$ бесконачно пута диференцијабилна и важи

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+1) c_n (x-a)^{n-k}.$$

Другим речима, степени ред може да се „диференцира члан по члан". Специјално,

$$f^{(k)}(a) = k! c_k,$$

па је

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.$$

$\triangle$ Нека је

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}.$$

Тада је

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - h(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} - n x_0^{n-1} \right).$$

Израз у загради можемо да напишемо као

$$\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} - n x_0^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k x_0^{n-k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} x_0^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} x_0^{n-k+1} (x^k - x_0^k).$$

Одатле, после још једног факторисања израза $x^k - x_0^k$ и преласка на лимес кад $x \to x_0$ следи закључак теореме. $\bigtriangledown$

Пример 63. Диференцирањем обе стране једнакости

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

добијамо

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

$\sharp$

Задатак 52. Полазећи од геометријског реда

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$$

доказати да је

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

и извести одатле Лајбницову формулу (84) на стр. 76. ✓

Задатак 53. Написати функције

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad g(x) = \frac{1}{1-\rho(x-1)}, \quad g \circ f(x) = \frac{1-x}{1-(\rho+1)x}$$

као суме (геометријских) редова. Применом ди Брунове формуле (25) на стр. 150 у тачки $(x = 0)$ и очитавањем одговарајућих извода као коефицијената степених редова, доказати формулу

$$\sum \frac{k!}{k_1!k_2!\dots k_n!}\rho^k = \rho(1+\rho)^{n-1}$$

где је $k = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ и сумирање се врши по свим $k_1, k_2, \dots, k_n$ таквим да је $k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n = n$. ✓

Пример 64. **(Њутнови идентитети)** Посматрајмо полином

$$p(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - r_i), \tag{46}$$

са нулама $r_1, \dots, r_n$. Њега можемо да напишемо и у виду

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \sigma_j x^{n-j}, \tag{47}$$

где су $\sigma_j = \sigma_j(r_1, \dots, r_n)$ елементарни симетрични полиноми променљивих $r_1, \dots, r_n$:

$$\sigma_j := \begin{cases} \sum_{1\le i_1<\dots<i_j\le n} \prod_{k=1}^{j} r_{i_k}, & j \ge 0 \\ 0, & j < 0 \end{cases}$$

(видети Пример 27 на стр. 65). Диференцирањем израза (47) по x добијамо

$$p'(x) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j (n-j)\sigma_j x^{n-j-1}. \tag{48}$$

Са друге стране, логаритмовањем израза (46) и диференцирањем добијамо

$$\frac{p'(x)}{p(x)} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x - r_i}. \tag{49}$$

Из формуле за суму Геометријског реда (Пример 31 на стр. 188) следи да је

$$\frac{1}{x-r} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1-(x/r)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^k}{x^{k+1}},$$

што примењено на сваки сабирак у (49), даје

$$p'(x) = p(x)\frac{p'(x)}{p(x)} = p(x)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{s_k}{x^{k+1}}, \tag{50}$$

где је

$$s_k = r_1^k + r_2^k + \ldots + r_n^k, \qquad \text{за} \qquad k \in \{0, 1, 2, \ldots\}. \tag{51}$$

Ако у (50) уврстимо (47), и изменимо поредак сумирања (видети Последицу 8 на стр. 191), добијамо

$$p'(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^k\sigma_j s_{k-j}\right)x^{n-k-1}. \tag{52}$$

Изједначавањем коефицијената у изразима (52) и (48) за $p'(x)$ добијамо *Њутнове идентитете*

$$\sum_{m=0}^{j-1}(-1)^m\sigma_m s_{j-m} + (-1)^j j\sigma_j = 0,$$

који повезују елементарне симетричне полиноме $\sigma_j(r_1, \ldots, r_n)$ са симетричним полиномима (51). Прва три Њутнова идентитета су

$$s_1 - \sigma_1 = 0, \qquad s_2 - s_1\sigma_1 + 2\sigma_2 = 0, \qquad s_3 - s_2\sigma_1 + s_1\sigma_2 - 3\sigma_3 = 0.$$

Подсетимо се да смо овакве идентитете већ сусрели при решавању Задатка 98 на стр. 69. ♯

Задатак 54. Нека су a, b, c решења једначине

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0.$$

Израчунати $a^3 + b^3 + c^3$. Упутство: применити Вијетове формуле и Њутнове идентитете. ✓

Напомена 10. Њутнови идентитети из Примера 64 су специјални случај *Основне теореме о симетричним полиномима* по којој сваки симетрични[11] полином n променљивих $r_1, \ldots, r_n$ може да се представи као полином по променљивим $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$.

Специјално, *дискриминанта* n променљивих $r_1, \ldots, r_n$ је симетрични полином

$$D = \prod_{k<j}(r_k - r_j)^2$$

и може да се представи као полином по $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$. ◇

Задатак 55. Изразити симетрични полином

$$P(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k\neq j} x_k x_j^2$$

n променљивих помоћу елементарних симетричних полинома. ✓

[11] Полином је *симетричан* ако се не мења при пермутацији променљивих. Елементарни симетрични полиноми $\sigma_j(r_1, \ldots, r_n)$ и полиноми $s_k(r_1, \ldots, r_n)$ из Примера 64 су симетрични. Полином $p(r_1, r_2, r_3) = r_1 r_2$ није симетричан јер је $p(r_1, r_2, r_3) = r_1 r_2 \neq r_3 r_2 = p(r_3, r_2, r_1)$.

Теорема 24. **(Абелова теорема)** *Нека је* $\sum c_n$ *конвергентан ред комплексних бројева и нека је*

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad за \quad -1 < x < 1.$$

Тада је $\lim\limits_{x\to 1-0} h(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$.

Приметимо да Абелова теорема *не следи* из Теореме 22: из ње следи само непрекидност функције h на отвореном интервалу $(-1, 1)$. Предлажемо читаоцу да се, пре него што пређе на доказ Абелове теореме, увери да доказ Теореме 22 не пролази за рубне тачке (± 1 у нашем случају).

$\triangle$ Нека је

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} c_k, \qquad s_\infty := \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

Из $c_n = s_n - s_{n-1}$ следи, слично као у доказу Абелове сумационе формуле (формула (30) на 204. страни)

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n, \tag{53}$$

а из очигледног идентитета $\sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = 1$ следи

$$s_\infty = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_\infty x^n. \tag{54}$$

Одузимањем (53) од (54) добијамо

$$s_\infty - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} (s_\infty - s_n) x^n. \tag{55}$$

Нека је $\varepsilon > 0$. Докажимо да је лева страна у(55) по модулу мања од ε. Из $s_n \to s_\infty$ кад $n \to \infty$ следи да постоји $m \in \mathbf{N}$ такво да важи

$$n > m \quad \Rightarrow \quad |s_\infty - s_n| < \varepsilon/2. \tag{56}$$

Напишимо израз на десној страни у (55) као збир

$$(1-x) \sum_{n=0}^{m} (s_\infty - s_n) x^n + (1-x) \sum_{n=m+1}^{\infty} (s_\infty - s_n) x^n.$$

Из (56) и $\sum x^n = 1/(1-x)$ следи да је други сабирак по модулу мањи од $\varepsilon/2$. Пошто је сума у првом сабирку коначна, следи да је за x довољно близу 1 и први сабирак по модулу мањи од $\varepsilon/2$. Тиме је теорема доказана. $\triangledown$

Напомена 11. Приметимо да смо Теорему 22, о непрекидности степеног реда на унутрашњости домена, формулисали и доказали за комплексне редове (тј. установили смо непрекидност по комплексној променљивој z). Абелову теорему смо доказали под претпоставком да је x реална променљива – функција h пресликава интервал $(0, 1]$ у $\mathbf{C}$. Природно је поставити питање да ли Абелова

теорема важи и у случају комплексних редова. Одговор је следећи. *Ако комплексни ред*

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

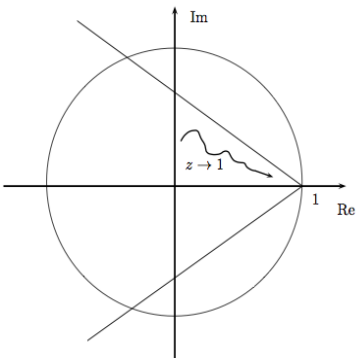
конвергира за $|z| < 1$ *и ако ред* $\sum c_n$ *конвергира, онда*

$$h(z) \to \sum_{n=0}^{\infty} c_n \tag{57}$$

кад z *тежи ка 1, али тако да остаје унутар области*

$$\frac{|1-z|}{1-|z|} < C$$

за неку фиксирану константу $C > 0$. Специјално, (57) важи ако $z \to 1$ унутар оштрог угла са теменом у тачки 1 који лежи унутар круга $|z| < 1$. Пошто је пречник круга увек унутар таквог угла, јасно је да је реална верзија Абелове теореме последица комплексне.



Наравно, овако формулисана Абелова теорема важи и за произвољну рубну тачку z_0 (а не само $z_0 = 1$), као и за редове са произвољним полупречником конвергенције R (а не само $R = 1$), што се лако види применом хомотетије и ротације.

Међутим, у комплексном случају функција h није непрекидна у рубним тачкама диска конвергенције, чак и ако степени ред којим је она дефинисана у тим тачкама конвергира. ◇

Теоремом 24 мотивисана је следећа дефиниција.

Дефиниција 10. Ред $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ се назива *збирљивим по Абелу* ако постоји

$$\lim_{x \to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \tag{58}$$

Ако је ред $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ збирљив по Абелу, гранична вредност (58) назива се његовом *сумом по Абелу*.

Из Теореме 24 следи да ако је ред конвергентан, онда је он збирљив по Абелу и његова сума у обичном смислу је једнака његовој суми по Абелу. Обрнуто није тачно:

Пример 65. Ред $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ је дивергентан, а пошто је

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{1+x},$$

његова сума по Абелу је $\frac{1}{2}$. ♯

Овај пример показује да обрнута импликација у Абеловој теореми не важи; међутим, под одређеним додатним условима (који се називају *Тауберовим условима*) важи и обрнуто. Теореме тог типа називају се *Тауберовим теоремама*. Једна од њих је следећа.

Теорема 25. *Ако за низ c_n важи*

$$\lim_{n\to\infty} nc_n = 0,$$

онда из постојања лимеса

$$\lim_{x\to 1-0}\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = A$$

следи конвергенција реда $\sum c_n$ и важи

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = A.$$

△ Нека је

$$\delta_n = \sup_{m\geq n}|mc_m|.$$

Низ δ_n је опадајући, а из услова теореме следи да $\lim_{n\to\infty}\delta_n = 0$. За $n_0 \in \mathbb{N}$ важи

$$\sum_{n=0}^{n_0} c_n - A = \sum_{n=0}^{n_0} c_n(1-x^n) - \Big(\sum_{n=n_0+1}^{\infty} c_n x^n - A\Big).$$

Одатле, уз коришћење неједнакости

$$1-x^n = (1-x)(1+x+\cdots+x^{n-1}) \leq n(1-x)$$

следи

$$\begin{aligned}\left|\textstyle\sum_{n=0}^{n_0} c_n - A\right| &\leq \textstyle\sum_{n=0}^{n_0}|nc_n| + \sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{|nc_n|x^n}{n} + \left|\sum_{n=n_0+1}^{\infty} c_n x^n - A\right| \\ &\leq (1-x)n_0\delta_0 + \frac{\delta_{n_0+1}}{(n_0+1)(1-x)} + \left|\sum_{n=n_0+1}^{\infty} c_n x^n - A\right|.\end{aligned}$$

Нека је $\varepsilon > 0$. Изаберимо x тако да важи

$$(1-x)n_0 = \varepsilon.$$

Тада је x произвољно близу 1 за довољно велико n_0. Нека је n_0 изабрано тако да је $\delta_{n_0+1} < \varepsilon^2$ и x довољно близу 1 да важи

$$\left|\sum_{n=n_0+1}^{\infty} c_n x^n - A\right| < \varepsilon.$$

Тада је

$$\Big|\sum_{n=0}^{n_0} - A\Big| \leq (2+\delta_0)\varepsilon,$$

одакле следи тврђење теореме. ▽

Навешћемо још један метод „сумирања дивергентних редова".

Дефиниција 11. Нека су s_n парцијалне суме реда $\sum c_n$. Ред $\sum c_n$ је *збирљив по Чезару*[12] ако конвергира низ аритметичких средина

$$\sigma_n := \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1}.$$

Гранична вредност низа σ_n назива се *сумом реда* Σc_n *по Чезару.*

Задатак 56. Доказати да је конвергентан ред збирљив по Чезару и да је његова сума по Чезару једнака његовој суми у обичном смислу. (Упутство: применити Штолцову теорему.) ✓

Задатак 57. Наћи суму реда $\sum(-1)^n$ по Чезару. ✓

Ако је ред $\sum c_n$ збирљив по Чезару, онда је

$$c_n = o(n). \tag{59}$$

Заиста, из $\sigma_n \to \sigma_\infty$ кад $n \to \infty$ следи

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\sigma_n - n\sigma_{n-1}}{n} = 0$$

следи

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \Big(\frac{s_n}{n} - \frac{n-1}{n}\frac{s_{n-1}}{n-1}\Big) = 0,$$

што је еквивалентно са (59).

Задатак 58. Доказати да је ред $\sum(-1)^n n$ збирљив по Абелу, али није по Чезару. (Упутство: користити (59).) ✓

Напомена 12. Може да се докаже да је сваки ред који је збирљив по Чезару збирљив и по Абелу. Идеја доказа се састоји у следећем. Двоструком применом поступка из доказа Абелове сумационе формуле (стр. 204) добија се

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\sigma_n x^n. \tag{60}$$

Из Примера 63 на 215. страни следи

$$1 = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n. \tag{61}$$

Ако помножимо обе стране у (61) са Чезаровом сумом σ_∞ и од добијеног израза одузмемо (60) добијамо

$$\sigma_\infty - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(\sigma_\infty - \sigma_n)x^n.$$

Израз на десној страни можемо да напишемо као збир два реда (слично као у доказу Теореме 24) и докажемо је он по модулу мањи од унапред изабраног ε ако је x довољно близу 1. Детаље препуштамо читаоцу. ◇

Као последицу Абелове теореме, испуњавамо обећање дато у Напомени 9 на 213. страни.

[12] Чезаро (E. Cesàro, 1859–1906), италијански математичар

Последица 17. *Нека су a_n и b_n комплексни низови и*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Ако сва три реда $\sum a_n$, $\sum b_n$, $\sum c_n$ конвергирају, онда важи

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big) \cdot \Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n. \tag{62}$$

$\triangle$ Нека је

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

Из Тврђења 6 следи да редови $\sum a_n x^n$, $\sum b_n x^n$, $\sum c_n x^n$ апсолутно конвергирају за $|x| < 1$, па из Теореме 19 следи да је $f(x) \cdot g(x) = h(x)$. Одатле, преласком на лимес кад $x \to (1-0)$ и применом Теореме 24 добијамо (62). $\triangledown$

Пример 66. Размотримо следећи задатак, који је поједностављење сличног проблема који је разматрао Ђерђ Поја[13]: на колико начина новчаница од 100 динара може да се размени за новчиће од 2 и 5 динара? Ово питање је еквивалентно питању колико једначина

$$2x_1 + 5x_2 = 100$$

има ненегативних целобројних решења. Посматрајмо општији проблем: нека је a_n број ненегативних целобројних решења једначине

$$2x_1 + 5x_2 = n.$$

Множењем степених редова, лако је видети да су a_n коефицијенти уз t^n у следећем изразу:

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty} t^{2k}\Big) \cdot \Big(\sum_{k=0}^{\infty} t^{5k}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$

Множењем редова на левој страни добијамо број који нам треба: $a_{100} = 11$.

Редови на левој страни су геометријски, па њихове збирове можемо и експлицитно да израчунамо. Тако добијамо

$$\frac{1}{(1-t^2)(1-t^5)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$

Проблем који је 1956. поставио Поја био је: на колико начина новчаница од једног долара може да се размени за новчиће од 1, 5, 10, 25 и 50 центи. Одговор 292 добија се као коефицијент уз t^{100} у развоју функције

$$f(t) = \frac{1}{(1-t)(1-t^5)(1-t^{10})(1-t^{25})(1-t^{50})} \tag{63}$$

у степени ред. За то је довољно узети прва три члана развоја функције

$$\frac{1}{1-t^{50}} = 1 + t^{50} + t^{100} + \dots$$

у геометријски ред по $q = t^{50}$, помножити их са првих пет чланова развоја функције $1/(1-t^{25})$ итд. Ово подразумева дугачак рачун, који може знатно

[13] Поја (Pólya György, 1887–1985), мађарски математичар

да се скрати ако приметимо да су сви степени променљиве t у (63) дељиви са 5, сем првог. Пошто је

$$1-t=\frac{1-t^5}{1+t+t^2+t^3+t^4},$$

функцију (63) можемо да напишемо у облику

$$f(t)=(1+t+t^2+t^3+t^4)\frac{1}{(1-t^5)^2(1-t^{10})(1-t^{25})(1-t^{50})}. \tag{64}$$

Пошто су сви степени променљиве t у разломку

$$\frac{1}{(1-t^5)^2(1-t^{10})(1-t^{25})(1-t^{50})} \tag{65}$$

дељиви са 5, у развоју (64) се појављује t^{100} само као производ слободног члана 1 полинома $1+t+t^2+t^3+t^4$ са чланом t^{100} у развоју разломка (65). Ако у (64) уведемо смену $s=t^5$, проблем се своди на налажење коефицијента уз s^{20} у развоју разломка

$$g(s)=\frac{1}{(1-s)^2(1-s^2)(1-s^5)(1-s^{10})}$$

у степени ред. Сада функцију $g(s)$ можемо да поједноставимо на исти начин, користећи чињеницу да је се променљива s јавља са степенима који су делитељи броја 20 и то да је

$$\begin{aligned}1-s^{20} &= (1-s)(1+s+s^2+\ldots+s^{19})\\ &= 1-(s^2)^{10}=(1-s^2)(1+s^2+s^4+\ldots s^{18})\\ &= (1-s^5)(1+s^5+s^{10}+s^{15})\\ &= (1-s^{10})(1+s^{10}).\end{aligned}$$

Тако добијамо да је

$$g(s)=\frac{(1+s+s^2+\ldots+s^{19})^2(1+s^2+s^4+\ldots s^{18})(1+s^5+s^{10}+s^{15})(1+s^{10})}{(1-s^{20})^5}.$$

Остаје још само да приметимо се примети да је $(1-s^{20})$ сума геометријског реда $\sum(s^{20})^n$, па множење овог реда самим собом 5 пута даје

$$(1-s^{20})^{-5}=1+5s^{20}+\ldots, \tag{66}$$

где је са $\ldots$ означен део развоја по степенима већим од 20, који нас не занима. Тражени коефицијент уз s^{20} сада се израчунава множењем израза (66) и бројиоца у изразу за $g(s)$. ♯

Појам о коме је било речи у претходном примеру издвајамо следећом дефиницијом.

Дефиниција 12. Нека је дат низ a_n комплексних бројева. Функција

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n \tag{67}$$

назива се *генеришућом функцијом* низа a_n. ◊

Приметимо да у претходној дефиницији нисмо ништа рекли о домену функције f (тј. области конвергенције степеног реда којим је она дефинисана), који може да буде и празан скуп. Зато често кажемо и да је генеришућа функција низа a_n *формални степени ред* на десној страни у (67).

Функције

$$\frac{1}{(1-t^2)(1-t^5)} \qquad \text{и} \qquad f(t)=\frac{1}{(1-t)(1-t^5)(1-t^{10})(1-t^{25})(1-t^{50})}$$

у Примеру 66 биле су генеришуће функције низова чији смо стоти члан желели да одредимо. Придруживање генеришуће функције низу нам некад олакшава решавање проблема везаног за тај низ, захваљујући чињеници да за аналитичке функције имамо на располагању богатији математички апарат него за низове. Следећи примери дају још неке илустрација тога.

Пример 67. У Примеру 19 на стр. 43 смо разматрали проблем поделе k карата за позориште групи од n студената, тако да сваки студент може да добије највише једну карту. Питање је било на колико начина може да се изврши та подела. Ако означимо тај тражени број начина са a_k, можемо да кажемо да смо проблем решили помоћу његове генеришуће функције

$$f(t)=(1+t)^n.$$

Посматрајмо сада мало другачији проблем. Претпоставимо да групи од n студената треба да поделимо k карата за позориште, али тако да сваки студент може да добије више карата. На колико начина то можемо да остваримо?

Као и у Примеру 19 на стр. 43, сваком студенту можемо да доделимо један члан израза

$$1+t+t^2+t^3\ldots,$$

тако да студенту који је добио p карата доделимо ознаку t^p. Генеришућа функција овог проблема је

$$f(t)=(1+t+t^2+t^3\ldots)^n,$$

тражени број комбинација је коефицијент уз t^k. Из формуле за збир геометријског реда следи да је

$$f(t)=\left(\frac{1}{1-t}\right)^n=(1-t)^{-n},$$

па је тражени број $\binom{-n}{k}$. ♯

Пример 68. Нека је

$$F(t)=\sum_{n=0}^{\infty}F_nt^n \tag{68}$$

генеришућа функција Фибоначијевог низа. Подсетимо се да Фибоначијев низ F_n, који смо дефинисали на стр. 34, задовољава рекурентну релацију

$$F_{n+1}=F_n+F_{n-1}, \qquad (n\in\mathbf{N},\ F_0=F_1=1).$$

Ако ову једнакост поможимо са t^n, а затим сумирамо по n, на левој страни добијамо

$$\sum_{n=1}^{\infty}F_{n+1}t^n=\frac{F(t)-1-t}{t} \tag{69}$$

а на десној

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n t^n + \sum_{n=1}^{\infty} F_{n-1} t^n = F(t) - 1 + tF(t). \tag{70}$$

Из (69) и (70) следи да је генеришућа функција Фибоначијевог низа

$$F(t) = \frac{1}{1 - t - t^2}.$$

Нуле полинома $1 - t - t^2$ су

$$r_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

па је

$$F(t) = \frac{1}{(t - r_+)(t - r_-)}.$$

Лако се види да је други запис ове функције

$$F(t) = \frac{1}{r_+ - r_-} \cdot \frac{1}{t}\left(\frac{1}{1 - tr_+} - \frac{1}{1 - tr_-}\right) = \frac{1}{t\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1 - tr_+} - \frac{1}{1 - tr_-}\right).$$

Сваки од сабирака у последњем изразу можемо да развијемо у степени ред, користећи формулу за збир геометријског реда

$$\frac{1}{1 - tr_{\pm}} = \sum_{n=0}^{\infty} r_{\pm}^n t^n.$$

Одатле добијамо да је

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=1}^{\infty} (r_+^n - r_-^n) t^{n-1}. \tag{71}$$

Из (68) и (71) добијамо експлицитну формулу Фибоначијевог низа

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(r_+^{n+1} - r_-^{n+1}).$$

Приметимо да из овог израза можемо директно да изведемо резултат Задатка 23 на стр. 186. ♯

Пример 69. Нека је a_n низ задат рекурентном релацијом

$$a_{n+1} = 2a_n + 1, \qquad a_0 = 0. \tag{72}$$

Овај низ, са општијим избором почетног члана, смо већ посматрали у Задатку 20 на стр. 185.

Покажимо како на изучавање овог низа можемо да применимо генеришуће функције. Нека је

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \tag{73}$$

генеришућа функција. Користећи рекурентну релацију и услов $a_0 = 0$, њу можемо да напишемо у облику

$$f(t) = t \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} t^n = t \sum_{n=0}^{\infty} (2a_n + 1) t^n = 2t \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} t^n.$$

Први сабирак у последњем изразу је $2tf(t)$, а други је збир геометријског реда. Тако добијамо

$$f(t) = 2tf(t) + \frac{1}{1-t},$$

а одатле, решавањем по $f(t)$,

$$f(t) = \frac{t}{(1-t)(1-2t)}.$$

Последњи израз можемо да напишемо у облику

$$f(t) = t\left(\frac{1}{1-2t} - \frac{1}{1-t}\right).$$

Оба сабирка на десној страни можемо да развијемо у геометријски ред. Тако добијамо

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(2^n - 1)t^n.$$

Изједначавањем овог израза са (73) добијамо експлицитну формулу

$$a_n = 2^n - 1$$

за низ (72). ♯

Задатак 59. Наћи експлицитну формулу за низ a_n задат рекурентном једначином (72), али са почетним условом $a_0 = 2$. ✓

Задатак 60. Решити диференцну једначину

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 4a_n, \qquad a_0 = 1,\ a_1 = 2$$

применом генеришућих функција. Упутство: доказати да функција

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

може, захваљујући диференцној једначини коју задовољава низ a_n, да се изрази у виду:

$$f(t) = \frac{1-3t}{4t^2 - 5t + 1}.$$

Затим ову рационалну функцију представити помоћу Теореме 2 на стр. 100 као збир два разломка који могу да се развију у геометријски ред. ✓

Задатак 61. Нека је f_p генеришућа функција низа $a_0 = 0$, $a_n = n^p$ за $n \geq 1$.

(а) Доказати да је

$$f_0(t) = \frac{t}{1-t}, \quad f_1(t) = \frac{t}{(1-t)^2}, \quad f_2(t) = \frac{t(t+1)}{(1-t)^3}, \quad f_3(t) = \frac{t(t^2+4t+1)}{(1-t)^4}.$$

(б) Наћи $f_4(t)$.

(в) Помоћу добијених генеришућих функција израчунати суме

$$s_p(n) := 1^p + 2^p + \ldots + n^p \qquad \text{за} \qquad p \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Упоредити добијени резултат са Задатком 31 на стр. 27.

Упутство: за (а) и (б) користити формулу за збир геометријског реда (за $p = 0$) и правило диференцирања степеног реда. За (в), нека је $g_p(t)$ генеришућа функција низа $s_p(n)$. Множењем израза

$$s_p(n) := s_p(n-1) + n^p$$

са t^n и сумирањем, показати да је $g_p(t) = tg_p(t) + f_p(t)$. Изразити одатле g_p помоћу (а) и (б) и наћи n–ти члан степеног реда $g_p(t)$, помоћу развоја функције $(1-t)^{-(p+1)}$. ✓

Задатак 62. Нека је $f(t)$ генеришућа функција низа a_n.

(а) Доказати да је $tf'(t)$ генеришућа функција низа na_n.

(б) Доказати да је $(1-t)^{-1}f(t)$ генеришућа функција низа $s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$.

(в) Доказати да је

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)t^n = \frac{1}{1-t}\log\left(\frac{1}{1-t}\right)$$

за $|t| < 1$. ✓

7.3. Представљање функција степеним редовима. За функцију која се може представити степеним редом

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \tag{74}$$

кажемо да је *аналитичка у тачки* z_0. Ако је функција аналитичка у свакој тачки домена, називамо је *аналитичком функцијом*. Ред на десној страни у (74) називамо *Тејлоровим*[14] *редом функције* f. Аналитичке функције комплексне променљиве су предмет изучавања комплексне анализе; ми ћемо овде дати примере неких реалних аналитичких функција реалне променљиве.

Најједноставније аналитичке функције су полиноми, за које је сума (74) коначна, а међу њима су најједноставније линеарне функције. Следећа лема показује како се оне могу окарактерисати као решења једне *функционалне једначине*, тј. једначине у којима је непозната функција. Функционална једначина (β) у следећој леми назива се *Кошијевом једначином*.

Лема 12. *Нека је* $a \in \mathbf{R}$. *За функцију* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *следећа два тврђења су еквивалентна.*

(α) $f(x) = ax$

(β) f *је непрекидна и задовољава услове* $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $f(1) = a$.

$\triangle$ Импликација (α)⇒(β) је очигледна. Из

$$a = f(1) = f(1+0) = f(1) + f(0) = a + f(0)$$

следи $f(0) = 0$, а одатле и из

$$0 = f(0) = f(1 + (-1)) = f(1) + f(-1)$$

следи $f(-1) = -f(1) = -a$. Одатле се, применом индукције и услова (β) лако доказује да за све $m \in \mathbf{Z}$ важи $f(m) = ma$.

[14] Тејлор (Brook Taylor, 1685–1731), енглески математичар

Нека је $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$, $q = mn^{-1} \in \mathbf{Q}$. Тада је

$$qa = qf(1) = mn^{-1}f(nn^{-1}) = mn^{-1}nf(n^{-1}) = mf(n^{-1}) = f(mn^{-1}),$$

тј. $f(q) = aq$ за све $q \in \mathbf{Q}$. На крају, за произвољно $x \in \mathbf{R}$ постоји низ $q_n \in \mathbf{Q}$,такав да $q_n \to x$ кад $n \to \infty$. Одатле и из непрекидности функције f следи

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(q_n) = \lim_{n\to\infty} aq_n = ax,$$

чиме је доказана импликација $(\beta)\Rightarrow(\alpha)$. ▽

Лема 13. *За функцију $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ следећа тврђења су еквивалентна.*

(α) $g(x) = e^x$

(β) *g је непрекидна и задовољава услове* $g(x+y) = g(x)\cdot g(y)$, $g(1) = e$

(γ) $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

(δ) *g је диференцијабилна и задовољава услове* $g'(x) = g(x)$, $g(0) = 1$.

△ Импликација $(\alpha)\Rightarrow(\beta)$ је очигледна. Функција $f(x) = \ln g(x)$ задовољава услов (β) Леме 12 са $a = 1$, па је $f(x) = x$. Одатле следи $g(x) = e^x$, чиме је доказана еквиваленција $(\alpha)\Leftrightarrow(\beta)$.

Ред $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ апсолутно конвергира за свако $x \in \mathbf{R}$ (Пример 59). Из Теореме 22, Теореме 19 и формуле (14) на стр. 179 лако следи да функција g дефинисана са (γ) задовољава услове (β). Пошто из еквиваленције $(\alpha)\Leftrightarrow(\beta)$ следи да је таква функција јединствена, тиме је доказана еквиваленција $(\beta)\Leftrightarrow(\gamma)$.

Импликација $(\alpha)\Rightarrow(\delta)$ је очигледна. Претпоставимо да важи (δ). Тада је

$$\frac{d}{dx}\big(g(x)e^{-x}\big) = e^{-x}g'(x) - e^{-x}g(x) = 0,$$

па је $g(x)e^{-x}$ константна функција. Из $g(0) = 1$ следи $g(x)e^{-x} = g(0)e^0 = 1$, па је $g(x) = e^x$. Тиме је доказана и еквиваленција $(\alpha)\Leftrightarrow(\delta)$. ▽

Задатак 63. Доказати да су за функцију $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ следећа два тврђења еквивалентна.

(α) $h(x) = \ln x$

(β) h је непрекидна и важи $h(x\cdot y) = h(x) + h(y)$, $h(e) = 1$. ✓

Задатак 64. Нека је $p \in \mathbf{R}$. Доказати да су за функцију $k : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ следећа два тврђења еквивалентна.

(α) $k(x) = x^p$

(β) k је непрекидна и важи $k(x\cdot y) = k(x)\cdot k(y)$, $\ln k(e) = p$. ✓

Задатак 65. Доказати да тврђења Леме 12, Леме 13, Задатка 63 и Задатка 64 важе ако се услов непрекидности у (β) замени

(а) условом монотоности

(б) условом ограничености на неком интервалу $[t_0, t_1]$ за $t_0 < t_1$. ✓

Лема 13 нам омогућава да дефиницију експоненцијалне функције проширимо и на комплексне бројеве.

Дефиниција 13. Нека је $z \in \mathbf{C}$.

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Из Примера 59 на стр. 214 следи да је функција $z \mapsto e^z$ дефинисана на целој комплексној равни $\mathbf{C}$.

Приметимо да формула (γ) у Леми 13 следи и из Тејлорове формуле. Заиста, ако у Примеру 25 на стр. 153 узмемо остатак у Лагранжовом облику, добијамо

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} e^{\xi_n} x^{n+1}$$

за неко $\xi_n \in (-|x|, |x|)$. Одатле, преласком на лимес и коришћењем чињенице да је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)!} e^{|x|} x^{n+1} = 0$$

(Пример 21 на стр 178) добијамо формулу (γ). На сличан начин добијамо

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \tfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \tfrac{x^{2n}}{(2n)!},$$
$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \tfrac{x^n}{n}, \qquad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \tbinom{\alpha}{n} x^n.$$

за свако x за које редови на десној страни конвергирају.

Задатак 66. Одредити за које x ови редови конвергирају.

Упутство: најсложенији је случај биномног реда

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \tag{75}$$

који је коначан ако је α природан број, а ако није, онда ред

- на итервалу $-1 < x < 1$ апсолутно конвергира за све α;
- у тачки $x = 1$ конвергира апсолутно за $\alpha \geq 0$, условно за $-1 < \alpha < 0$ и дивергира за $\alpha \leq -1$;
- у тачки $x = -1$ апсолутно конвергира за $\alpha \geq 0$ и дивергира за $\alpha < 0$

(за испитивање конвергенције на рубу интервала видети Пример 54 на стр. 202 и Задатке 38 и 39 после њега). Приметимо да за $\alpha = 0$ и $x = -1$ лева страна у (75) није дефинисана. ✓

Сада је природно дати и следећу дефиницију

Дефиниција 14.

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \tfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \tfrac{z^{2n}}{(2n)!},$$
$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \tfrac{z^n}{n}, \qquad (1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \tbinom{\alpha}{n} z^n.$$

за свако $z \in \mathbf{C}$ за које редови на десној страни конвергирају.

Очигледно је да се за $z \in \mathbf{R}$ овом дефиницијом добијају стандардне тригонометријске, логаритамске и степене функције реалне променљиве. Из Теореме 22 следи да су ове функције, као и функција e^z, непрекидне.

Пример 70. **(Ојлерова формула)** Ако у редовима којим се представљају функције e^z, $\sin z$ и $\cos z$ ставимо $z = ix$, упоређивањем добијених израза добијамо формулу

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Ово је *Ојлерова формула*. ♯

Користећи Ојлерову формулу, Моаврову формулу (Задатак 112 на стр. 78) можемо да напишемо у виду $(e^{ix})^n = e^{inx}$. Овај запис можемо да схватимо и као други доказ Моаврове формуле, ако претходно решимо следећи задатак.

Задатак 67. Применом Теореме 19 доказати да је $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$ за $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$. Извести одатле формулу $(e^z)^n = e^{nz}$. ✓

Задатак 68. Доказати да је $(e^{ix})' = ie^{ix}$ на два начина:
(а) користећи Ојлерову формулу
(б) по дефиницији извода, користећи Задатак 67 и Теорему 22. ✓

Задатак 69. Доказати да је за $z \in \mathbf{C}$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z.$$

Другим речима, уопштити Пример 22 на стр. 124 на комплексне бројеве. Упутство: приметити да је, за $z = x + iy$,

$$\left|\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right| = \left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^{n/2}, \quad \arg\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = n \cdot \operatorname{arctg} \frac{y/n}{1 + x/n}$$

и да из $|z_n| \to |z_\infty|$, $\arg(z_n) \to \arg(z_\infty)$ следи $z_n \to z_\infty$. Применити Ојлерову формулу. ✓

Задатак 70. Колико ненегативних целобројних решења има једначина

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{10} = 50?$$

Упутство: показати да је генеришућа функција за овај проблем $f(t) = (1-t)^{-10}$ (видети Пример 66 на стр. 222 и Дефиницију 12 после њега). Показати да је тражени број коефицијент уз t^{50} у развоју

$$(1-t)^{-10} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-10}{n} (-t)^n$$

и наћи тај број. ✓

Задатак 71. На колико начина природан број n може да се представи као збир k природних бројева? Одговор: $\binom{n+k-1}{n}$ ♯

Пример 71. (Риманова[15] зета функција) Функција

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \tag{76}$$

је дефинисана за комплексне бројеве z у полуравни $\operatorname{Re}(z) > 1$. Заиста, нека је $z = x + iy$. Из

$$|n^z| = |e^{z \log n}| = |e^{x \log n} e^{iy \log n}| = n^x$$

(пошто је $|e^{i\theta}| = 1$ и $e^{x \log x} = n^x$), видимо да ред на десној страни у (76) конвергира за $x > 1$. Функција

$$\zeta : \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 1\} \to \mathbf{R}, \qquad \zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

[15] Риман (Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826–1866) немачки математичар

назива се *Римановом зета функцијом*. Ова функција игра значајну улогу у теорији бројева. Указаћемо на једну њену везу са простим бројевима. Нека је P скуп свих простих бројева, поређаних у низ:

$$P = \{p_1, p_2, \ldots\}.$$

За Риманову зета функцију важи *Ојлерова формула*

$$\zeta(z) = \prod_{p\in P} \frac{1}{1-p^{-z}}. \tag{77}$$

Заиста, сваки природан број n може на јединствен начин да се напише у облику

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots, \qquad \alpha_j \in \{0\} \cup \mathbf{N}.$$

Одатле добијамо

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \lim_{k\to\infty} \sum_{\alpha_1\geq 0} \sum_{\alpha_2\geq 0} \cdots \sum_{\alpha_k\geq 0} \frac{1}{(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k})^z}.$$

Применом дистрибутивног закона на *коначне* суме у последњем изразу, добијамо

$$\zeta(z) = \lim_{k\to\infty} \Big(\sum_{\alpha_1\geq 0} \frac{1}{p_1^{z\alpha_1}} \Big) \Big(\sum_{\alpha_2\geq 0} \frac{1}{p_2^{z\alpha_2}} \Big) \cdots \Big(\sum_{\alpha_k\geq 0} \frac{1}{p_k^{z\alpha_k}} \Big). \tag{78}$$

Из израза за збир геометријског реда следи

$$\sum_{\alpha_j\geq 0} \frac{1}{p_j^{z\alpha_j}} = \frac{1}{1-p_j^{-z}},$$

па из (78) следи

$$\zeta(z) = \lim_{k\to\infty} \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{1-p_j^{-z}},$$

што доказује формулу (77).

Из Ојлерове формуле (77) следи да је

$$\sum_{p\in P} \frac{1}{p} = +\infty. \tag{79}$$

Заиста, из (77) следи да је за реалан број $x > 1$,

$$\log \zeta(x) = -\sum_{p\in P} \log(1-p^{-x}).$$

Ако употребимо Тејлорову формулу за логаритам, одатле добијамо

$$\log \zeta(x) = -\sum_{p\in P} (p^{-x} + O(p^{-2x})). \tag{80}$$

Пошто је

$$\sum_{p\in P,\ p\leq m} p^{-2x} < \sum_{n=1}^{m} n^{-2x},$$

из конвергенције реда $\sum n^{-2}$ следи да ред $\sum p^{-2x}$ конвергира за $x \geq 1$. Када би конвергирао и ред (79), израз на десној страни у (80) би био коначан за $x = 1$, што је немогуће, јер је

$$\lim_{x\to 1+0} \zeta(x) = +\infty, \tag{81}$$

због дивергенције реда $\sum \frac{1}{n}$ (видети Задатак 72 ниже). Тиме је доказано (79).

Приметимо да из (79) добијамо још један доказ да има бесконачно много простих бројева (елементарнији доказ смо видели у Задатку 39 на стр. 30). ♯

Задатак 72. Доказати да је функција

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto \zeta(x) \in \mathbf{R}$$

опадајућа и конвексна. Закључити да је она непрекидна и скицирати њен график. Специјално, доказати формулу (81). ✓

Пример 72. Нека је $\sum a_m$ апсолутно конвергентан ред и

$$f(z) = \sum_{m=2}^{n} a_m z^m$$

њиме дефинисана аналитичка функција. Из Теореме 16 на стр. 208 следи *Флажоле*[16]*–Вардијева*[17] *формула* [**19**]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n^{-1}) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \zeta(n),$$

где је ζ Риманова зета функција из Примера 71. Заиста, из

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=2}^{\infty} |a_m n^{-m}| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=2}^{\infty} |a_m n^{-2}| = \left(\sum_{m=2}^{\infty} |a_m|\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}\right)$$

и апсолутне конвергенције реда $\sum a_m$ следи оправданост примене Теореме 16. Специјално, полазећи од Лајбницовог израза за број π (84) на стр. 76

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n-3}\right)$$

и применом Флажоле–Вардијеве формуле на функцију $f(z) = \frac{z}{4-3z} - \frac{z}{4-z}$ може да се изведе израз

$$\pi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 1}{4^n} \zeta(n+1).$$

којим се број π изражава помоћу ζ–функције. ♯

Задатак 73. *Дирихлеова ета функција* је функција

$$\eta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^z}.$$

Доказати да је

$$\eta(z) = (1 - 2^{1-z})\zeta(z) \qquad \text{за} \qquad \mathrm{Re}(z) > 1,$$

где је ζ Риманова зета функција ✓

[16] Флажоле (Philippe Flajolet, 1948–2011), француски математичар

[17] Варди (Ilan Vardi, 1957), канадски математичар

Пример 73. (Дирихлеови редови) Риманова зета функција и Дирихлеова функција из Задатка 73 су специјални случајеви *Дирихлеових редова*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}.$$

За дати комплексан број z, означимо са $\mathcal{D}_z$ скуп свих комплексних низова a_n таквих да Дирихлеов ред $\sum a_n n^{-z}$ апсолутно конвергира. За $\{a_n\}, \{b_n\} \in \mathcal{D}_z$ са

$$a_n \star b_n := \sum_{d|n} a_d b_{n/d} = \sum_{jk=n} a_j b_k$$

је дефинисана операција (тзв. *Дирихлеова конволуција* или *Дирихлеов производ*), таква да је $(\mathcal{D}(z), +, \star)$ комутативни прстен. Из Теореме 19 на стр. 211 следи да, ако два Дирихлеова реда $\sum a_n n^{-z}$ и $\sum b_n n^{-z}$ апсолутно конвергирају у некој тачки $z \in \mathbf{C}$, онда је у тој тачки

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^z}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \star b_n}{n^z}. \tag{82}$$

Другим речима, пресликавање

$$D_z : (\mathcal{D}(z), +, \star) \to (\mathbf{C}, +, \cdot), \qquad D_z(\{a_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}$$

је хомоморфизам прстенова.

Наравно, Дирихлеово множење дефинисано и на ширем скупу $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ *свих* комплексних низова $a : \mathbf{N} \to \mathbf{C}$. Пресликавање

$$e : \mathbf{N} \to \mathbf{C}, \qquad e(n) = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ 0, & n \geq 2 \end{cases}$$

дефинише низ $e_n := e(n)$ који је неутрал за множење $\star$:

$$a_n \star e_n = e_n \star a_n = a_n.$$

Ако је $G \subset \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ скуп свих комплексних низова a_n таквих да је $a_1 \neq 0$, онда је $(G, \star)$ Абелова група са неутралом e_n. Једини нетривијални део овог тврђења је конструкција инверза. Нека је $\{a_n\} \in G$ дати низ. Инверз a_n^{-1} у односу на $\star$ може да се конструише индуктивно: први члан $a_1^{-1} = 1/a_1$ је добро дефинисан, јер је $a_1 \neq 0$. Ако је a_k^{-1} дефинисано за $k < n$, онда a_n^{-1} дефинишемо из релације

$$e_n = a_n \star a_n^{-1} = \sum_{d|n} a_d a_{n/d}^{-1},$$

тј. из

$$a_1 a_n^{-1} = - \sum_{d|n,\ d>1} a_d a_{n/d}^{-1},$$

захваљујући чињеници да је $a_1 \neq 0$.

На пример, ако је $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots)$ константан низ јединица, његов инверз је низ

$$\mu(n) = \begin{cases} 0, & (\exists k > 1)\ k^2 | n \\ (-1)^m, & n = p_1 p_2 \cdots p_m, \end{cases} \tag{83}$$

где су $p_1, \ldots, p_m$ различити прости бројеви. При томе је, по дефиницији, $\mu(1) = 1$. Функција μ назива се *Мебијусовом функцијом* и значајна је у теорији бројева. Из $\mu(n) \star \mathbf{1} = e(n)$ и (82) добијамо формулу

$$\frac{1}{\zeta(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^z}, \qquad \text{за} \qquad \mathrm{Re}(z) > 1,$$

која повезује Мебијусову функцију са Римановом зета функцијом. ♯

Задатак 74. Нека је $\tau(n)$ број делитеља природног броја n (укључујући и тривијалне делитеље 1 и n), тј.

$$\tau(n) = \sum_{d|n} 1.$$

Доказати да је

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^z} = (\zeta(z))^2,$$

за све z за које је $\mathrm{Re}(z) > 1$. Упутство: доказати да је, у ознакама из Примера 73, $\tau(n) = \mathbf{1} \star \mathbf{1}$. ✓

Задатак 75. (Дирихлеова бета функција) Доказати да ред

$$\beta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^z} \tag{84}$$

конвергира за $\mathrm{Re}\ z > 0$. Функција (84) назива се *Дирихлеовом бета функцијом*. Њена вредност у тачки $z = 2$,

$$G = \beta(2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} = 0,915965594177219015054603514932384110774\ldots,$$

назива се *Каталановом*[18] *константом*. Није познато да ли је G рационалан или ирационалан број. ✓

8. Вежбе

(1) Низ реалних бројева a_n је задат са

$$a_1 = a, \quad a_2 = b, \quad a_{n+2} = \frac{1 + a_{n+1}}{a_n}.$$

Наћи a_{1389}.

(2) Низ a_n је задат са

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = 2a_n + \sqrt{3a_n^2 + 1}.$$

Доказати да су сви чланови овог низа природни бројеви. Да ли овај низ конвергира?

(3) Доказати да су сви чланови низа

$$a_n = \frac{5 - \sqrt{5}}{10}\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5 + \sqrt{5}}{10}\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n$$

природни бројеви. Да ли овај низ конвергира?

[18] Каталан (Eugène Charles Catalan, 1814–1894), белгијски математичар

(4) Низ a_n низ је дат са

$$a_{n+2} = \alpha a_{n+1} + \beta a_n,$$

где су $\alpha > 0$, $\beta > 0$ дати реални бројеви.
   (а) Израчунати
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$
   (б) Испитати конвергенцију реда $\sum a_n$ у зависности од α и β.

(5) Нека је $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ неопадајућа функција и $a_1 \in \mathbf{R}$ произвољан број. Доказати да је низ

$$a_2 = f(a_1), \quad a_3 = f(a_2), \quad \ldots, \quad a_{n+1} = f(a_n), \quad \ldots$$

монотон. Дати геометријску интерпретацију овог тврђења.

(6) Нека функција $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ има својство

$$(\forall x)\ f(x) \geq x$$

и нека је $a_1 \in \mathbf{R}$ произвољан број. Доказати да је низ

$$a_2 = f(a_1), \quad a_3 = f(a_2), \quad \ldots, \quad a_{n+1} = f(a_n), \quad \ldots$$

монотон. Дати геометријску интерпретацију овог тврђења.

(7) За које реалне бројеве α, β, a_1 је низ

$$a_1, \quad a_2 = \alpha a_1 + \beta, \quad \ldots, \quad a_{n+1} = \alpha a_n + \beta, \quad \ldots$$

   (а) ограничен;
   (б) конвергентан?

(8) Доказати да следећи низови конвергирају и наћи њихове лимесе:
   (а) $a_1 = \frac{3}{2}$, $a_{n+1}^2 = 3a_n - 2$;
   (б) $a_1 = \alpha \in [0, 1/4]$, $a_{n+1} = \alpha + a_n^2$;
   (в) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 1 - \frac{1}{4a_n}$;
   (г) $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \frac{1}{4(1-a_n)}$;
   (д) $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = \frac{1}{3}(1 + a_n + a_{n-1}^3)$;
   Упутство: доказати да су сви дати низови монотони и ограничени.

(9) Доказати да низ са особинама

$$0 < a_n < 1 \quad \text{и} \quad a_n(1 - a_{n+1}) > \frac{1}{4}$$

конвергира.

(10) Израчунати
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(\sqrt[n]{n!})^2}.$$

(11) Доказати да низови

$$a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n+1}$$

и

$$b_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$$

конвергирају ка истој граничној вредности.

(12) Испитати конвергенцију низа

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{\sqrt{2}}} + \frac{1}{2^{\sqrt{3}}} + \cdots + \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}.$$

(13) Одредити максималне чланове низова

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{100+n}, \qquad b_n = \frac{100^n}{n!}.$$

Да ли ови низови конвергирају?

(14) Израчунати

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$$

(15) Израчунати

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n},$$

где су $a_j \geq 0$.

(16) Доказати да низ x_n задат са

$$x_1 > 0, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \quad a > 0$$

конвергира ка $\sqrt{a}$.

(17) Доказати да низ

$$2,\ \ 2+\frac{1}{2},\ \ 2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}},\ \ 2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}},\ \ \cdots$$

конвергира и наћи његову граничну вредност. (Упутство: низ је дат са

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = 2 + \frac{1}{a_n}.$$

Доказати да ако a_n конвергира, онда је $\lim a_n = 1+\sqrt{2}$. Доказати да за низ $\delta_n = a_n - (1+\sqrt{2})$ важи $|\delta_{n+1}| \leq |\delta_n|/2$ и одатле закључити да је $\lim \delta_n = 0$.)

(18) Нека је $x_1 > 0$, $y_1 > 0$ и

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \qquad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}.$$

Доказати да низови x_n и y_n конвергирају и да је $\lim x_n = \lim y_n$.

(19) Нека је $a_1 = 1$, $b_1 = 1$ и

$$a_{n+1} = \sqrt{2+b_n}, \qquad b_{n+1} = \sqrt{2a_n}.$$

Доказати да ови низови конвергирају и наћи њихове граничне вредности.

(20) Испитати конвергенцију низа

$$\sqrt{2},\ \ \sqrt{2+\sqrt{2}},\ \ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\ \ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}},\ \ \ldots$$

(21) (а) Нека је $|q| < 1$ и $a_n \to a_\infty$ кад $n \to \infty$. Израчунати

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + qa_{n-1} + q^2 a_{n-2} + \cdots + q^{n-1}a_1).$$

(б) Нека је дат низ a_n и нека је

$$x_n = a_n + a_{n-1}, \qquad y_n = 2a_n + a_{n-1}.$$

Доказати да из конвергенције низа y_n следи конвергенција низа a_n, а да из конвергенције низа x_n не следи конвергенција низа a_n.

(в) Нека $a_n \to a_\infty$, $b_n \to b_\infty$ кад $n \to \infty$. Доказати да низови x_n и y_n дефинисани са

$$x_0 = 1, \quad a_n = 2x_n + y_n, \quad b_n = x_{n-1} + 2y_n$$

конвергирају.

(г) Нека је a_n ограничен низ, такав да је

$$a_{n+2} \leq \frac{1}{3}a_{n+1} + \frac{2}{3}a.$$

Доказати да a_n конвергира.

Упутство: У (а) искористити идентитет

$$a_n + qa_{n-1} + q^2a_{n-2} + \cdots + q^{n-1}a_1 = \frac{1}{q^{1-n}}\sum_{k=1}^{n} a_k q^{1-k}$$

и применити Штолцову теорему. У (б) показати да је

$$a_n = \frac{1}{2}y_n - \frac{1}{2}y_{n-1} + (-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}a_1$$

и одатле закључити да је

$$a_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{1}{2^{k+1}}y_{n-k}$$

Применити (а) и закључити да $x_n \to \frac{1}{3}(2a_\infty - b_\infty)$. Затим из $y_n = a_n - 2x_n$ закључити да $y_n \to \frac{1}{3}(2b_\infty - a_\infty)$. У (в) приметити да је

$$4x_n - x_{n-1} = 2a_n = b_n \to 2a_\infty - b_\infty$$

и применити (б). У (г) доказати да је низ $a_n + \frac{2}{3}a_{n-1}$ монотон и ограничен и расуђивати аналоно са (в).

(22) Нека је a_n низ позитивних бројева, такав да је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha.$$

Доказати да је

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \alpha.$$

Контрапримером показати да обрнуто тврђење не важи. Израчунати лимесе низова

$$\left(\frac{n!}{n^n e^{-n}}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad \left(\frac{(n!)^2}{n^{2n}}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad \left(\frac{n^{3n}}{(n!)^3}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}.$$

Упутство: контрапример – $1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots$. Видети Пример 53 на стр. 201.

(23) Нека је $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ равномерно непрекидна функција и нека је

$$\lim_{n\to\infty} f(x+n) = 0$$

за свако $x \in [0, +\infty)$. Доказати да је

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

(24) Нека је $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ непрекидна функција, таква да је

$$f(x + a_n) = f(x)$$

за неки низ a_n позитивних бројева који конвергира ка нули. Доказати да је f константна функција. Упутство: Доказати да је скуп $\{ma_n \mid m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}\}$ густ у $\mathbf{R}$.

(25) Наћи све непрекидне функције $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ за које важи

$$f(x) = f(x^2 - 2x + 2).$$

Упутство: нека је x_n низ дат са

$$x_1 \in (0, 2), \qquad x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2.$$

Доказати (индукцијом) да је овај низ монотон и ограничен, па због тога и конвергентан. Из рекурентне формуле којом је задат, следи да је $\lim x_n = 1$, па због

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) = \cdots = f(x_1)$$

и непрекидности f следи $f(x_1) = 1$. Пошто је $x_1 \in (0, 2)$ произвољно, следи да је f константна на $[0, 2]$. Слично, посматрањем низа

$$y_1 \in (2, +\infty), \qquad y_{n+1} = 1 - \sqrt{y_n - 1}$$

доказати да је f константна на $[2, +\infty)$. На крају, из

$$x \in (-\infty, 0) \;\Rightarrow\; x^2 - 2x + 2 \in (2, +\infty)$$

извести закључак да је f константна на целом $\mathbf{R}$.

(26) Нека је $f : (a, +\infty) \to \mathbf{R}$ непрекидна и ограничена функција. Доказати да за сваки реалан број t постоји низ x_n такав да је

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} (f(x_n + t) - f(x_n)) = 0.$$

Упутство: не умањујући општост, можемо да претпоставимо да је $t > 0$. Ако је функција $x \mapsto f(x + t) - f(x)$ сталног знака на неком интервалу $(b, +\infty)$, онда је низ $f(b + nt)$ монотон и ограничен, па можемо да узмемо $x_n = b + nt$. Ако та функција није сталног знака ни на једном таквом интервалу, онда постоји неограничен низ њених нула и тај низ можемо да узмемо за x_n.

(27) Нека је функција f диференцијабилна у тачки a и нека су x_n, y_n низови, такви да је за све $n \in \mathbf{N}$

$$x_n \neq a, \qquad y_n \neq a, \qquad x_n \neq y_n$$

и

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = a.$$

Да ли постоји

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n}?$$

Доказати да, ако сем наведених услова низови x_n и y_n задовољавају и услов

$$(\forall n \in \mathbf{N}\, x_n < a < y_n,$$

онда важи

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} = f'(a).$$

Упутство: без наведеног додатног услова, лимес не мора да постоји – посматрати функцију из Задатка 5 на стр. 137 за $p > 1$ и низове

$$x_n = \frac{2}{\pi(4n+1)}, \qquad y_n = \frac{2}{\pi(4n+3)}.$$

Ако је додатни услов испуњен, применити Теорему о три лимеса (Теорема 14 на стр. 122) на

$$\frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n} = \frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}\frac{x_n-a}{x_n-y_n} + \frac{f(y_n)-f(a)}{y_n-a}\frac{y_n-a}{x_n-y_n}.$$

(28) Нека је функција f диференцијабилна у некој околини тачке a и нека је њен извод f' непрекидан у тачки a. Доказати да је

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(f(a+kn^{-2})-f(a)) = \frac{1}{2}f'(a).$$

Упутство: применити Лагранжеву теорему.

(29) Нека је функција f диференцијабилна у тачки a и нека је $k \in \mathbf{N}$. Доказати да је

$$\lim_{n\to\infty}(f(a+n^{-1})+f(a+2n^{-1})+\cdots+f(a+kn^{-1})-kf(a)) = \frac{k(k+1)}{2}$$

и

$$\lim_{n\to\infty}(f(a+n^{-2})+f(a+2n^{-2})+\cdots+f(a+nn^{-2})-nf(a)) = \frac{1}{2}f'(a).$$

(30) Нека је $a > 0$, $k, m \in \mathbf{N}$. Израчунати лимесе низова

(а) $\frac{(n+1)^m+(n+2)^m+\cdots+(n+k)^m}{n^{m-1}} - kn$;

(б) $\frac{(a+n^{-1})^n(a+2n^{-1})^n\cdots(a+kn^{-1})^n}{a^{kn}}$;

(в) $(1+an^{-2})(1+2an^{-2})\cdots(1+nan^{-2})$.

(31) Нека је a_n растући низ позитивних бројева и

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Израчунати

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1}{s_0s_1}+\frac{a_2}{s_1s_2}+\cdots+\frac{a_n}{s_{n-1}s_n}\right).$$

(32) Доказати да редови

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a+n)(a+n+1)\cdots(a+n+k)}$$

($k \in \mathbf{N}$, $-a \notin \mathbf{N}$) конвергирају и израчунати њихове суме.

(33) Израчунати збир реда

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{7}{2^4}+\cdots$$

(Упутство: нека је

$$s_n = \frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}.$$

Доказати да је $s_n = 2s_n - s_n = \cdots = 6 - 2^{-n+1}(2n+3)$.)

(34) Доказати да ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$$

дивергира.

(35) Користећи развој функције e^x у степени ред, доказати да за $|x| \leq 1$ важе неједнакости

$$1+x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}, \qquad 1-x^2 \leq e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}.$$

(36) Низ a_n је задат са

$$a_0 = a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}, \ \ n \geq 1.$$

Испитати конвергенцију реда $\sum a_n$.

(37) Нека је $\sum a_n$ конвергентан ред. Доказати да су редови

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{\log n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{n} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n} a_n$$

конвергентни.

(38) Испитати конвергенцију редова

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{n-1}}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n!}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)}{3^n}.$$

(39) Одредити све вредности реалног параметра α за које конвергира ред $\sum a_n(\alpha)$ ако је

(а) $a_n(\alpha) = \frac{\alpha^{2n}}{1+\alpha^{4n}}$

(б) $a_n(\alpha) = n^{\alpha} \sin \frac{\pi n^2}{n+1}$.

(40) Одредити домен функција

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} x^n \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n.$$

(41) Испитати конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!} \frac{1}{n^q}$$

у зависности од реалних параметара p и q.

(42) Нека је $\sum a_n$ конвергентан ред. Доказати да ред

$$\sum \left(\frac{1+\sin a_n}{2} \right)^n$$

конвергира.

(43) Наћи све $x \in \mathbf{R}$ за које ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{(n+1)(2x+1)}$$

апсолутно конвергира.

(44) Нека је a_n низ са периодом 3, тј. такав да је $a_{n+3} = a_n$. Доказати да ред $\sum \frac{a_n}{n}$ конвергира ако и само ако је

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0.$$

Упутство: Низ парцијалних сума реда $\sum a_n$ је ограничен, па једна импликација следи из Дирихлеовог теста. За доказ друге импликације приметимо да парцијалне суме

$$s_{3n} = \sum_{k=1}^{3n} \frac{a_k}{k} = a_1 \sum_{k=1}^{3n} \frac{1}{3k-2} + a_2 \sum_{k=1}^{3n} \frac{1}{3k-1} + a_3 \sum_{k=1}^{3n} \frac{1}{3k}$$

могу да се напишу као

$$s_{3n} = a_1 \sum_{k=1}^{3n} \left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k} \right) + a_2 \sum_{k=1}^{3n} \left(\frac{1}{3k-1} - \frac{1}{3k} \right) + a \sum_{k=1}^{3n} \frac{1}{3k},$$

где је $a = a_1 + a_2 + a_3$.

(45) Испитати конвергенцију реда

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log^p n \log^q (\log n)}$$

у зависности од реалних параметара p и q.

(46) Нека је $\sum c_n$ дивергентан ред са позитивним члановима и

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} c_k.$$

Доказати да је ред $\sum \frac{c_n}{s_n}$ дивергентан. (Упутство: видети Задатак 34 на стр. 198.)

(47) Нека је $\sum a_n$ конвергентан ред са позитивним члановима. Доказати да је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n} = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Упутство: Нека је

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \qquad \sigma_n = a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n.$$

Доказати да је

$$\frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n} = s_n - \frac{s_1 + \cdots + s_n}{n} + \frac{s_n}{n}$$

и

$$\frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n(n+1)} = \sigma_n - \sigma_{n+1} + a_{n+1}.$$

(48) Доказати да је ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(nx \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin^2 (k\theta)}{1 + x^2 + \cos^2 (k\theta)} \right)$$

конвергентан за све $x, \theta \in \mathbf{R}$.

(49) Нека је $\sum a_n$ неапсолутно конвергентан ред реалних бројева и

$$P_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(|a_k| + a_k), \qquad N_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(|a_k| - a_k)$$

парцијалне суме његових позитивних и негативних чланова. Доказати да је

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_n}{N_n} = 1.$$

(50) Доказати да ред

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p}$$

(где је $[\cdot]$ цео део реалног броја) апсолутно конвергира за $p > 1$, неапсолутно конвергира за $\frac{1}{2} < p \leq 1$ и дивергира за $p \leq \frac{1}{2}$. (Упутство: за $p > 1$ ред је апсолутно конвергентан, као и у Примеру 56. Нека је

$$b_n = \sum_{k=n^2}^{n^2+2n}\frac{1}{k^p}.$$

Доказати да је, за $\frac{1}{2} < p \leq 1$, b_n опадајући низ који тежи нули и одатле закључити да $\sum(-1)^n b_n$ конвергира. Применити Пример 38 на стр. 192. За $p \leq \frac{1}{2}$ низ b_n не тежи нули.)

(51) Доказати да ред

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\log n]}}{n}$$

дивергира

(52) Нека је $\varphi(n)$ Ојлерова функција, уведена у Вежби 19 на стр. 88. Доказати да је

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(n)}{n^z} = \frac{\zeta(z-1)}{\zeta(z)}, \qquad \text{за} \qquad \mathrm{Re}(z) > 2.$$

Упутство: доказати, користећи ознаке из Примера 73 на стр. 233, да је $\varphi(n) = \mathrm{id} \star \mu(n)$, где је $\mathrm{id}(n) = n$ и $\mu(n)$ Мебијусова функција.

ГЛАВА 5

Неодређени интеграл

1. Примитивна функција и неодређени интеграл

Претпоставимо да је извод $\frac{dy}{dx}$ функције $y = F(x)$, $F : (a,b) \to \mathbf{C}$ дат једначином

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \tag{1}$$

где је $f : (a,b) \to \mathbf{C}$ дата функција. Једначине као (1) у којима је непозната функција F задата једначином коју задовољавају њени изводи назива се *диференцијалном једначином*. Функција $F : (a,b) \to \mathbf{C}$ назива се *решењем диференцијалне једначине* (1) ако важи

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x). \tag{2}$$

Функцију $F : (a,b) \to \mathbf{C}$ која задовољава (2) зовемо још и *примитивном функцијом* функције f на интервалу (a,b).

Лема 1. *Нека су F_1 и F_2 две примитивне функције функције f на интервалу (a,b). Тада је разлика $F_2(x) - F_1(x)$ константна.*

$\triangle$ Пошто је

$$\frac{d}{dx}\Big(F_2(x) - F_1(x)\Big) = f(x) - f(x) = 0,$$

доказ следи из Последице 4 на стр. 143. $\triangledown$

Напомена 1. Услов да су F_1 и F_2 примитивне функције функције f *на интервалу* је суштински у Леми 1. Заиста, нека су дате функције

$$F_1(x) = x^2 \qquad \text{и} \qquad F_2(x) = \begin{cases} x^2 \text{ за } x < 0 \\ x^2 + 1 \text{ за } x > 0 \end{cases}$$

на скупу $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, који *није интервал*. Тада је

$$\frac{dF_1(x)}{dx} = 2x = \frac{dF_2(x)}{dx}$$

за свако $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Међутим,

$$F_2(1) - F_1(1) = 1 \neq 0 = F_2(-1) - F_1(-1),$$

тако да разлика $F_2 - F_1$ није константна.

Дефиниција 1. Фамилија свих примитивних функција функције

$$f : (a,b) \to \mathbf{C}$$

назива се *неодређеним интегралом* функције f и означава са $\int f(x)\,dx$.

Из Леме 1 следи да је

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

где је F било која примитивна функција функције f на интервалу (a, b).

Напомена 2. У Леми 1 доказана је јединственост примитивне функције. Питање егзистенције примитивне функције, тј. неодређеног интеграла ћемо размотрити у Глави 6. Тамо ћемо показати да свака непрекидна функција има примитивну (Теорема 3 на стр. 264). Међутим, примитивна функција елементарне функције (в. Дефиницију 1 на стр. 102) није увек елементарна функција. Чак и интеграли неких једноставних функција, као

$$\int \sin x^2\,dx,\ \int \frac{\sin x}{x}\,dx,\ \int \frac{e^x}{x}\,dx,\ \int \frac{x}{\log x}\,dx,\ \int e^{-x^2}\,dx,\ \int \sqrt{1+x^4}\,dx,$$

не могу да се изразе преко елементарних функција.

Из дефиниције неодређеног интеграла и таблице првих извода следи

$\int x^p\,dx = \frac{1}{p+1}x^{p+1} + C$ за $p \neq -1$
$\int x^{-1}\,dx = \log x + C$
$\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C$ за $a > 0,\ a \neq 1$
$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
$\int \cos x\,dx = \sin x + C$
$\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C$
$\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\operatorname{cotg} x + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + \widetilde{C} = -\arccos x + \widehat{C}$
$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + \widetilde{C} = \operatorname{arccotg} x + \widehat{C}.$

Пример 1. Пошто је

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right) = \cos 2x \qquad \text{и} \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\cos 2x\right) = -\sin 2x$$

закључујемо да је

$$\int \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C \qquad \text{и} \qquad \int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C.$$

♯

Лема 2. *Нека су $f : (a, b) \to \mathbf{C}$ и $g : (a, b) \to \mathbf{C}$ две функције које имају примитивне функције и $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$ константе. Тада важи*

$$\int \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx + \mu \int g(x)\,dx$$
$$\int f(x)\,dx = \int \operatorname{Re} f(x)\,dx + i \int \operatorname{Im} f(x)\,dx.$$

△ Доказ следи из одговарајућих особина извода и дефиниције примитивне функције и неодређеног интеграла. ▽

Пример 2. Израчунајмо $\int \left(x^3 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx$. Квадрирањем израза у загради и применом Леме 2 добијамо

$$\int \left(x^3 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx = \int x^6\,dx + 2\int x^{8/3}\,dx + \int x^{-2/3}\,dx = \frac{x^7}{7} + \frac{6x^{11/3}}{11} + 3x^{1/3} + C.$$

♯

Задатак 1. Израчунати

$$\int \sin^2 x\,dx \qquad \text{и} \qquad \int \cos^2 x\,dx.$$

Упутство: искористити формуле

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \qquad \text{и} \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

и Пример 1. ✓

Пример 3. Нека је

$$I = \int e^x \sin x\,dx, \quad R = \int e^x \cos x\,dx.$$

Тада је

$$R + iI = \int e^x(\cos x + i\sin x)\,dx = \int e^x e^{ix} dx = \int e^{(1+i)x}\,dx = \frac{1}{1+i}e^{(1+i)x} + C.$$

где је $C = C_1 + iC_2$. Пошто је

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{1+i}e^{(1+i)x} &= \tfrac{1-i}{2}e^x e^{ix} = \tfrac{1-i}{2}e^x(\cos x + i\sin x) \\ &= \tfrac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x) + i\tfrac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) \end{aligned}$$

добијамо

$$R + iI = \left(\frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x) + C_1\right) + i\left(\frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C_2\right)$$

Одатле следи $R = \frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x) + C_1$ и $I = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C_2$. ♯

2. Основни методи израчунавања неодређених интеграла

2.1. Парцијална интеграција. Из Лајбницовог правила

$$(u\cdot v)'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$

следи формула

$$u(x)\cdot v(x) = \int (u\cdot v)'(x)\,dx = \int u'(x)\cdot v(x)\,dx + \int u(x)\cdot v'(x)\,dx$$

која се често записује у облику

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \tag{3}$$

и назива *формулом парцијалне интеграције.*

Пример 4. Израчунајмо $\int \log x\,dx$. Нека је $u = \log x$, $dv = dx$. Тада је $v = x$, па применом формуле (3) добијамо

$$\int \log x\,dx = x\log x - \int x d\log x = x\log x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\log x - x + C.$$

♯

Задатак 2. Израчунати

$$\int x\log x\,dx.$$

Упутство: применити формулу (3) са $u = \log x$, $dv = xdx$, тј. $v = \frac{1}{2}x^2$. ✓

Задатак 3. Израчунати $\int x^3 e^x dx$. ✓

Пример 5. (Пример 3 на други начин) Нека је

$$I = \int e^x \sin x \, dx.$$

Применом парцијалне интеграције са $u = \sin x$, $dv = e^x dx$, тј. $v = e^x$ добијамо

$$I = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx.$$

Ако на последњи интеграл поново применимо парцијалну интеграцију, са $u = \cos x$, $dv = e^x dx$, добијамо

$$I = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx = e^x(\sin x - \cos x) - I.$$

Одатле следи $2I = e^x(\sin x - \cos x)$, тј. $\int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$. На исти начин може се израчунати и $\int e^x \cos x \, dx$. ♯

Задатак 4. Нека је $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ и $b \in \mathbf{R}$. Израчунати

$$\int P(x) e^{bx} \, dx, \quad \int P(x) \log x \, dx, \quad \int P(x) \sin x \, dx.$$

✓

Задатак 5. Наћи грешку у следећем расуђивању. Применимо формулу (3) на функције

$$u(x) = \frac{1}{x}, \qquad v(x) = x.$$

Тада је

$$uv = 1, \qquad du = -\frac{1}{x^2} \, dx, \qquad dv = dx,$$

па из (3) добијамо

$$\int \frac{1}{x} \, dx = 1 + \int \frac{1}{x} \, dx.$$

Скраћивањем, добијамо „доказ" да је $0 = 1$. ✓

2.2. Смена променљиве. Нека је на интервалу (a, b)

$$\int f(x) \, dx = F(x) + C$$

и нека је функција $\varphi : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ непрекидно диференцијабилна (тј. диференцијабилна, са непрекидним првим изводом) и *на*. Тада је

$$\int f \circ \varphi(t) \varphi'(t) \, dt = F \circ \varphi(t) + C \tag{4}$$

на интервалу (α, β). Једнакост (4) добија се диференцирањем обе стране и применом правила за извод сложене функције. Она је у основи метода израчунавања интеграла сменом променљиве који се састоји у следећем. Треба израчунати интеграл $\int f \circ \varphi(t) \varphi'(t) \, dt$. Сменом $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t) dt$ добијамо интеграл $\int f(x) \, dx$ који може да буде једноставнији од полазног.

Пример 6. Израчунајмо $\int \frac{t}{t^2+1} \, dt$. Применом формуле (4) и смене $x = t^2 + 1$ добијамо

$$\int \frac{t}{t^2+1} \, dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2+1} (t^2+1)' \, dt = \int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \ln |x| + C = \frac{1}{2} \ln(t^2+1) + C.$$

♯

Задатак 6. Израчунати

$$\int \operatorname{arctg} x\, dx.$$

Упутство: искористити формулу парцијалне интеграције и Пример 6. ✓

Задатак 7. Израчунати $\int \arcsin x\, dx$. ✓

Метод смене промењљиве може да се примени и у следећем облику. Треба израчунати интеграл $\int f(x)\, dx$. Сменом $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)dt$ добијамо интеграл $\int f \circ \varphi(t)\varphi'(t)\, dt$ који може да буде једноставнији од полазног.

Пример 7. Израчунајмо $\int \sqrt{1-x^2}\, dx$. Сменом $x = \sin t$, $dx = \cos t dt$ добијамо

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\, dt = \int \sqrt{\cos^2 t}\cos t dt = \int \cos^2 t\, dt,$$

чиме израчунавање полазног интеграла сводимо на Задатак 1. Приметимо да смо, иако је

$$\sqrt{\cos^2 t} = |\cos t|,$$

изоставили апсолутну вредност, пошто смо промењљиву t увели као $x = \sin t$, тј. $t = \arcsin x$. Пошто вредност функције arcsin (а тиме и t) лежи у интервалу $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, важиће $\cos t \geq 0$, што оправдава изостављање апсолутне вредности. ♯

Задатак 8. Нека је $n \in \mathbf{N}$ и $a \in \mathbf{R}$. Израчунати интеграле

$$\int \frac{x^{2n}}{x^2+a^2}\, dx, \quad \int \frac{x^{2n}}{x^2-a^2}\, dx, \quad \int \frac{dx}{x^{2n}(x^2+a^2)}.$$

✓

Задатак 9. Израчунати

$$I = \int \sin(2015x)\sin^{2013} x\, dx.$$

Упутство: Применити идентитете

$$\sin(2015)x = \operatorname{Im}(e^{i2015x}) \quad \text{и} \quad \sin^{2013} x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^{2013}$$

и показати да је $I = \operatorname{Im}(2^{-2013} i \int e^{2ix}(e^{2ix}-1)^{2013}\, dx)$, а затим овај интеграл решити сменом $y = e^{2ix}$. ✓

Задатак 10. Израчунати $\int x^{2x}(1+\log x)\, dx$. ✓

3. Интеграли облика $\int \sin^k x \cos^n x\, dx$

3.1. Случај када је бар један од бројева k, n непаран. Нека је $n = 2s+1$. Тада је

$$\int \sin^k x \cos^n x\, dx = \int \sin^k x \cos^{2s} x \cos x\, dx.$$

Уведимо смену $t = \sin x$. Тада је $dt = \cos x dx$ и $\cos^2 x = 1 - t^2$, па последњи интеграл постаје

$$\int \sin^k x \cos^{2s} x \cos x\, dx = \int t^k (1-t^2)^s\, dt,$$

што је интеграл полиномијалне функције, који се лако израчунава. Случај парног k се решава слично, сменом $t = \cos x$.

Задатак 11. Израчунати $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$ ✓

3.2. Случај када су k и n парни бројеви. У овом случају можемо да искористимо идентитете

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \quad \text{и} \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x),$$

чиме снижавамо степене k, n у полазном интегралу. То можемо да поновимо довољан број пута, све док се не појави бар један непаран степен, што омогућава да применимо једну од претходно разматраних смена. Овај метод смо већ сусрели у Задатку 1; илустроваћемо га још једним примером.

Пример 8. Израчунајмо $\int \cos^4 x \, dx$. Применом другог од претходних идентитета добијамо

$$\begin{aligned} \int \cos^4 x \, dx &= \int (\cos^2 x)^2 \, dx = \tfrac{1}{4} \int (1 + \cos 2x)^2 \, dx \\ &= \tfrac{1}{4} \int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) \, dx \\ &= \tfrac{1}{4} \int (1 + 2\cos 2x + \tfrac{1}{2}(1 + \cos 4x)) \, dx \\ &= \tfrac{3}{8}x + \tfrac{1}{4}\sin 2x + \tfrac{1}{32}\sin 4x + C. \end{aligned}$$

♯

Задатак 12. Израчунати $\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx$. ✓

Задатак 13. Израчунати $\int \sin^6 x \, dx$. ✓

4. Интеграли облика $\int \sin ax \cos bx \, dx$

Интеграли облика

$$\int \sin ax \sin bx \, dx, \quad \int \cos ax \cos bx \, dx, \quad \int \sin ax \cos bx \, dx$$

могу да се израчунају применом идентитета

$$\begin{aligned} \sin ax \sin bx &= \tfrac{1}{2}(\cos{(a-b)x} - \cos{(a+b)x}) \\ \cos ax \cos bx &= \tfrac{1}{2}(\cos{(a-b)x} + \cos{(a+b)x}) \\ \sin ax \cos bx &= \tfrac{1}{2}(\sin{(a-b)x} + \sin{(a+b)x}). \end{aligned}$$

Пример 9. Израчунајмо $\int \sin 3x \cos 5x \, dx$.

$$\int \sin 3x \cos 5x \, dx = \frac{1}{2} \int (\sin{(-2x)} + \sin 8x) \, dx = \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 8x + C.$$

♯

Задатак 14. Израчунати $\int \sin 2x \sin 3x \, dx$. ✓

Задатак 15. Израчунати $\int \cos 7x \cos 4x \, dx$. ✓

5. Интеграција рационалних функција

Пример 10. Израчунајмо интеграл $\int \frac{dx}{x^2-1}$.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2-1} &= \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)} = \int \left(\tfrac{\frac{1}{2}}{x-1} - \tfrac{\frac{1}{2}}{x+1}\right) dx \\ &= \tfrac{1}{2}(\ln(x-1) - \ln(x+1)) + C.\end{aligned}$$

Овде смо користили идентитет

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} - \frac{\frac{1}{2}}{x+1}. \tag{5}$$

До њега смо могли да дођемо на следећи начин. Напишимо

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}. \tag{6}$$

Свођењем десне стране на заједнички именилац добијамо

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A(x+1)}{(x-1)(x+1)} + \frac{B(x-1)}{(x-1)(x+1)},$$

одакле следи $1 = A(x+1) + B(x-1) = (A+B)x + (A-B)$. Пошто су два полинома једнака ако и само ако су им коефицијенти уз одговарајуће степене једнаки, из последњег израза добијамо систем

$$A + B = 0, \qquad A - B = 1,$$

чије је решење $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$, тако да (5) добијамо из (6). ♯

Претходни пример је пример примене општег метода интеграције рационалних функција који је заснован на примени теореме о разлагању рационалних функција (Теорема 2 на стр. 100). Сам метод њене примене ћемо сада детаљније да изложимо. Нека је

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

где су P и Q полиноми. Интеграл $\int R(x)\,dx$ можемо да израчунамо у следећих неколико корака.

1. КОРАК. Уколико степен полинома Q није већи од степена полинома P, поделимо полином P са Q (о дељењу полинома било је речи у Теореми 1 на стр. 98; сам поступак дељења је сличан поступку дељења целих бројева). Добијамо

$$R(x) = h(x) + \frac{f(x)}{g(x)},$$

где су f, g и h полиноми, такви да је степен полинома g већи од степена полинома f. Интеграл $\int h(x)\,dx$ полинома h је лако израчунати, тако да је проблем сведен на израчунавање интеграла $\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx$.

2. КОРАК. Напишимо полином g као производ простих (у прстену полинома $\mathbf{R}[x]$) фактора, тј. као прозвод линеарних и нерастављивих квадратних полинома са реалним коефицијентима.

3. КОРАК. Сваком линеарном фактору $(x-\alpha)^m$ полинома $g(x)$ у производу добијеном у претходном кораку придружимо суму

$$\frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x-\alpha)^m}.$$

4. КОРАК. Сваком нерастављивом квадратном фактору $(ax^2+bx+c)^n$ полинома $g(x)$ у производу добијеном у 2. кораку придружимо суму

$$\frac{B_1x+C_1}{ax^2+bx+c}+\frac{B_2x+C_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{B_nx+C_n}{(ax^2+bx+c)^n}.$$

5. КОРАК. Напишимо количник $\frac{f(x)}{g(x)}$ као збир свих сума добијених у 3. и 4. кораку. Сведимо тај збир на заједнички именилац и изједначимо коефицијенте уз одговарајуће степене промењиве x. Решавањем добијеног система линеарних једначина добијамо константе A_j, B_j, C_j.

6. КОРАК. Остаје још да се израчунају интеграли сваког од сабирака из 3. и 4. корака, тј. интеграли облика

$$\int\frac{dx}{(x-\alpha)^j}\quad\text{и}\quad\int\frac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)^k}\,dx. \tag{7}$$

Први од њих је

$$\int\frac{dx}{(x-\alpha)^j}=\begin{cases}\ln|x-\alpha|+C & \text{ако је } j=1\\ \frac{1}{-j+1}(x-\alpha)^{-j+1}+C & \text{ако је } j\neq 1.\end{cases}$$

Да бисмо израчунали други, комплетирајмо квадрат у квадратном триному ax^2+bx+c:

$$\begin{aligned}ax^2+bx+c &= a\big(x^2+\tfrac{b}{a}x\big)+c=a\big(x^2+\tfrac{b}{a}x+\tfrac{b^2}{4a^2}\big)+c-\tfrac{b^2}{4a}\\ &= a\left(\big(x+\tfrac{b}{2a}\big)^2+\tfrac{4ac-b^2}{4a^2}\right).\end{aligned} \tag{8}$$

Приметимо да је $4ac-b^2>0$ (јер би у противном полином ax^2+bx+c имао нуле, што је у супротности са претпоставком да је нерастављив), па можемо да напишемо $\frac{4ac-b^2}{4a^2}=\lambda^2$. Из (8) следи да се, после смене $t=x+\frac{b}{2a}$, израчунавање другог интеграла у (7) своди на израчунавање интеграла

$$\int\frac{t}{(t^2+\lambda^2)^k}\,dt\quad\text{и}\quad\int\frac{dt}{(t^2+\lambda^2)^k}.$$

Први се лако израчунава сменом $y=t^2+\lambda^2$, $tdt=\frac{1}{2}dy$, а други се сменом

$$t=\lambda\operatorname{tg}u\Rightarrow t^2+\lambda^2=\lambda^2\sec^2u,\ dt=\sec^2u\,du$$

своди на интеграл тригонометријске функције разматран у Параграфу 3 на стр. 247.

Задатак 16. Израчунати

$$\int\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}\,dx.$$

Упутство: из

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B_1x+C_1}{x^2+1}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+1)^2}$$

добијамо систем

$$\begin{aligned}A+B_1 &= 0\\ -2B_1+C_1 &= 0\\ 2A+B_1-2C_1+B_2 &= 2\\ -2B_1+C_1-2B_2+C_2 &= 2\\ A-2C_1-2C_2 &= 13\end{aligned}$$

чије је решење $A = 1$, $B_1 = -1$, $C_1 = -2$, $B_2 = -3$, $C_2 = -4$. ✓

Задатак 17. Израчунати $\int \frac{x}{x^3+1}\,dx$. ✓

Задатак 18. Израчунати $\int \frac{dx}{x^4+1}$. Упутство:

$$x^4+1 = x^4+2x^2+1-2x^2 = (x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2 = (x^2+1+\sqrt{2}x)(x^2+1-\sqrt{2}x).$$

✓

Задатак 19. Израчунати $\int \frac{dx}{x^4-1}$. ✓

Задатак 20. Израчунати

$$\int \frac{dx}{x^5+1}.$$

Упутство: видети Задатак 114 на стр. 79 – наћи нуле полинома x^5+1 користећи Задатак 112 на стр. 78. Написати x^5+1 као производ линеарних фактора са комплексним коефицијентима и помножити парове који одговарају конјугованим комплексним нулама. ✓

Задатак 21. Израчунати $\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^2}$. ✓

Задатак 22. Израчунати $\int \frac{x^7-2x^6+4x^5-5x^4+4x^3-5x^2-x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\,dx$. ✓

6. Интеграли облика $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$

Нека је R рационална функција. Интеграл облика $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ може се свести на интеграл рационалне функције сменом $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Заиста, лако се проверава да тада важи

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

а све добијене функције су рационалне.

Пример 11. Израчунајмо $\int \frac{dx}{3+\sin x}$. Претходно описаном сменом $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ добијамо

$$\int \frac{dx}{3+\sin x} = \int \frac{1}{3+\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} = 2\int \frac{dt}{3t^2+2t+1}.$$

Последњи интеграл се израчунава методама интеграције рационалних функција. Као резултат, добијамо $\int \frac{dx}{3+\sin x} = \sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{2}} + C$. ♯

Задатак 23. Израчунати $\int \frac{\sin x}{\sin x+\sin 2x}\,dx$. ✓

7. Интеграли облика $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$

Нека је R рационална функција. Показаћемо два начина да се израчуна интеграл $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$.

7.1. Тригонометријске смене. Тригонометријски идентитети

$$1-\sin^2 t=\cos^2 t,\quad 1+\operatorname{tg}^2 t=\sec^2 t,\quad \sec^2 t-1=\operatorname{tg}^2 t$$

нам омогућавају да интеграле

$$\int R(x,\sqrt{\lambda^2-x^2})\,dx,\quad \int R(x,\sqrt{x^2+\lambda^2})\,dx\quad \int R(x,\sqrt{x^2-\lambda^2})\,dx \tag{9}$$

израчунамо на следећи начин.

$\int R(x,\sqrt{\lambda^2-x^2})\,dx$ решавамо сменом $x=\lambda\sin t$. Тада је

$$\lambda^2-x^2=\lambda^2\cos^2 t,\quad dx=\lambda\cos t dt.$$

$\int R(x,\sqrt{x^2+\lambda^2})\,dx$ решавамо сменом $x=\lambda\operatorname{tg} t$. Тада је

$$x^2+\lambda^2=\lambda^2\sec^2 t,\quad dx=\lambda\sec^2 t dt.$$

$\int R(x,\sqrt{x^2-\lambda^2})\,dx$ решавамо сменом $x=\lambda\sec t$. Тада је

$$x^2-\lambda^2=\lambda^2\operatorname{tg}^2 t,\quad dx=\lambda\sec t\operatorname{tg} t dt.$$

Одатле видимо да у сва три случаја добијамо интеграле облика

$$\int R_1(\sin x,\cos x)\,dx$$

за неку рационалну функцију R_1, чије смо израчунавање размотрили у Параграфу 6.

Ако желимо да израчунамо $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$, комплетирањем квадрата као у (8) на стр. 250) и сменом $t=x+\frac{b}{2a}$ његово израчунавање сводимо на израчунавање једног од интеграла (9).

Задатак 24. Израчунати $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-2x+5}}\,dx$. ✓

Задатак 25. Израчунати $\int \frac{(1-x)}{\sqrt{8+2x-x^2}}\,dx$. ✓

Задатак 26. Израчунати $\int \frac{(x+1)}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx$. ✓

Задатак 27. Израчунати $\int \frac{(x-1)}{\sqrt{x^2-4x+3}}\,dx$. ✓

Задатак 28. Израчунати $\int \frac{(x-1)}{\sqrt{x^2-4x+4}}\,dx$. ✓

7.2. Ојлерове смене. Осим тригонометријских смена, постоји још један начин да се израчунају интеграли облика

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx. \tag{10}$$

То је метод Ојлерових смена који ћемо сада да размотримо.

ПРВА ОЈЛЕРОВА СМЕНА. Претпоставимо да је $a>0$. Уведимо у интеграл (10) смену

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}x \tag{11}$$

Квадрирањем обе стране и решавањем по x добијамо

$$x=\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b},$$

одакле следи

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b},\quad dx=2\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t+b)^2}dt.$$

Тиме смо добили x, $\sqrt{ax^2+bx+c}$ и dx као рационалне функције по t, па смо интеграл (10) свели на интеграл рационалне функције, који можемо да израчунамо раније описаним методом.

ДРУГА ОЈЛЕРОВА СМЕНА. Ако је $c > 0$, сменом

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}, \tag{12}$$

на сличан начин као и сменом (11), сводимо израчунавање интеграла (10) на израчунавање интеграла рационалне функције.

ТРЕЋА ОЈЛЕРОВА СМЕНА. Ако је $a \leq 0$ и $c \leq 0$, не можемо да применимо прве две Ојлерове смене. Али, тада је $b^2 - 4ac \geq 0$, па полином ax^2+bx+c има бар једну нулу. Ако он има само једну нулу, онда је он потпун квадрат, па је (10) интеграл рационалне функције. Ако су x_1, x_2 две различите нуле полинома ax^2+bx+c, сменом

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_1), \tag{13}$$

израчунавање интеграла (10) своди се на израчунавање интеграла рационалне функције.

Задатак 29. Урадити Задатке 24–28 применом Ојлерових смена. ✓

8. Интеграли облика $\int R(x, y(x))\,dx$

8.1. Рационалне криве. Нека је R рационална функција и нека је једначином

$$F(x, y) = 0 \tag{14}$$

задата крива у координатној равни. Претпоставимо да решавањем једначине (14) добијамо функцију $y = y(x)$ и да желимо да израчунамо $\int R(x, y(x))\,dx$. Ако успемо да нађемо параметарску једначину ове криве у облику

$$x = r_1(t), \qquad y = r_2(t), \tag{15}$$

где су r_1 и r_2 рационалне функције, сменом $x = r_1(t)$ свешћемо интеграл $\int R(x, y(x))\,dx$ на интеграл

$$\int R(r_1(t), r_2(t))r_1'(t)\,dt.$$

Последњи интеграл је интеграл рационалне функције, за који знамо метод рачунања.

Криве које имају параметризацију (15), где су r_1 и r_2 рационалне функције назива се *рационалном кривом*, а таква параметризација њеном *рационалном параметризацијом*.

8.2. Геометријски приступ Ојлеровим сменама. У вези са Ојлеровим сменама (11), (12) и (13) можемо да поставимо два природна питања: како смо до тих смена дошли и зашто оне решавају проблем израчунавања интеграла $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$.

Посматрајмо променљиве x и $y(x) = \sqrt{ax^2+bx+c}$. Оне задовољавају једначину

$$y^2 = ax^2 + bx + c,$$

тј. дефинишу криву у координатној равни. Експлицитна једначина те криве је

$$F(x, y) = 0 \quad \text{где је} \quad F(x, y) = y^2 - (ax^2+bx+c). \tag{16}$$

Покушајмо да нађемо њену рационалну параметризацију. Нека је (x_1, y_1) произвољна тачка на кривој (16). Права

$$y - y_1 = t(x - x_1) \tag{17}$$

сече криву (16) у тачки $(x, y_1 + t(x - x_1))$, где је x решење једначине

$$F(x, y_1 + t(x - x_1)) = 0. \tag{18}$$

Параметарску једначину криве (16) ћемо добити тако што ћемо да опишемо координате свих њених тачака као пресечних тачака криве (16) и праве (17). Нека су A и B коефицијенти уз x^2 и x у квадратној једначини (18). Очигледно је да су A и B полиноми по t. Пошто је (x_1, y_1) тачка на кривој $F(x, y) = 0$, x_1 је једно решење једначине (18). Из Вијетових[1] формула следи да је друго решење

$$x = -x_1 - \frac{B}{A}. \tag{19}$$

Тиме смо добили x као рационалну функцију по t. Заменом (19) у једначини праве (17) добијамо и y као рационалну функцију по t.

Специјално, ако је $c > 0$ можемо да узмемо $x_1 = 0$, $y_1 = \sqrt{c}$ (јер тачка $(0, \sqrt{c})$ лежи на кривој (16)), па једначина праве (17) има облик

$$y - \sqrt{c} = tx,$$

што је друга Ојлерова смена.

Задатак 30. Извести трећу Ојлерову смену на овај начин. Доказати да се прва Ојлерова смена своди на другу сменом $u = 1/x$ у интегралу. ✓

Задатак 31. Доказати да је за $a > 0$ крива (16) хипербола и да њене асимптоте имају коефицијент правца $\pm\sqrt{a}$. Узимањем „бесконачно далеке тачке" на хиперболи у улози тачке (x_1, y_1) у претходним извођењима, уместо фамилије правих (17) добијамо фамилију правих паралелних асимптоти, нпр.

$$y = -\sqrt{a}x + t.$$

Извести на овај начин прву Ојлерову смену. ✓

Приметимо да смо у налажењу рационалне параметризације криве (16) користили само чињеницу да је $F(x, y)$ полином другог степена по x и y. Ту чињеницу ћемо да искористимо и у следећем задатку.

Задатак 32. Крива

$$x = \cos u, \qquad y = \sin u$$

је кружница, дакле крива задата једначином $F(x, y) = 0$, где је F полином другог степена $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Доказати да се до смена $\sin u = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos u = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ разматраних у Параграфу 6 на стр. 251 може доћи тражењем рационалне параметризације кружнице, на исти начин као и до Ојлерових. ✓

Задатак 33. Наћи сва рационална решења једначине $x^2 + 2y^2 = 1$. ✓

[1] Вијет (Francois Viète, 1540–1603), француски математичар

8.3. Интеграли облика $\int R\big(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\big)\,dx$. Крива

$$y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \tag{20}$$

је рационална. Заиста, нека је $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, тј. $t^n = \frac{ax+b}{cx+d}$. Тада је

$$x = \frac{t^n d - b}{a - t^n c}, \quad y = t,$$

што је рационална параметризација криве (20). Одатле закључујемо да се интеграл $\int R\big(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\big)\,dx$ сменом $t^n = \frac{ax+b}{cx+d}$ своди на интеграл рационалне функције.

Пример 12. Израчунајмо $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$. Уведимо смену $t^2 = \frac{1+x}{1-x}$. Тада је $x = \frac{t^2-1}{t^2+1}$ и $dx = \frac{4t\,dt}{(1+t^2)^2}$, па полазни интеграл постаје $\int \frac{4t^2}{(1+t^2)^2}\,dt$, што је интеграл рационалне функције. ♯

8.4. Интеграли облика $\int x^p(a+bx^q)^r\,dx$. Нека су p, q и r рационални бројеви различити од нуле. Интеграл

$$\int x^p(a+bx^q)^r\,dx \tag{21}$$

у општем случају није елементарна функција. Размотримо неке специјалне случајеве.

Ако је $r \in \mathbf{Z}$, онда, свођењем бројева p и q на заједнички именилац ($p = \frac{j}{k}$, $q = \frac{i}{k}$), видимо да је интеграл (21) интеграл рационалне функције по $\sqrt[k]{x}$, који се лако решава сменом $\sqrt[k]{x}$.

Претпоставимо да r није цео број. Ако уведемо у (21) смену $y = x^q$ добијамо

$$\int x^p(a+bx^q)^r\,dx = \frac{1}{q}\int (a+by)^r y^m\,dy, \tag{22}$$

где је $m = \frac{p+1}{q} - 1$. Ако је $m \in \mathbf{Z}$ и $r = \frac{j}{k}$ онда је (22) интеграл рационалне функције по променљивим y и $\sqrt[k]{a+by}$, који се лако израчунава сменом $t^k = a + by$.

Ако ни $m = \frac{p+1}{q} - 1$ није цео број, напишимо интеграл (22) у виду

$$\int \left(\frac{a+by}{y}\right)^r y^{r+m}\,dy. \tag{23}$$

Ако је $r + m \in \mathbf{Z}$ и $r = \frac{j}{k}$, интеграл (23) је интеграл рационалне функције по y и $\sqrt[k]{\frac{a+by}{y}}$ и израчунава се сменом $t^k = \frac{a+by}{y}$.

Из претходних разматрања видимо да се интеграл (21) може изразити као елементарна функција ако је један од бројева

$$r, \quad \frac{p+1}{q}, \quad \frac{p+1}{q} + r$$

цео број. Чебишев[2] је доказао да у осталим случајевима интеграл (21) није елементарна функција.

[2]Чебишев (П. Л. Чебышев, 1821–1894), руски математичар

Задатак 34. Израчунати интеграле

(а) $\int x^2 \sqrt[3]{2-3x}\,dx$ (б) $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$ (в) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$ (г) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$ ✓

8.5. Елиптички интеграли. Интеграли облика

$$\int R(x, \sqrt{P(x)})\,dx \tag{24}$$

где је R рационална функција, а P полином степена већег од два у општем случају није елементарна функција. Ову чињеницу доказали су Абел и Лиувил[3]; она следи и из споменутог Чебишевљевог критеријума. У случају када је P полином степена три или четири интеграли (24) називају се *елиптичким* (јер се појављују у задатку израчунавања дужине лука елипсе; в. Задатак 17 на стр. 277), а у случају када је степен полинома P већи од четири *хиперелиптичким*.

Може да се докаже [**11**] да се сваки елиптички интеграл може изразити помоћу елементарних функција и интеграла облика

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \int \frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \int \frac{dx}{(1+hx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

за неке $k, h \in (0,1)$. Сменом $x = \sin\varphi$ ови интеграли се своде на интеграле

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad \int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi \quad \int \frac{d\varphi}{(1+h\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

који се, редом, називају *елиптичким интегралима првог, другог и трећег рода*. Ознаке $F(k,\varphi)$ и $E(k,\varphi)$ су уобичајене ознаке за елиптичке интеграле прве и друге врсте редом, који задовољавају услове $F(k,0) = 0$, $E(k,0) = 0$.

9. Вежбе

Израчунати следеће интеграле:

1. $\int \sin^3 x\,dx$ 2. $\int \sec x \operatorname{tg} x\,dx$ 3. $\int \operatorname{tg}^4 x\,dx$ 4. $\int \sin^6 x\,dx$
5. $\int \sec^2 x\,dx$ 6. $\int \sec^3 x\,dx$ 7. $\int \cos^{2/3} x\,\sin^5 x\,dx$ 8. $\int \cos^4 x\,dx$
9. $\int \sin^2 x \cos^4 x\,dx$ 10. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}$ 11. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}}$ 12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2}}$
13. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-2}}$ 14. $\int \frac{dx}{(x^2+2)^2}$ 15. $\int \sqrt{2-x^2}\,dx$ 16. $\int \sqrt{x^3-4x^2}\,dx$
17. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ 18. $\int \frac{dx}{4x^2+4x+2}$ 19. $\int \frac{x+1}{\sqrt{2x^2-6x+4}}\,dx$ 20. $\int \frac{5x-3}{(x+1)(x-3)}\,dx$
21. $\int \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}\,dx$ 22. $\int \frac{x^5-x^4-3x+5}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\,dx$ 23. $\int \frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,dx$
24. $\int \frac{x+4}{x^3+3x^2-10x}\,dx$ 25. $\int x^5 \ln x\,dx$ 26. $\int x \arcsin x\,dx$ 27. $\int x \operatorname{arctg} x\,dx$
28. $\int e^{ax}\cos bx\,dx$ 29. $\int \frac{dx}{1+\cos x}$ 30. $\int \frac{dx}{2+\sin x}$ 31. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt[4]{x}}$
32. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$ 33. $\int (2-\sqrt{x})^2\,dx$ 34. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x}}\,dx$ 35. $\int \ln(2x^2+4)\,dx$
36. $\int \frac{dx}{x(2+\ln x)}$ 37. $\int x^2 \sin(1-x)\,dx$ 38. $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$ 39. $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$
40. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{e^x+1}}\,dx$ 41. $\int \sin\sqrt{1+x}\,dx$ 42. $\int \frac{dx}{(e^x+e^{-x})^2}$ 43. $\int x\,\ln(x^3+x)\,dx$
44. $\int \frac{dx}{\sec^2 x + \operatorname{tg}^2 x}$ 45. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\cos x}}\,dx$ 46. $\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{x^2+x}}$ 47. $\int \frac{dx}{\sqrt{3}+\pi e^{\sqrt{3}x}}$
48. $\int \ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})\,dx$ 49. $\int (\arcsin x)^2\,dx$ 50. $\int \frac{2e^{2x}-e^x}{\sqrt{3e^{2x}-6e^x-1}}\,dx$

[3] Лиувил (Joseph Liouville, 1809–1882), француски математичар

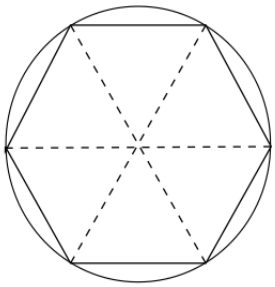
ГЛАВА 6

Одређени интеграл

Сматра се да је Еудокс[1] са Книда творац *метода ексхаустије* (или *исцрпљивања*), којом се површина равних фигура израчунава помоћу низа уписаних полигона. Иако се овај метод среће већ код Антифона[2], изгледа да је Еудокс први који је овај метод добро разумео и строго засновао.

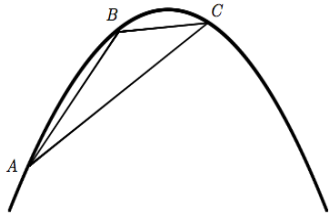
Архимед је користио овај метод при израчунавању површина неких равних фигура. У Глави 1 смо већ споменули да је, апроксимирајући површину круга површинама уписаних полигона, добио оцену за број π

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}.$$



Позната је и Архимедова теорема о површини сегмента параболе:

Теорема 1. *Нека су A и C тачке на параболи и B произвољна тачка на луку $\widehat{AB}$. Површина између лука $\widehat{AC}$ и тетиве AC једнака је $\frac{4}{3}$ површине троугла ABC.*



Савремена теорија одређеног интеграла је заснована на овим идејама античке математике, које доводи у везу са диференцијалним рачуном. Еволуција овог концепта кроз историју прошла је кроз више фаза и уопштења. Почећемо са Њутновим интегралом.

---

[1] Еудокс (*Ενδοξος*, 408–355. пре Христа), старогрчки мислилац, Платонов ђак

[2] Антифон (*Αντιφων*, V век пре Христа), старогрчки мислилац, софиста, предсократовац

1. Њутнов интеграл

Нека је $f : (a, b) \to \mathbf{C}$ непрекидна функција и $F : (a, b) \to \mathbf{C}$ њена примитивна функција:

$$F'(x) = f(x) \quad \text{за све} \quad x \in (a, b).$$

Број

$$\lim_{x \to b-0} F(x) - \lim_{x \to a+0} F(x) \in \mathbf{C}$$

се назива *Њутновим*[3] *интегралом* функције f. Он је добро дефинисан, тј. независан од избора примитивне функције F, јер се две примитивне функције за исту функцију f на интервалу разликују за константу.

На први поглед, није јасно у каквој је вези Њутнов интеграл са методом ексхаустије о коме је било речи у уводу. Међутим, ту везу ћемо ускоро да видимо, у склопу дискусије о Кошијевом интегралу.

2. Кошијев интеграл

Нека је $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ непрекидна и позитивна функција. Нека је интервал $[a, b]$ подељен на n интервала једнаких дужина $\frac{b-a}{n}$ и нека је $\xi_k = a + k\frac{b-a}{n}$ десна граница интервала $[a + (k-1)\frac{b-a}{n}, a + k\frac{b-a}{n}]$. Величина

$$f(\xi_k)\frac{b-a}{n}$$

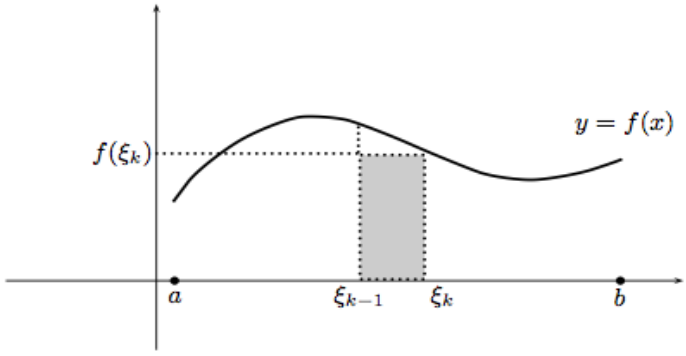
је површина правоугаоника са теменима

$$(\xi_{k-1}, 0),\ (\xi_k, 0),\ (\xi_k, f(\xi_k)),\ (\xi_{k-1}, f(\xi_k)),$$

па величина

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\frac{b-a}{n}$$

апроксимира површину између графика функције $y = f(x)$ и x–осе.



Интуитивно је јасно да кад $n \to \infty$ та апроксимација постаје све боља, па је логично величину

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\frac{b-a}{n},$$

[3]Њутн (Sir Isaac Newton, 1643–1727), енглески физичар, математичар, астроном, философ и алхемичар

уколико овај лимес постоји, узети за *дефиницију површине* испод графика позитивне непрекидне функције f.

У овом параграфу бавићемо се уопштењем ових разматрања.

2.1. Дефиниција Кошијевог интеграла. Нека је $[a,b]$ ограничен затворени интервал и $f:[a,b]\to\mathbf{C}$ непрекидна[4] функција. Поделимо интервал $[a,b]$ на n интервала једнаких дужина $\frac{b-a}{n}$. Нека је $\xi_k = a+k\frac{b-a}{n}$ десна граница интервала $[a+(k-1)\frac{b-a}{n}, a+k\frac{b-a}{n}]$. Посматрајмо низ

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\frac{b-a}{n}.$$

Лема 1. *Низ S_n конвергира.*

$\triangle$ Покажимо да је низ S_n Кошијев. За то је довољно претпоставити да је f реална функција.

Нека је $\varepsilon>0$. Из Канторове теореме (Теорема 7 на стр. 113) следи да је функција f униформно непрекидна на интервалу $[a,b]$. Из дефиниције униформне непрекидности (стр. 113) следи да постоји $\delta>0$ такво да важи

$$|x-y|<\delta \;\Rightarrow\; |f(x)-f(y)|<\varepsilon(b-a)^{-1}. \tag{1}$$

Нека су, за $m,n\in\mathbf{N}$, бројеви $\xi_k = a+k\frac{b-a}{n}$ и $\eta_j = a+j\frac{b-a}{m}$ поређани у неопадајући коначан низ $x_1,\dots x_{m+n}$ и нека је $x_0=a$. Пошто је

$$f(\xi_k)\frac{b-a}{n} = f(\xi_k)(\xi_k-\xi_{k-1}) = f(\xi_k)(\xi_k-\eta_j)+f(\xi_k)(\eta_j-\xi_{k-1}),$$

разлику S_m-S_n можемо да напишемо у облику

$$S_m-S_n = \sum_{k=1}^{m+n}\Delta_k(f)(x_k-x_{k-1}), \tag{2}$$

где је $\Delta_k(f) = f(\eta_{j(k)})-f(\xi_{i(k)})$ за неке $\xi_{i(k)}$ и $\eta_{j(k)}$ такве да је, за довољно велике m и n

$$|\xi_i-\eta_j|<\delta.$$

Одатле, на основу (1), следи да је за довољно велико m и n

$$|\Delta_k(f)|<\varepsilon(b-a)^{-1},$$

па из (2) следи

$$|S_m-S_n|\le\varepsilon(b-a)^{-1}\sum_{k=1}^{m+n}(x_k-x_{k-1}) = \varepsilon(b-a)^{-1}(b-a)=\varepsilon.$$

Одатле следи да је низ S_n Кошијев, тј. конвергентан. $\triangledown$

Претходном лемом је оправдана следећа дефиниција.

Дефиниција 1. Број

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\frac{b-a}{n} \tag{3}$$

назива се *Кошијевим интегралом* непрекидне функције f на интервалу $[a,b]$.

[4]Услов непрекидности ћемо ослабити у Параграфу 5.

Иако је у самој дефиницији Коши користио вредности функција у подеоним тачкама ξ_k, при доказу егзистенције лимеса (3) он доказује да избором произвољне тачке $c_k \in [\xi_{k-1}, \xi_k]$ добијамо исти објекат.[5] Прецизније, важи следећа лема.

Лема 2. *Нека су $c_k \in [\xi_{k-1}, \xi_k]$ произвољне тачке. Тада је*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\frac{b-a}{n} = \int_a^b f(x)\,dx.$$

$\triangle$ Нека је

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\frac{b-a}{n} \quad \text{и} \quad S_n^c = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\frac{b-a}{n}.$$

Тада је

$$|S_n - S_n^c| \le \sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k) - f(c_k)|\frac{b-a}{n}. \tag{4}$$

Нека је $\varepsilon > 0$. Из униформне непрекидности следи да постоји $\delta > 0$ тако да важи

$$|x-y| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(y)| < \varepsilon(b-a)^{-1}.$$

Ако је n довољно велико, онда је $\xi_k - \xi_{k-1} = \frac{1}{n} < \delta$, па је $|f(\xi_k) - f(c_k)| < \varepsilon(b-a)^{-1}$. Одатле и из (4) следи $|S_n - S_n^c| < \varepsilon$. Преласком на лимес, добијамо тврђење леме. $\triangledown$

Лема 3. *Нека је $f : [a,b] \to \mathbf{C}$ непрекидна функција. Тада је функција*

$$F : [a,b] \to \mathbf{C}, \qquad F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

непрекидна.

$\triangle$ Нека је $\varepsilon > 0$. Из униформне непрекидности функције f следи да постоји $\delta > 0$ са својством

$$|\xi - \eta| < \delta \;\Rightarrow\; |f(\xi) - f(\eta)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \text{и} \quad \delta \max_{\eta\in[a,b]} |f(\eta)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Поделимо сваки од интервала $[a, x+\delta]$ и $[a,x]$ на n интервала једнаке дужине. Ако су $\xi_k = a + k\frac{x+\delta-a}{n}$ и $\eta_k = a + k\frac{x-a}{n}$ десни крајеви добијених интервала, онда је $|\xi_k - \eta_k| \le \delta$, па је

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\tfrac{x+\delta-a}{n} - \sum_{k=1}^{n} f(\eta_k)\tfrac{x-a}{n}\Big| = \\
&= \Big|\sum_{k=1}^{n} \big(f(\xi_k)\tfrac{x+\delta-a}{n} - f(\eta_k)\tfrac{x+\delta-a}{n} + f(\eta_k)\tfrac{x+\delta-a}{n} - f(\eta_k)\tfrac{x-a}{n}\big)\Big| \\
&\le \sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k) - f(\eta_k)|\tfrac{x+\delta-a}{n} + \sum_{k=1}^{n} |f(\eta_k)|\tfrac{\delta}{n} \\
&< n\tfrac{\varepsilon}{2(b-a)}\tfrac{b-a}{n} + n \max_{\eta\in[a,b]} |f(\eta)|\tfrac{\delta}{n} < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Преласком на $\lim\limits_{n\to\infty}$ добијамо $|F(x+\delta) - F(x)| \le \varepsilon$, чиме је доказана непрекидност функције F. $\triangledown$

[5] В. [**8**] за дискусију о историји развоја концепта интеграла.

На сличан начин се доказује и непрекидност функције $x \mapsto \int_x^b f(x)\,dx$. Касније ћемо доказати и јаче тврђење – да су ове функције диференцијабилне.

Последица 1. (Адитивност по интервалу интеграције) *Нека је* $c \in (a,b)$*; тада је*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

$\triangle$ Претпоставимо да је $\frac{c-a}{b-a} \in \mathbf{Q}$, тако да интервал $[a,b]$ можемо да поделимо на n интервала једнаке дужине тако да је c једна од подеоних тачака, рецимо $c = \xi_m$. Тада важи

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\frac{b-a}{n} = \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)\frac{b-a}{n} + \sum_{k=m+1}^{n} f(\xi_k)\frac{b-a}{n}$$

Слична једнакост важи за све чланове подниза S_{kn}, јер даљим дељењем сваког од n подеоних интервала на k делова тачка c остаје подеона тачка. Прелазећи на $\lim_{k\to\infty}$ у том поднизу добијамо

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Претпоставимо сада $\frac{c-a}{b-a} \notin \mathbf{Q}$. Из густине скупа $\mathbf{Q}$ у $\mathbf{R}$ следи да у произвољној околини тачке c постоји тачка c_1 таква да је $\frac{c_1-a}{b-a} \in \mathbf{Q}$. За сваку такву тачку c_1 смо доказали тврђење теореме. Нека је $\varepsilon > 0$. Из Леме 3 следи да ако тачку c_1 да изаберемо довољно близу тачке c важи

$$\begin{aligned} \textstyle\int_a^b f(x)\,dx - \varepsilon &= \textstyle\int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^b f(x)\,dx - \varepsilon \\ &< \textstyle\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \\ &< \textstyle\int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^b f(x)\,dx + \varepsilon \\ &= \textstyle\int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon. \end{aligned}$$

Пошто је $\varepsilon > 0$ произвољно, одатле следи доказ теореме. $\triangledown$

Претходним тврђењем мотивисана је следећа дефиниција.

Дефиниција 2. Ако је функција f дефинисана у тачки a, онда је

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Ако је $a < b$ онда је

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

После ове дефиниције, формула

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

важи без обзира на то како су распоређене тачке a, b, c на реалној оси.

Напомена 1. Нека је $f : [a,b] \to \mathbf{C}$ непрекидна функција. Користећи идеју коју смо видели у доказу Последице 1 можемо да покажемо да за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ са својством да за сваких m тачака $x_1, \ldots, x_m$ таквих да је

$$a = x_1 < x_2 < \cdots < x_m = b \quad \text{и} \quad \Delta_k := x_k - x_{k-1} < \delta \tag{5}$$

важи

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{m} f(\eta_k)\Delta_k \right| < \varepsilon$$

за произвољне тачке $\eta_k \in [x_k, x_{k-1}]$. Заиста, нека је $\varepsilon > 0$. Из дефиниције Кошијевог интеграла следи да постоји $n_0 \in \mathbf{N}$ са својством да за $n \geq n_0$ важи

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\frac{b-a}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{6}$$

за произвољне тачке $\xi_k \in [a + (k-1)\frac{b-a}{n}, a + k\frac{b-a}{n}]$. Нека су $x_1, \ldots, x_m$ тачке које задовољавају (5) за $\delta = \frac{b-a}{n_0}$. Из непрекидности функције f и густине скупа $\mathbf{Q}$ у $\mathbf{R}$ лако следи да можемо, не умањујући општост, да претпоставимо да су бројеви Δ_k рационални. Свођењем на заједнички именилац добијамо $\Delta_k = \frac{k(b-a)}{n}$. Из $\Delta_k < \delta = \frac{b-a}{n_0}$ следи $n > n_0$, па за тај заједнички именилац важи (6). Одатле следи

$$\begin{aligned}
&\Big| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{m} f(\eta_k)\Delta_k \Big| = \\
&= \Big| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\tfrac{b-a}{n} + \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\tfrac{b-a}{n} - \sum_{k=1}^{m} f(\eta_k)\Delta_k \Big| \\
&\leq \Big| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\tfrac{b-a}{n} \Big| + \Big| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\tfrac{b-a}{n} - \sum_{k=1}^{m} f(\eta_k)\Delta_k \Big| \\
&< \tfrac{\varepsilon}{2} + \Big| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\tfrac{b-a}{n} - \sum_{k=1}^{m} f(\eta_k)\Delta_k \Big|
\end{aligned}$$

Из униформне непрекидности функције f следи да је, за довољно мало δ, и други сабирак мањи од $\frac{\varepsilon}{2}$.

2.2. Својства Кошијевог интеграла. Неке особине коначних сума директно се преносе на интеграле, преласком на лимес.[6] Важи следећа лема.

Лема 4. *Нека су $f : [a,b] \to \mathbf{C}$ и $g : [a,b] \to \mathbf{C}$ непрекидне функције и $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$. Тада важи*

$$\begin{aligned}
&\textstyle\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx \\
&\textstyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \operatorname{Re} f(x)\,dx + i \int_a^b \operatorname{Im} f(x)\,dx \\
&\textstyle\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.
\end{aligned}$$

Ако су f и g реалне, онда важи импликација

$$(\forall x) f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Користећи адитивност по интервалу интеграције и последње тврђење Леме 4 можемо да докажемо следећу лему.

[6] И сам симбол $\int$ уведен је као стилизација почетног слова латинске речи Summa.

Лема 5. *Ако је* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *непрекидна функција таква да је*

$$\big(\forall x \in [a, b] f(x) \geq 0\big) \quad \textit{и} \quad \int_a^b f(x)\,dx = 0,$$

онда је $f(x) = 0$ *за све* $x \in [a, b]$.

$\triangle$ Претпоставимо да је $f(x_0) = A > 0$ за неко $x_0 \in [a, b]$. Из непрекидности функције f следи да тада постоји $\delta > 0$ такво да важи

$$|x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; f(x) > \frac{A}{2}$$

Одатле следи

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^{x_0-\delta} f(x)\,dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,dx + \int_{x_0+\delta}^b f(x)\,dx \\ &\geq 0 + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \tfrac{A}{2}\,dx + 0 = \tfrac{A}{2} \cdot 2\delta > 0,\end{aligned}$$

што је у супротности са претпоставком $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ $\triangledown$

Пример 1. У Задатку 14 на стр. 142 видели смо како можемо да докажемо да једначина

$$a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx = 0$$

има бар једно решење на интервалу $(0, \pi)$, применом Ролове теореме. Овај задатак може да се реши и применом Леме 4: довољно је приметити да је

$$\int_0^\pi (a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx)\,dx = 0.$$

Одатле и из Леме 4 следи да подинтегрална функција није сталног знака, па из Теореме о међувредности за непрекидне функције следи да мора негде да буде једнака нули. ♯

Једноставна последица последње формуле у Леми 4 је следећа теорема.

Теорема 2. (Прва теорема о средњој вредности) *Нека су* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *и* $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ *непрекидне функције и нека је* $g(x) \geq 0$ *за све* $x \in [a, b]$. *Тада постоји тачка* $\xi \in [a, b]$ *таква да је*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\,dx.$$

$\triangle$ Ако је $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, из $g(x) \geq 0$ и Леме 5 следи да је $g(x) = 0$. Тада је и $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$, чиме је доказано тврђење теореме.

Претпоставимо да је $\int_a^b g(x)\,dx > 0$. Пошто је f непрекидна функција, она достиже свој максимум и минимум на $[a, b]$. Нека је $M = \max f(x)$, $m = \min f(x)$. Пошто је $g(x) \geq 0$ за све x, важи

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x).$$

Одатле, на основу Леме 4, следи

$$m\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le M\int_a^b g(x)\,dx,$$

па је

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \le M.$$

Одатле, на основу Теореме о међувредности за непрекидне функције (Последица 8 на стр. 111) следи да постоји тачка $\xi \in [a,b]$ таква да важи

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx},$$

што је и требало доказати. ▽

Напомена 2. *Средња вредност* функције $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ је величина

$$A(f) := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx,$$

која на очигледан начин уопштава појам аритметичке средине вредности функције на коначном скупу, на функције дефинисане на интервалу. Из Теореме 2 (у специјалном случају $g \equiv 1$) следи да се средња вредност непрекидне функције достиже у некој тачки интервала. ◇

Следећом теоремом показаћемо у каквој су вези неодређени и одређени интеграл, тј. Њутнов и Кошијев интеграл. Тиме испуњавамо и обећање дато у Напомени 2 на стр. 244.

Теорема 3. (Основна теорема интегралног рачуна) *Нека је*

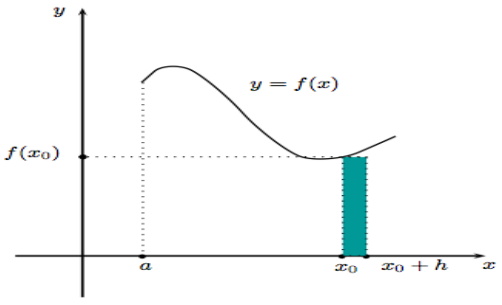
$$f : [a,b] \to \mathbf{C}$$

непрекидна функција и

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Тада је $F'(x) = f(x)$.

△ Идеја доказа се састоји у следећем. Прираштај $F(x_0+h)-F(x_0)$ је површина испод графика криве $y = f(x)$ на интервалу $[x_0, x_0+h]$. Она се апроксимира, за мало h, површином правоугаоника чије су странице $f(x_0)$ и h:



$$F(x_0+h)-F(x_0)\approx hf(x_0) \qquad \text{кад} \qquad h\to 0.$$

Дељењем са h добијамо

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}\to f(x_0) \qquad \text{кад} \qquad h\to 0.$$

Докажимо ово прецизније. Из Прве теореме о средњој вредности (Теорема 2 на стр. 263) следи

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt = f(\xi)$$

за неко $\xi\in[x_0,x_0+h]$. Ако $h\to 0$ онда и $\xi\to x_0$, па због непрекидности функције f у тачки x_0 важи и $f(\xi)\to f(x_0)$. ▽

Задатак 1. Израчунати извод функције $\psi(x)=\int\limits_x^{x^2+x}\sqrt{t^3+4t}\,dt$. ✓

Теорема 4. **(Њутн–Лајбницова формула)** *Нека је* $\Phi:[a,b]\to\mathbf{C}$ *произвољна примитивна функција непрекидне функције* f. *Тада је*

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Phi(b)-\Phi(a).$$

Претходна формула се записује и као

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Phi(x)\Big|_a^b,$$

где је $\Phi(x)\Big|_a^b:=\Phi(b)-\Phi(a)$.

△ Један доказ ове теореме следи директно из Теореме 3 и Леме 1 на стр. 243. Препуштамо га читаоцу.

Даћемо још један доказ. Нека је $\Phi'(x)=f(x)$. Из Лагранжове теореме следи да постоји $c_k\in[\xi_{k-1},\xi_k]$ такво да је

$$\Phi(\xi_k)-\Phi(\xi_{k-1})=\Phi'(c_k)(\xi_k-\xi_{k-1})=f(c_k)\frac{b-a}{n}.$$

Одатле сумирањем добијамо

$$\Phi(b)-\Phi(a)=\sum_{k=1}^{n}(\Phi(\xi_k)-\Phi(\xi_{k-1}))=\sum_{k=1}^{n}f(c_k)\frac{b-a}{n}.$$

Преласком на лимес и применом Леме 2 добијамо тврђење теореме. ▽

Последица 2. *Уз претпоставке Теореме 4 важе следеће формуле:*

1. Смена променљивих. *Ако је* $\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ *непрекидно диференцијабилна функција таква да је* $\varphi(\alpha)=a$ *и* $\varphi(\beta)=b$, *тада је*

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

2. Парцијална интеграција. *Ако су* u *и* v *непрекидно диференцијабилне функције на интервалу* $[a,b]$ *онда важи*

$$\int_a^b u\,dv=uv\Big|_a^b-\int_a^b v\,du.$$

△ Доказ следи из одговарајућих формула за неодређене интеграле и Њутн–Лајбницове формуле. ▽

Задатак 2. Израчунати

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^7 + 2^7 + \cdots + n^7}{n^8}$$

свођењем лимеса на интеграл. ✓

Задатак 3. Израчунати

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k+m+1}} \sum_{j=1}^{n-1} j^k (j+1)^m,$$

за $k, m \in \mathbf{N}$. ✓

Задатак 4. Израчунати

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

✓

Некада је могуће израчунати одређени интеграл функције без његовог свођења на неодређени интеграл (и без обзира на то да ли је њен одређени интеграл елементарна функција). Следећи задатак даје један такав пример.

Задатак 5. Израчунати интеграл

$$I = \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\, dx.$$

Упутство: Показати да се сменом $x = \tan t$, односно $t = \arctan x$, добија

$$I = \int_0^{\pi/4} \log\tan(1+t)\, dt.$$

Увести затим смену $s = \frac{\pi}{4} - t$ и показати да је

$$I = \int_0^{\pi/4} (\log(1 + \tan(\pi/4 - s)))\, ds.$$

Искористити формулу

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

и показати да је $I = \frac{\pi}{4}\log 2 - I$, односно $I = \frac{\pi}{8}\log 2$. ✓

Задатак 6. Урадити Задатак 5 сменом $t = (1-x)/(1+x)$. ✓

Задатак 7. Израчунати интеграл

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x+1}\, dx.$$

✓

Задатак 8. Израчунати интеграл

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + (\tan x)^\pi}.$$

Упутство: Увести смену $x = \frac{\pi}{2} - t$ и доказати да је $I + I = \frac{\pi}{2}$, па је $I = \frac{\pi}{4}$. ✓

Задатак 9. Доказати да је

$$\binom{n}{1} - \frac{1}{2}\binom{n}{2} + \frac{1}{3}\binom{n}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\binom{n}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$$

(упоредити са Задатком 10 на стр. 139). Упутство: доказати да је збир на левој страни једнак интегралу

$$\int_0^1 \frac{1-(1-x)^n}{x}\,dx.$$

Увести смену $1-x=t$ и искористити $1-t^n = (1-t)(1+t+\ldots+t^{n-1})$. ✓

Пример 2. (Тејлорова формула) Нека је функција f непрекидна заједно са својих првих $n+1$ извода у околини тачке $a \in \mathbf{R}$. Из Њутн–Лајбницове формуле следи

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt.$$

Ако на интеграл на десној страни применимо формулу парцијалне интеграције са $u(t) = f'(t)$, $v(t) = t - x$ добијамо

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-t)f''(t)\,dt.$$

Сада на интеграл на десној страни можемо да применимо формулу парцијалне интеграције са $u(t) = f''(t)$, $v(t) = -\frac{(x-t)^2}{2}$. Тиме добијамо

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2!}f'''(t)\,dt.$$

Понављањем овог поступка n пута добијамо

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Ово је *Тејлорова формула са остатком у интегралном облику.* ♯

Пример 3. (Ирационалност броја π) У Глави 1 обећали смо да ћемо да докажемо да је број π ирационалан. Доказ који овде дајемо је једноставнији од оригиналног Ламбертовог доказа из XVIII века[7] и дао га је И. Нивен[8] 1947. године. Претпоставимо супротно, да је

$$\pi = \frac{a}{b}, \quad \text{за неке} \quad a, b \in \mathbf{N}.$$

Дефинишимо функције $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ и $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ са

$$f(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}, \qquad F(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k f^{(2k)}(x).$$

Применом биномне формуле закључујемо да је f полином облика

$$f(x) = \frac{1}{n!}\sum_{k=n}^{2n} c_k x^k,$$

[7]Ламберт је доказао да, ако је $x \neq 0$ рационалан број, онда је $\tan x$ ирационалан. Одатле следи да је π ирационалан.

[8]Нивен (Ivan Morton Niven, 1915–1999), канадски математичар

где су c_k цели бројеви. Одатле следи да је $f^k(0)$ цео број за све k (за $k < n$ и $k > 2n$ једнак нули, а за $n \le k \le 2n$ једнак $\frac{k!}{n!}c_k$), па је и $F(0)$ цео број. Приметимо да је $f(\pi - x) = f(x)$. Одатле следи да је и $f(\pi)$, па тиме и $F(\pi)$, цео број.

Пошто је $f^{(2n+2)}(x) \equiv 0$ (јер је f полином степена $2n$), важи

$$F''(x) + F(x) = f(x).$$

Одатле следи да је

$$(F'(x)\sin x - F(x)\cos x)' = f(x)\sin x.$$

Применом Њутн–Лајбницове формуле одатле добијамо

$$\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx = (F'(x)\sin x - F(x)\cos x)\Big|_0^\pi = F(0) + F(\pi).$$

Пошто смо видели да су $F(0)$ и $F(\pi)$ цели бројеви, а функције $f(x)$ и $\sin x$ позитивне за $0 < x < \pi$, следи да је

$$\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx \in \mathbf{N}.$$

Међутим, пошто је $x^n(a - bx)^n \le (a\pi)^n$ за $0 \le x \le \pi$, важи неједнакост

$$\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx \le \pi\frac{(a\pi)^n}{n!}.$$

То је контрадикција, пошто је израз на десној страни мањи од 1 за довољно велико n (јер тежи нули кад $n \to \infty$), па израз на левој страни не може да буде природан број. Ова контрадикција показује да π није рационалан број. ♯

Задатак 10. Модификовати доказ из Примера 3 и доказати да је π^2 ирационалан број. ✓

Напомена 3. У Глави 1 смо рекли да је π заправо трансцендентан број, одакле следи и да је ирационалан. Међутим, доказ ове чињенице је мање елементаран. Он се заснива на *Линдеман–Вајерштрасовој теореми*, чија формулација барата неким појмовима алгебре које овде нисмо увели. Међутим, један специјални случај те теореме каже да, ако је $a \in \mathbf{C}$ алгебарски број различит од нуле, онда је e^a трансцендентан. Одатле следи да су e и π трансцендентни бројеви. Заиста, пошто је 1 алгебарски број, $e = e^1$ је трансцендентан. Када би π био алгебарски број, онда би и $i\pi$ био алгебарски[9], па би $e^{i\pi} = -1$ био трансцендентан, што је контрадикција. Једноставнији доказ трансцендентности бројева e и π, без позивања на Линдеман–Вајерштрасову теорему, дајемо у следећим примерима. ◇

Пример 4. **(Трансцендентност броја e)** У Примеру 24 на стр. 179 доказано је да је број e ирационалан. Француски математичар Ермит[10] доказао је да важи и више од тога – да је број e трансцендентан (што значи, како смо већ раније споменули, да није нула ниједног полинома са целобројним коефицијентима).

---

[9] Ако је $a \in \mathbf{C}$ алгебарски број и $P(x)$ полином са целобројним коефицијентима за који је $P(a) = 0$, онда је $Q(x) := P(ix)P(-ix)$ полином са целобројним коефицијентима (доказати!) за који је $Q(ia) = 0$, па је и ia алгебарски број.

[10] Ермит (Charles Hermite, 1822–1901), француски математичар

Претпоставимо супротно, да постоје цели бројеви $c_0, c_1, \ldots, c_n$ такви да је

$$c_0 + c_1 e + \cdots + c_n e^n = 0. \tag{7}$$

Нека је p прост број већи од n и $|c_0|$. Функција

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)!} x^{p-1}(x-1)^p(x-2)^p \cdot \ldots \cdot (x-n)^p$$

је полином степена $m = (n+1)p - 1$ па је њен извод реда $m+1$ једнак нули. Одатле следи да, примењујући парцијалну интеграцију $(n+1)p$ пута добијамо

$$\int_0^k f(x)e^{-x}\,dx = -e^{-x}\big(f(x) + f'(x) + \cdots + f^{(m-1)}(x)\big)\Big|_0^k.$$

Одатле следи

$$\varphi(k) + e^k \int_0^k f(x)e^{-x}\,dx = e^k\varphi(0), \tag{8}$$

где је $\varphi(x) = f(x) + f'(x) + \cdots + f^{(m-1)}(x)$. Множењем обе стране у (8) са c_k и сумирањем добијамо, имајући у виду (7),

$$\sum_{k=1}^n c_k\varphi(k) + \sum_{k=1}^n c_k e^k \int_0^k f(x)e^{-x}\,dx = 0. \tag{9}$$

Пошто је производ p узастопних природних бројева дељив са $p!$ (в. Задатак 17 на стр. 24), изводи $f^{(j)}(x)$ функције f реда $j \geq p$ су полиноми са целобројним коефицијентима, дељивим са p. Одатле следи да је за сваки цео број k и $j \geq p$ број $f^{(j)}(k)$ цео број дељив са p. Пошто су у тачкама $x = 1, 2, \ldots, n$ полином f и његових првих $p-1$ извода једнаки нули, одатле следи да су $\varphi(1), \varphi(2), \ldots, \varphi(n)$ цели бројеви дељиви са p. У тачки $x = 0$ полином f и његових првих $p-2$ извода су једнаки нули, па је

$$\varphi(0) = f^{(p-1)}(0) + f^{(p)}(0) + \cdots + f^{(m-1)}(0).$$

Сви сабирци сем првог су цели бројеви дељиви са p, а $f^{(p-1)}(0) = (-1)^{pn}n!$ није дељив са p пошто је p прост број већи од n. Одатле следи да је $\varphi(0)$ цео број који није дељив са p, па је и прва сума у (9) цео број који није дељив са p. Самим тим, та сума је различита од нуле.

Из неједнакости

$$|f(x)| < \frac{n^{(n+1)p-1}}{(p-1)!} \quad \text{и} \quad e^{-x} \leq 1 \quad \text{за} \quad x \in [0, n]$$

следи

$$\left| \int_0^k f(x)e^{-x}\,dx \right| < \frac{n^{(n+1)p-1}}{(p-1)!}k,$$

па је

$$\left| \sum_{k=1}^n c_k e^k \int_0^k f(x)e^{-x}\,dx \right| < (|c_0| + |c_1| + \cdots + |c_n|)e^n \frac{n^{(n+1)p-1}}{(p-1)!}.$$

Пошто је

$$\lim_{p\to\infty} \frac{n^{(n+1)p-1}}{(p-1)!} = n^n \lim_{p\to\infty} \frac{(n^{(n+1)})^{p-1}}{(p-1)!} = 0$$

(Пример 21 на стр. 178), за довољно велико p апсолутна вредност друге суме у (9) биће мања од прве, па њихов збир не може да буде једнак нули. Тиме смо

претпоставку (7) довели до контрадикције и доказали да је e трансцендентан број. ♯

Пример 5. (Трансцендентност броја π) У Напомени 3 смо видели да је, да бисмо доказали да је π трансцендентан број, довољно доказати да је број $i\pi$ трансцендентан.

Претпоставимо супротно, да постоји полином $P_1(x)$ са целобројним коефицијентима, такав да је $P_1(i\pi) = 0$. Претпоставимо да је P_1 полином степена n, и означимо његове нуле са $r_1, \ldots, r_n$, при чему је $r_1 = i\pi$.

Пошто је

$$e^{r_1} + 1 = e^{i\pi} + 1 = 0,$$

следи да је

$$(e^{r_1} + 1) \cdot (e^{r_2} + 1) \cdot \ldots \cdot (e^{r_n} + 1) = 0.$$

После множења израза на десној страни добијамо

$$e^{s_1} + e^{s_2} + \ldots + e^{s_r} + e^0 + e^0 + \ldots + e^0 = 0,$$

где су $s_1, \ldots, s_r$ збирови бројева r_j који су различити од нуле, а осталих $2^n - r$ сабирака одговара збировима који су једнаки нули. Приметимо да свакако има таквих сабирака, јер множењем израза на десној страни као један од сабирака добијамо 1, па је

$$e^{s_1} + e^{s_2} + \ldots + e^{s_r} + k = 0, \tag{10}$$

за неко $k \geq 1$.

Пошто бројеви r_1 задовољавају полиномијалну једначину са целобројним коефицијентима, из Вијетових формула (Пример 27 на стр. 65) следи да су елементарни симетрични полиноми по r_j рационални бројеви. Одатле следи да су и елементарни симетрични полиноми по свим збировима $r_i + r_j$ $(i \neq j)$ рационални бројеви, па следи (опет из Вијетових формула) да постоји полином $P_2(x)$ са рационалним коефицијентима чије су нуле збирови $r_i + r_j$. Слично, постоји полином $P_3(x)$ са рационалним коефицијентима чије су нуле збирови тројки $r_i + r_j + r_k$ итд, до полинома $P_n(x)$ са рационалним коефицијентима чија је нула број $r_1 + \ldots + r_n$. То значи да сви збирови парова, тројки итд, бројева r_j задовољавају полиномијалну једначину

$$P_1(x)P_2(x)\ldots P_n(x) = 0$$

са целобројним коефицијентима. Полином на левој страни је облика $x^j P(x)$, где је

$$P(x) = a_r x^r + \ldots + a_1 x + a_0, \qquad a_0, a_1, \ldots, a_r \in \mathbf{Z}$$

полином са целобројним коефицијентима, такав да је $a_0 \neq 0$. Нуле овог полинома су бројеви s_j из (10).

Нека је

$$m = rp - 1,$$

где је p природан број који ћемо да одредимо касније, и нека је

$$f(x) = a_r^m x^{p-1} \frac{(P(x))^p}{(p-1)!}.$$

Нека је

$$F(x) = f(x) + f'(x) + \ldots + f^{m+p}(x).$$

Тада је

$$\frac{d}{dx}(e^{-x}F(x)) = -e^{-x}f(x),$$

па је

$$e^{-x}F(x) - F(0) = -\int_0^x e^{-u}f(u)\,du.$$

Ако у интеграл на десној страни уведемо смену $u = tx$, добијамо

$$F(x) - e^x F(0) = -x\int_0^1 e^{(1-t)x}f(tx)\,dt. \tag{11}$$

Ако у (11 уврстимо

$$x = s_1, \quad x = s_2, \quad \dots \quad x = s_r,$$

где су $s_1, \dots, s_r$ из (10), и сумирамо, добијамо, користећи једнакост (10),

$$\sum_{j=1}^{r} F(s_j) + kF(0) = -\sum_{j=1}^{r} s_j \int_0^1 e^{(1-t)s_j}f(ts_j)\,dt. \tag{12}$$

Пошто су s_j нуле полинома $P(x)$, из дефиниције функције f следи да за изводе $f^{(v)}$ реда v, за $0 < v < p$, важи

$$\sum_{j=1}^{r} f^{(v)}(s_j) = 0.$$

Изводи реда p и већег имају фактор pa_r^m, будући да је потребно диференцирати $(P(x))^p$ најмање p пута да би се добио израз различит од нуле за $x = s_j$. Израз

$$\sum_{j=1}^{r} f^{(v)}(s_j)$$

је, за $v \geq p$, симетрични полином по s_j реда не већег од m. Из Вијетових формула следи да је производ таквог симетричног полинома и a_r^m цео број, па је

$$\sum_{j=1}^{r} f^{(v)}(s_j) = p \cdot (\text{цео број}) \qquad \text{за} \qquad v \in \{p, p+1, \dots, p+m\}.$$

Одатле следи да је лева страна у (12) облика

$$p \cdot (\text{цео број}) + kF(0).$$

Приметимо да је

$$f^{(v)}(0) = \begin{cases} 0, & v < p-1 \\ a_r^m a_0^p, & v = p-1 \\ p \cdot \text{цео број}, & v \geq p \end{cases}$$

Одатле следи да је лева страна у (12) облика

$$p \cdot (\text{цео број}) + ka_r^m a_0^p.$$

Последњи сабирак није дељив са p ако је

$$p > \max\{k, a_0, a_r\}.$$

То значи да је за довољно велико p, лева страна у (12) позитиван цео број. Међутим, десна страна у (12) тежи нули кад $p \to +\infty$ (задатак!), што је контрадикција. Тиме је доказано да је π трансцендентан број. ♯

Напомена 4. Није познато да ли су бројеви $e+\pi$ и $e\pi$ рационални или ирационални. Отворен проблем у модерној алгебри, познат као Шануелова[11] хипотеза, као специјални случај садржи хипотезу да су бројеви e и π *алгебарски независни над* $\mathbf{Q}$, тј. да не постоји нетривијалан полином $P(x,y)$ две променљиве са рационалним коефицијентима, такав да је $P(e,\pi)=0$. Приметимо да је тврђење овог, још увек отвореног, проблема још слабије од тврђења да је $e+\pi$ (или $e\pi$) ирационалан број.

Међутим, лако је видети да је бар један од бројева $e+\pi$ и $e\pi$ ирационалан: из

$$(x-e)(x-\pi)=x^2-(e+\pi)x+e\pi,$$

следи да су e и π нуле полинома $x^2-(e+\pi)x+e\pi$. Пошто су e и π трансцендентни бројеви, не могу сви коефицијенти овог полинома да буду рационални бројеви.

Познато је да је e^π трансцендентан број. Ову чињеницу су 1934. године доказали, независно један од другог, А.О. Гељфонд[12] и Т. Шнајдер[13], у склопу општијег тврђења, познатог као VII Хилбертов[14] проблем. Твеђење које су доказали, познато као Гељфонд–Шнајдерова теорема, гласи: *Ако су* $\alpha,\beta\in\mathbf{C}$ *алгебарски бројеви, такви да је*

$$\alpha\neq 0,\qquad \alpha\neq 1,\qquad \beta\notin\mathbf{Q}$$

онда је број α^β *трансцендентан.* Специјално, број $e^\pi=(e^{i\pi})^{-i}$ је трансцендентан, јер $\alpha=e^{i\pi}=-1$ и $\beta=-i$ задовољавају услове теореме. Слично, број $2^{\sqrt{2}}$, познат као *Гељфонд-Шнајдерова константа*, је трансцендентан. Одатле следи да је број $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ који смо видели у Задатку 85 на стр. 58, трансцендентан. ⋄

Задатак 11. Доказати да је

$$\int_0^{\pi/2}\sin^k x\,dx=\int_0^{\pi/2}\cos^k x\,dx=\begin{cases}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2} & \text{за } k=2n\\ \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} & \text{за } k=2n+1.\end{cases}$$

Користећи неједнакости

$$\sin^{2n+1}x\le\sin^{2n}x\le\sin^{2n-1}x\quad\text{за}\quad 0\le x\le\frac{\pi}{2}$$

доказати неједнакости

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\le\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}\le\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

и извести одатле Валисову формулу

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\frac{1}{2n+1}$$

(формула (83) на стр. 76). ✓

---

[11] Шануел (Stephen H. Schanuel, рођен 1933), амерички математичар

[12] Гељфонд (Алекса́ндр О́сипович Гельфонд, 1906–1968), руски математичар

[13] Шнајдер (Theodor Schneider, 1911), немачки математичар

[14] Хилберт (David Hilbert, 1862–1943), немачки математичар. Хилберт је 1900. године поставио 23 проблема које би, по његовом мишљењу, требало да покуша да реши математика XX века. Један део ових проблема поставио је на Другом светском конгресу математичара у Паризу, 8. августа 1900.

Пример 6. Применом интеграла може да се изведе асимптотска формула

$$\log n! \sim n \log n, \qquad \text{кад} \qquad n \to \infty. \tag{13}$$

Из адитивности интеграла следи

$$\int_1^n \log x \, dx = \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \log x \, dx. \tag{14}$$

Пошто је логаритамска функција растућа, важи

$$\log (k-1) < \log x < \log k \qquad \text{за} \qquad k-1 < x < k. \tag{15}$$

Из (14) и (15) следи

$$\int_1^n \log x \, dx < \sum_{k=1}^{n} \log k < \sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \log x \, dx = \int_2^{n+1} \log x \, dx. \tag{16}$$

Пошто је

$$\sum_{k=1}^{n} \log k = \log \prod_{k=1}^{n} k = \log n!,$$

из (16) следи

$$0 < \log n! - \int_1^n \log x \, dx < \int_1^2 \log x \, dx + \int_n^{n+1} \log x \, dx. \tag{17}$$

Израз иза последње неједнакости у (17) је, због монотоности логаритма, мањи од $\log 2 + \log (n+1)$, па је

$$0 < \log n! - \int_1^n \log x \, dx < \log (2(n+1)),$$

одакле следи

$$\log n! = \int_1^n \log x \, dx + O(\log (2n+2)), \qquad \text{кад} \qquad n \to \infty. \tag{18}$$

Израчунавањем интеграла у (18) добијамо

$$\log n! = n \log n + O(n), \qquad \text{кад} \qquad n \to \infty,$$

одакле следи (13). ♯

Лема 6. *Нека је $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ непрекидна, а $h : [a,b] \to \mathbf{R}$ непрекидно диференцијабилна, ненегативна и опадајућа функција. Тада постоји тачка $\xi \in [a,b]$ таква да важи*

$$\int_a^b f(x)h(x) \, dx = h(a) \int_a^{\xi} f(x) \, dx.$$

△ Нека је $F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$; тада је $dF(x) = f(x)dx$. Из формуле парцијалне интеграције следи

$$\int_a^b f(x)h(x) \, dx = \int_a^b h(x) \, dF(x) = F(x)h(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x) \, dh(x).$$

Пошто је $F(a) = 0$ и $F(b) = \int_a^b f(x) \, dx$, одатле следи

$$\int_a^b f(x)h(x) \, dx = h(b) \int_a^b f(x) \, dx - \int_a^b F(x)h'(x) \, dx$$

Нека је $M = \max F$, $m = \min F$. Пошто је $h(x) \geq 0$ и $h'(x) \leq 0$, из последње једнакости следи

$$mh(b) - m\int_a^b h'(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)h(x)\,dx \leq Mh(b) - M\int_a^b h'(x)\,dx,$$

а одатле, пошто је $\int_a^b h'(x)\,dx = h(b) - h(a)$,

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)h(x)\,dx}{h(a)} \leq M.$$

Пошто је функција F непрекидна, постоји $\xi \in [a,b]$ такво да је

$$\frac{\int_a^b f(x)h(x)\,dx}{h(a)} = F(\xi) = \int_a^\xi f(x)\,dx,$$

што је и требало доказати. ▽

Теорема 5. (Друга теорема о средњој вредности) *Нека је $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ непрекидна, а $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ непрекидно диференцијабилна и монотона функција. Тада постоји тачка $\xi \in [a,b]$ таква да важи*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx.$$

△ Претпоставимо, не умањујући општост, да је g неопадајућа функција (у противном посматрајмо уместо ње функцију $g_1(x) = -g(x)$). Доказ следи применом Леме 6 на функцију $h(x) = g(b) - g(x)$. ▽

Теорема 6. (Интеграција степеног реда) *Нека је $x_0 \in \mathbf{R}$ и c_n низ у $\mathbf{C}$. Нека је R полупречник конвергенције степеног реда*

$$\sum_{n=0}^\infty c_n(x-a)^n$$

и нека је интервал $[\alpha,\beta]$ садржан у интервалу конвергенције $(a-R, a+R)$. Тада је

$$\int_\alpha^\beta \sum_{n=0}^\infty c_n(x-a)^n\,dx = \sum_{n=0}^\infty c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}\Big|_{x=\alpha}^{x=\beta}.$$

Другим речима, интеграл интеграл степеног реда може да се израчуна интеграцијом члан по члан.

△ Доказ следи из правила диференцирања степеног реда (Теорема 23 на 215. страни) и Њутн–Лајбницове формуле. ▽

Задатак 12. Израчунати интеграл

$$\int_0^{1/2} x^n\,dx$$

и, помоћу њега, збир реда

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n2^n}.$$

✓

Задатак 13. Доказати да је

$$\int_0^1 \frac{\log x}{1+x^2} = G,$$

где је G Каталанова константа (видети Задатак 75 на стр. 234).

Упутство: $(1+x^2)^{-1}$ је збир геометријског реда. ✓

3. Примене интеграла

3.1. Површине равних ликова. Нека су $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ и $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ непрекидне функције такве да је $g(x) \le f(x)$ за свако $x \in [a,b]$. Површину дела равни ограниченог кривама $y = f(x)$ и $y = g(x)$, $a \le x \le b$, тј. скупа

$$S = \{(x,y) \in [a,b] \times \mathbf{R} \mid g(x) \le y \le f(x)\}$$

можемо да апроксимирамо збиром површина правоугаоника са теменима

$$(\xi_{k-1}, f(\xi_k)), \quad (\xi_{k-1}, g(\xi_k)), \quad (\xi_k, f(\xi_k)), \quad (\xi_k, g(\xi_k)),$$

где су $\xi_1, \dots, \xi_n$, као и у претходном параграфу, десне тачке поделе интервала $[a,b]$ на n једнаких делова. Површина сваког од ових правоугаоника је $(f(\xi_k) - g(\xi_k))\frac{b-a}{n}$. Тако добијамо израз за површину фигуре S

$$A(S) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (f(\xi_k) - g(\xi_k)) \frac{b-a}{n} = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx.$$

Задатак 14. Доказати да је површина области ограничене елипсом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

једнака πab. Специјално, за $a = b = r$ добијамо површину круга. ✓

Задатак 15. Доказати Архимедову теорему о параболи са стр. 257. ✓

3.2. Запремина тела. Нека је тело K у $0xyz$–координатном систему ограничено двема паралелним равнима ортогоналним на x–осу у тачкама $x = a$ и $x = b$ и нека је $A(\xi)$ површина пресека тела K и равни ортогоналне на x–осу у тачки $x = \xi$. Нека је V_k запремина дела тела K ограниченог равнима $x = \xi_{k-1}$, $x = \xi_k$. Тада је

$$\min_{\xi\in[\xi_{k-1},\xi_k]} A(\xi)\frac{b-a}{n} \le V_k \le \max_{\xi\in[\xi_{k-1},\xi_k]} A(\xi)\frac{b-a}{n},$$

Па за укупну запремина $V(K) = \sum_{k=1}^{n} V_k$ важи

$$\sum_{k=1}^{n} \min_{\xi\in[\xi_{k-1},\xi_k]} A(\xi)\frac{b-a}{n} \le V \le \sum_{k=1}^{n} \max_{\xi\in[\xi_{k-1},\xi_k]} A(\xi)\frac{b-a}{n}$$

Одатле, преласком на $\lim_{n\to\infty}$, добијамо

$$V(K) = \int_a^b A(x)\, dx. \tag{19}$$

Формула (19) позната је под именом Кавалијеријевог[15] принципа.

[15] Кавалијери (Bonaventura Cavalieri, 1598–1647), италијански математичар

Посебно, ако је тело K добијено ротацијом криве $y = f(x)$, $a \le x \le b$ око x–осе, површина $A(x)$ попречног пресека је површина круга полупречника $f(x)$, па је запремина добијеног тела

$$V(K) = \int_a^b \pi\big(f(x)\big)^2\,dx.$$

Слично, ако је тело L добијено ротацијом криве $y = f(x)$, $a \le x \le b$ око y–осе и ако функција $f : [a,b] \to [\alpha,\beta]$ има инверзну функцију $g = f^{-1} : [\alpha,\beta] \to [a,b]$, запремина добијеног тела је

$$V(L) = \int_\alpha^\beta \pi\big(g(y)\big)^2\,dy.$$

Претпоставимо да $f : [a,b] \to [0,+\infty)$ непрекидна функција и нека је тело M добијено ротацијом области

$$S = \{(x,y) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R} \mid a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}$$

око y–осе. Тада запремину добијеног тела можемо да израчунамо на следећи начин. Поделимо интервал $[a,b]$ на n интервала једнаке дужине; нека су $\xi_1,\dots,\xi_n$ десни крајеви тих интервала. Запремину V_k тела добијеног ротацијом области

$$S_k = \{(x,y) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R} \mid \xi_{k-1} \le x \le \xi_k,\ 0 \le y \le f(x)\}$$

око y–осе можемо да апроксимирамо разликом запремина два ваљка, са полупречницима база ξ_k и ξ_{k-1} и она задовољава

$$\pi(\xi_k^2 - \xi_{k-1}^2) \min_{\xi\in[\xi_{k-1},\xi_k]} f(\xi) \le V_k \le \pi(\xi_k^2 - \xi_{k-1}^2) \max_{\xi\in[\xi_{k-1},\xi_k]} f(\xi). \tag{20}$$

Ако сумирамо (20) по k и напишемо

$$\xi_k^2 - \xi_{k-1}^2 = (\xi_k + \xi_{k-1})(\xi_k - \xi_{k-1}) = 2\frac{(\xi_k + \xi_{k-1})}{2}\frac{b-a}{n},$$

добијамо да је запремина $V(M)$ између

$$s_n = \sum_{k=1}^n 2\pi c_k \min_{\xi\in[\xi_{k-1},\xi_k]} f(\xi)\frac{b-a}{n} \quad \text{и} \quad S_n = \sum_{k=1}^n 2\pi c_k \max_{\xi\in[\xi_{k-1},\xi_k]} f(\xi)\frac{b-a}{n},$$

где је $c_k = \frac{(\xi_k+\xi_{k-1})}{2} \in [\xi_{k-1},\xi_k]$. Пошто је $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \int\limits_a^b 2\pi x f(x)\,dx$, добијамо формулу за запремину тела M

$$V(M) = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx.$$

Задатак 16. Израчунати запремину тела које се добија ротацијом криве

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

око x–осе. ✓

3.3. Дужина криве. Нека је $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ непрекидно диференцијабилна функција. Дужину L криве $y = f(x)$ можемо да израчунамо као лимес дужина изломљених линија. Поделимо, као и раније, интервал $[a, b]$ на n интервала једнаке дужине и означимо десне крајеве добијених интервала са $\xi_1, \ldots, \xi_k$. Растојање између тачака $(\xi_{k-1}, f(\xi_{k-1}))$ и $(\xi_k, f(\xi_k))$ је

$$d_k = \sqrt{(\xi_k - \xi_{k-1})^2 + (f(\xi_k) - f(\xi_{k-1}))^2},$$

па је

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \textstyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\xi_k - \xi_{k-1})^2 + (f(\xi_k) - f(\xi_{k-1}))^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \textstyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{f(\xi_k) - f(\xi_{k-1})}{\xi_k - \xi_{k-1}}\right)^2} (\xi_k - \xi_{k-1}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \textstyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \big(f'(c_k)\big)^2} \frac{b-a}{n}. \end{aligned}$$

У последњем кораку примењена је Лагранжова теорема. Тако добијамо формулу за дужину криве

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\, dx.$$

Задатак 17. Написати интеграл којим се израчунава дужина лука елипсе

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

и показати да се, у општем случају, добијају елиптички интеграли разматрани на стр. 256. ✓

Задатак 18. Израчунати дужину криве

$$x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\log y, \qquad 1 \le y \le e.$$

✓

Задатак 19. Скицирати криву задату параметарским једначинама

$$x = t^2, \quad y = \frac{t^3}{3} - t, \quad t \in \mathbf{R}$$

и израчунати дужину дела те криве који лежи у траци $0 \le x \le 3$. ✓

3.4. Површина обртних тела. Нека је $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ непрекидно диференцијабилна функција. Површину површи S добијене ротацијом криве $y = f(x)$ око x–осе можемо да израчунамо на следећи начин. Поделимо интервал $[a, b]$ на n интервала $[\xi_{k-1}, \xi_k]$, $1 \le k \le n$, једнаке дужине. Површину тела добијеног ротацијом криве $y = f(x)$ за $\xi_{k-1} \le x \le \xi_k$ око x–осе можемо да апроксимирамо збиром површина зарубљених купа чије су изводнице

$$s_k = \sqrt{(\xi_k - \xi_{k-1})^2 + (f(\xi_k) - f(\xi_{k-1}))^2},$$

а полупречници основа $r_k = f(\xi_{k-1})$ и $R_k = f(\xi_k)$. Из формуле за површину зарубљене купе

$$A_k = \pi(R_k + r_k)s_k$$

следи да се површина површи S апроксимира са

$$A(S) \approx \sum_{k=1}^{n} \pi(f(\xi_k) + f(\xi_{k-1}))\sqrt{(\xi_k - \xi_{k-1})^2 + (f(\xi_k) - f(\xi_{k-1}))^2}.$$

Из Лагранжеве теореме следи да је $f(\xi_{k-1}) = f(\xi_k) + (\xi_{k-1} - \xi_k)f'(s_k)$. Одатле следи да, ако је f непрекидно диференцијабилна, важи

$$\begin{aligned} A(S) &\approx \sum_{k=1}^{n} 2\pi f(\xi_k)\sqrt{1 + \left(\tfrac{f(\xi_k)-f(\xi_{k-1})}{\xi_k-\xi_{k-1}}\right)^2}(\xi_k - \xi_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} 2\pi f(\xi_k)\sqrt{1 + (f'(c_k))^2}\tfrac{b-a}{n} \end{aligned}$$

У последњем кораку је коришћена Лагранжова теорема. Одатле, преласком на $\lim_{n\to\infty}$, добијамо

$$A(S) = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\,dx \tag{21}$$

Напомена 5. Природно је поставити питање због чега смо у израчунавању површине вршили апроксимације површинама зарубљених купа, а не (једноставније) површинама цилиндара, као што смо радили у случају запремине. Приметимо пре свега да је немогуће да оба метода дају тачан резултат. Наиме, упоредимо

$$\Delta A \approx 2\pi y \Delta x,$$

што би се добило апроксимацијом цилиндрима, са

$$\Delta A \approx 2\pi y\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},$$

што је апроксимација зарубљеним купама, видимо да је количник ове две величине

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

Последњи израз *не тежи* 1 кад $\delta x \to 0$ (сем ако је $\frac{dy}{dx} = 0$. То значи да ове две апроксимације дају различите резултате у општем случају. Када бисмо доследно спровели поступак апроксимације цилиндрима, добили бисмо следећу *погрешну* формулу за површину:

$$\textbf{погрешна формула:} \quad A = \int_a^b 2\pi f(x)\,dx. \tag{22}$$

Читаоцу остављамо да размотри могућност да се запремина израчунава апроксимацијом зарубљеним купама, уместо цилиндрима. ◇

Следећи задатак показује да се применом формуле (22) већ у случају најједноставнијих површи добија погрешан резултат.

Задатак 20. Израчунати површину купе добијене ротацијом дужи

$$y = x/\sqrt{3}, \quad 0 \le x \le \sqrt{3}$$

око x–осе применом формуле (21). Упоредити тај резултат са познатом формулом за површину купе. Шта се добије ако се примени формула (22)? ✓

Напомена 6. Следећи Шварцов[16] пример показује да површина површи не може да се дефинише као лимес површина уписаних полиедара (као што се дужина криве дефинише као лимес дужина уписаних дужи). Нека је C цилиндар полупречника r и висине h. Поделимо цилиндар на подударне мање цилиндре, равнима паралелним основама. Нека је тако формирано m мањих

[16] Шварц (Karl Hermann Amandus Schwarz, 1843–1921), немачки математичар

цилиндара, што значи да равни секу површ цилиндра по $(m+1)$ кругова. Поделимо сада сваки од тих $(m+1)$ кругова на n лукова, тако да су тачке поделе највишег круга изнад средина подеоних лукова круга испод њега, подеоне тачке другог круга одозго су изнад средина подеоних лукова круга испод њега итд. Суседне тачке ових подела формирају троуглове. Елементарно се проверава да је површина полиедра чије су пљосни ти троуглови

$$P = 2nr \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{r^2 m^2 (1 - \cos(\pi/n))^2 + h^2}.$$

Кад $m, n \to \infty$, дијаметри подеоних троуглова теже нули (што може да се сматра аналогијом захтева у дефиницији дужине криве да дужине подеоних дужи теже нули). Међутим, ако при томе и n^2/m тежи нули, површина полиедра тежи $+\infty$, а ако $m/n^2 \to c$, онда је лимес површине полиедра

$$2r\pi \sqrt{c^2 r^2 \pi^4/4 + h^2}.$$

Одатле следи да лимес површина тако уписаних полиедара не постоји.

Имајући у виду овај пример, с правом се поставља питање – како се дефинише површина површи? За сада ћемо само рећи да у овом моменту за дефиниције површине *ротационе* површи узимамо лимес површина зарубљених купа (што је интуитивним разматрањима у овом параграфу, као и претходном напоменом и задатком, оправдано). За општију дефиницију сачекаћемо следећи курс Анализе, у коме ћемо говорити о тзв. површинским интегралима. ◇

Задатак 21. Скицирати криву

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$$

и израчунати површину површи која се добија њеним ротирањем око x–осе. ✓

4. Несвојствени интеграл

4.1. Дефиниција и особине. Кошијев интеграл смо дефинисали за непрекидне функције дефинисане на затвореном интервалу. Претпоставимо сада да је дата непрекидна функција $f : [a, \beta) \to \mathbf{C}$, при чему је тачка β реалан број већи од a или $+\infty$. Тада, за свако $b \in [a, \beta)$ постоји Кошијев интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$. Уколико постоји лимес $\lim_{b\to\beta} \int_a^b f(x)\,dx$, називамо га *несвојственим интегралом* и пишемо

$$\int_a^\beta f(x)\,dx := \lim_{b\to\beta} \int_a^b f(x)\,dx. \tag{23}$$

Тачка β се назива *сингуларном тачком* или *сингуларитетом* несвојственог интеграла (23). Ако је $\beta < +\infty$, из Леме 3 на стр. 260 следи да је, у случају да функција f има леви лимес у тачки β (тј. ако може да се непрекидно продужи у β), лимес у (23) једнак интегралу $\int_a^\beta f(x)\,dx$. Тиме је оправдана употреба ознаке $\int_a^\beta$ у (23) и показано да је несвојствени интеграл уопштење Кошијевог.

Слично се дефинише несвојствени интеграл $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$:

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx := \lim_{c\to-\infty} \int_c^a f(x)\,dx. \tag{24}$$

Ако лимес у (23) (или (24)) постоји, кажемо да несвојствени интеграл *конвергира*; у супротном кажемо да он *дивергира*.

Пример 7. Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ конвергира ако и само ако је $p > 1$, а интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ конвергира ако и само ако је $p < 1$. Заиста, из

$$\int_1^b \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{1-p} x^{1-p}\Big|_1^b & \text{за } p \neq 1 \\ \ln x\Big|_1^b & \text{за } p = 1 \end{cases}$$

следи да $\lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_1^b \frac{dx}{x^p}$ постоји ако и само ако је $p > 1$, а из

$$\int_a^1 \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{1-p} x^{1-p}\Big|_a^1 & \text{за } p \neq 1 \\ \ln x\Big|_a^1 & \text{за } p = 1 \end{cases}$$

следи да $\lim\limits_{a\to 0+0} \int\limits_a^1 \frac{dx}{x^p}$ постоји ако и само ако је $p < 1$. ♯

Особине несвојственог интеграла наведене у следећој леми се доказују преласком на лимес у одговарајућим формулама доказаним за Кошијев интеграл.

Лема 7. *Нека су $f : [a, \beta) \to \mathbf{C}$ и $g : [a, \beta) \to \mathbf{C}$ непрекидне функције и λ, μ комплексни бројеви. Тада је*

1. $\int\limits_a^\beta \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)\, dx = \lambda \int\limits_a^\beta f(x)\, dx + \mu \int\limits_a^\beta g(x)\, dx.$
2. $\int\limits_a^\beta f(x)\, dx = \int\limits_a^c f(x)\, dx + \int\limits_c^\beta f(x)\, dx$ *за свако* $c \in [a, \beta)$.
3. *Ако је $\varphi : [s, \omega) \to [a, \beta)$ непрекидно диференцијабилна бијекција, онда је*
$$\int_a^\beta f(x)\, dx = \int_s^\omega f \circ \varphi(t)\varphi'(t)\, dt.$$
4. *Ако су функције f и g непрекидно диференцијабилне, онда је*
$$\int_a^\beta f(x)\, dg(x) = f(x)g(x)\Big|_a^\beta - \int_a^\beta g(x)\, df(x),$$

где је $f(x)g(x)\Big|_a^\beta := \lim\limits_{b\to\beta} f(x)g(x)\Big|_a^b$.

Пример 8. Интеграл

$$J = \int_0^{\pi/2} \log\sin x\, dx$$

је несвојствен, пошто је $\sin 0 = 0$. Овај интеграл назива се *Ојлеровим интегралом* и може да се израчуна помоћу на први поглед необичне смене $x = 2t$:

$$J = 2\int_0^{\pi/4} \log\sin(2t)\, dt = \frac{\pi}{2}\log 2 + 2\int_0^{\pi/4} \log\sin t\, dt + 2\int_0^{\pi/4} \log\cos t\, dt.$$

Ако у последњем интегралу уведемо смену $t = \frac{\pi}{2} - u$, добијамо

$$\int_0^{\pi/4} \log\cos t\, dt = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \log\sin t\, dt,$$

па закључујемо да је

$$J = \frac{\pi}{2}\log 2 + 2J,$$

односно $J = -\frac{\pi}{2}\log 2$. ♯

Задатак 22. Доказати да је

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(1+x)}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}\log 2 + G,$$

где је G Каталанова константа (видети Задатак 75 на стр. 234).

Упутство: видети Задатак 5 на стр. 266 и Задатак 13 на стр. 275. ✓

4.2. Критеријуми конвергенције. Из Кошијевог критеријума за егзистенцију лимеса (Последица 5 на стр. 180) изводи се следећи критеријум конвергенције несвојствених интеграла.

Лема 8. **(Кошијев критеријум конвергенције интеграла)** *Интеграл* $\int_a^\beta f(x)\,dx$ *конвергира ако и само ако*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists B \in (a,\beta))\ b_1 > B \wedge b_2 > B \ \Rightarrow\ \left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

△ Доказ се изводи применом дефиниције конвергенције интеграла и Последице 5 на стр. 180 на функцију $F(b) = \int_a^b f(x)\,dx$. ▽

Кажемо да интеграл $\int_a^\beta f(x)\,dx$ *апсолутно конвергира* ако конвергира интеграл $\int_a^\beta |f(x)|\,dx$. Пошто је

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right| \le \int_{b_1}^{b_2} |f(x)|\,dx,$$

из Леме 8 следи да је сваки апсолутно конвергентан интеграл конвергентан. Обрнуто није тачно, што ћемо видети касније, у Примеру 11.

Питање апсолутне конвергенције интеграла се своди на испитивање конвергенције интеграла позитивне функције. Дајемо неколико критеријума конвергенције таквих интеграла.

Лема 9. *Нека је* $f : [a,\beta) \to \mathbf{R}$ *непрекидна функција, таква да је* $f(x) \ge 0$ *за свако* $x \in [a,\beta)$. *Тада интеграл* $\int_a^\beta f(x)\,dx$ *конвергира ако и само ако је функција* $F(b) = \int_a^b f(x)\,dx$ *ограничена на* $[a,\beta)$.

△ Из позитивности функције f следи да је функција F растућа, па је, на основу Леме 15 на стр. 121, $\lim_{b\to\beta} F(b) = \sup F(b)$. ▽

Последица 3. **(Интегрални тест конвергенције редова)** *Нека је* $f : [1,+\infty) \to \mathbf{R}$ *непрекидна и нерастућа функција и нека је* $f(x) \ge 0$ *за свако*

$x \in [a, +\infty)$. *Тада интеграл* $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ *конвергира ако и само ако конвергира ред* $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

$\triangle$ Пошто је функција f нерастућа, важи

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq f(k),$$

одакле сумирањем добијамо

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) \leq \int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k).$$

Одатле следи да је растућа функција $F(b) = \int_a^b f(x)\,dx$ ограничена ако и само ако је ограничен растући низ $s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$. $\triangledown$

Пример 9. Раније смо видели да ред $\sum \frac{1}{n^p}$ конвергира ако и само ако је $p > 1$. Ово тврђење сада можемо да изведемо из Последице 3 и Примера 7. ♯

Задатак 23. Нека је a_n неограничен растући низ позитивних бројева. Доказати да је ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1}^{p+1}}$$

конвергентан за $p > 0$ (за $p = 0$ видети Задатак 34 на стр. 198). ✓

Задатак 24. Нека је c_n низ бројева који припадају интервалу $[a, +\infty)$, такав да је, за неко $\delta > 0$, $c_{n+1} - c_n \geq \delta$. Нека је

$$f : [a, +\infty) \to [0, +\infty)$$

нерастућа функција. Доказати да ако постоји

$$\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\,dt, \tag{25}$$

онда ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(c_n) \tag{26}$$

конвергира. Доказати да, ако низ c_n испуњава додатни услов

$$\sup_{n \geq 2}(c_n - c_{n-1}) < +\infty,$$

онда из конвергенције реда (26) следи егзистенција лимеса (25). ✓

Лема 10. (Поредбени принцип) *Нека су* $f : [a, \beta) \to \mathbf{R}$ *и* $g : [a, \beta) \to \mathbf{R}$ *непрекидне функције такве да је*

$$0 \leq f(x) \leq g(x)$$

за свако $x \in [a, \beta)$. *Ако интеграл* $\int_a^\beta g(x)\,dx$ *конвергира онда конвергира и интеграл* $\int_a^\beta f(x)\,dx$. *Ако интеграл* $\int_a^\beta f(x)\,dx$ *дивергира, онда дивергира и интеграл* $\int_a^\beta g(x)\,dx$.

△ Доказ следи из

$$\int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx \le \int_{b_1}^{b_2} g(x)\,dx$$

и Леме 8. ▽

Последица 4. *Ако су* $f, g : [a, \beta) \to \mathbf{R}$ *позитивне непрекидне функције, такве да је*

$$\lim_{x\to\beta-0} \frac{f(x)}{g(x)} = c \notin \{0, +\infty\}$$

онда су интеграли

$$\int_a^\beta f(x)\,dx \qquad \text{и} \qquad \int_a^\beta g(x)\,dx$$

еквиконвергентни, тј. или оба конвергирају, или оба дивергирају.

△ У околини тачке β је

$$(c-\varepsilon)\,g(x) \le f(x) \le (c+\varepsilon)\,g(x),$$

па доказ следи из Леме 10. ▽

Пример 10. Из $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$ и Примера 7 следи да интеграл

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

апсолутно конвергира. ♯

Пример 11. Интеграл $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ је конвергентан, али није апсолутно конвергентан. Заиста, парцијалном интеграцијом добијамо

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = -\frac{\cos x}{x}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx,$$

а последњи интеграл конвергира. Међутим

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \ge \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}\,dx.$$

Први интеграл на десној страни дивергира, а други конвергира, па

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$$

дивергира. ♯

Пример 12. Запремина тела добијеног ротацијом криве

$$y = \frac{1}{x}, \quad 1 \leq x < +\infty$$

око x–осе је

$$V = \int_1^{+\infty} \pi \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = -\pi \frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty} = \pi,$$

док је површина тако добијене површи

$$A = \int_1^{+\infty} 2\pi \frac{1}{x} \sqrt{1 + \Big(-\frac{1}{x^2}\Big)^2}\, dx = +\infty,$$

јер је $\frac{1}{x}\sqrt{1+\left(-\frac{1}{x^2}\right)^2} > \frac{1}{x}$, а интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ дивергира. Дакле, добијено тело има коначну запремину и бесконачну површину, тј. оно је „посуда која може да са напуни бојом, али не може да се обоји”. ♯

Задатак 25. Да ли посуда добијена ротацијом криве из Примера 12 око праве $x + y = 1$ може да се

(а) обоји;

(б) напуни бојом? ✓

Пример 13. Интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$$

конвергира. Заиста,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \int_0^1 e^{-x^2}\, dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2}\, dx.$$

Први интеграл на десној страни није несвојствен, а други конвергира, јер на $[1, +\infty)$ важи $e^{-x^2} \leq e^{-x}$, а интеграл

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}\, dx = -e^{-x}\Big|_1^{+\infty} = e$$

конвергира. ♯

Наводимо сада два критеријума за конвергенцију интеграла функција које нису обавезно ненегативне.

Лема 11. **(Абелов и Дирихлеов тест)** *Нека је* $f : [a, \beta) \to \mathbf{R}$ *непрекидна, а* $g : [a, \beta) \to \mathbf{R}$ *непрекидно диференцијабилна монотона функција. Ако важи*

(А1) *интеграл* $\int_a^\beta f(x)\,dx$ *конвергира и*

(А2) *функција* g *је ограничена*

или

(Д1) *функција* $F(b) = \int_a^b f(x)\,dx$ *је ограничена и*

(Д2) $\lim_{x\to\beta} g(x) = 0$

онда интеграл $\int_a^\beta f(x)g(x)\,dx$ *конвергира.*

△ Из Друге теореме о средњој вредности (стр. 274) следи

$$\int_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)\,dx = g(b_1)\int_{b_1}^{\xi} f(x)\,dx + g(b_2)\int_{\xi}^{b_2} f(x)\,dx.$$

Одатле доказ следи уз помоћ Леме 8. ▽

Задатак 26. Испитати конвергенцију интеграла

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx \quad \text{и} \quad \int_0^{+\infty} x^2 \cos e^x\,dx.$$

Упутство: у другом интегралу увести смену $e^x = t$. ✓

4.3. Несвојствени интеграли са више сингуларитета. Нека је дата непрекидна функција $f : (\alpha, \beta) \to \mathbf{C}$. Тада је, по дефиницији,

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx := \int_\alpha^c f(x)\,dx + \int_c^\beta f(x)\,dx, \tag{27}$$

где је c произвољна тачка између α и β. По дефиницији, интеграл $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ конвергира ако оба интеграла на десној страни у (27) конвергирају.

Пример 14. Интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

конвергира, јер конвергирају интеграли

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,dx \quad \text{и} \quad \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

(в. Пример 13). ♯

Пример 15. Неодређени интеграл

$$\int e^{-x^2}\,dx$$

није елементарна функција, али одређени интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx,$$

познат као *Пуасонов интеграл*, може да се израчуна. Један од начина је следећи. Посматрајмо површ

$$z = e^{-(x^2+y^2)}.$$

Ова површ се добија ротацијом криве $z = e^{-x^2}$ око z–осе, налази се изнад xy–равни и изгледа као бесконачно звоно са врхом у тачки $(0, 0, 1)$. Израчунајмо запремину овог тела. Пресек са ове површи са хоризонталном равни на висини z је круг чији је полупречник $r = \sqrt{-\log z}$ (логаритам је негативан на интервалу $(0, 1)$), па је површина попречног пресека $-\pi \log z$. Из Кавалијеријевог принципа следи да је запремина тела

$$V = -\pi \int_0^1 \log z \, dz = \pi.$$

Израчунајмо сада V помоћу пресека са вертикалним равнима $y = const.$ За фиксирано y, пресек са равни кроз $(0, y, 0)$ која је нормална на y осу има површину

$$A(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} \, dx = e^{-y^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \, dx.$$

Из Кавалијеријевог принципа сада следи да је

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} A(y) \, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \, dy \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \, dx = I^2.$$

Одатле следи да је $I = \sqrt{\pi}$. ♯

Пример 16. Интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x} \, dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-x} \, dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x} \, dx$$

дивергира, јер први интеграл на десној страни дивергира. ♯

Пример 17. Нека су a, b позитивни реални бројеви. Интеграли облика

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} \, dx$$

називају се *Фруланијевим*[17]. *интегралима* Под разним претпоставкама о функцији f, важи *Фруланијева формула*

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} \, dx = (f(0) - f(+\infty)) \log \frac{b}{a}.$$

Нпр, она важи ако је $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ непрекидна функција, таква да интеграл

$$\int_y^{+\infty} \frac{f(x) - f(+\infty)}{x} \, dx \tag{28}$$

конвергира за свако $y > 0$. Докажимо ову формулу под тим претпоставкама. Приметимо прво да можемо да претпоставимо да је $f(+\infty) = 0$ (у супротном уместо функције $f(x)$ можемо да посматрамо функцију $f(x) - f(+\infty)$). У том случају услов (28) гласи да за свако $y > 0$ интеграл

$$\int_y^{+\infty} \frac{f(x)}{x} \, dx$$

[17] Фрулани (Giuliano Frullani, 1795–1834), италијански математичар

конвергира. Тада је

$$\int_\varepsilon^R \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = \int_\varepsilon^R \frac{f(ax)}{x}\,dx - \int_\varepsilon^R \frac{f(bx)}{x}\,dx.$$

После увођења смене $t = ax$ у првом и $t = bx$ у другом интегралу на десној страни и једноставног сређивања добијеног израза, добијамо

$$\int_\varepsilon^R \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(t)}{t}\,dt - \int_{aR}^{bR} \frac{f(t)}{t}\,dt.$$

Ако на први интеграл на десној страни применимо Прву теорему о средњој вредности (видети стр 263), добијамо

$$\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(t)}{t}\,dt = f(\xi_1)\int_{\varepsilon a}^{\varepsilon b}\frac{dt}{t} = f(\xi_1)\log\frac{b}{a}$$

за неко $\xi_1 \in [\varepsilon a, \varepsilon b]$. Поступајући на исти начин са другим интегралом, добијамо да је

$$\int_{aR}^{bR} \frac{f(t)}{t}\,dt = f(\xi_2)\log\frac{b}{a}$$

за неко $\xi_2 \in [aR, bR]$. Пошто $\xi_1 \to 0$ кад $\varepsilon \to 0$ и $\xi_2 \to +\infty$ кад $R \to +\infty$, одатле следи доказ Фруланијеве формуле.

Из Фруланијеве формуле следи, на пример, да је

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(ax)-\arctan(bx)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\log\frac{a}{b} \quad \text{и} \quad \int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx = \log\frac{b}{a}$$

за позитивне бројеве a, b. ♯

Задатак 27. Доказати да је

$$\int_0^{+\infty} \frac{\frac{\arctan(-ax)}{ax} - \frac{\arctan(-bx)}{bx}}{x}\,dx = \log\frac{a}{b}.$$

за позитивне бројеве a и b. ✓

Задатак 28. Нека су a и b позитивни бројеви. Доказати да је

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}\,dx = \log\frac{b}{a}$$

и одатле извести формулу

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(px)\sin(qx)}{x}\,dx = \frac{1}{2}\log\left|\frac{p+q}{p-q}\right|$$

за позитивне бројеве p, q. ✓

Задатак 29. Доказати да је

$$\int_0^1 \frac{t^{b-1}-t^{a-1}}{\log t}\,dt = \log\frac{b}{a}$$

за позитивне бројеве a, b. ✓

Приметимо да, по дефиницији конвергенције интеграла са више сингуларитета на стр. 285, интеграл на левој страни у (27) конвергира ако постоје

$$\lim_{a\to\alpha}\int_a^c f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \lim_{b\to\beta}\int_c^b f(x)\,dx.$$

Није довољно да постоји $\lim\limits_{\delta\to 0+0}\int\limits_{\alpha+\delta}^{\beta-\delta} f(x)\,dx$.

Пример 18. Иако постоји

$$\lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{+b} x\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-b}^{+b} = 0,$$

интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx = \int_{-\infty}^{0} x\,dx + \int_{0}^{+\infty} x\,dx$$

дивергира, јер дивергирају оба интеграла на десној страни. ♯

Лимес

$$v.p.\int_\alpha^\beta f(x)\,dx := \lim_{\delta\to 0+0}\int_{\alpha+\delta}^{\beta-\delta} f(x)\,dx,$$

ако су α, β коначне сингуларне тачке, или, у случају $\alpha=-\infty$, $\beta=+\infty$,

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{T\to+\infty}\int_{-T}^{T} f(x)\,dx,$$

назива се *главном вредношћу* несвојственог интеграла. Тако је, у Примеру 18, $v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,dx = 0$.

Претпоставимо сада да је дата непрекидна функција

$$f:[a,\gamma)\cup(\gamma,b]\to\mathbf{C}.$$

Тада је,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\gamma f(x)\,dx + \int_\gamma^b f(x)\,dx$$

и, по дефиницији, интеграл на левој страни конвергира ако конвергирају оба интеграла на десној. Лимес

$$v.p\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\delta\to 0+0}\left(\int_a^{\gamma-\delta} f(x)\,dx + \int_{\gamma+\delta}^b f(x)\,dx\right)$$

назива се *главном вредношћу* несвојственог интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$.

Пример 19. Интеграл $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x}$ дивергира, док је $v.p.\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x}=0$. ♯

Задатак 30. Испитати конвергенцију следећих интеграла

(а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg} x\,dx$ (б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{x-e^x}\,dx$ (в) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^4+x}}$ (г) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\,dx$. ✓

Задатак 31. Нека је $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ непрекидна позитивна функција. Доказати примером да из конвергенције интеграла

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$$

не следи да је

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Да ли из конвергенције овог несвојственог интеграла следи да је функција f ограничена? ✓

Претходни задатак показује да за несвојствене интеграле не важи аналогија са неопходним условом конвергенције реда

$$\sum a_n \text{ конвергира} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Са тим у вези су и следећи задаци.

Задатак 32. Нека је $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ непрекидно диференцијабилна функција. Доказати да из конвергенције интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|\,dx$$

следи да постоји

$$\lim_{x\to+\infty} f(x),$$

а да из конвергенције интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|\,dx$$

следи да је

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Упутство: применити

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left| \int_{x_2}^{x_1} f'(x)\,dx \right| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|\,dx$$

и Кошијев услов егзистенције лимеса. ✓

Задатак 33. Нека је $f : [a, +\infty) \to \mathbf{R}$ монотона функција, таква да интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

конвергира. Доказати да је

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0.$$

Упутство: Из Кошијевог услова за конвергенцију интеграла следи

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{x/2}^{x} f(t)\,dt = 0,$$

а за опадајућу функцију $f : [a, +\infty) \to [0, +\infty)$ је

$$\int_{x/2}^{x} f(t)\,dt \ge \frac{1}{2} xf(x).$$

за $x > a$. ✓

Задатак 34. Нека је $f : (0, 1] \to \mathbf{R}$ монотона функција, таква да интеграл

$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

конвергира.

(а) Доказати да, ако функција f задовољава наведени услов за $p = 0$, важи

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(k/n) = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

(б) Доказати да је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e},$$

чиме добијамо друго решење Задатка 17 на стр. 180.

Упутство: Ако је f позитивна и опадајућа, онда је

$$\int_{(k-1)/n}^{k/n} f(x)\,dx \le \frac{1}{n} f(k/n) \le \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(x)\,dx$$

за $2 \le k \le n-1$. Одатле следи да за $n > 2$ важи

$$\frac{1}{n} f(1/n) + \int_{1/n}^{1} f(x)\,dx \le \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(k/n) \le \int_{1/n}^{1} f(x)\,dx + \frac{1}{n} f(1).$$

За доказ једнакости (б) узети $f(x) = \log x$. ✓

5. Риманов интеграл

У овом параграфу ћемо уопштити Кошијев интеграл, ослабљујући услов непрекидности функције.

5.1. Дефиниција Римановог интеграла. Нека је $[a, b]$ ограничен и затворен интервал. Коначан скуп тачака $P = \{x_0, \dots, x_n\}$, таквих да је

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

назива се *поделом* интервала $[a, b]$. Тачке $x_1, \dots, x_n$ називају се *подеоним тачкама*, а интервали $[x_{k-1}, x_k]$ *подеоним интервалима* поделе P.

Подела P_1 је *финија* од поделе P_2 ако је $P_2 \subset P_1$, тј. ако је свака подеона тачка поделе P_2 истовремено и подеона тачка поделе P_1.

Нека је дата подела $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ и нека је, за $1 \le k \le n$, $\Delta_k = x_k - x_{k-1}$ дужина интервала $[x_{k-1}, x_k]$. Нека је $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ ограничена функција и нека је

$$m_k = \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x), \qquad M_k = \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x).$$

Суме

$$s(f, P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta_k \quad \text{и} \quad S(f, P) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta_k$$

називамо *доњом и горњом Дарбуовом сумом* функције f по подели P.

Лема 12. *Нека је подела P_1 финија од поделе P_2. Тада је*

$$s(f, P_2) \le s(f, P_1) \quad \textit{и} \quad S(f, P_1) \le S(f, P_2).$$

△ Претпоставимо прво да је

$$P_2 = \{x_0, \dots, x_n\}, \quad P_1 = \{x_0, \dots, x_j, \xi, x_{j+1}, \dots, x_n\}.$$

Тада тврђење Леме следи из очигледних неједнакости

$$\inf_{x\in[x_j,\xi]} f(x)(\xi - x_j) + \inf_{x\in[\xi,x_{j+1}]} f(x)(x_{j+1} - \xi) \geq \inf_{x\in[x_j,x_{j+1}]} f(x)(x_{j+1} - x_j),$$
$$\sup_{x\in[x_j,\xi]} f(x)(\xi - x_j) + \sup_{x\in[\xi,x_{j+1}]} f(x)(x_{j+1} - \xi) \leq \sup_{x\in[x_j,x_{j+1}]} f(x)(x_{j+1} - x_j).$$

Пошто се подела P_1 добија додавањем коначно много тачака подели P_2, применом претходног закључивања коначан број пута доказујемо да важи тврђење Леме. ▽

Последица 5. *Нека су P_1 и P_2 произвољне поделе интервала $[a, b]$. Тада је $s(f, P_1) \leq S(f, P_2)$.*

△ Нека је P унија подела P_1 и P_2, тј. подела чије су подеоне тачке све подеоне тачке подела P_1 и P_2. Подела P је финија од подела P_1 и P_2, па из претходне леме следи

$$s(f, P_1) \leq s(f, P) \quad \text{и} \quad S(f, P) \leq S(f, P_2).$$

Доказ сада следи из очигледне неједнакости $s(f, P) \leq S(f, P)$. ▽

Из претходне последице следи да је скуп

$$\{s(f, P) \mid P \text{ подела интервала } [a, b]\}$$

ограничен одозго било којом горњом Дарбуовом сумом па, на основу Аксиоме супремума, има супремум. Слично, скуп

$$\{S(f, P) \mid P \text{ подела интервала } [a, b]\}$$

је ограничен одоздо било којом доњом Дарбуовом сумом, па има инфимум. Величине

$$\underline{\textstyle\int_a^b} f(x)\,dx := \sup_P s(f, P) \quad \text{и} \quad \overline{\textstyle\int_a^b} f(x)\,dx := \inf_P S(f, P).$$

називају се *горњим и доњим Дарбуовим интегралом* функције f.

Дефиниција 3. Ограничена функција $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ је *интеграбилна по Риману* ако је

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

У том случају, заједничку вредност горњег и доњег Дарбуовог интеграла називамо *Римановим интегралом* функције f и означавамо са $\int_a^b f(x)\,dx$.

За комплексну функцију $f : [a, b] \to \mathbf{C}$ кажемо да је интеграбилна по Риману ако су такве функције $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$; у том случају, њен Риманов интеграл је

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \operatorname{Re} f(x)\,dx + i \int_a^b \operatorname{Im} f(x)\,dx. \tag{29}$$

Следећа теорема показује да је оправдана употреба истог симбола $\int_a^b$ за Кошијев и Риманов интеграл.

Теорема 7. *За непрекидну функцију f, Кошијев интеграл једнак је Римановом.*

$\triangle$ Из (29) видимо да можемо, разматрајући одвојено реални и имагинарни део, да се ограничимо на случај реалне функције. Посматрајмо произвољан низ подела P_n. Нека је $\widetilde{P}_1 = P_1$, $\widetilde{P}_2 = \widetilde{P}_1 \cup P_2$, $\ldots$, $\widetilde{P}_{k+1} = \widetilde{P}_k \cup P_{k+1}$, за свако k. Из Леме 12 следи да су низови $s(f, \widetilde{P}_n)$ и $S(f, \widetilde{P}_n)$ монотони, па је

$$\lim_{n\to\infty} s(f, \widetilde{P}_n) = \sup_n s(f, \widetilde{P}_n) \le \inf_n S(f, \widetilde{P}_n) = \lim_{n\to\infty} S(f, \widetilde{P}_n). \tag{30}$$

Ако је функција f непрекидна, Напомене 1 следи да је њен Кошијев интеграл једнак било ком од лимеса у (30), па из дефиниције Римановог интеграла и неједнакости (30) следи да је он једнак и Римановом. $\triangledown$

Задатак 35. Израчунати доњи и горњи Дарбуов интеграл

$$\underline{\int_a^b} \chi_{\mathbf{Q}}(x)\,dx \quad \text{и} \quad \overline{\int_a^b} \chi_{\mathbf{Q}}(x)\,dx$$

Дирихлеове функције

$$\chi_{\mathbf{Q}}(x) := \begin{cases} 1 & \text{за } x \in \mathbf{Q} \\ 0 & \text{за } x \notin \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Да ли је Дирихлеова функција интеграбилна по Риману? ✓

Теорема 8. **(Дарбуов критеријум интеграбилности)** *Ограничена функција $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ је интеграбилна по Риману ако и само ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји подела P интервала $[a, b]$ таква да је*

$$S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon.$$

$\triangle$ Претпоставимо прво да је $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ интеграбилна по Риману. Тада је

$$\sup_P s(f, P) = \inf_P S(f, P) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Нека је $\varepsilon > 0$. Тада постоје поделе P_1 и P_2 такве да је

$$\int_a^b f(x)\,dx - s(f, P_1) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad S(f, P_2) - \int_a^b f(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{2},$$

па је $S(f, P_2) - s(f, P_1) = S(f, P_2) - \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx - s(f, P_1) < \varepsilon$. Нека је P унија подела P_1 и P_2. Из Леме 12 следи $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$.

Претпоставимо сада да за свако $\varepsilon > 0$ постоји подела P интервала $[a, b]$ таква да је $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$. Тада је

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx < S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon.$$

Пошто је ε произвољно, одатле следи да је горњи Дарбуов интеграл једнак доњем. $\triangledown$

Приметимо да из Теореме 8 следи, независно од Теореме 7, да је непрекидна функција интеграбилна по Риману. Заиста, нека је $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ непрекидна функција и нека је $\varepsilon > 0$. Из Канторове теореме (стр. 113) следи да је f униформно непрекидна, па

$$(\exists \delta > 0)\ |x - y| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Тада за произвољну поделу $P : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ такву да је $\Delta_k < \delta$ за свако k важи $M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a}$, па је

$$S(f,P) - s(f,P) = \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta_k < \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\Delta_k = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon,$$

што, према Теореми 8, значи да је f интеграбилна по Риману. Следећа последица уопштава ово тврђење и показује да Риманов интеграл заиста уопштава Кошијев.

Последица 6. *Нека је $f : [a,b] \to \mathbf{C}$ ограничена функција која има коначно много тачака прекида. Тада је f интеграбилна по Риману.*

$\triangle$ Из (29) следи да можемо, разматрајући одвојено реални и имагинарни део, да се ограничимо на случај реалне функције. Нека је $\varepsilon > 0$. Нека су $[x_1, y_1]$, $\ldots$, $[x_m, y_m]$ интервали који садрже тачке прекида, такви да је

$$\sum_{k=1}^{m}(y_k - x_k) < \frac{\varepsilon}{4\sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|}.$$

Из Канторове теореме следи да је функција f униформно непрекидна на скупу

$$A = [a, x_1] \cup [y_1, x_2] \cup \cdots \cup [y_{m-1}, x_m] \cup [y_m, b], \tag{31}$$

па

$$(\exists\delta > 0)(\forall x, y \in A)\ |x - y| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Поделимо сваки од интервала у (31) на подинтервале дужине мање од δ; означимо подеоне тачке са $z_1, \ldots, z_n$. Нека је P подела интервала $[a,b]$ састављена од тачака $z_1, \ldots, z_n$, $x_1, \ldots x_m$, $y_1, \ldots, y_m$. Тада је

$$\begin{aligned} S(f,P) \quad - \quad & s(f,P) = \sum_{k=1}^{n}\Big(\sup_{x\in[z_k,z_{k-1}]} f(x) - \inf_{x\in[z_k,z_{k-1}]} f(x)\Big)(z_k - z_{k-1}) + \\ + \quad & \sum_{k=1}^{m}\Big(\sup_{x\in[y_k,x_k]} f(x) - \inf_{x\in[y_k,x_k]} f(x)\Big)(y_k - x_k) \\ < \quad & \tfrac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{k=1}^{n}(y_k - y_{k-1}) + 2\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|\sum_{k=1}^{m}(y_k - x_k) < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Доказ сада следи из Теореме 8. $\triangledown$

Последица 7. *Нека је $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ монотона функција. Тада је f интеграбилна по Риману.*

$\triangle$ Нека је $\varepsilon > 0$. Нека је $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ подела интервала $[a,b]$ за коју важи $\Delta_k < \frac{\varepsilon}{|f(b)-f(a)|}$ за све k. Из монотоности функције f следи да за све $x, y \in [a,b]$ важи $M_k - m_k = |f(x_k) - f(x_{k-1})|$ и

$$\sum_{k=1}^{n}\big|f(x_k) - f(x_{k-1})\big| = \Big|\sum_{k=1}^{n}\big(f(x_k) - f(x_{k-1})\big)\Big|,$$

па је

$$\begin{aligned} S(f,P)-s(f,P) &= \sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta_k \\ &< \tfrac{\varepsilon}{|f(b)-f(a)|}\sum_{k=1}^{n}\big|f(x_k)-f(x_{k-1})\big| \\ &< \tfrac{\varepsilon}{|f(b)-f(a)|}\left|\sum_{k=1}^{n}\big(f(x_k)-f(x_{k-1})\big)\right| \\ &= \tfrac{\varepsilon}{|f(b)-f(a)|}(|f(b)-f(a)|)=\varepsilon. \end{aligned}$$

Одатле закључујемо да доказ следи из Теореме 8. ▽

5.2. Лимес у простору подела. Нека је P подела интервала $[a,b]$ са подеоним тачкама

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b.$$

Величина

$$\lambda(P):=\max_{1\le j\le n}|x_j-x_{j-1}|$$

назива се *параметром поделе* P.

Нека је $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ n–торка тачака које задовољавају $\xi_j\in[x_{j-1},x_j]$. Пар (P,ξ) назива се *поделом са истакнутим тачкама.* Нека је

$$\sigma(f,P,\xi):=\sum_{j=1}^{n}f(\xi_j)(x_j-x_{j-1}).$$

Кажемо да је

$$J=\lim_{\lambda(P)\to 0}\sigma(f,P,\xi)$$

ако за свако $\varepsilon>0$ постоји такво $\delta>0$, да за сваку поделу са истакнутим тачкама (P,ξ) чији је параметар $\lambda(P)<\delta$ важи $|J-\sigma(f,P,\xi)|<\varepsilon$.

Очигледно важи

$$s(f,P)\le\sigma(f,P,\xi)\le S(f,P). \tag{32}$$

Задатак 36. Доказати да важи

$$s(f,P)=\inf_{\xi}\sigma(f,P,\xi)\quad S(f,P)=\sup_{\xi}\sigma(f,P,\xi). \tag{33}$$

Користећи (32) и (33) доказати да је функција f интеграбилна по Риману на $[a,b]$ ако и само ако постоји $\lim_{\lambda(P)\to 0}\sigma(f,P,\xi)$. ✓

Из претходног задатка добијамо еквивалентну дефиницију Римановог интеграла:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\lambda(P)\to 0}\sigma(f,P,\xi). \tag{34}$$

Приметимо да ова дефиниција има смисла и за функције са вредностима у скупу $\mathbf{C}$.

5.3. Скупови мере нула. Интеграбилност. Скуп $S \subset \mathbf{R}$ је скуп *Лебегове мере нула* ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји највише пребројива фамилија отворених интервала $\{(a_n, b_n)\}_{n\in\mathbf{N}}$ таква да је

$$S \subset \bigcup_{n\in\mathbf{N}} (a_n, b_n) \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) < \varepsilon.$$

Пример 20. Коначан скуп је скуп Лебегове мере нула. Заиста, ако је $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$ и $\varepsilon > 0$, онда фамилија интервала $I_j = (s_1 - 2^{-j-1}\varepsilon, s_1 + 2^{-j-1}\varepsilon)$, $1 \le j \le k$ покрива S. Нека је $|I_j|$ дужина интервала I_j, тада је $\sum\limits_j |I_j| = \sum\limits_j \frac{\varepsilon}{2^j} < \varepsilon$. ♯

Лема 13. *Пребројива унија скупова Лебегове мере нула је скуп мере нула.*

△ Нека је $\{S_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ пребројива фамилија скупова мере нула и $\varepsilon > 0$. Пошто је сваки од скупова S_k Лебегове мере нула, за свако k постоји пребројива фамилија интервала $\{I_j^k\}_{j\in\mathbf{N}}$ таква да је

$$S_k \subset \bigcup_{j\in\mathbf{N}} I_j^k \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{\infty} |I_j^k| < \frac{\varepsilon}{2^k},$$

где је $|I_j^k|$ дужина интервала I_j^k. Тада је

$$\bigcup_{k\in\mathbf{N}} S_k \subset \bigcup_{k\in\mathbf{N}} \bigcup_{j\in\mathbf{N}} I_j^k$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |I_j^k| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon,$$

што значи да је $\bigcup_{k\in\mathbf{N}} S_k$ скуп Лебегове мере нула. ▽

Специјално, из Леме 13 и Примера 20 следи да је сваки пребројив скуп мере нула. У следећем примеру описујемо један непребројив скуп Лебегове мере нула.

Пример 21. У Примеру 22 на стр. 54 смо конструисали Канторов скуп, као пресек скупова C_n добијених одстрањивањем „средњих трећина" интервала, Приметимо да је сваки од скупова C_n унија 2^n затворених интервала од којих је сваки дужине $(\frac{1}{3})^n$, тако да је збир дужина свих интервала чија је унија C_n једнак $(\frac{2}{3})^n$. Пошто $(\frac{2}{3})^n \to 0$ кад $n \to \infty$, следи да је Канторов C скуп мере нула. Иако то значи да је C занемарљив у смислу мере, сетимо се да је C „велики" у смислу кардиналности (в. Задатак 83 на стр. 54). ♯

Пример 22. Интервал $[a, b]$ није скуп Лебегове мере нула. Заиста, за произвољну пребројиву фамилију (a_n, b_n) интервала која покрива $[a, b]$ важи $\sum\limits_n (b_n - a_n) \ge b - a$. ♯

Лема 14. *Нека је $[a, b]$ ограничен интервал и $S \subset [a, b]$ затворен скуп. Тада је S скуп Лебегове мере нула ако и само ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји коначна фамилија интервала (a_1, b_1), ..., (a_m, b_m) таква да је*

$$S \subset (a_1, b_1) \cup \cdots \cup (a_m, b_m) \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{m}(b_k - a_k) < \varepsilon.$$

△ Из дефиниције скупа Лебегове мере нула следи да постоји пребројива фамилија интервала $\{I_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ која покрива скуп S и чија је укупна дужина мања од ε. Пошто је S затворен, његов комплемент $[a,b]\setminus S$ је отворен, па се, по дефиницији отвореног скупа (Дефиниција 23 на стр. 53), може представити као унија отворених интервала $\{J_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Интервали $\{I_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, $\{J_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ образују отворено покривање интервала $[a,b]$. Из Борел–Лебегове теореме (стр.50) следи да се из њега може издвојити коначно потпокривање. Интервали I_k који улазе у то потпокривање образују коначно покривање скупа S и укупна дужина им је мања од ε. ▽

У Последици 6 смо видели да је ограничена функција која има коначно много тачака прекида интеграбилна по Риману, а у Последици 7 да и функција са бесконачно много прекида може да буде интеграбилна по Риману. Сетимо се, међутим, да монотоне функције, о којима је реч у Последици 7, имају највише пребројиво много тачака прекида (Теорема 8 на стр. 114). У Примеру 35 видели смо пример функције којој је свака тачка тачка прекида (в. такође Пример 12 на стр. 172) и која није интеграбилна по Риману.

Сада ћемо прецизније формулисати везу између непрекидности и интеграбилности по Риману.

Теорема 9. (Лебегова теорема о интеграбилности) *Ограничена функција $f:[a,b]\to\mathbf{C}$ је интеграбилна по Риману ако и само ако је скуп њених прекида скуп Лебегове мере нула.*

△ Пошто је унија два скупа Лебегове мере нула скуп Лебегове мере нула (Лема 13), из (29) следи да ако теорема важи за реални и имагинарни део комплексне функције, она важи и за саму функцију. Ограничимо се зато на случај реалне функције. Нека је S скуп прекида функције $f:[a,b]\to\mathbf{R}$.

Претпоставимо прво да је f интеграбилна и докажимо да је S Лебегове мере нула. Из Последице 6 на стр. 181 следи да је S скуп тачака $x\in[a,b]$ у којима је осцилација $\omega(f,x)$ функције f већа од нуле. Представимо S као унију

$$S=\bigcup_{n=1}^{\infty}S_n,$$

где је $S_n=\{x\in[a,b]\mid\omega(f,x)\geq\frac{1}{n}\}$. Из Леме 13 следи да је довољно доказати да је сваки од скупова S_n Лебегове мере нула.

Посматрајмо скуп S_{n_0}. Нека је $\varepsilon>0$. Пошто је f интеграбилна, из Дарбуовог критеријума интеграбилности (Теорема 8) следи да постоји подела $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_m\}$ интервала $[a,b]$ таква да је

$$S(f,P)-s(f,P)<\frac{\varepsilon}{n_0}.$$

Нека је

$$K:=\{k\in\mathbf{N}\mid(x_{k-1},x_k)\cap S_{n_0}\neq\emptyset\}.$$

Уз ознаке

$$M_k=\sup_{x\in[x_{k-1},x_k]}f(x),\ m_k=\inf_{x\in[x_{k-1},x_k]}f(x),$$

за $k\in K$ важи

$$M_k-m_k\geq\frac{1}{n_0},$$

одакле следи

$$\frac{1}{n_0}\sum_{k\in K}(x_k - x_{k-1}) \le \sum_{k\in K}(M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) < S(f,P) - s(f,P) < \frac{\varepsilon}{n_0}.$$

Одатле добијамо

$$\sum_{k\in K}(x_k - x_{k-1}) < \varepsilon. \tag{35}$$

Приметимо да интервали $\{(x_{k-1}, x_k)\}_{k\in K}$ покривају скуп $V = S_{n_0} \setminus T$, где је T скуп тачака из S_{n_0} које су подеоне тачке поделе P. Из (35) следи да је скуп V Лебегове мере нула. Пошто је очигледно да је и T скуп Лебегове мере нула, следи да је и $S_{n_0} \subset V \cup T$ скуп Лебегове мере нула.

Претпоставимо сада да је S скуп Лебегове мере нула. Скуп

$$S_\varepsilon = \{x \in [a,b] \mid \omega(f,x) \ge \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\}$$

је затворен подскуп интервала $[a,b]$. Заиста, ако је $x_0 \in [a,b] \setminus S_\varepsilon$, онда је $\omega(f,x_0) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$, па постоји $\delta > 0$ такво да је

$$\sup\{f(x) \mid |x - x_0| < \delta\} - \inf\{f(x) \mid |x - x_0| < \delta\} < \frac{\varepsilon}{2(b-a)},$$

па је $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [a,b] \setminus S_\varepsilon$. Одатле следи да је $[a,b] \setminus S_\varepsilon$ отворен, па је S_ε затворен.

Из $S_\varepsilon \subset S$ следи да је S_ε скуп Лебегове мере нула па, на основу Леме 14, постоји коначна фамилија $(a_1,b_1), \ldots, (a_k,b_k)$ отворених интервала таква да је

$$S_\varepsilon \subset \bigcup_{j=1}^{k}(a_j,b_j) \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{k}(b_j - a_j) < \frac{\varepsilon}{4\sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|}. \tag{36}$$

Пошто је за $t \in [a,b] \setminus \bigcup_{j=1}^{k}(a_j,b_j)$

$$\omega(f,t) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)},$$

за свако $t \in [a,b] \setminus \bigcup_{j=1}^{k}(a_j,b_j)$ постоји интервал I_t такав да је $t \in I_t$ и

$$\sup_{x\in I_t} f(x) - \inf_{x\in I_t} f(x) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{37}$$

Пошто је скуп $[a,b] \setminus \bigcup_{j=1}^{k}(a_j,b_j)$ затворен подскуп интервала $[a,b]$, из покривања

$$\mathcal{J} = \{I_t \mid t \in [a,b] \setminus \bigcup_{j=1}^{k}(a_j,b_j)\}$$

можемо да издвојимо коначно потпокривање $I_{t_1}, \ldots, I_{t_r}$ (в. доказ Леме 14). Нека је P подела интервала $[a,b]$ чије су подеоне тачке тачке $a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k$ и граничне тачке интервала $I_{t_1}, \ldots, I_{t_r}$. За ову поделу важиће

$$S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon. \tag{38}$$

Заиста, раздвајајући суму $S(f,P) - s(f,P) = \sum(M_j - m_j)(x_j - x_{j-1})$ на две суме, од којих прва одговара подеоним интервалима (a_j,b_j) а друга интервалима I_{t_j}, и примењујући (36) на прву и (37) на другу добијамо (38). Према Теореми 8 то значи да је функција f интеграбилна по Риману. $\triangledown$

Приметимо да се Последице 6 и 7 могу добити и као последица претходне теореме.

Задатак 37. Применом Лебегове теореме о интеграбилности испитати интеграбилност Риманове функције из Примера 17 на стр. 118 и Дирихлеове функције из Примера 12 на стр. 172. Упоредити последњи закључак са Задатком 35 на стр. 292. ✓

5.4. Жорданова мера. Интеграција по произвољном скупу. Нека је $[a,b] \subset \mathbf{R}$ ограничен интервал. По дефиницији Римановог интеграла је

$$\int_a^b 1\,dx = \sup_P \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot \Delta_k = b - a,$$

тј.

$$\text{дужина интервала } [a,b] = \int_a^b 1\,dx. \tag{39}$$

Мотивисани тиме, мерење дужине интервала можемо да уопштимо на следећи начин. Нека је $S \subset \mathbf{R}$ и нека је

$$\chi_S(x) := \begin{cases} 1 & \text{за } x \in S \\ 0 & \text{за } x \notin S \end{cases}$$

карактеристична функција скупа S. Функција χ_S је прекидна у свакој тачки руба ∂S скупа S (в. Дефиницију 22 на стр. 51) и непрекидна у свим осталим тачкама. Заиста, претпоставимо да је

$$x \in \partial S = \overline{S} \cap \overline{(\mathbf{R} \setminus S)}.$$

Тада, по дефиницији затворења скупа (Дефиниција 22 на стр. 51), у свакој δ–околини тачке x постоје тачке $x_1 \in S$ и $x_2 \in \mathbf{R} \setminus S$. Пошто је тада

$$\chi_S(x_1) - \chi_S(x_2) = 1,$$

функција χ_S не задовољава Кошијев услов у тачки x, па је прекидна у тој тачки. Обрнуто, нека важи

$$x \notin \partial S = \overline{S} \cap \overline{(\mathbf{R} \setminus S)}.$$

Из дефиниције затворења скупа следи да постоји $\delta > 0$ такво да је $(x-\delta, x+\delta) \subset S$ или $(x-\delta, x+\delta) \subset \mathbf{R} \setminus S$. У првом случају је $\chi_S \equiv 1$ на $(x-\delta, x+\delta)$, а у другом $\chi_S \equiv 0$ на $(x-\delta, x+\delta)$. У оба случаја функција χ_S је непрекидна у тачки x.

Нека је $[a,b]$ интервал који садржи скуп S. Из Теореме 9 следи да је χ_S интеграбилна по Риману на $[a,b]$ ако и само ако је руб ∂S скуп Лебегове мере нула. У том случају, скуп S назива се *мерљивим у Жордановом смислу*, а број

$$\mu(S) := \int_a^b \chi_S(x)\,dx \tag{40}$$

назива се *Жордановом мером* скупа S.

До сада смо говорили о интегралу функције дефинисане на интервалу. Нека је сада $S \subset \mathbf{R}$ произвољан ограничен скуп и $f : S \to \mathbf{C}$ ограничена функција. Интеграл функције f по скупу S дефинисаћемо као интеграл

функције која је једнака функцији f на скупу S и једнака нули ван скупа S. Прецизније, нека је

$$\int_S f(x)\,dx := \int_a^b f(x)\chi_S(x)\,dx, \tag{41}$$

где је $[a,b]$ било који интервал такав да је $S \subset [a,b]$. Уколико интеграл на десној страни у (41) постоји, називамо га *интегралом функције f по скупу S*. Уз ову дефиницију, Жорданова мера (40) скупа може да се изрази као

$$\mu(S) = \int_S 1\,dx,$$

што, заједно са (39), показује да је Жорданова мера интервала његова дужина. Следећа лема показује да су ове дефиниције добре, тј. да не зависе од избора интервала $[a,b]$ који садржи скуп S.

Лема 15. *Нека је $S \subset [a_1,b_1]$ и $S \subset [a_2,b_2]$ и нека је $f : S \to \mathbf{C}$ ограничена функција. Тада је функција $f \cdot \chi_S$ интеграбилна по Риману на интервалу $[a_1,b_1]$ ако и само ако је интеграбилна на интервалу $[a_2,b_2]$ и важи*

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x)\chi_S(c)\,dx = \int_{a_2}^{b_2} f(x)\chi_S(c)\,dx.$$

$\triangle$ Функција $f \cdot \chi_S$ може да буде прекидна у тачкама прекида функције f и у тачкама скупа ∂S. Одатле, на основу Лебегове теореме о интеграбилности, следи да је функција $f \cdot \chi_S$ интеграбилна по Риману на интервалу $[a_1,b_1]$ ако и само ако је интеграбилна на интервалу $[a_2,b_2]$.

Нека су $\widetilde{P}_1$ и $\widetilde{P}_2$ поделе интервала $[a_1,b_1]$ и $[a_2,b_2]$. Нека је P_1 подела интервала $[a_1,b_1]$ која садржи све тачке поделе $\widetilde{P}_1$ и тачке поделе $\widetilde{P}_2$ које припадају скупу $[a_1,b_1] \cap [a_2,b_2]$. На сличан начин конструишимо поделу P_2 интервала $[a_2,b_2]$, додавањем тачака поделе $\widetilde{P}_1$ које припадају скупу $[a_1,b_1] \cap [a_2,b_2]$ подели $\widetilde{P}_2$. Функција $f \cdot \chi_S$ је једнака нули ван интервала $[a_1,b_1] \cap [a_2,b_2]$, биће

$$S(f \cdot \chi_S, P_1) = S(f \cdot \chi_S, P_2).$$

Подела P_1 је финија од поделе $\widetilde{P}_1$, а подела P_2 је финија од поделе $\widetilde{P}_2$. Пошто је ова конструкција могућа за произвољне поделе $\widetilde{P}_1$ и $\widetilde{P}_2$, доказ Леме следи из Леме 12 и дефиниције Римановог интеграла. $\triangledown$

Задатак 38. (а) Доказати да је Жорданова мера скупа $S \subset [a,b]$ једнака нули ако и само ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји коначна фамилија интервала (a_1,b_1), $\ldots$, (a_n,b_n) таква да је

$$S \subset (a_1,b_1) \cup \cdots \cup (a_n,b_n) \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \varepsilon.$$

(Упутство: ако је интеграл (40) једнак нули, постоји подела интервала $[a,b]$ таква да за горњу Дарбуова суму функције χ_S важи $\sum M_k)\Delta_k < \varepsilon$.)

(б) Нека је скуп S Жорданове мере нула. Доказати да је S Лебегове мере нула.

(в) Доказати да је $\mathbf{Q} \cap [a,b]$ скуп Лебегове мере нула, али да није мерљив у Жордановом смислу. (Упутство: доказати да је $\partial\mathbf{Q} = \mathbf{R}$.) ✓

5.5. Својства Римановог интеграла. Из Теореме 7 следи да се сва својства Кошијевог интеграла преносе на Риманов интеграл *непрекидне* функције. Навешћемо сада нека својства Римановог интеграла која важе за произвољне функције интеграбилне по Риману.

Лема 16. *Нека је $S \subset \mathbf{R}$ ограничен скуп и нека су функције $f : S \to \mathbf{C}$ и $g : S \to \mathbf{R}$ интеграбилне по Риману. Тада важи*

$$\left| \int_S f(x)\,dx \right| \leq \int_S \big|f(x)\big|\,dx.$$

Ако је и f реална и ако је $f(x) \leq g(x)$ за свако $x \in [a,b]$ онда је

$$\int_S f(x)\,dx \leq \int_S g(x)\,dx.$$

$\triangle$ Из дефиниције интеграла по произвољном скупу следи да можемо да претпоставимо да је $S = [a,b]$. Доказ сада следи из одговарајућих својстава за коначне суме. $\triangledown$

Лема 17. *Нека је $S \subset \mathbf{R}$ ограничен скуп, нека су функције $f : S \to \mathbf{C}$ и $g : S \to \mathbf{C}$ интеграбилне по Риману и нека је $\lambda \in \mathbf{C}$. Тада је*

$$\int_S \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int_S f(x)\,dx + \int_S g(x)\,dx, \quad \int_S \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_S f(x)\,dx.$$

$\triangle$ Из дефиниције интеграла по произвољном скупу следи да можемо да се ограничимо на случај $S = [a,b]$, а из (29) да можемо да претпоставимо да су f и g реалне функције.

Пошто су f и g интеграбилне функције, за свако $\varepsilon > 0$ постоји подела P интервала $[a,b]$ таква да је

$$s(f,P) > \int_a^b f(x)\,dx - \tfrac{\varepsilon}{2}, \quad S(f,P) < \int_a^b f(x)\,dx + \tfrac{\varepsilon}{2},$$
$$s(g,P) > \int_a^b g(x)\,dx - \tfrac{\varepsilon}{2}, \quad S(g,P) < \int_a^b g(x)\,dx + \tfrac{\varepsilon}{2}$$

Из $\sup(f+g) \leq \sup f + \sup g$, $\inf(f+g) \geq \inf f + \inf g$ следи

$$s(f+g,P) \geq s(f,P) + s(g,P) > \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx - \varepsilon,$$
$$S(f+g,P) \leq S(f,P) + S(g,P) < \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx + \varepsilon,$$

па је

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx - \varepsilon < \int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx < \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx + \varepsilon.$$

Пошто је ε произвољно, тиме је доказана прва једнакост. Слично се доказује и друга. $\triangledown$

Лема 18. *Нека је функција $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ интеграбилна по Риману. Тада важи*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

за свако $c \in [a,b]$.

△ Пошто је $f(x) = f(x)(\chi_{[a,c]}(x) + \chi_{(c,b]}(x))$, из својства 3. Леме 17 следи

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^b (f(x)\chi_{[a,c]}(x) + f(x)\chi_{(c,b]}(x))\,dx \\ &= \int_a^b f(x)\chi_{[a,c]}(x)\,dx + \int_a^b f(x)\chi_{(c,b]}(x))\,dx \\ &= \int\limits_{[a,c]} f(x)\,dx + \int\limits_{(c,b]} f(x)\,dx \\ &= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.\end{aligned}$$

У последњем кораку смо користили једнакост $\int\limits_{(c,b]} f(x)\,dx = \int\limits_{[c,b]} f(x)\,dx$ која лако следи из дефиниције Римановог интеграла. ▽

Задатак 39. Нека је $a > 1$ и $f : [1, a] \to \mathbf{C}$ непрекидно диференцијабилна функција. Доказати да је

$$\int_1^a [x]f'(x)\,dx = [a]f(a) - \sum_{k=1}^{[a]} f(k),$$

где је $[x]$ цео део реалног броја x. ✓

Задатак 40**.** Доказати да је, за $n \in \mathbf{N}$,

$$\int_1^{n+1} \frac{\sin(\pi x)}{[x]}\,dx = -\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

✓

У Теореми 3 на 264. страни смо видели како се диференцира интеграл *непрекидне* функције по горњој граници. Исти резултат важи и за *интеграбилне* функције, ако се диференцирање врши у тачкама у којима су оне непрекидне. Прецизније, важи следећа теорема.

Теорема 10**.** *Нека је $f : [a, b] \to \mathbf{C}$ интеграбилна функција. Тада је функција*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

непрекидна на $[a, b]$. Ако је функција f непрекидна у тачки x_0, онда је F диференцијабилна у тој тачки и важи $F'(x_0) = f(x_0)$.

△ Пошто је f интеграбилна, она је ограничена, тј. важи $|f(x)| \le M$ за неко $M \in (0, +\infty)$, па је

$$\begin{aligned}|F(x+h) - F(x)| &= \left|\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right| = \left|\int_x^{x+h} f(t)\,dt\right| \\ &\le \int_x^{x+h} |f(t)|\,dt \le M|h|,\end{aligned}$$

одакле следи да је F непрекидна.

Нека је функција f непрекидна у тачки x_0. Тада је

$$\begin{aligned}\left|\tfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| &= \left|\tfrac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - \tfrac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,dt\right| \\ &= \left|\tfrac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} \big(f(t)-f(x_0)\big)\,dt\right| \\ &\le \tfrac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} |f(t)-f(x_0)|\,dt \\ &\le \sup_{t\in[x_0,x_0+h]} |f(t)-f(x_0)|.\end{aligned}$$

Пошто је функција f непрекидна у тачки x_0, последњи израз тежи нули кад $h \to 0$. ▽

Следећа теорема је уопштење Последице 2 на стр. 265.

Теорема 11. *Нека је $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ непрекидно диференцијабилна бијекција, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ и нека је $f : [a, b] \to \mathbf{C}$ интеграбилна функција. Тада је и функција $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ интеграбилна на $[\alpha, \beta]$ и важи*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

△ Пошто је функција f интеграбилна, из Лебегове теореме о интеграбилности следи да је скуп њених тачака прекида мере нула. Пошто је φ непрекидно диференцијабилна, следи да је и скуп прекида функције $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ мере нула, па је, опет по Лебеговој теореми, и она интеграбилна.

Пошто је φ бијекција, дакле монотона, за сваку поделу $P : \alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$ тачке $x_j = \varphi(t_j)$ дефинишу поделу интервала $[a, b]$. Означимо ову поделу са P_φ. Из равномерне непрекидности функција φ и φ^{-1} следи

$$\lambda(P) \to 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda(P_\varphi) \to 0,$$

где је $\lambda(\cdot)$ параметар поделе (в. Параграф 5.2 на стр. 294). Применом Лагранжове теореме на сабирке интегралне $\sigma(f, P, \xi)$ добијамо

$$\sum f(\xi_j)|x_j - x_{j-1}| = \sum f \circ \varphi(\tau_j)|x_j - x_{j-1}| = \sum f \circ \varphi(\tau_j)\varphi'(\tau_j)|t_j - t_{j-1}|,$$

при чему су тачке ξ_j изабране тако да је $\xi_j = \varphi(\tau_j)$, где је τ_j тачка добијена применом Лагранжове теореме на функцију φ на интервалу $[t_j, t_{j-1}]$. Одатле следи тражена једнакост интеграла, преласком на лимес кад $\lambda(P) \to 0$ (в. формулу (34) на стр. 294). ▽

5.6. Несвојствени Риманов интеграл. Риманов интеграл смо дефинисали за ограничене функције које су интеграбилне по Риману на ограниченом интервалу $[a, b]$. Несвојствени Риманов интеграл се односи на неограничене интервале или неограничене функције. Ако је функција $f : [a, \beta) \to \mathbf{C}$ интеграбилна по Риману и ограничена на сваком интервалу $[a, b] \subset [a, \beta)$, лимес

$$\int_a^\beta f(x)\,dx := \lim_{b\to\beta} \int_a^b f(x)\,dx \tag{42}$$

називамо *несвојственим Римановим интегралом* функције f. При томе се допушта и могућност $\beta = \infty$ или $\overline{\lim_{x\to\beta}}|f(x)| = +\infty$. Уколико лимес (42) постоји кажемо да интеграл (42) конвергира, у противном кажемо да дивергира.

Несвојствени Риманов интеграл са унутрашњом сингуларном тачком, несвојствени Риманов интеграл са више сингуларитета и главна вредност несвојственог Римановог интеграла дефинишу се на потпуно исти начин као у случају Кошијевог интеграла.

Анализом доказа Леме 8 и Леме 10 закључујемо да Кошијев критеријум конвергенције интеграла и Поредбени принцип важе и за несвојствени Риманов интеграл.

6. Риман–Стилтјесов интеграл

6.1. Дефиниција Риман–Стилтјесовог интеграла. Једно од уопштења Римановог интеграла је Риман–Стилтјесов[18] интеграл, који се дефинише на следећи начин.

Нека је $\alpha : [a,b] \to \mathbf{R}$ растућа, а $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ ограничена функција. За поделу $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ интервала $[a,b]$ дефинишемо

$$\Delta\alpha_k := \alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})$$

и

$$s(f,\alpha,P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta\alpha_k, \qquad S(f,\alpha,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta\alpha_k,$$

где је $m_k := \inf\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$, $M_k := \sup\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$. Уведимо ознаке

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,d\alpha(x) := \sup_P s(f,\alpha,P) \quad \text{и} \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,d\alpha(x) := \inf_P S(f,\alpha,P).$$

Дефиниција 4. Ако је

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,d\alpha = \overline{\int_a^b} f(x)\,d\alpha.$$

ову вредност називамо *Риман–Стилтјесовим интегралом* функције f по функцији α и означавамо $\int\limits_a^b f(x)\,d\alpha(x)$ или $\int\limits_a^b f\,d\alpha$. Када због могућности забуне постоји потреба да се нагласи да се ради о Риман–Стилтјесовом, а не Римановом, интегралу, користимо ознаку $(S)\int\limits_a^b f(x)\,d\alpha(x)$.

Ако је $f : [a,b] \to \mathbf{C}$ ограничена комплексна функција, њен Риман–Стилтјесов интеграл по монотоној функцији $\alpha : [a,b] \to \mathbf{R}$ је

$$\int_a^b f\,d\alpha := \int_a^b \operatorname{Re} f\,d\alpha + i\int_a^b \operatorname{Im} f\,d\alpha,$$

уколико интегрални на десној страни постоје.

Напомена 7. (О услову монотоности функције α) Из монотоности функције α следи њена ограниченост: $(\forall x \in [a,b])\,\alpha(a) \le \alpha(x) \le \alpha(b)$. Могуће је дефинисати Риман–Стилтјесов и у општијем случају, за *ограничене* функције f и α, без услова монотоности за α. Тада је улога функција f и α у

[18] Стилтјес (T. J. Stieltjes, 1856–1894), холандски математичар

дефиницији „симетрична”: ако постоји $\int_a^b f\,d\alpha$ онда постоји и $\int_a^b \alpha\,df$ и важи „формула парцијалне интеграције”

$$\int_a^b f\,d\alpha + \int_a^b \alpha\,df = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a)$$

(видети Задатак 41 ниже). Међутим, пошто се главне теореме о егзистенцији Риман–Стилтјесовог интеграла односе на монотоне функције (или, општије, на функције ограничене варијације), ми ћемо се задржати на њима. ◇

Наравно, Риманов интеграл је специјални случај Риман–Стилтјесовог, за функцију $\alpha(x) = x$.

Као и Риманов интеграл, Риман–Стилтјесов интеграл може да се дефинише као лимес у простору подела. Ова дефиниција је аналогна дефиницији (34) на 294. страни:

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f,\alpha,P,\xi), \tag{43}$$

уколико је испуњен један од следећа два услова:

- f је непрекидна, или
- α је непрекидна и постоји $\int f\,d\alpha$.

Детаље (дефиницију $\sigma(f,\alpha,P,\xi)$ и еквиваленцију (43) и Дефиниције 4) читалац ће лако извести сам, по узору на аналогне детаље код Римановог интеграла.

Задатак 41**.** Користећи (43) доказати „формулу парцијалне интеграције” из Напомене 7. (Упутство: ако је $P = \{x_0,\dots,x_n\}$ и $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)$, доказати да је

$$\sigma(\alpha,f,P,\xi) = f(x)\alpha(x)\big|_a^b - \sigma(f,\alpha,Q,\chi),$$

где је $Q = \{a,\xi_1,\dots,\xi_n,b\}$, $\chi = (x_0,x_1,\dots,x_n)$ и да $\lambda(P)\to 0 \Leftrightarrow \lambda(Q)\to 0$; доказати да одатле следи формула из Напомене 7.) ✓

И следећа теорема се доказује на исти начин као Теорема 8 на 292. страни.

Теорема 12**. (Дарбуов критеријум интеграбилности)** *Риман–Стилтјесов интеграл*

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x),$$

где је $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ *ограничена и* $\alpha:[a,b]\to\mathbf{R}$ *монотона функција, постоји ако и само ако за свако* $\varepsilon>0$ *постоји подела* P *интервала* $[a,b]$ *таква да је*[19]

$$|S(f,\alpha,P) - s(f,\alpha,P)| < \varepsilon. \tag{44}$$

Последица 8**.** *Ако је* $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ *непрекидна, а* $\alpha:[a,b]\to\mathbf{R}$ *растућа функција, онда постоји* $\int_a^b f\,d\alpha$.

△ Нека је $\varepsilon>0$. Тада постоји $h>0$ такво да је $(\alpha(b)-\alpha(a))h<\varepsilon$. Пошто је f равномерно непрекидна на $[a,b]$ (по Канторовој теореми), постоји $\delta>0$ такво да

$$|x-y|<\delta \;\Rightarrow\; |f(x)-f(y)|<h.$$

[19]Ако је α растућа, знак апсолутне вредности у (44) је сувишан, јер у том случају доња Дарбуова сума није већа од горње. Наравно, општи случај своди се на случај растуће функције: ако је α опадајућа, онда је $-\alpha$ растућа.

Одатле следи да за сваку поделу P за коју је $\lambda(P) < \delta$ важи $M_k - m_k < h$, па је

$$S(f,\alpha,P) - s(f,\alpha,P) = \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta\alpha_k \leq h\sum_{k=1}^{n}\Delta\alpha_k = h(\alpha(b)-\alpha(a)) < \varepsilon.$$

Одатле, на основу Теореме 12, следи да постоји $\int_a^b f\,d\alpha$. $\bigtriangledown$

Последица 9. *Ако је $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ монотона, а $\alpha : [a,b] \to \mathbf{R}$ растућа и непрекидна функција, онда постоји $\int_a^b f\,d\alpha$.*

$\bigtriangleup$ Нека је $\varepsilon > 0$ и $n \in \mathbf{N}$ такво да важи $\frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{n}(f(b)-f(a)) < \varepsilon$. Из непрекидности функције α следи да постоји подела P таква да је $\Delta\alpha_k = \frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{n}$. Претпоставимо (не умањујући општост) да је f растућа функција. Тада је $M_k = f(x_k)$ и $m_k = f(x_{k-1})$, па је

$$\begin{aligned} S(f,\alpha,P) - s(f,\alpha,P) &= \tfrac{\alpha(b)-\alpha(a)}{n}\sum_{k=1}^{n}(f(x_k) - f(x_{k-1})) \\ &= \tfrac{\alpha(b)-\alpha(a)}{n}(f(b)-f(a)) < \varepsilon. \end{aligned}$$

То, на основу Теореме 12, значи да постоји $\int_a^b f\,d\alpha$. $\bigtriangledown$

Последица 10. *Нека је $f : [a,b] \to [A,B]$ ограничена и $\alpha : [a,b] \to \mathbf{R}$ растућа функција. Ако постоји $\int_a^b f\,d\alpha$, онда за сваку непрекидну функцију $\psi : [A,B] \to \mathbf{R}$ постоји $\int_a^b \psi\circ f\,d\alpha$.*

$\bigtriangleup$ Нека је $\varepsilon > 0$. Из равномерне непрекидности функције ψ на $[A,B]$ следи да постоји $\delta > 0$ такво да важи

$$|x-y| < \delta \;\Rightarrow\; |\psi(x) - \psi(y)| < \varepsilon$$

и да је $\varepsilon > \delta$. Пошто постоји $\int_a^b f\,d\alpha$, из Теореме 12 следи да постоји подела $P = \{x_0,\ldots,x_n\}$ интервала $[a,b]$ таква да је

$$S(f,\alpha,P) - s(f,\alpha,P) < \delta^2. \tag{45}$$

Нека је

$$\begin{aligned} m_k &:= \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x), & M_k &:= \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x), \\ m_k^* &:= \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} \psi\circ f(x), & M_k^* &:= \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} \psi\circ f(x). \end{aligned}$$

Нека је

$$S := \{k \mid M_k - m_k < \delta\}, \quad T := \{k \mid M_k - m_k \geq \delta\}.$$

Из (45) следи

$$\delta\sum_{k\in T}\Delta\alpha_k \leq \sum_{k\in T}(M_k - m_k)\Delta\alpha_k \leq \delta^2,$$

па је

$$\begin{aligned} S(\psi\circ f,\alpha,P) - s(\psi\circ f,\alpha,P) &= \sum_{k\in S}(M_k^* - m_k^*)\Delta\alpha_k + \sum_{k\in T}(M_k^* - m_k^*)\Delta\alpha_k \\ &\leq \varepsilon(\alpha(b)-\alpha(a)) + 2\sup|\psi(y)|\delta \\ &< \varepsilon((\alpha(b)-\alpha(a)) + 2\sup|\psi(y)|). \end{aligned}$$

Закључак сада следи из Теореме 12. $\bigtriangledown$

6.2. Својства Риман–Стилтјесовог интеграла. Нека су $\alpha : [a,b] \to \mathbf{R}$ и $\beta : [a,b] \to \mathbf{R}$ растуће, а $f : [a,b] \to \mathbf{C}$ и $g : [a,b] \to \mathbf{C}$ ограничене функције.

(1) Ако је $\mu \in \mathbf{C}$ и ако постоје $\int_a^b f\,d\alpha$ и $\int_a^b g\,d\alpha$, тада постоје и $\int_a^b (f+g)\,d\alpha$ и $\int_a^b (\mu f)\,d\alpha$ и важи

$$\int_a^b (f+g)\,d\alpha = \int_a^b f\,d\alpha + \int_a^b g\,d\alpha, \quad \int_a^b (\mu f)\,d\alpha = \mu \int_a^b f\,d\alpha.$$

(2) Ако су f и g реалне и $(\forall x \in [a,b])\, f(x) \leq g(x)$, и ако постоје $\int_a^b f\,d\alpha$ и $\int_a^b g\,d\alpha$, онда је

$$\int_a^b f\,d\alpha \leq \int_a^b g\,d\alpha.$$

(3) Ако је $a < c < b$ и ако постоје $\int_a^b f\,d\alpha$, $\int_a^c f\,d\alpha$ и $\int_c^b f\,d\alpha$ онда је

$$\int_a^b f\,d\alpha = \int_a^c f\,d\alpha + \int_c^b f\,d\alpha.$$

(4) Ако је $(\forall x \in [a,b])\, |f(x)| \leq M$ и ако постоји $\int_a^b f\,d\alpha$, онда је

$$\left| \int_a^b f\,d\alpha \right| \leq M(\alpha(b) - \alpha(a)).$$

(5) Ако постоје $\int_a^b f\,d\alpha$ и $\int_a^b f\,d\beta$, онда постоји и $\int_a^b f\,d(\alpha+\beta)$ и важи

$$\int_a^b f\,d(\alpha+\beta) = \int_a^b f\,d\alpha + \int_a^b f\,d\beta.$$

(6) Ако постоји $\int_a^b f\,d\alpha$ и ако је $c > 0$, онда постоји и $\int_a^b f\,d(c\alpha)$ и

$$\int_a^b f\,d(c\alpha) = c \int_a^b f\,d\alpha.$$

(7) Ако постоје $\int_a^b f\,d\alpha$ и $\int_a^b g\,d\alpha$, онда постоји и $\int_a^b (f \cdot g)\,d\alpha$.

(8) Ако постоји $\int_a^b f\,d\alpha$, онда постоји и $\int_a^b |f|\,d\alpha$ и важи

$$\left| \int_a^b f\,d\alpha \right| \leq \int_a^b |f|\,d\alpha.$$

Задатак 42. Нека је

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ за } x \in [-1,0] \\ 1, \text{ за } x \in (0,1], \end{cases} \qquad \alpha(x) = \begin{cases} 0, \text{ за } x \in [-1,0) \\ 1, \text{ за } x \in [0,1]. \end{cases}$$

Доказати да једнакост

$$\int_{-1}^1 f\,d\alpha = \int_{-1}^0 f\,d\alpha + \int_0^1 f\,d\alpha \tag{46}$$

из својства (3) *не важи*, пошто $\int_{-1}^0 f\,d\alpha = 0 = \int_0^1 f\,d\alpha = 0$, а $\int_{-1}^1 f\,d\alpha$ у смислу (43) на стр. 304 не постоји. Да ли овај интеграл постоји у смислу Дефиниције 4 на стр. 303?

Упутство: интеграли на десној страни у (46) могу да се израчунају по дефиницији; непостојање интеграла на левој страни у смислу (43) следи из чињенице да сваку поделу P такву да $0 \notin P$ важи

$$S(f, \alpha, P) - s(f, \alpha, P) = 1.$$

Упоредити овај закључак са Теоремом 12. ✓

Приметимо да смо са (34) на стр. 294 дали дефиницију Римановог интеграла *еквивалентну* дефиницији помоћу горњих и доњих Дарбуових сума. Претходни задатак показује да аналогна дефиниција Риман–Стилтјесовог интеграла, дата у (43) на стр. 304 у општем случају (ако нису испуњени услови наведени иза ње) није еквивалентна Дефиницији 4.

6.3. Свођење Риман–Стилтјесовог интеграла на Риманов. Видели смо да је Риман–Стилтјесов интеграл уопштење Римановог, на који се своди за $\alpha(x) = x$. Следећа теорема даје још један пример свођења Риман–Стилтјесовог интеграла на Риманов.

Теорема 13. *Нека је функција $f : [a, b] \to \mathbf{C}$ интеграбилна по Риману и $\alpha : [a, b] \to \mathbf{R}$ растућа диференцијабилна функција, таква да је $\frac{d\alpha}{dx}$ интеграбилна по Риману. Тада постоји $\int_a^b f\, d\alpha$ и важи*

$$\int_a^b f\, d\alpha = \int_a^b f \frac{d\alpha}{dx}\, dx.$$

△ Применом Лагранжеве теореме на функцију α добијамо

$$\begin{aligned}\sum_j f(\xi_j)(\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})) &= \sum_j f(\xi_j)\alpha'(c_j)(x_j - x_{j-1}) \\ &= \sum_j f(\xi_j)\alpha'(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) + \\ &+ \sum_j f(\xi_j)(\alpha'(c_i) - \alpha'(\xi_j))(x_j - x_{j-1}).\end{aligned}$$

Функција f је ограничена, а α' интеграбилна, што нам омогућава да избором довољно фине поделе последњи сабирак направимо произвољно малим. Доказ следи преласком на лимес у простору подела. ▽

Напомена 8. Теорема 13 и Задатак 41 дају нам још један доказ формуле парцијалне интеграције за Риманов интеграл. Приметимо да се тај доказ не позива на Њутн–Лајбницову формулу, тј. на везу неодређеног и одређеног (Римановог) интеграла. ◇

Теорема 14. (Прва теорема о средњој вредности за Риман–Стилтјесов интеграл) *Нека је $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ непрекидна, а $\alpha : [a, b] \to \mathbf{R}$ растућа функција. Тада постоји тачка $c \in [a, b]$, таква да је*

$$\int_a^b f\, d\alpha = f(c)(\alpha(b) - \alpha(a)).$$

△ Нека је $M = \sup_{[a,b]} f$, $m = \inf_{[a,b]} f$. Тада је

$$m(\alpha(b) - \alpha(a)) \leq \int_a^b f\, d\alpha \leq M(\alpha(b) - \alpha(a)).$$

Одатле следи да је

$$\int_a^b f\,d\alpha = \theta(\alpha(b) - \alpha(a))$$

за неко $\theta \in [m, M]$. Из непрекидности функције f следи да је $f(c) = \theta$ за неко $c \in [a, b]$. ▽

Теорема 15. (Друга теорема о средњој вредности за Риман–Стилтјесов интеграл) *Нека су $f, \alpha : [a, b] \to \mathbf{R}$ монотоне функције и нека је α непрекидна. Тада постоји тачка $c \in [a, b]$, таква да је*

$$\int_a^b f\,d\alpha = f(a)[\alpha(c) - \alpha(a)] + f(b)[\alpha(b) - \alpha(c)].$$

△ Из Прве теореме о средњој вредности и формуле парцијалне интеграције (Задатак 41) следи

$$\begin{aligned}\int_a^b f\,d\alpha &= f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \int_a^b \alpha\,df \\ &= f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \alpha(c)(f(b) - f(a))\end{aligned}$$

за неко $c \in [a, b]$, одакле се сређивањем добија тражена формула. ▽

Задатак 43. Извести теореме о средњој вредности за Риманов интеграл из теорема о средњој вредности за Риман–Стилтјесов. ✓

Задатак 44. Користећи дефиницију Риман–Стилтјесовог интеграла као лимеса у простору подела, доказати следеће уопштење теореме о смени променљиве у Римановом интегралу. Нека су $f, \varphi : [a, b] \to \mathbf{R}$ непрекидне функције. Нека је уз то φ строго растућа, и нека је $\psi = \varphi^{-1}$ њена инверзна функција. Тада је

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\psi(t))\,d\psi(t),$$

где је на левој страни Риманов, а на десној Риман–Стилтјесов интеграл. Доказати ово тврђење. Приметимо да $d\psi$ на десној страни представља ознаку, и да нисмо претпоставили да је ψ диференцијабилна. Уколико је ψ диференцијабилна, ово тврђење даје, као специјални случај, Теорему о смени променљиве у Римановом интегралу. ✓

6.4. Функције ограничене варијације. Нека је $f : [a, b] \to \mathbf{K}$ дефинисана на интервалу $[a, b] \subset \mathbf{R}$ са вредностима у пољу $\mathbf{K} \in \{\mathbf{R}, \mathbf{C}\}$. Ако је

$$P : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

подела интервала I, њој можемо да придружимо број

$$V_a^b(f; P) = |f(t_0)| + \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})|.$$

Тотална варијација функције f на интервалу $[a, b]$ је број

$$\operatorname{Var}_a^b(f) := \sup_P V_a^b(f; P).$$

Уколико је овај број коначан, функцију f називамо *функцијом ограничене варијације*.

Ако је $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, свака функција ограничене варијације $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ је разлика две монотоне функције:

$$f(t) = \frac{\operatorname{Var}_{t_0}^{t}(f) + f(t)}{2} - \frac{\operatorname{Var}_{t_0}^{t}(f) - f(t)}{2}.$$

Важи и обрнуто, ако је $f = f_1 - f_2$ за монотоне функције f_1 и f_2, онда је f функција ограничене варијације.

Ово опажање нам омогућава да дефиниције и тврђења везана за Риман–Стилтјесов интеграл и монотоне функције, проширимо на функције ограничене варијације са вредностима у $\mathbf{C}$.

Задатак 45. Да ли је

$$F : [0, +\infty) \to \mathbf{R}, \quad F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$$

функција ограничене варијације? ✓

Задатак 46. Нека је $f : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}$ функција ограничене варијације која задовољава $f(0) = f(2\pi)$. Доказати да је

$$\left| \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \right| \leq \frac{1}{n} \operatorname{Var}_0^{2\pi} f.$$

✓

Задатак 47. Скицирати график функције $x \mapsto \operatorname{Var}_a^x f$ ако је

(а) $f : [-2, 2] \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3x^2 - 2x^3$, $a = -2$;
(б) $f : [0, 2] \to \mathbf{R}$, $f(x) = [x] - x$, $a = 0$. ✓

Задатак 48. Израчунати $\int_0^5 x d([x] - x)$. ✓

Задатак 49. Нека је $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ функција ограничене варијације, непрекидна у тачки $\xi \in [a, b]$, и нека је $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ функција дефинисана са $f(\xi) = 1$ и $f(x) = 0$ за $x \neq \xi$.

(а) Да ли постоји Стилтјесов интеграл $\int_a^b f\, dg$? Ако постоји, израчунати га.
(б) Да ли се одговор у (а) мења ако изоставимо услов непрекидности функције g у тачки ξ? ✓

Задатак 50. Дате су функције

$$\rho(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad \chi(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad \eta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0, \\ \frac{1}{2} & x < 0. \end{cases}$$

Нека је $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ ограничена функција.

(а) Доказати да Стилтјесов интеграл $\int_{-1}^1 f\, d\rho$ постоји ако и само ако је f непрекидна са десне стране у нули и израчунати га у том случају.
(б) Доказати да Стилтјесов интеграл $\int_{-1}^1 f\, d\chi$ постоји ако и само ако је f непрекидна са леве стране у нули и израчунати га у том случају.
(в) Доказати да Стилтјесов интеграл $\int_{-1}^1 f\, d\eta$ постоји ако и само ако је f непрекидна у нули и израчунати га у том случају.

(г) Нека је $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ низ у $(0,1)$, $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ низ позитивиних бројева, такав да ред $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n$ конвергира и $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\rho(x-\xi_n)$. Доказати да за сваку непрекидну функцију $\psi:[0,1]\to\mathbf{R}$ важи

$$\int_0^1 \psi\,dg=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\psi(\xi_n).$$

Последња једнакост показује да Стилтјесов интеграл уопштава редове. ✓

Задатак 51. Нека су $f,g:[a,b]\to\mathbf{R}$ ограничене функције.

(а) Нека је бар једна од функција f,g непрекидна у тачки $c\in(a,b)$. Доказати да из егзистенције интеграла

$$\int_a^c f\,dg \quad \text{и} \quad \int_c^b f\,dg$$

следи егзистенција интеграла

$$\int_a^b f\,dg.$$

(б) Да ли (а) важи и ако су обе функције прекидне у тачки c? ✓

7. Заснивање елементарних функција помоћу интеграла

У Глави 2 смо строго засновали елементарне функције реалне променљиве (видети Дефиницију 1 на стр. 102) полазећи од својстава реалних бројева изучаваних у Глави 1. При томе је дефиниција рационалних функција изведена из алгебарских својстава поља реалних бројева (и као таква, важи у сваком пољу), док је за дефиницију експоненцијалних и тригонометријских функција, као и њима инверзних, била неопходна Аксиома супремума, или неки од њених еквивалената. У случају експоненцијалне функције, Аксиому супремума смо применили већ при доказу егзистенције корена, тј. решавања једначине $x^n=a$ (видети доказ Теореме 22 на стр. 55), што нам је омогућило да дефинишемо e^r за $r\in\mathbf{Q}$. Затим смо, поново помоћу Аксиоме супремума, дефинисали e^x за све $x\in\mathbf{R}$, показали да је функција

$$f:\mathbf{R}\to(0,+\infty),\qquad f(x)=e^x$$

бијекција и дефинисали њој инверзну, логаритамску функцију.

У случају тригонометријских функција, Аксиому супремума смо искористили да дефинишемо, не функцију, него променљиву – аргумент тригонометријских функција је *угао*, или, еквивалентно, тачка јединичног круга у комплексној равни (видети Дефиницију 34 на стр. 75). За коректно заснивање појма угла искористили смо Аксиому супремума и дужину лука јединичног круга дефинисали као супремум дужина изломљених линија. Одатле смо извели дефиниције синуса и косинуса као пројекција тачке јединичног круга на координатне осе, а затим и дефиниције осталих тригонометријских и инверзних тригонометријских функција.

У Глави 4 смо видели како елементарне функције могу да се дефинишу на елегантан начин помоћу степених редова (видети Дефиницију 13 на стр. 228 и Дефиницију 14 иза ње). Подсетимо се да се на овај начин елементарне функције реалне променљиве проширују и на комплексни домен.

Покажимо сада како елементарне функције могу да се дефинишу уз помоћ интеграла. Већ смо споменули да су рационалне функције добро дефинисане у сваком пољу, па ћемо поћи од једне од њих – функције $f(t) = 1/t$. Помоћу ње, можемо да *дефинишемо* природни логаритам као

$$\log x := \int_1^x \frac{1}{t}\, dt, \qquad \text{за} \qquad x > 0. \tag{47}$$

Из Основне теореме интегралног рачуна (стр. 264) следи да је овако дефинисана функција диференцијабилна (специјално, и непрекидна). Диференцирањем по горњој граници интеграла (47) добијамо

$$\frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x} > 0, \tag{48}$$

одакле следи да је логаритамска функција строго растућа. Већ знамо да нам је познавање извода функција довољно да прилично детаљно испитамо њихова својства. Нпр, логаритамска функција ће имати јединствену нулу $x = 1$, јер је строго растућа и

$$\log 1 = \int_1^1 \frac{1}{t}\, dt = 0.$$

Из дивергенције интеграла

$$\int_0^1 \frac{1}{t}\, dt \qquad \text{и} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\, dt$$

закључујемо да је

$$\lim_{x \to 0_+} \log x = -\infty \qquad \text{и} \qquad \lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty. \tag{49}$$

Строгу монотоност логаритамске функције можемо да искористимо и да дамо алтернативну *дефиницију броја* e, као јединственог решења једначине $\log x = 1$. Приметимо да ова једначина има решење, пошто из (49) и непрекидности следи да логаритам узима све реалне вредности, и да је ово решење јединствено, због строге монотоности логаритма.

Из монотоности и непрекидности логаритма следи да је

$$\log : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$$

бијекција, па има инверзну функцију. На тај начин можемо, полазећи од теорије одређеног интеграла, да *дефинишемо* функцију $x \mapsto e^x$ као инверзну функцији (47). Из правила за извод инверзне функције добијамо

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x.$$

У овом приступу заснивању логаритамских и експоненцијалних функција њихова основна алгебарска својства много се лакше доказују него у приступу дефинисању помоћу редова или директне примене Аксиоме супремума. Ради илустрације, докажимо својство

$$\log (xy) = \log x + \log y \qquad \text{за све} \qquad x, y > 0.$$

Нека је $y > 0$ произвољна константа и

$$h(x) = \log (xy) - (\log x + \log y).$$

Диференцирањем добијамо

$$h'(x) = y\frac{1}{xy} - \frac{1}{x} = 0.$$

Пошто је $h(1) = \log y - (\log 1 + \log y) = 0$, а функција h је дефинисана и диференцијабилна на интервалу, из Лагранжеве теореме следи да је $h \equiv 0$.

Задатак 52. Доказати да је $\log(a^b) = b \log a$ за $a > 0$. ✓

Задатак 53. Полазећи од ове дефиниције броја e као јединственог решења једначине $\log x = 1$ доказати да је

$$e = \lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h}. \tag{50}$$

Упутство: Из (48) следи да је $(\log)'(1) = 1$. По дефиницији првог извода је

$$(\log)'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{\log(1+h) - \log 1}{h}.$$

Извести одатле (50). ✓

На сличан начин као експоненцијалне и логаритамске, и тригонометријске функције можемо да дефинишемо помоћу интеграла. Нпр, изразом

$$\mathrm{arctan}x := \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

можемо да *дефинишемо* функцију аркус тангенс. Диференцирањем по горњој граници добијамо

$$(\mathrm{arctan}x)' = \frac{1}{1+x^2} > 0,$$

одакле следи да је аркус тангенс строго монотона функција, па има инверзну, што нас доводи до *дефиниције* тангенса. Као што већ знамо, помоћу тангенса можемо да дефинишемо и остале тригонометријске функције. То нам омогућава да дамо и *алтернативну дефиницију броја* π, нпр. као најмање позитивне нуле синуса (уместо дефиниције коју смо дали у оквиру Дефиниције 34 на стр. 75).

8. Неке неједнакости

На сличан начин као Теорема 25 на стр. 85 доказује се следећа теорема.

Теорема 16. (Коши–Шварцова неједнакост за интеграле) *Нека је* $I \subset \mathbf{R}$ *интервал и*

$$f, g : I \to \mathbf{C}$$

интеграбилне (по Риману) функције, такве да је

$$\int_I |f(x)|^2\,dx < +\infty, \qquad \int_I |g(x)|^2\,dx < +\infty. \tag{51}$$

Тада је

$$\int_I |f(x)g(x)|\,dx \le \Big(\int_I |f(x)|^2\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int_I |g(x)|^2\,dx\Big)^{1/2}, \tag{52}$$

при чему једнакост важи ако и само ако постоји $\lambda \in \mathbf{C}$*, такво да је*

$$f(x) = \lambda g(x)$$

за све $x \in I$.

Као и у случају Коши–Шварцове неједнакости за коначне суме, ова теорема има геометријску интерпретацију. Нека је $\mathcal{R}^2(I)$ скуп свих функција које су интеграбилне по Риману на интервалу I и задовољавају (51). Тада је $\mathcal{R}^2(I)$ векторски простор на коме је са

$$\langle f, g\rangle := \int_I f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

дефинисан скаларни производ, а са

$$\|f\| := \Big(\int_I |f(x)|^2\,dx\Big)^{1/2}$$

из њега изведена дужина вектора. Неједнакост (52), која сада може да се запише у облику

$$|\langle f, g\rangle| \le \|f\| \cdot \|g\|,$$

значи да је скаларни производ вектора по модулу мањи од производа њихових дужина, при чему једнакост важи ако и само ако су вектори колинеарни.

Претходна теорема има уопштење, у духу Примера 28 на стр. 158 за суме.

Теорема 17. (Хелдерова неједнакост за интеграле) *Нека су $p, q > 1$ реални бројеви, такви да је*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

$I \subset \mathbf{R}$ интервал и

$$f, g : I \to \mathbf{C}$$

интеграбилне (по Риману) функције, такве да је

$$\int_I |f(x)|^p\,dx < +\infty, \qquad \int_I |g(x)|^q\,dx < +\infty.$$

Тада је

$$\int_I |f(x)g(x)|\,dx \le \Big(\int_I |f(x)|^p\,dx\Big)^{1/p}\Big(\int_I |g(x)|^q\,dx\Big)^{1/q},$$

при чему једнакост важи ако и само ако постоји $\lambda \in \mathbf{C}$, такво да је

$$f(x) = \lambda g(x)^{q-1}$$

за све $x \in I$.

Доказ је незнатна модификација оног изложеног у Примера 28 на стр. 158. Остављамо га читаоцу за вежбу, као и доказ следеће последице, у духу Задатка 51 на стр. 159

Последица 11. (Неједнакост Минковског за интеграле) *Нека је $p > 1$ и нека су*

$$f, g : I \to \mathbf{C}$$

интеграбилне функције дефинисане на интервалу $I \subset \mathbf{R}$, такве да је

$$\int_I |f(x)|^p\,dx < +\infty, \qquad \int_I |g(x)|^p\,dx < +\infty. \tag{53}$$

Тада је

$$\left(\int_I |f(x) + g(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \le \left(\int_I |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} + \left(\int_I |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}. \tag{54}$$

Неједнакост (54) има следећу геометријску интерпретацију. Нека је $\mathcal{R}^p(I)$ скуп свих функција које су интеграбилне по Риману на интервалу I и задовољавају (53). Тада је $\mathcal{R}^p(I)$ векторски простор на коме је са

$$\|f\|_p := \left(\int_I |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

дефинисана дужина вектора. Неједнакост Минковског може да се запише у облику

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p,$$

што је позната неједнакост троугла.

Задатак 54. (Јангова неједнакост за интеграле) Нека је

$$f : [0, a] \to [0, f(a)] \subset \mathbf{R}$$

строго растућа непрекидна функција таква да је $f(0) = 0$ и нека је

$$f^{-1} : [0, f(a)] \to [0, a]$$

њена инверзна функција. Доказати да је

$$xy \leq \int_0^x f(t) \, dt + \int_0^y f^{-1}(t) \, dt$$

за све $x \in [0, a]$, $y \in [0, f(a)]$. Дати геометријску интерпретацију ове неједнакости.

Упутство: нека је

$$h(x) := \int_0^x f(t) \, dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t) \, dt - xf(x).$$

Приметити да је $h'(x) = 0$ за све $x \in [a, b]$. ✓

Задатак 55. Применом Задатка 54 на функцију $f(x) = x^{p-1}$ за $p > 1$ доказати једнакост из Примера 27 на стр. 157.

✓

9. Вежбе

(1) Израчунати

$$\int_0^\pi \frac{\sin^3 x \cos x}{1 + \cos^2 x} \, dx$$

(2) Израчунати

$$\int_{-1}^0 \log\left(\sqrt{1 - x} - \sqrt{1 + x}\right) dx.$$

(3) Израчунати

$$\int_0^1 \log\left(\sqrt{1 - x} + \sqrt{1 + x}\right) dx.$$

Упутство: увести смену $x = \cos 2t$.

(4) Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_n$ различити позитивни бројеви.

(а) Доказати да је

$$\sum_{j,k=1}^{n} x_k x_j \int_0^1 s^{a_k+a_j}\, ds = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i s^{a_i} \right)^2 ds.$$

(б) Доказати да је матрица

$$A = \left(\frac{1}{1+a_j+a_k} \right)_{1\le j,k\le n}$$

недегенерисана (тј. да је $\det A \neq 0$).

Упутство за (б): из (а) закључити да за произвољне реалне бројеве $x_1, x_2, \ldots, x_n$ различите од нуле важи неједнакост

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{x_j x_k}{1+a_j+a_k} > 0.$$

(5) Нека је $f : [-a, a] \to \mathbf{C}$ парна функција. Доказати да је

$$\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{1+e^x}\, dx = \int_0^a f(x)\, dx.$$

(6) Нека је $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ непрекидна функција, таква да је

$$(\forall x \ge 0)\ 0 < f(x+1) < f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Нека је

$$a_n = \int_n^{n+1} f(x)\, dx.$$

Доказати да ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

конвергира.

(7) Нека је

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx.$$

(а) Доказати да је $I_0 = \pi/2$, $I_1 = 1$.

(б) Користећи парцијалну интеграцију доказати да је

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

(в) Индукцијом доказати да је

$$I_{2n} I_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \frac{\pi}{2}.$$

(г) Доказати да је

$$I_m \le I_{m-1} \le I_{m-2} = \frac{m}{m-1} I_m$$

и одатле, уз примену (в), да је

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} I_{2n} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

(8) Користећи Вежбу (35) на стр. 240 доказати да је

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx \le \int_0^1 e^{-nx^2}\,dx \le \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

Извести одатле закључак да је

$$\sqrt{n}I_{2n+1} \le \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,dt \le \sqrt{n}I_{2n-2},$$

где је I_n интеграл из Вежбе (7). Применом резултата из Вежбе (7) доказати да је

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Ово је још један начин да се израчуна Пуасонов интеграл из Примера 15 на стр. 285.

(9) Израчунати

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{1+e^x}\,dx.$$

(10) Испитати конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^n e^{-x^2}\,dx.$$

(11) Нека је $f : [1/2, 3/2] \to \mathbf{C}$ непрекидно диференцијабилна функција. Доказати да ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{1/2}^{3/2} f(x)\sin(nx)\,dx$$

конвергира.

(12) Израчунати

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2+4+6+\cdots+2n}{n^2} \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right).$$

(13) Нека је $f : [0,1] \to (0,+\infty)$ непрекидна функција. Доказати да за свако $n \in \mathbf{N}$ постоји јединствено $\xi(n) \in \mathbf{R}$ такво да је

$$\frac{1}{n}\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^{\xi(n)} f(x)\,dx$$

и доказати да је

$$\lim_{n\to\infty} n\xi(n) = \frac{1}{f(0)}\int_0^1 f(x)\,dx.$$

Упутство: Доказати прво да је $\xi(n) > 0$ и да $\xi(n) \to 0$ кад $n \to \infty$. Затим из

$$\int_0^1 f(x)\,dx = n\xi(n)\frac{1}{\xi(n)}\int_0^{\xi(n)} f(x)\,dx$$

извести тражени закључак.

(14) Доказати да за свако $n \in \mathbf{N}$ постоји јединствено $\xi(n) \in [1, +\infty)$ такво да је

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \int_1^n \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x dx = \int_1^{\xi(n)} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x dx$$

и да је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\xi(n)}{\sqrt{n}} = 1$$

(15) Доказати да је

$$\frac{\pi}{6} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2 - x^3}} < \frac{\pi\sqrt{2}}{8}.$$

(16) Испитати функцију

$$f(x) = x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x}\right)$$

и нацртати њен график. Доказати да постоји инверзна функција f^{-1} и израчунати

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^{-1}(y)\, dy.$$

(17) Нека је $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ строго растућа функција, таква да је $f(0) = 0$, и нека је f^{-1} њена инверзна функција. Доказати да је

$$(\forall x \in [0, 1]) \int_0^x f(t)\, dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(s)\, ds = xf(x).$$

(18) Доказати да је

$$\int_0^x \left(\int_0^s f(t)\, dt\right) ds = \int_0^x (x - s) f(s)\, ds.$$

(19) Функција $y = f(x)$ дата је имплицитно са

$$x = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1 + 4t^2}}.$$

Доказати (без израчунавања интеграла) да је други извод f'' пропорционалан функцији f и наћи константу пропорционалности. Одатле наћи експлицитан израз за $f(x)$.

(20) Нека је $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ непрекидна функција, таква да је површина између њеног графика и x–осе на интервалу $[0, c]$ једнака

$$\frac{c^2}{2} + \frac{c}{2}\sin c + \frac{\pi}{2}\cos c,$$

за свако $c > 0$. Наћи $f(\pi/2)$.

(21) Наћи дужину криве

$$y = \int_0^x \sqrt{\cos(2t)}\, dt, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{4}.$$

(22) Доказати неједнакост

$$\int_0^a \sqrt{1 + \cos^2 t}\, dt > \sqrt{a^2 + \sin^2 a}$$

(23) Доказати да је површина између криве $y = 1/x$ и x–осе на интервалу $[1, 2]$ иста као и на интервалу $[10, 20]$. Општије: доказати да је површина између те криве и x–осе на интервалу $[a, b]$ (за $0 < a < b$) иста као и на интервалу $[ha, hb]$, за све $h > 0$.

(24) За које вредности параметра p интеграл

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{px}{1+x^2} - \frac{1}{2x} \right) dx$$

конвергира? Израчунати интеграл за те вредности p.

(25) Израчунати

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \sqrt[n]{1 + \frac{k}{n}}.$$

(26) Израчунати

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nt^{n-1}}{1+t}\, dt.$$

(27) Израчунати

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{dx}{1+x^2}.$$

(28) Испитати конвергенцију низова

$$a_n = \int_0^n \frac{dx}{x^p} \quad \text{и} \quad b_n = \frac{1}{n} \int_0^n \frac{dx}{x^p}.$$

(29) Доказати да је

$$I_n = \int_0^1 \log\left(1 + x^n\right) dx$$

опадајући низ који конвергира ка нули.

(30) Нека је

$$I_n = \int_0^1 x^n \arctan x\, dx.$$

Израчунати

$$\lim_{n\to\infty} n(\pi - 4(n+1)I_n).$$

(31) *Ојлерова Гама–функција* дефинисана је са

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$

Доказати да је ова функција дефинисана за $x > 0$. Доказати да је $\Gamma(n+1) = n!$.

(32) Нека је

$$f(x) = \int_0^x \arctan \frac{1}{t}\, dt.$$

(а) Испитати функцију f и нацртати њен график.

(б) Нека је $A = [0, +\infty)$. Одредити скуп $B = f(A)$ и доказати да рестрикција $f|_A : A \to B$ има непрекидно инверзно пресликавање $g : B \to A$.

(в) Израчунати

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{g(y)}{y} \quad \text{и} \quad \lim_{y\to+\infty} g(y)^{1/y}.$$

(г) Испитати конвергенцију реда

$$\sum_{n=0}^{\infty} g(n)x^n.$$

(33) Нека је

$$I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x\, dx, \qquad n \in \mathbf{N}.$$

(а) Доказати да је низ I_n монотон.

(б) Доказати да је

$$\frac{1}{2(n+1)} < I_n < \frac{1}{2(n-1)} \quad \text{за} \quad n > 1.$$

(в) Испитати конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} I_n^p \log^q \left(\frac{n+1}{n}\right)$$

у зависности од реалних параметара p и q.

(34) Нека је

$$I_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x)\, dx, \qquad J_n = \int_0^1 x^n e^{\sqrt{x}}\, dx$$

Испитати конвергенцију редова $\sum I_n$ и $\sum J_n$.

(35) Нека је $f : [0,1] \to \mathbf{C}$ непрекидна функција. Доказати да је

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\, dx \quad \text{и} \quad \int_0^{\pi} x f(\sin x)\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x)\, dx.$$

(36) Нека је c_n неопадајући низ реалних бројева, а $f : [a, +\infty) \to [0, +\infty)$ нерастућа функција. Доказати да ред

$$\sum_{n=2}^{\infty} f(c_n)(c_n - c_{n-1})$$

конвергира ако постоји коначан

$$\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\, dt,$$

а ред

$$\sum_{n=2}^{\infty} f(c_{n-1})(c_n - c_{n-1})$$

дивергира ако је

$$\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\, dt = +\infty.$$

(37) Нека је $f : [0,1] \to [0, +\infty)$ ненегативна непрекидна функција, таква да је

$$\int_0^x f(t)\, dt \geq f(x)$$

за свако $x \in [0,1]$. Доказати да је $f \equiv 0$.

(38) Нека је $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ непрекидна функција, таква да је

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0.$$

Доказати да постоји $c \in (a, b)$ такво да је

$$f(c) = \int_a^c f(x)\,dx.$$

(39) Нека је $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ опадајућа функција. Доказати да је

$$\int_0^a f(x)\,dx \geq a \int_0^1 f(x)\,dx$$

за свако $a \in [0, 1]$.

(40) Нека је $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ непрекидна функција за коју је

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0 \quad \text{и} \quad \int_0^1 xf(x)\,dx = 0.$$

Доказати да f има бар две нуле.

(41) Доказати да не постоји непрекидна ненегативна функција $f : [0, 1] \to [0, +\infty)$ таква да је

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 1, \quad \int_0^1 xf(x)\,dx = a, \quad \int_0^1 x^2 f(x)\,dx = a^2.$$

(42) Нека је $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ диференцијабилна функција, таква да је

$$|f'(x)| \leq 1 \quad \text{и} \quad \int_0^4 f(x)\,dx = 0.$$

Доказати да је

$$f(4) = \frac{1}{4}\int_0^4 tf'(t)\,dt \quad \text{и} \quad f(x) \leq x + 2$$

за све $x \geq 4$.

(43) Нека је $f : [0, 1] \to [0, +\infty)$ ненегативна непрекидна конкавна функција, таква да је $f(0) = 1$. Доказати да је

$$\int_0^1 xf(x)\,dx \leq \frac{2}{3}\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2.$$

Упутство: увести смену $t = \lambda x$ у интеграл

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

и, користећи конкавност и $f(0) = 1$ доказати да је

$$F(x) \geq \frac{x}{2}(1 + f(x)).$$

Одатле, уз помоћ парцијалне интеграције, закључити да је

$$\int_0^1 xf(x)\,dx \leq F(1) - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 xf(x)\,dx.$$

(44) Испитати конвергенцију интеграла

$$\int_0^1 \log\frac{1+x}{x}\,dx.$$

(45) Доказати да интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}$$

конвергира ако и само ако је $\min\{p, q\} < 1 < \max\{p, q\}$.

(46) Доказати да интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)(1 + x^p)}$$

конвергира и да његова вредност не зависи од p.

(47) Доказати да интеграл

$$\int_0^1 \frac{x^p}{1 + x^q \sin x}\, dx$$

конвергира ако и само ако је $p > \min\{-1, q\}$.

(48) Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда $\sum c_n$ ако је

(а) $c_n = \int_0^1 x \cos(nx)\, dx$

(б) $c_n = (-1)^n \int_0^1 x^n \arctan(x/n)\, dx$,

(в) $c_n = (-1)^n \int_{n-1}^{n+1} (1 + x^3)^{-1} \arctan x\, dx$,

(г) $c_n = (-1)^n \int_n^{2n} (x^5 + n)^{-1/2}\, dx$,

(д) $c_n = \int_n^{n^2} (1 + x^4)^{-1}\, dx$.

(49) Нека је $f : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ двапут диференцијабилна функција таква да је

$$(\forall x > 1)\, f''(x) \le 0 \le f'(x).$$

Доказати да је

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_n^{n+1} f(x)\, dx - \frac{f(n) + f(n+1)}{2} \right) \le \frac{f(2) - f(1)}{2}.$$

Упутство: Користећи конкавност функције f доказати да је

$$\frac{f(n) + f(n+1)}{2} \le \int_n^{n+1} f(x)\, dx$$

и $f(x) \le f(n+1) + f'(n+1)(x - n - 1)$. Искористити неједнакост

$$f(k+2) - f(k+1) - f'(k+1) = \frac{1}{2} f''(\xi_k) \le 0,$$

која следи из Тејлорове формуле и претпоставке о другом изводу функције.

(50) Нека су $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ реалне функције, такве да интеграли

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(x))^2\, dx \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (g(x))^2\, dx$$

конвергирају. Доказати да интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x)\, dx$$

апсолутно конвергира.

(51) Нека је $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ двапут диференцијабилна функција са непрекидним другим изводом, таква да интеграли

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f^{(n)}(x))^2\,dx, \quad n = 0, 1, 2$$

конвергирају. Доказати да је

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f'(x))^2\,dx + \int_{-\infty}^{+\infty} f''(x)f(x)\,dx = 0.$$

(52) Нека је $f : [a, +\infty) \to \mathbf{R}$ двапут диференцијабилна функција таква да интеграли

$$\int_a^{+\infty} (f(x))^2\,dx \quad \text{и} \quad \int_a^{+\infty} (f''(x))^2\,dx$$

конвергирају и за коју важи

$$(\exists M)\,(\forall x \geq a)\,|f(x)f'(x)| \leq M.$$

Доказати да интеграл

$$\int_a^{+\infty} (f'(x))^2\,dx$$

конвергира.

(53) Нека су a, b, p, q позитивни бројеви. Доказати да је

(а) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}\sin(ax) - e^{-bx}\sin(bx)}{x}\,dx = 0$,

(б) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}\cos(ax) - e^{-bx}\cos(bx)}{x}\,dx = \log(b/a)$,

(в) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\log\frac{p+qe^{-ax}}{p+qe^{-bx}}\,dx = \log(1+qp^{-1})\log(ba^{-1})$,

(г) $\int_0^{+\infty} \left[\left(\frac{ax+p}{ax+q}\right)^n - \left(\frac{bx+p}{bx+q}\right)^n\right]\frac{dx}{x} = (1-(p/q)^n)\log(a/b)$,

(д) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax+p)-\sin(bx+p)}{x}\,dx = \sin p\log(b/a)$,

(ђ) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax+p)-\cos(bx+p)}{x}\,dx = \cos p\log(b/a)$.

Упутство: Искористити Пример 17 на стр. 286.

(54) Израчунати

$$\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{1}{2013^x + 1} \cdot \frac{\sin^{2014} x}{\sin^{2014} x + \cos^{2014} x}\,dx.$$

Упутство: почети са $\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \int_0^{+\pi/2} + \int_{-\pi/2}^0$ и у другом интегралу увести смену $t = -x$.

(55) Наћи све непрекидне функције $f : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ које задовољавају услов

$$(\forall x > 0)\; 2x\int_0^x f(t)\,dt = f(x).$$

(56) Нека је $\zeta(s)$ Риманова зета функција (видети Пример 71 на стр. 230), $\mu(n)$ Мебијусова функција (видети (83) на стр. 233) и

$$M(x) = \sum_{n \le x} \mu(n).$$

Доказати да је

$$\zeta(z) = z \int_1^{+\infty} \frac{[x]}{x^{z+1}}\, dx \qquad \text{и} \qquad \frac{1}{\zeta(z)} = z \int_1^{+\infty} \frac{M(x)}{x^{z+1}}\, dx$$

за $\mathrm{Re}(z) > 1$.

ГЛАВА 7

Функције са вредностима у векторском простору

Геометријски, векторе у простору замишљамо као стрелице, односно „оријентисане дужи". При томе, идентификујемо векторе који су паралелни, исто оријентисани и једнаке дужине.

Формално говорећи, оријентисану дуж у n–димензионом еуклидском простору E^n можемо да поистоветимо са уређеним паром $(a, b) \in E^n \times E^n$; тачку a називамо њеном *почетном тачком*, а b *крајњом тачком*. На скупу оријентисаних дужи дефинисана је релација еквиваленције – две оријентисане дужи су еквивалентне ако постоји транслација еуклидског простора E^n која преводи једну од њих у другу. Елементе количничког простора у односу на ову релацију еквиваленције називамо *геометријским векторима*, а сам количнички простор *векторским простором геометријских вектора*.

Претпостављамо да је читалац упознат са геометријским дефиницијама векторских операција – сабирања вектора („правило паралелограма"), множења вектора скаларом, скаларног и векторског производа два вектора. У овој глави ћемо дати алгебарске дефиниције ових операција и испитати њихова аналитичка својства, по аналогији са аналитичким својствима алгебарских операција у пољу $\mathbf{R}$ и $\mathbf{C}$ – извод збира или производа функција, непрекидност количника непрекидних функција и сл. – којима смо се бавили у претходним главама.

1. Векторске операције у координатама

1.1. Вектори на правој. Нека је на правој дата тачка 0; идентификоваћемо је са нулом на реалној правој. Сваки вектор на тој правој може, транслацијом, да се доведе у положај у коме му је почетна тачка O. Одатле следи да је сваки вектор на (реалној) правој једнозначно одређен својом крајњом тачком – оријентисана дуж са почетном тачком x_0 и крајњом тачком x_1 идентификује се, транслацијом, са оријентисаном дужи са почетном тачком O и крајњом тачком $x_1 - x_0$.

Означимо са $\mathbf{i}$ вектор са почетном тачком O (нулом реалне праве) и крајњом тачком 1 (јединицом реалне праве). Сваки вектор $\mathbf{r}$ на реалној правој може да се напише у облику

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i}, \quad \text{за неко} \quad x \in \mathbf{R}.$$

Нека су $\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i}$ и $\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i}$ два вектора на реалној правој и $a \in \mathbf{R}$ скалар. Тада су са

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = (x_1 + x_2)\mathbf{i}, \quad a\mathbf{r}_1 = (ax_1)\mathbf{i}, \quad \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = x_1x_2$$

дефинисане операције сабирања вектора, множења вектора скаларом и скаларног производа два вектора.

Означимо са $\|\mathbf{r}\|$ дужину вектора $\mathbf{r} = x\mathbf{i}$, тј. број $\|\mathbf{r}\| := |x|$. Приметимо да је $\|\mathbf{r}\| = \sqrt{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}}$.

1.2. Вектори у равни. Нека је у равни дата тачка O; идентификоваћемо је са нулом у комплексној равни. Сваки вектор ове равни може, транслацијом, да се доведе у положај у коме му је почетна тачка 0, па је, као и у случају реалне праве, сваки вектор на комплексној равни једнозначно одређен комплексним бројем z – његовом крајњом тачком, после транслације почетне тачке у O. Вектор са почетном тачком z_0 и крајњом тачком z_1 идентификује се, транслацијом, са оријентисаном дужи са почетном тачком O и крајњом тачком $z_1 - z_0$.

Означимо са $\mathbf{i}$ вектор са почетном тачком O (нулом комплексне равни) и крајњом тачком 1 (јединицом у $\mathbf{C}$) и са $\mathbf{j}$ вектор са почетном тачком O и крајњом тачком $i = \sqrt{-1}$ (имагинарна јединица у $\mathbf{C}$). Сваки вектор $\mathbf{r}$ у комплексној равни може да се напише у облику

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}, \quad \text{за неке} \quad x, y \in \mathbf{R},$$

што одговара запису комплексног броја у облику $z = x + iy$. Ако идентификујемо комплексну раван $\mathbf{C}$ са $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, онда је $\mathbf{i}$ вектор са почетном тачком $(0,0)$ и крајњом тачком $(1,0)$, а $\mathbf{j}$ вектор са почетном тачком $(0,0)$ и крајњом тачком $(0,1)$.

Нека су $\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j}$ и $\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j}$ два вектора на реалној правој и $a \in \mathbf{R}$ скалар. Са

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = (x_1 + x_2)\mathbf{i} + (y_1 + y_2)\mathbf{j}, \quad a\mathbf{r}_1 = (ax_1)\mathbf{i} + (ay_1)\mathbf{j}, \quad \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = x_1x_2 + y_1y_2$$

су дефинисане операције сабирања вектора, множења вектора скаларом и скаларног производа два вектора.

Ако уз векторе $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ посматрамо комплексне бројеве $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, можемо да приметимо да операцији сабирања вектора $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ у равни одговара операција сабирања комплексних бројева z_1 и z_2, а множењу вектора $\mathbf{r}_1$ скаларом a операција множења комплексног броја z_1 реалним бројем a. О геометријској интерпретацији множења комплексних бројева нешто више ћемо да кажемо касније, у Примеру 3 на стр. 331.

Из Питагорине теореме следи да је дужина вектора $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ број

$$\|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Лако се види да је и у овом случају, као и на реалној правој, $\|\mathbf{r}\| = \sqrt{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}}$. Ако вектор $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ идентификујемо са комплексним бројем $z = x + iy$, онда је

$$\|\mathbf{r}\| = |z|.$$

Општије – дужина вектора који спаја тачке z_0 и z_1 (односно, растојање између тих тачака) је $|z_1 - z_0|$.

Сви вектори који леже на правој L која спаја тачке z_0 и z_1 су колинеарни вектору $z_1 - z_0$, тј. све тачке те праве су облика

$$z = z_0 + t(z_1 - z_0), \quad t \in \mathbf{R}. \tag{1}$$

Ово је *параметарска једначина праве* L која спаја тачке $z_0 = x_0 + iy_0$ и $z_1 = x_1 + iy_1$. Раздвајањем реалног и имагинарног дела добијамо параметарску

једначину праве у облику

$$x = x_0 + t(x_1 - x_0), \qquad y = y_0 + t(y_1 - y_0), \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Пошто је сваки вектор на овој правој колинеаран вектору $z_1 - z_0$, тј. за произвољни вектор $\mathbf{v}$ на правој важи $\mathbf{v} = t_0((x_1-x_0)\mathbf{i}+(y_1-y_0)\mathbf{j})$, а параметар t у (1) узима све реалне вредности, свеједно је да ли у (1) уместо t стоји $t_0 t$, па једначина праве (1) може да се напише и у облику

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}, \tag{2}$$

где је $\mathbf{r}_0$ вектор који спаја координатни почетак са *произвољном фиксираном* тачком на правој L, а $\mathbf{v}$ *произвољни* вектор паралелан тој правој.

Нека је θ $(0 \le \theta \le \pi)$ угао између вектора $\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j}$ и $\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j}$. Из елементарне тригонометрије следи да је

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_1\|\,\|\mathbf{r}_2\|}.$$

Задатак 1. Доказати да је вектор $\mathbf{w} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ ортогоналан на праву $ax + by = c$. Извести одатле формулу за угао између правих $a_1x + b_1y = c_1$ и $a_2x + b_2y = c_2$. ✓

Задатак 2. Доказати да је једначина праве која спаја две тачке z_1, z_2 комплексне равни дата са

$$\bar{z} = az + b, \quad \text{где је} \quad a = \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_2}{z_1 - z_2}, \quad b = \frac{z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1}{z_2 - z_1}.$$

Доказати да осна рефлексија у односу на осу $\bar{z} = az + b$ пресликава тачку ζ у $\overline{a\zeta + b}$. ✓

1.3. Вектори у тродимензионом простору. Као и у случају вектора на правој или у равни, вектор у тродимензионом еуклидском простору можемо, после транслације која његову почетну тачку премешта у координатни почетак $O = (0, 0, 0)$, да идентификујемо са троком реалних бројева, $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. За такав вектор пишемо

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

где су $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ вектори са почетном тачком $(0, 0, 0)$ и крајњим тачкама $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ и $(0, 0, 1)$; другим речима, то су јединични вектори дуж x, y и z осе.

Ако су $\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k}$ и $\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k}$ два вектора на реалној правој и $a \in \mathbf{R}$ скалар, операције сабирања вектора, множења вектора скаларом и скаларног производа два вектора су дефинисане са

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = (x_1 + x_2)\mathbf{i} + (y_1 + y_2)\mathbf{j} + (z_1 + z_2)\mathbf{k}, \quad a\mathbf{r}_1 = (ax_1)\mathbf{i} + (ay_1)\mathbf{j} + (az_1)\mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Вектор

$$\mathbf{O} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

је неутрал за операцију сабирања; овај вектор називамо *нула – вектором.*

Из Питагорине теореме следи да је дужина вектора $\mathbf{r} = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ једнака

$$\|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}},$$

а из елементарне тригонометрије да је косинус угла θ између вектора $\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$ и $\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$ једнак

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_1\|\,\|\mathbf{r}_2\|}.$$

Вектори $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ су ортогонални ако је угао између њих прав, тј. ако је $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = 0$.

Вектор $\mathbf{r}$ називамо *јединичним вектором* ако је $\|\mathbf{r}\| = 1$.

Лема 1. *Скаларни производ има следећа својства:*

1. $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1$
2. $a(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) = (a\mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 \cdot (a\mathbf{r}_2)$
3. $\mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3) = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_3$
4. $\mathbf{O} \cdot \mathbf{r}_1 = 0$.

△ Доказ следи из дефиниције векторских операција у координатама. ▽

Дефиниција 1. Вектор

$$\mathrm{P}_{\mathbf{r}_2}(\mathbf{r}_1) := \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_2\|^2}\mathbf{r}_2$$

назива се *ортогоналном пројекцијом* вектора $\mathbf{r}_1$ на вектор $\mathbf{r}_2$. ◊

Приметимо да је

$$\mathrm{P}_{\mathbf{r}_2}(\mathbf{r}_1) = \|\mathbf{r}_1\| \cos\theta \frac{\mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_2\|},$$

где је θ угао између вектора $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, а $\frac{\mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_2\|}$ јединични вектор истог правца и смера као $\mathbf{r}_2$.

Пример 1. **Косинусна теорема.** Нека је $\triangle ABC$ произвољан троугао у равни, и нека је α угао код темена A. Нека је

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{BC}, \quad \mathbf{b} = \overrightarrow{CA}, \quad \mathbf{c} = \overrightarrow{AB}.$$

Тада је $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{O}$, тј. $\mathbf{a} = -(\mathbf{b} + \mathbf{c})$, одакле следи

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}).$$

Применом дистрибутивности скаларног производа на израз на десној страни добијам

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

где су $a = \|\mathbf{a}\|$, $b = \|\mathbf{b}\|$, $c = \|\mathbf{c}\|$ дужине страница троугла. ♯

Ако вектори $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ нису паралелни, они одређују јединствену раван у тродимензионом простору. Нека је $\mathbf{n}$ јединствени јединични вектор који је ортогоналан на ту раван и усмерен *по правилу десне руке* у односу на векторе $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$: ако десном руком обухватимо праву којој припада вектор $\mathbf{n}$, тако да прсти показују од $\mathbf{r}_1$ према $\mathbf{r}_2$ по мањем углу, онда палац одређује правац вектора $\mathbf{n}$. *Векторски производ* вектора $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ се дефинише са

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 := (\|\mathbf{r}_1\| \, \|\mathbf{r}_2\| \sin\theta)\, \mathbf{n}, \tag{3}$$

где је θ $(0 < \theta < \pi)$ угао између вектора $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$. Ако су вектори $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ колинеарни $\theta = 0$ или π) њихов векторски производ је по дефиницији нула–вектор.

Из елементарне тригонометрије следи да је дужина векторског производа два вектора једнака површини паралелограма чије су они странице, односно двострукој површини троугла конструисаног над њима.

Пример 2. Синусна теорема. Нека су, као у Примеру 1, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ вектори одређени страницама троугла $\triangle ABC$ и a, b, c њихове дужине. Из чињенице да је дужина векторског производа једнака двострукој површини троугла $\triangle ABC$, следи да је

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}.$$

Одатле и из (3) следи

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma},$$

где су α, β, γ углови троугла наспрам страница $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ редом. ♯

Ако су $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ вектори у тродимензионом простору, њихов *мешовити производ* је *скалар*

$$[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3] := (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{r}_3.$$

Лако се види да је запремина паралелепипеда чије су ивице ови вектори једнака апсолутној вредности мешовитог производа

$$V = |[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3]|.$$

Заиста, дужина вектора $\mathbf{N} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$ је једнака површини базе паралелепипеда. Пошто је вектор $\mathbf{N}$ ортогоналан на базу паралелепипеда, апсолутна вредност скаларног производа $\mathbf{N} \cdot \mathbf{r}_3$ једнака је производу дужине вектора $\mathbf{N}$ (тј. површине базе) и висине паралелепипеда.

У овом извођењу формуле за запремину, можемо да узмемо за базу паралелепипеда било која два вектора, тако да запремину можемо да изразимо, помоћу мешовитог производа, на три начина. Ако при томе поведемо рачуна и о знаку, добијамо идентитет

$$(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{r}_3 = (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) \cdot \mathbf{r}_1 = (\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{r}_2. \tag{4}$$

Другим речима, вредност мешовитог производа се не мења ако аргументе циклично померамо:

$$[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3] = [\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1] = [\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2].$$

Приметимо и да је, због комутативности скаларног производа,

$$(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_3 \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2).$$

Лема 2. *Векторски производ има следећа својства:*

1. $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = -\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_1$
2. $a(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) = (a\mathbf{r}_1) \times \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 \times (a\mathbf{r}_2)$
3. $\mathbf{r}_1 \times (\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3) = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3, \quad (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) \times \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3$
4. $\mathbf{O} \times \mathbf{r}_1 = \mathbf{O}$.

△ Доказ свих својстава сем дистрибутивности (својство 3) следи директно из дефиниције. За доказ дистрибутивности пођимо од вектора

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 \times (\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3) - \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3. \tag{5}$$

Треба да докажемо да је $\mathbf{R} = \mathbf{O}$, што је еквивалентно са $\|\mathbf{R}\|^2 = \mathbf{R} \cdot \mathbf{R} = 0$. Ако помножимо обе стране (5) са $\mathbf{R}$, добијамо

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot (\mathbf{r}_1 \times (\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3)) - \mathbf{R} \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) - \mathbf{R} \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3).$$

Ако сада искористимо (4), добијамо

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} = (\mathbf{R} \times \mathbf{r}_1) \cdot (\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3) - (\mathbf{R} \times \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{r}_2 - (\mathbf{R} \times \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{r}_3.$$

Тиме смо доказ свели на дистрибутивност скаларног производа (Лема 1), из које следи да је последњи израз једнак нули. ▽

Сада можемо да изразимо векторски производ у координатама. Приметимо, пре свега, да из дефиниције векторског производа следи да, за јединичне векторе $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ важи

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k},\quad \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i},\quad \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j},\quad \mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{k}=\mathbf{O}. \tag{6}$$

Нека је

$$\mathbf{r}_1=x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k}\quad\text{и}\quad \mathbf{r}_2=x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k}.$$

Користећи дистрибутивност векторског производа и (6) добијамо, после краћег сређивања израза,

$$\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2=(y_1z_2-y_2z_1)\mathbf{i}-(x_1z_2-x_2z_1)\mathbf{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\mathbf{k}.$$

Други начин да се напише овај израз је

$$\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_1=\begin{vmatrix} y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\mathbf{i}-\begin{vmatrix} x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\mathbf{k} \tag{7}$$

или, најлакше за памћење,

$$\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}.$$

Скаларним множењем израза (7) са $\mathbf{r}_3=x_3\mathbf{i}+y_3\mathbf{j}+z_3\mathbf{k}$ добијамо израз за мешовити производ

$$(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2)\cdot\mathbf{r}_3=\begin{vmatrix} y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}x_3-\begin{vmatrix} x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}y_3+\begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}z_3$$

или, у виду једне детерминанте

$$[\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3]=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}. \tag{8}$$

Запремина паралелепипеда чије су ивице вектори $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ једнака је апсолутној вредности ове детерминанте.

Задатак 3. Да ли тачке $A(2,3,1)$, $B(0,2,5)$, $C(6,-1,3)$, $D(-4,6,3)$ леже у истој равни? ✓

Задатак 4. Дате су тачке $O(0,0,0)$, $P(2,0,-1)$, $Q(2,-1,0)$, $R(1,4,0)$.

(а) Доказати да тачке O, P, Q, R не леже у истој равни и да тачке O, P, Q не леже на истој правој.

(в) Наћи растојање између тачке R и равни одређене тачкама O, P, Q.

(г) Наћи косинус угла код темена P троугла $\triangle OPQ$ и дужину ортогоналне пројекције странице OP на праву одређену тачкама P и R. ✓

Нека су $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ три вектора која не леже у истој равни. Тада је вектор $\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_3$ ортогоналан на раван одређену векторима $\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{r}_3$. Другим речима, сваки вектор који је ортогоналан на $\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_3$ припада равни одређеној векторима $\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{r}_3$. Пошто је $\mathbf{r}_1\times(\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_3)$ ортогоналан на $\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_3$ и на $\mathbf{r}_1$, следи да је

$$\mathbf{r}_1\times(\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_3)=a\mathbf{r}_2+b\mathbf{r}_3$$

за неке $a, b \in \mathbf{R}$. Следећа лема даје експлицитан израз за скаларе a и b (без претпоставке да вектори не леже у истој равни).

Лема 3. *Нека су* $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ *произвољна три вектора у тродимензионом простору. Тада је*

$$\mathbf{r}_1 \times (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) = (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_3)\mathbf{r}_2 - (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)\mathbf{r}_3.$$

△ Доказ следи из записа векторског и скаларног производа у координатама: нека је

$$\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_3 = x_3\mathbf{i} + y_3\mathbf{j} + z_3\mathbf{k}.$$

Тада је компонента уз $\mathbf{i}$ у $\mathbf{r}_1 \times (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3)$ једнака

$$y_1(x_2y_3 - y_2x_3) - z_1(z_2x3 - x_2z_3) = x_2(y_1y_3 + z_1z_3) - x_3(y_1y_2 + z_1z_2).$$

Ако овом изразу додамо и одузмемо $x_1x_2x_3$ добијамо да је $\mathbf{i}$ компонента троструког векторског производа једнака

$$x_2(x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3) - x_3(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) = (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_3)x_2 - (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)x_3.$$

На исти начин се израчунавају и остале две компоненте. ▽

Из Леме 3 следи да векторски производ *није* асоцијативна операција – вектор $\mathbf{r}_1 \times (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3)$ лежи у равни одређеној векторима $\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{r}_3$, а вектор $(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \times \mathbf{r}_3 = -\mathbf{r}_3 \times (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)$ у равни одређеној векторима $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$. Уместо асоцијативности, троструки векторски производ задовољава следећу релацију.

Последица 1. *Нека су* $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ *произвољна три вектора у тродимензионом простору. Тада је*

$$\mathbf{r}_1 \times (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) + \mathbf{r}_2 \times (\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1) + \mathbf{r}_3 \times (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) = 0.$$

△ Доказ следи из Леме 3. ▽

Једнакост из Последице 1 назива се *Јакобијевим*[1] *идентитетом* за векторски производ.

Пример 3. Множење комплексних бројева. Нека су

$$\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} \quad \text{и} \quad \mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j}$$

два вектора у $\mathbf{R}^3$. Ако израчунамо њихов скаларни и векторски производ у координатама, добијамо

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = x_1x_2 + y_1y_2, \quad \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = (x_1y_2 - x_2y_1)\mathbf{k}.$$

Ако уз векторе $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ посматрамо и комплексне бројеве

$$z_1 = x_1 + iy_1 \quad \text{и} \quad z_2 = x_2 + iy_2$$

примећујемо да је производ комплексних бројева $\bar{z}_1$ и z_2 једнак

$$\bar{z}_1z_2 = (x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_1y_2 - x_2y_1),$$

тј. реални део овог производа одговара скаларном, а имагинарни векторском производу вектора $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$. Другим речима

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = \mathrm{Re}\,(\bar{z}_1z_2) = \frac{1}{2}(\bar{z}_1z_2 + z_1\bar{z}_2), \qquad \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = \mathrm{Im}\,(\bar{z}_1z_2)\,\mathbf{k} = \frac{1}{2i}(\bar{z}_1z_2 - z_1\bar{z}_2)\,\mathbf{k}.$$

♯

[1] Јакоби (Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804–1851), немачки математичар

Пример 4. Кватерниони. Проширењем система комплексних бројева са скупа $\mathbf{C} \cong \mathbf{R}^2$ на скуп $\mathbf{H} := \mathbf{R}^4$ добијамо *кватернионе*, алгебарску структуру која, осим имагинарне јединице i има још две имагинарне јединице j и k. Прецизније, кватерниони су изрази облика $a + ib + jc + kd$, који се сабирају по правилу

$$(a_1+ib_1+jc_1+kd_1)+(a_2+ib_2+jc_2+kd_2) = (a_1+a_2)+i(b_1+b_2)+j(c_1+c_2)+k(d_1+d_2),$$

а множење је дефинисано дистрибутивним и асоцијативним законом и правилима

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Из ових релација следи и

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

Структура $(\mathbf{H}, +, \cdot)$ је тело (прстен који задовољава све аксиоме поља сем комутативности множења, видети дефиницију у Глави 1). По аналогији са комплексним бројевима, кватернионе облика $ib + jc + kd$ зовемо *чисто имагинарним* кватернионима. *Конјугована вредност* кватерниона $q = a + ib + jc + kd$ је кватернион

$$\overline{a + ib + jc + kd} = a - ib - jc - kd.$$

Из дефиниције множења кватерниона следи да је $q\bar{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Позитивни реални број

$$|q| := \sqrt{q\bar{q}}$$

назива се *апсолутном вредношћу* кватерниона q.

Приметимо да је

$$(a + ib + jc + kd) = (a + ib) + (c + id)j,$$

а $a+ib$ и $c+id$ су комплексни бројеви, па кватернионе можемо да идентификујемо са елементима из $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$.

Тело кватерниона можемо да опишемо и помоћу операција скаларног и векторског производа у $\mathbf{R}^3$. Посматрајмо $\mathbf{H}$ као $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$ и идентификујмо кватернион $q = a + ib + jc + kd$ са *формалним збиром* скалара и вектора

$$a + \mathbf{r}, \quad \text{где је} \quad \mathbf{r} = b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}.$$

Тада је сабирање кватерниона дефинисано са

$$(a_1 + \mathbf{r}_1) + (a_2 + \mathbf{r}_2) = (a_1 + a_2) + (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2),$$

а множење са

$$(a_1 + \mathbf{r}_1)(a_2 + \mathbf{r}_2) = (a_1a_2 - \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) + (a_1\mathbf{r}_2 + a_2\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2).$$

Ознака $\mathbf{H}$ за тело кватерниона користи се у част Хамилтона[2], који их је увео као средство за проучавање механике тродимензионог система. Његов оригинални покушај, који није уродио плодом, је био да систем комплексних бројева прошири на тродимензиони простор. Не успевши у томе, проширио га је на четвородимензиони простор. Не улазећи у детаље прецизније формулације, споменимо да је данас познато да се систем бројева, сем у $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}^2 = \mathbf{C}$ где је он асоцијативан и комутативан, може проширити само још на $\mathbf{R}^4 = \mathbf{H}$ ако желимо да остане асоцијативан иако није комутативан, и у $\mathbf{R}^8$ ако се одрекнемо и асоцијативности. Ово тврђење доказали су методама алгебарске топологије,

[2]Хамилтон (William Rowan Hamilton, 1805–1865), ирски математичар

независно један од другог, 1958. године Кервер[3] и Милнор[4]. Напоменимо да је алгебарска структура која проширује систем бројева на $\mathbf{R}^8$ позната као алгебра *октава*, или *октаниона*. Увели су је, независно један од другог, Грејвс[5] (који јој је и дао име октаве) и Кејли[6], по коме се она некад назива и *Кејлијевим бројевима*. ♯

Пример 5. Једначине праве и равни. Нека су дате две различите тачке $P_0(x_0, y_0, z_0)$ и $P_1(x_1, y_1, z_1)$ у $\mathbf{R}^3$ и

$$\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$$

њима придружени вектори. Тада права L која садржи тачке P_0 и P_1 дата параметарском једначином

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0), \quad t \in \mathbf{R}, \tag{9}$$

или, у координатама,

$$x = x_0 + t(x_1 - x_0), \qquad y = y_0 + t(y_1 - y_0), \qquad z = z_0 + t(z_1 - z_0), \qquad t \in \mathbf{R},$$

која уопштава једначину (2) и изводи се на исти начин. Као и у (2), и у (9) уместо вектора $\mathbf{r}_0$ може да стоји произвољан вектор који спаја координатни почетак са неком тачком на правој L, а уместо $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$ било који вектор $\mathbf{v}$ који је паралелан правој L.

Нека је дата још једна тачка $P_2(x_2, y_2, z_2)$ која није колинеарна са тачкама P_0 и P_1, и нека је $\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k}$. Тада су вектори $\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0$ паралелни равни Σ којој припадају тачке P_0, P_1, P_2, па је вектор

$$\mathbf{n} = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0) \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)$$

ортогоналан на ту раван. Нека је $S(x, y, z)$ произвољна тачка равни Σ и нека је

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Тада је вектор $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ паралелан равни Σ, тј. ортогоналан на $\mathbf{n}$, па је

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0.$$

Ово је „једначина равни у $\mathbf{R}^3$; пошто је $\mathbf{n} = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0) \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)$, она може да се напише у облику мешовитог производа

$$[\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0].$$

Имајући у виду запис (8) мешовитог производа у координатама, једначину равни која садржи тачке P_0, P_1, P_2 можемо да запишемо и у облику

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Дакле, ако је раван дата једначином $Ax+By+Cz = D$, вектор $\mathbf{v} = A\mathbf{i}+B\mathbf{j}+C\mathbf{k}$ је ортогоналан на њу (упоредити са Задатком 1). ♯

---

[3]Кервер (Michel Kervaire, 1927–2007), француски математичар

[4]Милнор (John Willard Milnor, 1931), амерички математичар

[5]Грејвс (John Thomas Graves, 1806–1870), ирски правник и математичар

[6]Кејли (Arthur Cayley, 1821–1895), британски математичар

Задатак 5. Наћи параметарску једначину праве по којој се секу равни

$$x - y + 2z + 8 = 0 \quad \text{и} \quad x + 2y + z = 1$$

и наћи растојање између те праве и тачке $(0, 1, 2)$.

Упутство: За налажење вектора праве употребити векторски производ вектора равни, а за растојање пројекцију из Дефиниције 1. ✓

1.4. Вектори у k–димензионом простору. По аналогији са тродимензионим простором, тачке у $\mathbf{R}^k$ зваћемо *векторима* у k–димензионом простору. Ако су $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ и $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_k)$ два таква вектора, а $a \in \mathbf{R}$ реални број, онда су са

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} := (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \ldots, v_k + w_k) \quad \text{и} \quad a\mathbf{v} := (av_1, av_2, \ldots, av_k)$$

дефинисане операције сабирања вектора и множења вектора скаларом, које на природан начин уопштавају одговарајуће операције у тродимензионом простору. Слично, скаларни производ је дефинисан са

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} := v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_k w_k,$$

а дужина вектора са

$$\|\mathbf{v}\| := \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_k^2} = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}.$$

Еуклидским растојањем (или, краће, *растојањем*[7]) између тачака

$$A(a_1, a_2, \ldots, a_k) \quad \text{и} \quad B(b_1, b_2, \ldots, b_k)$$

називамо број

$$d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \cdots + (a_k - b_k)^2}.$$

Растојање између тачака A и B је једнако дужини $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$ вектора $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, где је $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ и $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_k)$.

Из Коши–Шварцове неједнакости (Теорема 25 на стр. 85) следи да је

$$|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| \leq \|\mathbf{v}\| \, \|\mathbf{w}\|,$$

па постоји јединствени угао $\theta \in [0, \pi]$ за који је

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\| \, \|\mathbf{w}\|}.$$

Тај угао називамо *углом између вектора* $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$. Вектори $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ су *ортогонални* ако је $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$.

Пример 6. Вектори

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, 0), \quad \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1, 0), \quad \mathbf{e}_4 = (0, 0, 0, 1)$$

у $\mathbf{R}^4$ су међусобно ортогонални. Свака два од њих су неколинеарна, тј. не постоји $a \in \mathbf{R}$ за које је $a\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_j$ за $i \neq j$. ♯

[7] У Додатку 1 разматраћемо општији концепт растојања, односно метрике, који укључује и растојања која нису еуклидска. За сада ћемо се ограничити само на еуклидска растојања, па ћемо придев „еуклидско" често да изостављамо.

Приметимо да бинарну операцију $\times$ векторског производа из $\mathbf{R}^3$ не можемо да поновимо за k–димензиони простор – при дефинисању векторског производа $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$ у тродимензионом простору користили смо чињеницу да су сви вектори који су ортогонални на $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ колинеарни (па је векторски производ био једнозначно одређен тим правцем, дужином једнаком површини паралелограма над $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ и смером одређеним правилом десне руке). Међутим, као што смо видели у Примеру 6, већ у $\mathbf{R}^4$ постоји више неколинеарних вектора који су ортогонални на пар вектора – нпр. и $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ су ортогонални на пар вектора $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$.

Међутим, користећи запис векторског производа у координатама, можемо да дефинишемо $(k-1)$–*арну* операцију $\bigwedge$, која уопштава *бинарну* операцију $\times$ из случаја $k = 3$ (тада је $k - 1 = 2$), на следећи начин. Посматрајмо јединичне векторе

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \quad \cdots, \quad \mathbf{e}_k = (0, 0, 0, \ldots, 1),$$

који на очигледан начин уопштавају векторе $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ $\mathbf{k}$ из тродимензионог простора. Нека су $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}$ вектори из $\mathbf{R}^k$, са координатама

$$\mathbf{v}_j = (v_1^j, v_2^j, \ldots, v_k^j) \quad \text{за} \quad j = 1, 2, \ldots, k-1.$$

Њихов *спољашњи* или *клинасти производ* $\bigwedge$ је дефинисан са

$$\bigwedge(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}) := \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_k \\ v_1^1 & v_2^1 & \cdots & v_k^1 \\ v_1^2 & v_2^2 & \cdots & v_k^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_1^{k-1} & v_2^{k-1} & \cdots & v_k^{k-1} \end{vmatrix}.$$

Уместо $\bigwedge(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{k-1})$ користи се и ознака $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \ldots \wedge \mathbf{v}_{k-1}$.

Сада можемо да дефинишемо и *мешовити производ* k вектора $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ са

$$[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k] := (\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \ldots \wedge \mathbf{v}_{k-1}) \cdot \mathbf{v}_k,$$

који уопштава мешовити производ из $\mathbf{R}^3$. Очигледно је да је он једнак детерминанти

$$[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k] := \begin{vmatrix} v_1^1 & v_2^1 & \cdots & v_k^1 \\ v_1^2 & v_2^2 & \cdots & v_k^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_1^k & v_2^k & \cdots & v_k^k \end{vmatrix}.$$

Апсолутну вредност ове детерминанте, по аналогији са тродимензионим случајем, називамо *запремином* k*–димензионог паралелепипеда* конструисаног над векторима $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$.

2. Лимеси, изводи и интеграли

Подсетимо се да смо у Глави 4 дефинисали лимес низа z_n комплексних бројева на следећи начин:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_\infty \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})\, n > n_0 \;\Rightarrow\; |z_n - z_\infty| < \varepsilon. \tag{10}$$

Одатле смо извели појмове лимеса и непрекидности функције (Теорема 2 на стр. 171 и Последица 4 иза ње).

Израз $|z_n - z_\infty|$ у (10) је растојање између комплексних бројева z_n и z_∞, односно дужина вектора одређеног комплексним бројем $z_n - z_\infty$, тако да ова

дефиниција, као и дефиниције лимеса и непрекидности, има природно уопштење у векторским просторима.

Дефиниција 2. Нека је $\mathbf{r}_n$ низ вектора у $\mathbf{R}^k$. Тада је

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{r}_n = \mathbf{r}_\infty \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})\, n > n_0 \;\Rightarrow\; \|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_\infty\| < \varepsilon.$$

Ако је ово испуњено, кажемо да низ $\mathbf{r}_n$ *конвергира* ка $\mathbf{r}_\infty$.

Нека је $\mathbf{r} : T \to \mathbf{R}^k$ пресликавање скупа $T \subset \mathbf{R}$ у векторски простор $\mathbf{R}^k$ и нека је a тачка нагомилавања скупа T. Тада је $A = \lim\limits_{t\to a} f(t)$ ако и само ако за сваки низ $t_n \in T \setminus \{a\}$ важи

$$\lim_{n\to\infty} t_n = a \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} \mathbf{r}(t_n) = A.$$

Функција $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ је непрекидна у тачки $\tau \in T$ ако за сваки низ $t_n \in T$ важи

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \tau \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} \mathbf{r}(t_n) = \mathbf{r}(\tau).$$

◊

Из дефиниције следи да је функција $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ непрекидна у тачки τ ако и само ако је

$$\mathbf{r}(\tau) = \lim_{t\to\tau} \mathbf{r}(t).$$

Приметимо да смо у дефиницији извода функције, датој у Глави 3,

$$f'(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h}$$

користили појам лимеса (који смо управо дефинисали и за функције са вредностима у векторском простору) и операције сабирања, одузимања и множења скаларом $1/h$, које имамо на располагању и у векторском простору. То нам омогућава следећу дефиницију.

Дефиниција 3. Нека $t_0 \in I$ унутрашња тачка интервала $I \subset \mathbf{R}$. Функција $\mathbf{r} : I \to \mathbf{R}^k$ је *диференцијабилна у тачки* t_0 ако постоји лимес

$$\mathbf{r}'(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(\mathbf{r}(t_0+h) - \mathbf{r}(t_0)),$$

који називамо *изводом функције* $\mathbf{r}$ у тачки t_0. ◊

Напомена 1. Приметимо да није могуће овако једноставно уопштити појам извода ако претпоставимо да је *домен*, уместо кодомена, функције у векторском простору, јер израз $1/h$ нема смисла ако h није скалар. Изучавање извода функција са *доменом* у векторском простору је предмет диференцијалног рачуна функција више променљивих. ◇

Слично се уопштава и појам Кошијевог интеграла непрекидне функције $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbf{R}^k$; резултат је *вектор*

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\, dt \in \mathbf{R}^k.$$

У претходним главама смо видели да лимес комплексне функције (и са њим везани појмови непрекидности, лимеса низа, извода, интеграла) може да се сведе на лимес реалног и имагинарног дела (видети нпр. Лему 12 на стр. 119). Та тврђења се, са практично истим доказом, уопштавају на функције са кодоменом у $\mathbf{R}^k$.

Лема 4. *Низ* $\mathbf{r}_n = (x_1^n, x_2^n, \dots, x_k^n)$ *низ у* $\mathbf{R}^k$ *конвергира ако и само ако конвергира по координатама, тј. ако и само ако конвергирају сви низови* x_j^n, $1 \le j \le k$, *и тада важи*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{r}_n = \big(\lim_{n\to\infty} x_1^n, \lim_{n\to\infty} x_2^n, \dots, \lim_{n\to\infty} x_k^n\big).$$

Функција $t \mapsto \mathbf{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t))$ *има лимес у тачки нагомилавања домена* a *ако и само ако све функције* $t \mapsto x_j(t)$, $1 \le j \le k$, *имају лимес у тачки* a *и тада важи*

$$\lim_{t\to a} \mathbf{r}(t) = \big(\lim_{t\to a} x_1(t), \lim_{t\to a} x_2(t), \dots, \lim_{t\to a} x_k(t)\big).$$

Функција $t \mapsto \mathbf{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t))$ *је непрекидна ако и само ако су све функције* $t \mapsto x_j(t)$, $1 \le j \le k$, *непрекидне. У том случају, њен Кошијев интеграл је вектор*

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \left(\int_a^b x_1(t)\,dt, \int_a^b x_2(t)\,dt, \dots, \int_a^b x_k(t)\,dt\right).$$

Ова функција је диференцијабилна у унутрашњој тачки домена t_0 *ако и само ако су све функције* $t \mapsto x_j(t)$, $1 \le j \le k$, *диференцијабилне у тој тачки и тада важи*

$$\mathbf{r}'(t_0) = \big(x_1'(t_0), x_2'(t_0), \dots, x_k'(t_0)\big).$$

$\triangle$ За вектор $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_k) \in \mathbf{R}^k$ важе очигледне неједнакости

$$|v_j| \le \|\mathbf{v}\| \le \sqrt{k}\max\{|v_1|, |v_2|, \dots |v_k|\} \quad \text{за све} \quad j \in \{1, 2, \dots, k\},$$

из којих следи доказ тврђења за низове, а одатле и остала тврђења, будући да су она изведена из појма лимеса низа. $\triangledown$

3. Правила диференцирања

Нека је $I \subset \mathbf{R}$ интервал.

Ако је $\mathbf{r} : I \to \mathbf{R}^k$ диференцијабилна функција са вредностима у векторском простору и $f : I \to \mathbf{R}$ диференцијабилна скаларна функција, онда је $t \mapsto \mathbf{r}(f(t))$ диференцијабилна функција са вредностима у векторском простору и важи

$$\frac{d}{dt}\big(\mathbf{r}(f(t))\big) = f'(t)\mathbf{r}'(f(t)). \tag{11}$$

Ово правило следи из правила за извод сложене функције, примењеног на сваку координату посебно, и Леме 4.

Ако су функције $\mathbf{r}_1 : I \to \mathbf{R}^k$ и $\mathbf{r}_2 : I \to \mathbf{R}^k$ диференцијабилне, онда је такав и њихов збир и важи

$$\frac{d}{dt}\big(\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)\big) = \mathbf{r}_1'(t) + \mathbf{r}_2'(t). \tag{12}$$

Ако је функција $\mathbf{r} : I \to \mathbf{R}^k$ диференцијабилна и $c \in \mathbf{R}$ константа, онда је

$$\frac{d}{dt}\big(c\mathbf{r}(t)\big) = c\mathbf{r}'(t). \tag{13}$$

Ако је $\mathbf{r} : I \to \mathbf{R}^k$ диференцијабилна функција са вредностима у векторском простору и $f : I \to \mathbf{R}$ диференцијабилна реална функција, онда је

$$\frac{d}{dt}\big(f(t)\mathbf{r}(t)\big) = f'(t)\mathbf{r}(t) + f(t)\mathbf{r}'(t). \tag{14}$$

Ако су функције $\mathbf{r}_1 : I \to \mathbf{R}^k$ и $\mathbf{r}_2 : I \to \mathbf{R}^k$ диференцијабилне, онда је диференцијабилан и њихов скаларни производ $t \mapsto \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2$ и важи

$$\frac{d}{dt}\big(\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t)\big) = \mathbf{r}_1'(t) \cdot \mathbf{r}_2(t) + \mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2'(t). \tag{15}$$

Ако су функције $\mathbf{r}_1 : I \to \mathbf{R}^3$ и $\mathbf{r}_2 : I \to \mathbf{R}^3$ диференцијабилне, онда је диференцијабилан и њихов векторски производ $t \mapsto \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$ и важи

$$\frac{d}{dt}\big(\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t)\big) = \mathbf{r}_1'(t) \times \mathbf{r}_2(t) + \mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2'(t). \tag{16}$$

Ако је, уз то, и $\mathbf{r}_3 : I \to \mathbf{R}^3$ диференцијабилна функција, онда је диференцијабилан и мешовити производ $t \mapsto [\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t), \mathbf{r}_3(t)]$ и важи

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t), \mathbf{r}_3(t)] = [\mathbf{r}_1'(t), \mathbf{r}_2(t), \mathbf{r}_3(t)] + [\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2'(t), \mathbf{r}_3(t)] + [\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t), \mathbf{r}_3'(t)]. \tag{17}$$

Општије, ако су $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_k \to \mathbf{R}^k$ диференцијабилне функције, онда је су диференцијабилне и функције

$$t \mapsto \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2 \wedge \ldots \wedge \mathbf{r}_{k-1} \quad \text{и} \quad t \mapsto [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_k]$$

и важи

$$\begin{array}{c} \frac{d}{dt}\big(\mathbf{r}_1(t) \wedge \mathbf{r}_2(t) \wedge \ldots \wedge \mathbf{r}_{k-1}(t)\big) = \mathbf{r}_1'(t) \wedge \mathbf{r}_2(t) \wedge \ldots \wedge \mathbf{r}_{k-1}(t) \\ +\mathbf{r}_1(t) \wedge \mathbf{r}_2'(t) \wedge \ldots \wedge \mathbf{r}_{k-1}(t) + \cdots + \mathbf{r}_1(t) \wedge \mathbf{r}_2(t) \wedge \ldots \wedge \mathbf{r}_{k-1}'(t) \end{array} \tag{18}$$

и, слично за мешовити производ,

$$\begin{array}{c} \frac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t), \ldots, \mathbf{r}_k(t)] = [\mathbf{r}_1'(t), \mathbf{r}_2(t), \ldots, \mathbf{r}_k(t)] \\ +[\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2'(t), \ldots, \mathbf{r}_k(t)] + \cdots + [\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t), \ldots, \mathbf{r}_k'(t)]. \end{array} \tag{19}$$

Правила (12)– (19) могу да се изведу из записа одговарајућих операција у координатима и применом Леме 4 (што остављамо читаоцу за вежбу), али је корисно извести их имајући у виду и општији приступ, за који ће нам бити потребна следећа дефиниција.

Дефиниција 4. Пресликавање

$$L : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^m$$

је *линеарно* ако важи

$$L(a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) = aL(\mathbf{v}) + bL(\mathbf{w})$$

за све векторе $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{R}^k$ и све скаларе $a, b \in \mathbf{R}$. Пресликавање

$$L : \big(\mathbf{R}^{k_1}\big) \times \big(\mathbf{R}^{k_2}\big) \to \mathbf{R}^m$$

је *билинеарно* ако је линеарно по свакој компоненти, тј. ако су за све $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^{k_1}$ и $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^{k_2}$ пресликавања

$$\mathbf{x} \to L(\mathbf{x}, \mathbf{b}) \quad \text{и} \quad \mathbf{y} \to L(\mathbf{a}, \mathbf{y})$$

линеарна пресликавања. Општије, пресликавање

$$L : \big(\mathbf{R}^{k_1}\big) \times \big(\mathbf{R}^{k_2}\big) \times \cdots \times \big(\mathbf{R}^{k_n}\big) \to \mathbf{R}^m$$

је *вишелинеарно* или *n–линеарно* ако је линеарно по свакој компоненти. Специјално, линеарна пресликавања су 1–линеарна, билинеарна 2–линеарна.

Пример 7. Ако је $c \in \mathbf{R}$ фиксирана константа, са $\mathbf{v} \mapsto c\mathbf{v}$ је дефинисано линеарно пресликавање $\mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^k$. Пресликавање

$$L : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^k, \qquad L(x, \mathbf{v}) = x\mathbf{v}$$

је билинеарно. Скаларни производ је билинеарно пресликавање

$$\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^k \ \ni \ (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \ \in \ \mathbf{R},$$

а векторски производ је билинеарно пресликавање

$$\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \ \ni \ (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \mathbf{v} \times \mathbf{w} \ \in \ \mathbf{R}^3.$$

Општије, клинасти производ је $(k-1)$–линеарно пресликавање

$$\underbrace{\mathbf{R}^k \times \cdots \times \mathbf{R}^k}_{k-1} \to \mathbf{R}^k,$$

а мешовити производ је k–линеарно пресликавање

$$\underbrace{\mathbf{R}^k \times \cdots \times \mathbf{R}^k}_{k} \to \mathbf{R}.$$

♯

Пример 8. Нека је

$$L : \mathbf{R}^{k_1} \times \mathbf{R}^{k_2} \to \mathbf{R}^m$$

билинеарно пресликавање и $\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1 \in \mathbf{R}^{k_1}$, $\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_2 \in \mathbf{R}^{k_2}$. Тада је, за $h \in \mathbf{R}$

$$L(\mathbf{v}_1 + h\mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2 + h\mathbf{w}_2) = L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) + h(L(\mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2) + L(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2)) + h^2 L(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2).$$

Општије, за n–линеарно пресликавање L са кодоменом у $\mathbf{R}^m$ израз $L(\mathbf{v}_1 + h\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{v}_n + h\mathbf{w}_n)$ је полином n–тог степена по h са коефицијентима у $\mathbf{R}^m$. ♯

Задатак 6. Нека је

$$L : \mathbf{R}^{k_1} \times \mathbf{R}^{k_2} \times \mathbf{R}^{k_3} \to \mathbf{R}^m$$

3–линеарно пресликавање, и нека су $\mathbf{v}_j, \mathbf{w}_j \in \mathbf{R}^{k_j}$ фиксирани вектори. Да ли постоји лимес

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(L(\mathbf{v}_1 + h\mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2 + h\mathbf{w}_2, \mathbf{v}_3 + h\mathbf{w}_3) - L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3))?$$

✓

Теорема 1. *Нека је I интервал у $\mathbf{R}$ и нека је*

$$L : \left(\mathbf{R}^{k_1}\right) \times \left(\mathbf{R}^{k_2}\right) \times \cdots \times \left(\mathbf{R}^{k_n}\right) \to \mathbf{R}^m$$

n–линеарно пресликавање. Ако су функције

$$\mathbf{r}_j : I \to \mathbf{R}^{k_j}$$

диференцијабилне, и важи

$$\frac{d}{dt} L(\mathbf{r}_1(t), \ldots, \mathbf{r}_n(t)) = \sum_{j=1}^{n} L(\mathbf{r}_1(t), \ldots, \mathbf{r}_j'(t), \ldots, \mathbf{r}_n(t))$$

△ По дефиницији првог извода је

$$\frac{d}{dt}L(\mathbf{r}_1(t),\dots,\mathbf{r}_n(t)) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Delta L(h),$$

где је

$$\Delta L(h) := \big(L(\mathbf{r}_1(t+h),\dots,\mathbf{r}_n(t+h)) - L(\mathbf{r}_1(t),\dots,\mathbf{r}_n(t))\big).$$

Пошто су све функције $\mathbf{r}_j$ диференцијабилне, важи

$$\mathbf{r}_j(t+h) - \mathbf{r}_j(t) = \mathbf{r}_j'(t)h + o(h), \quad \text{кад} \quad h\to 0.$$

Ако ове изразе уврстимо у $L(\mathbf{r}_1(t+h),\dots,\mathbf{r}_n(t+h))$, применом n–линеарности пресликавања L и Примера 8 закључујемо да је

$$\Delta L(h) = h\sum_{j=1}^{n} L(\mathbf{r}_1(t),\dots,\mathbf{r}_j',\dots,\mathbf{r}_n(t)) + h^2R,$$

где су са R означени сви сабирци у којима се h појављује више од једном. Дељењем са h и лимесом кад $h\to 0$ добијамо тражени резултат (упоредити са Задатком 6). ▽

Задатак 7. Доказати (12)– (19), уз помоћ Примера 7 и Теореме 1. ✓

Задатак 8. Нека су $f, g : I \to \mathbf{C}$ диференцијабилне функције. Извести Лајбницово правило за извод прозивода

$$(fg)'(t) = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$$

применом Теореме 1 на билинеарно пресликавање

$$L : \mathbf{C}\times\mathbf{C}\to\mathbf{C}, \quad L(\zeta,\eta) = \zeta\eta.$$

Општије, извести формулу за извод $(f_1f_2\cdots f_n)'$ производа n функција. ✓

Задатак 9. Урадити Задатак 22 (а) на стр. 145 применом Теореме 1. ✓

4. Брзина и убрзање

Схватимо $\mathbf{R}$ као временску осу и интервал I као временски интервал у коме проучавамо кретање материјалне тачке[8]. Нека двапут диференцијабилна функција

$$\mathbf{r} : I\to\mathbf{R}^3, \quad t\mapsto \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \tag{20}$$

описује положај те тачке у тренутку $t\in I$. Тада се вектори

$$\mathbf{v} = \mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k} \quad \text{и} \quad \mathbf{a} = \mathbf{v}'(t) = x''(t)\mathbf{i} + y''(t)\mathbf{j} + z''(t)\mathbf{k}$$

називају *вектором брзине* и *вектором убрзања*. Дужине ових вектора $v = \|\mathbf{v}\|$ и $a = \|\mathbf{a}\|$ зовемо *скаларном брзином* и *скаларним убрзањем* или, кад не постоји могућност забуне, само *брзином* и *убрзањем*. Некад, међутим, кад је из контекста јасно о чему се ради, термин *брзина* се користи и за вектор брзине[9]

Напомена 2. За извод неке физичке величине по времену (или математичке по параметру t) често се користи и тачка изнад слова којим је означена та величина. Тако се користе ознаке $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$, $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$, $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}$. ◇

---

[8]Појам *материјална тачка* је апстрактна идеализација која означава тело које нема димензије, већ само положај и масу. Користи за описивање проблема кретања у којима нам је довољно да опишемо кретање центра масе тела, тј. у којима можемо да занемаримо обртање тела око сопствених оса у току кретања.

[9]У литератури на енглеском, velocity означава вектор $\mathbf{v}$, а speed његов интензитет v.

Ако се кретање одвија под утицајем *векорског поља силе*[10] $\mathbf{F}$, оно је описано *Другим Њутновим законом*

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}, \quad \text{односно} \quad \mathbf{r}''(t) = \frac{1}{m}\mathbf{F}. \tag{21}$$

За задато, тј. познато, $\mathbf{F}$ ово је диференцијална једначина другог реда по непознатој $\mathbf{r}$. Њено решење описује кретање материјалне тачке.

Уколико се кретање одвија по једној правој или у једној равни, логично је поједноставти (20) и посматрати $\mathbf{r}$ као функцију са вредностима у $\mathbf{R}$ или $\mathbf{R}^2$. Ако посматрамо кретање две материјалне тачке у тродимензионом простору, њихово кретање је описано пресликавањем

$$\mathbf{r} : I \to \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \cong \mathbf{R}^6.$$

Зато је правилно Други Њутнов закон (21) у општем случају посматрати као диференцијалну једначину по непознатој функцији

$$\mathbf{r} : I \to \mathbf{R}^k$$

са вредностима у k–димензионом простору.

Пример 9. Тангента на криву. Вектор брзине $\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{r}'(t_0)$ је тангентан на криву $\mathbf{r}(I) \subset \mathbf{R}^k$ у тачки $r(t_0)$. Параметарска једначина тангентне праве на криву $\mathbf{r}(I)$ у тачки $\mathbf{r}(t_0)$ је $t \mapsto \mathbf{r}(t_0) + t\mathbf{v}(t_0)$. ♯

Задатак 10. Нека је γ крива у $\mathbf{R}^3$ по којој се секу два цилиндра

$$x^2 + y^2 = 5 \quad \text{и} \quad y^2 + z^2 = 8.$$

Наћи једначину праве L која је тангентна на γ у тачки $P(1, 2, -2)$ и једначину равни кроз P која је нормална на L. ✓

Пример 10. Кретање у одсуству силе – Први Њутнов закон. Ако је $\mathbf{F} = \mathbf{O}$, Други Њутнов закон (21) гласи

$$\mathbf{r}''(t) = \mathbf{O}, \quad \text{тј.} \quad \mathbf{v}'(t) = \mathbf{O}.$$

Одатле следи (Применом Последице 4 на стр. 143 на сваку координату посебно) $\mathbf{v} = \mathbf{c}_1$, где је $\mathbf{c}_1$ константан вектор. Другим речима, важи

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{c}_1,$$

одакле следи да је путања тела описана једначином праве

$$\mathbf{r} = t\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2,$$

Видимо да се тело на које не делује никаква сила креће равномерно (константном брзином) и праволинијски. То је садржај Првог Њутновог закона. ♯

Пример 11. Кретање са константним убрзањем. Ако $\mathbf{a}$ не зависи од t, решавањем једначине

$$\mathbf{v}'(t) = \mathbf{a}$$

добијамо

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + t\mathbf{a}, \tag{22}$$

---

[10] Формално говорећи, *векторско поље* на скупу D је пресликавање $\mathbf{F} : D \to \mathbf{R}^k$ скупа D у k–димензиони векторски простор $\mathbf{R}^k$; замишљамо га као скуп стрелица постављених у свакој тачки скупа D. У нашем случају је $k = 3$, а $D \subset \mathbf{R}^3$ подскуп еуклидског простора у коме се кретање одвија.

где је $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(0)$, односно

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{v}_0 + t\mathbf{a}.$$

Решавањем ове једначине добијамо

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}_0 + \frac{t^2}{2}\mathbf{a}, \tag{23}$$

где је $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(0)$ почетни положај тела. Ако је, при томе, вектор $\mathbf{v}_0$ почетне брзине колинеаран са $\mathbf{a}$, из (22) следи да је вектор $\mathbf{v}(t)$ колинеаран са $\mathbf{a}$ за свако t, па из (23) добијамо израз за пређени пут $s(t) := \|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0\|$

$$s(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2},$$

где је $v_0 = \|\mathbf{v}_0\|$ и $a = \|\mathbf{a}\|$. ♯

Пример 12. **Коси хитац.** Претпоставимо да је из координатног почетка лансиран пројектил под углом θ_0 у односу на хоризонталну раван и са почетном брзином $\mathbf{v}_0$. Ако игноришемо ветар који дува и сл, можемо да претпоставимо да се кретање одвија у једној равни; изаберимо је тако да x–оса буде хоризонтална, а y–оса вертикална. На пројектил дејствује сила гравитације, усмерена вертикално наниже:

$$\mathbf{F} = -mg\mathbf{j}, \quad \text{где је} \quad g = 9,80665m/s^2.$$

Одатле, и из Другог Њутновог закона, закључујемо да је кретање пројектила описано диференцијалном једначином

$$\mathbf{r}''(t) = -g\mathbf{j}.$$

Из ње следи да је

$$\mathbf{r}'(t) = -gt\mathbf{j} + \mathbf{v}_0,$$

а одатле

$$\mathbf{r}(t) = -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + t\mathbf{v}_0 + \mathbf{r}_0,$$

где су $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(0)$ и $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(0)$ почетни положај и почетна брзина. По претпоставци је

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{O} \quad \text{и} \quad \mathbf{v}_0 = v_0\cos\theta_0\mathbf{i} + v_0\sin\theta_0\mathbf{j},$$

где је $v_0 = \|\mathbf{v}_0\|$. Одатле добијамо једначину кретања у координатама

$$x(t) = v_0\cos\theta_0 t, \qquad y(t) = v_0 t\sin\theta_0 - \frac{1}{2}gt^2.$$

Специјално, за $\theta_0 = 0$ и $\theta_0 = \pi/2$ добијамо једначине кретања за хоризонтални и вертикални хитац. ♯

Задатак 11. Лопта је бачена вертикално у вис почетном брзином $10m/s$. Одредити максималну висину коју она достиже, тренутак у коме је достиже и тренутак у коме ће да падне на земљу. ✓

Задатак 12. Лопта је бачена са светионика високог $15m$, у вис под углом $\pi/4$ у односу на хоризонталну раван, почетном брзином $10m/s$.

(а) Израчунати хоризонталну у вертикалну компоненту брзине лопте после две секунде.

(б) Када ће лопта да падне у море?

(в) Колико далеко од подножја светионика ће лопта да падне у море?

(г) Коју највећу висину изнад површине мора ће лопта да достигне?

(д) Када лопта достиже највећу висину изнад површине мора?

(ђ) У ком тренутку и на ком растојању од подножја светионика се лопта креће најбрже?

(е) Колика је брзина лопте у тренутку кад падне у море? ✓

Пример 13. Просте хармонијске осцилације. Посматрајмо тег масе m који је причвршћен за опругу, тако да осцилује без трења у хоризонталној равни. Према *Хуковом*[11] *закону*, сила која на делује на тег је

$$F = -kx$$

где је x растојање тега од равнотежног положаја, а k константа еластичности опруге (пошто се кретање одвија по правој, силу F можемо да третирамо као скалар). Из Другог Њутновог закона следи да је кретање тега описано једначином

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x. \tag{24}$$

Лако је проверити да

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t), \quad \text{где је} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

задовољава (24). Решење $x(t)$ може да се напише и у облику

$$x(t) = A\cos(\omega t - \varphi), \quad \text{где је} \quad A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad \varphi = \arctan(c_2/c_1).$$

Број A се назива *амплитудом*, ω *угаоном фреквенцијом*, φ *фазом*, а $T = 2\pi/\omega$ *периодом* осцилација. ♯

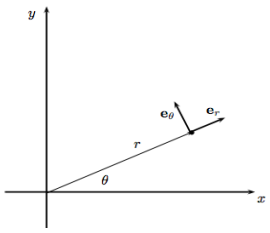
Задатак 13. У ком положају тег из Примера 13 има највећу брзину, а у ком највеће убрзање? ✓

5. Покретни координатни системи

Видели смо како кретање путника (кога смо звали материјалном тачком) може да се схвати као крива у фиксираном координатном систему. Некад је, међутим, корисно да путник има свој координатни систем, који носи са собом и помоћу њега описује свет у околини тачке у којој се нашао. Даћемо неколико таквих примера.

Пример 14. Поларни координатни систем у равни. Посматрајмо, у тачки са поларним координатама (r, θ), векторе

$$\mathbf{e}_r = \cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j} \quad \text{и} \quad \mathbf{e}_\theta = -\sin\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}.$$



[11] Хук (Robert Hooke, 1635–1703), енглески физичар

Приметимо да је вектор $\mathbf{e}_r$ у тачки P колинеаран вектору положаја $\overrightarrow{OP}$ тачке P. Очигледно је да су ови вектори ортогонални, тј. да је $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\theta = 0$, и јединични, ($\|\mathbf{e}_r\| = \|\mathbf{e}_\theta\| = 1$). Они у свакој тачки равни формирају ортогонални координатни систем, који се назива *поларним координатним системом.* ♯

Задатак 14. Доказати да се брзина и убрзање тела које се креће по трајекторији $\mathbf{r}(t)$ у поларном координатном систему изражавају (уз ознаке из Напомене 2) у форми

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \qquad \mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta,$$

где је $r = \|\mathbf{r}\|$.

Упутство: Приметити да је $\mathbf{r}(t) = r(t)\mathbf{e}_r = r(t)(\cos\theta(t)\mathbf{i} + \sin\theta(t)\mathbf{j})$ и диференцирати. ✓

Задатак 15. Нека је кретање материјалне тачке описано са

$$\mathbf{r}(t) = (t+1)\mathbf{i} + (t-1)\mathbf{j}.$$

Изразити вектор брзине $\mathbf{v}$ преко $\mathbf{e}_r$ и $\mathbf{e}_\theta$. ✓

Пример 15. **Цилиндрички координатни систем у простору.** Вектори

$$\mathbf{e}_r = \cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j}, \qquad \mathbf{e}_\theta = -\sin\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}, \qquad \mathbf{k}.$$

формирају ортогонални координатни систем у простору, који се назива *цилиндричким координатним системом.* ♯

Задатак 16. Извести формуле за брзину и убрзање у цилиндричком координатном систему, по аналогији са Задатком 14. ✓

Пример 16. **Сферни координатни систем у простору.** Приметимо да је тачка у тродимензионом простору једнозначно одређена тројком (ρ, ϕ, θ), где је ρ растојање тачке од координатног почетка, ϕ угао између вектора положаја тачке и позитивног дела z–осе и θ угао између пројекције вектора положаја тачке на $0xy$–раван и позитивног дела x–осе (тј. θ је поларна координата пројекције тачке на $0xy$–раван). Вектори

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_\rho &= \sin\phi\cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\phi\sin\theta\,\mathbf{j} + \cos\phi\mathbf{k}\\ \mathbf{e}_\phi &= \cos\phi\cos\theta\,\mathbf{i} + \cos\phi\sin\theta\,\mathbf{j} - \sin\phi\,\mathbf{k}\\ \mathbf{e}_\theta &= -\sin\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}\end{aligned}$$

формирају ортогонални координатни систем у простору, који се назива *сферним координатним системом.* ♯

Задатак 17. Доказати да је $\mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_\phi$, $\mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_\phi = \mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\phi \times \mathbf{e}_\rho = \mathbf{e}_\theta$. ✓

Задатак 18. Извести формуле за брзину и убрзање у сферном координатном систему, по аналогији са Задатком 14. ✓

Пример 17. **Френе**[12] **– Сереов**[13] **координатни систем.** Нека је

$$\mathbf{r} : I \to \mathbf{R}^3$$

[12]Френе (Jean Frédéric Frenet, 1816–1900), француски математичар и астроном
[13]Сере (Joseph Alfred Serret, 1818–1885), француски математичар

глатко пресликавање дефинисано на интервалу $I = [a, b] \subset \mathbf{R}$. У Глави 6 смо видели да је дужина криве $\mathbf{r}(I)$

$$L = \int_a^b \|\mathbf{v}(t)\|\, dt,$$

где је $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$. Ако је за свако t вектор $\mathbf{v}(t)$ различит од нуле, кажемо да је крива *регуларна*. У том случају је

$$t \mapsto \int_a^t \|\mathbf{v}(u)\|\, du$$

дифеоморфизам интервала $[a, b]$ на $[0, L]$, јер је (због регуларности) његов први извод $\|\mathbf{v}\| > 0$ (извод интеграла по горњој граници). Овај дифеоморфизам дефинише репараметризацију криве параметром

$$s = \int_a^t \|\mathbf{v}(u)\|\, du$$

који се назива *природним параметром* регуларне криве. Из $ds/dt = \|d\mathbf{r}/dt\|$ следи да је

$$\mathbf{T}(s) := \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{ds}$$

јединични вектор за свако $s \in [0, L]$, зовемо га *јединичним тангентним вектором* на криву $\mathbf{r}(I)$. Величина

$$\kappa = \left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds}(s_0) \right\|$$

назива се *кривином криве* $\mathbf{r}(I)$ у тачки $\mathbf{r}(s_0)$. Ако је $\mathbf{T}$ дато као функција произвољног параметра t, тј.

$$\mathbf{T}(t) = \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\|^{-1} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \|\mathbf{v}\|^{-1}\mathbf{v},$$

онда је

$$\kappa(t_0) = \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t_0) \right\|^{-1} \left\| \frac{d\mathbf{T}}{dt}(t_0) \right\|.$$

Реципрочна величина $1/\kappa(t_0)$ назива се *полупречником кривине*.

Диференцирањем израза $\|\mathbf{T}(s)\|^2 = \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = 1$ по природном параметру s и применом Лајбницовог правила добијамо

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} \cdot \mathbf{T} = 0,$$

што значи да је вектор $d\mathbf{T}/ds$ ортогоналан на T. Из дефиниције кривине следи да је

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\kappa}\frac{d\mathbf{T}}{ds}$$

јединични вектор, зовемо га *јединичним нормалним вектором* криве $\mathbf{r}(I)$.

Раван разапета векторима $\mathbf{T}$ и $\mathbf{N}$ назива се *оскулаторном равни* криве $\mathbf{r}(I)$.

Векторски производ јединичних вектора је јединични вектор нормалан на њих; вектор

$$\mathbf{B} := \mathbf{T} \times \mathbf{N}$$

називамо *јединичним бинормалним вектором* криве $\mathbf{r}(I)$; $\mathbf{B}$ је вектор оскулаторне равни те криве. Вектори $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{B}$ дефинишу у свакој тачки криве

ортогонални координатни систем; овај систем се назива *Френе – Сереовим системом*. Диференцирањем последњег израза, којим је дефинисан вектор $\mathbf{B}$, по природном параметру s добијамо (применом Лајбницовог правила на билинеарно множење $\times$)

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} \times \mathbf{N} + \mathbf{T} \times \frac{d\mathbf{N}}{ds} = \mathbf{T} \times \frac{d\mathbf{N}}{ds},$$

јер је $\mathbf{N} \times \mathbf{N} = 0$. Одатле следи да је вектор $d\mathbf{B}/ds$ ортогоналан на $\mathbf{T}$. Диференцирањем израза $\|\mathbf{B}\|^2 = 1$ закључујемо да је он ортогоналан и на $\mathbf{B}$, па је пропорционалан вектору $\mathbf{N}$:

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau \mathbf{N}.$$

Коефицијент τ у претходној формули називамо *торзијом* криве $\mathbf{r}(I)$. ♯

Задатак 19. Доказати да се кривина κ криве $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ изражава, у терминима брзине $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ и убрзања $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$ као

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|^3}$$

Закључити да кривина криве мери колико крива одступа од праве (крива је права ако и само ако је $\kappa = 0$). Доказати да торзија мери одступање криве од равни (крива лежи у једној равни ако и само ако је $\tau = 0$). ✓

Задатак 20. Наћи једначину нормалне и оскулаторне равни криве

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$$

у тачки $(1, 1, 1)$. ✓

Задатак 21. Доказати да убрзање $\mathbf{a}$ може да се изрази у Френе – Сереовом координатном систему $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$ као

$$\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N},$$

где је

$$a_T = \frac{d}{dt}\|\mathbf{v}\|, \quad a_N = \kappa\|\mathbf{v}\|^2.$$

Извести одатле следеће закључке:

(а) Вектор убрзања увек лежи у равни $(\mathbf{T}, \mathbf{N})$ и не садржи информацију о томе колико кретање одступа од те равни.

(б) Тангентна промена убрзања мери промену интензитета брзине.

(в) Нормална компонента убрзања мери промену правца кретања.

(г) Теже је остати у седишту мотоцикла у оштријој кривини (са већим κ) и при већој брзини $v = \|\mathbf{v}\|$, јер те величине одређују интензитет центрипеталне силе $\mathbf{F}_N = m\mathbf{a}_N$. ✓

Задатак 22. (а) Нека се материјална тачка креће под дејством силе $\mathbf{F}$ константном скаларном брзином ($v = \|\mathbf{v}\| = const$). Доказати да је вектор силе $\mathbf{F}$ у свакој тачки колинеаран вектору нормале $\mathbf{N}$ на трајекторију те материјалне тачке.

(б) Нека се материјална тачка креће под дејством силе која је у свакој тачки нормална на њену трајекторију. Доказати да је скаларна брзина ове материјалне тачке константна ($v = \|\mathbf{v}\| = const$). ✓

6. Вежбе

(1) Кретање материјалне тачке је дато, у поларним координатама, са

$$r = e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}, \qquad \theta = t.$$

Наћи вектор убрзања у моменту $t = 0$.

(2) Крива, задата у $\mathbf{R}^3$ двема једначинама

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4, \qquad (x-1)^2 + y^2 = 1.$$

(тј. као пресек сфере и цилиндра) се назива *Вивијанијевом*[14] *кривом*.

(а) Скицирати ову криву у $0xyz$ – координатном систему.

(б) Скицирати пројекције ове криве на све три координатне равни.

(в) Доказати да је

$$\mathbf{r}(t) = (1+\cos t)\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + 2\sin(t/2)\mathbf{k}$$

параметарска једначина Вивијанијеве криве.

(г) Изразити дужину Вивијанијеве криве преко елиптичких интеграла (стр. 256).

(д) Доказати да су кривина и торзија Вивијанијеве криве једнаке

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{13+3\cos t}}{(3+\cos t)^{3/2}}, \qquad \tau(t) = \frac{6\cos(t/2)}{13+3\cos t}.$$

(3) Материјална тачка се креће по елипси

$$r = \frac{x}{1 - e\cos\theta}$$

под дејством поља силе $\mathbf{F}$ које је у свакој тачки усмерено ка координатном почетку. Доказати да је интензитет силе $F = \|\mathbf{F}\|$ пропорционалан величини $1/r^2$.

(4) Кретање материјалне тачке је описано са

$$\mathbf{r} = 4\cos t\mathbf{i} + 4\sin t\mathbf{j} + 4\cos t\mathbf{k}.$$

(а) Израчунати вектор брзине и убрзања.

(б) Израчунати кривину ове путање.

(в) Доказати да се кретање одвија у једној равни и наћи једначину те равни у Декартовим координатама.

(г) Доказати да је путања елипса.

(5) Лопта $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 \leq 99$ ротира око праве која садржи тачке $(0,0,0)$ и $(1,1,1)$ константном угаоном брзином $6\,\mathrm{rad}/s$. Описати трајекторију центра $(1,2,3)$ лопте и наћи њен вектор брзине.

(6) Наћи кривину криве

$$x = \frac{y^4}{4} + \frac{1}{8y^2}.$$

(7) У којим тачкама елипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

(односно $x = a\cos t$, $y = b\sin t$) има највећу, а у којим најмању кривину?

[14] Вивијани (Vincenzo Viviani, 1622–1703), италијански математичар

(8) (а) Скицирати криву $x = \rho^2 \cos t$, $y = \rho^2 \sin t$, $z = ct$ у $\mathbf{R}^3$. Оваква крива назива се *навојницом*. Доказати да она има константну кривину. Ако је c фиксирано, за које ρ се достиже највећа вредност кривине (тј. око ког цилиндра се навојница задатог вертикалног нагиба највише закривљује)? Доказати да је торзија навојнице $\tau = c/(\rho^2+c^2)$. Која је највећа вредност торзије навојнице, ако је ρ фиксирано, а c се мења? Каква је геометријска интерпретација овог резултата?

(б) Нека је L_1 тангента на навојницу $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$ у тачки $(1, 0, 0)$, а L_2 тангента у тачки $(0, 1, \pi/2)$. Доказати да су L_1 и L_2 мимоилазне праве. Наћи растојање између L_1 и L_2 и једначину (јединствене) праве L која је ортогонална на L_1 и L_2. Наћи једначину (јединствене) праве која садржи тачку $(0, 0, 1/2)$ и сече праве L_1 и L_2.

(9) Дата је крива у комплексној равни, параматризацијом

$$z(t) = \int_0^t e^{i\frac{\pi}{2}u^2}\, du.$$

Наћи њену кривину κ као функцију дужине лука s, мерене од координатног почетка $(0, 0)$.

(10) Две лопте истовремено су бачене хоризонтално са торња висине 15 m. Прва је имала почетну брзину 10 m/s а друга 15 m/s.

(а) После колико времена је свака од ове две лопте пала на земљу?

(б) Колико далеко од подножја торња је свака од ове две лопте пала на земљу?

ДОДАТАК 1

Тополошке основе анализе

Централни појмови у претходним поглављима су појмови непрекидности и граничне вредности реалних и комплексних функција и конвергенције реалних и комплексних низова. Ови појмови су дефинисани на стр. 104, 117 и 167 помоћу појма растојања између тачака реалне праве или комплексне равни, дефинисаног са

$$d(a,b) = |b-a|, \qquad \text{за} \quad a,b \in \mathbf{R} \quad \text{или} \quad \mathbf{C},$$

или, општије, помоћу појма околина тачке. Сада ћемо те појмове разматрати у општијим структурама.

1. Конвергенција по филтерима

Дефиниција 1. *Филтером на скупу* X назива се непразна фамилија $\mathcal{F}$ подскупова скупа X која има следећа својства:

Ф0: $\emptyset \notin \mathcal{F}$
Ф1: $B \in \mathcal{F} \wedge B \subset A \Rightarrow A \in \mathcal{F}$
Ф2: $A_1, A_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F}$.

Задатак 1. Доказати да су својства Ф1 и Ф2 еквивалентна са $A_1, A_2 \in \mathcal{F} \Leftrightarrow A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F}$. ✓

Задатак 2. Нека је $\mathcal{F}$ филтер на скупу X. Доказати: $X \in \mathcal{F}$. ✓

Дефиниција 2. Непразна фамилија $\mathcal{B}$ подскупова скупа X назива се *базом филтера* ако

Б0: $\emptyset \notin \mathcal{B}$
Б1: $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow (\exists B \in \mathcal{B})\, B \subset B_1 \cap B_2$.

Ако је $\mathcal{B}$ база филтера на скупу X, за минимални (у односу на релацију поретка $\subset$) филтер $\mathcal{F}$ који садржи све скупове из базе $\mathcal{B}$ кажемо да је *генерисан базом* $\mathcal{B}$. За базу $\mathcal{B}$ тада кажемо да је *база филтера* $\mathcal{F}$.

Дефиниција 3. Нека је $\mathcal{B}$ база филтера на скупу X и $f : X \to \mathbf{C}$ функција на X. Тачка $\eta \in \mathbf{C}$ назива се *лимесом функције* f *по бази* $\mathcal{B}$ и означава

$$\eta = \lim_{\mathcal{B}} f$$

ако за сваку околину U_η тачке η постоји елеменат $B \in \mathcal{B}$ базе такав да је $f(B) \subset U_\eta$.

Задатак 3. Нека је $\mathcal{F}$ филтер на скупу X. Тачка $\eta \in \mathbf{C}$ назива се *лимесом функције* $f : X \to \mathbf{C}$ *по филтеру* $\mathcal{F}$ и означава

$$\eta = \lim_{\mathcal{F}} f$$

ако је за сваку околину U_η тачке η

$$\{x \in X \mid f(x) \in U_\eta\} \in \mathcal{F},$$

или, другим речима, ако за свако $\varepsilon > 0$ важи

$$\{x \in X \mid |f(x) - \zeta| < \varepsilon\} \in \mathcal{F}.$$

Ако је филтер $\mathcal{F}$ генерисан базом $\mathcal{B}$, доказати да η лимес по бази $\mathcal{B}$, у смислу Дефиниције 3. ✓

Задатак 4. Доказати јединственост лимеса по филтеру. ✓

Пример 1. **(База пробушених околина тачке ζ)** Нека је $X \subset \mathbf{C}$, $\zeta \in X$ и нека је $\mathcal{B}$ фамилија скупова облика

$$B_\varepsilon := \{z \in \mathcal{X} \mid 0 < |z - \zeta| < \varepsilon\}$$

за све $\varepsilon > 0$. Тада је

$$\lim_{\mathcal{B}} f = \lim_{z \to \zeta} f(z),$$

где је лимес на десној страни стандардни лимес функције. ♯

Задатак 5. **(База околина тачке $+\infty$)** Нека је $X \subset \mathbf{R}$ и нека је $\mathcal{B}$ фамилија скупова облика

$$B_R := \{x \in \mathcal{X} \mid |x| > R\}$$

за све $R > 0$. Доказати да је

$$\lim_{\mathcal{B}} f = \lim_{x \to +\infty} f(x),$$

где је лимес на десној страни обичан лимес реалне функције у $+\infty$. ✓

Задатак 6. **(База околина тачке ζ)** Нека је $X \subset \mathbf{C}$ и нека је $\mathcal{B}$ фамилија скупова облика

$$B_\varepsilon := \{z \in X \mid |z - \zeta| < \varepsilon\}$$

за све $\varepsilon > 0$. Доказати да $\lim_{\mathcal{B}} f$ постоји ако и само ако је функција f непрекидна у тачки ζ. ✓

Задатак 7. **(Фрешеов филтер)**[1] Нека је $X = \mathbf{N}$ и нека је $\mathcal{B}$ фамилија скупова облика

$$B_n := \{k \in \mathbf{N} \mid k > n\}$$

за све $n \in \mathbf{N}$. Доказати да је, за низ $z : \mathbf{N} \to \mathbf{C}$

$$\lim_{\mathcal{B}} z = \lim_{n \to \infty} z_n,$$

где је лимес на десној страни стандардни лимес низа. База Фрешеовог филтера генерише *Фрешеов филтер* на $\mathbf{N}$ који се састоји од подскупова $A \subset \mathbf{N}$ таквих да је $\mathbf{N} \setminus A$ коначан скуп. ✓

Задатак 8. **(Риманов интеграл као лимес у простору подела)** У Параграфу 5.2 на 294. страни увели смо појам поделе интервала $[a, b]$ са истакнутим тачкама, и њему придружене појмове параметра поделе $\lambda(P)$ и интегралне суме $\sigma(f, P, \xi)$. Нека је $\mathcal{P}$ скуп свих подела интервала $[a, b]$ са истакнутим тачкама и нека је $\mathcal{B}$ фамилија скупова

$$B_d := \{P \in \mathcal{P} \mid \lambda(P) < d\}.$$

[1] Фреше (M. Fréchet, 1878–1973), француски математичар

Функција $f : [a,b] \to \mathbf{C}$ је интеграбилна по Риману ако и само ако постоји лимес функције $P \mapsto \sigma(f,P,\xi)$ по бази $\mathcal{B}$ и тада је

$$\lim_{\mathcal{B}} \sigma(f,P,\xi) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

✓

Задатак 9. Описати филтере генерисане базама филтера из претходних задатака. ✓

2. Непрекидност и гранична вредност у метричким просторима

2.1. Дефиниције и примери. *Метрика* или *растојање* на скупу M је пресликавање $d : M \times M \to \mathbf{R}$ за које важи

(M1) $d(x,y) \geq 0$
(M2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (недегенерисаност)
(M3) $d(x,y) = d(y,x)$ (симетричност)
(M4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (неједнакост троугла).

Непразан скуп M на коме је дефинисана метрика називамо *метричким простором*. Понекад метричким простором називамо и уређени пар (M,d).

Дегенерисану метрику, тј. пресликавање d које задовољава (M1), (M3) и (M4) називамо *псеудометриком*.

Нека је M метрички простор са метриком d и $M_0 \subset M$. Очигледно је да рестрикција метрике d на сукп $M_0 \times M_0$ дефинише метрику на скупу M_0. Скуп M_0 са овом метриком називамо *потпростором* метричког простора M.

Пример 2. Скуп $\mathbf{R}$ са растојањем $d(x,y) = |x-y|$ је метрички простор (в. Дефиницију 20 на стр. 50 и дискусију после ње). ♯

Пример 3. Скуп $\mathbf{C}$ са растојањем $d(z,w) = |z-w|$ је метрички простор (в. Дефиницију 31 на стр. 72 и дискусију после ње). ♯

Напомена 1. Убудуће ћемо, кад год говоримо о реалној правој или комплексној равни као о метричком простору, подразумевати да се ради о метричким просторима са стандардним метрикама из Примера 2 и 3, сем ако експлицитно не напоменемо другачије. Следећи задатак даје једну нестандардну метрику на реалној правој.

Задатак 10. Доказати да је са $d(x,y) = \arctan|y-x|$ дефинисана метрика на $\mathbf{R}$.

Упутство: диференцирањем доказати да је функција $f(t) = \arctan(t+s) - \arctan t - \arctan s$ опадајућа; затим из $f(0) = 0$ извести неједнакост троугла. ✓

Задатак 11. Доказати да су аксиоме метрике независне (тј. да ни једна од њих не следи из осталих).

Упутство: посматрати пресликавања $d_1, d_2, d_3 : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$d_1(x,y) = |x^2 - y^2|, \quad d_2(x,y) = 2|y-x| + y - x, \quad d_3(x,y) = (y-x)^2.$$

✓

Пример 4. (Еуклидски простори) Уопштимо претходна два примера. На скупу

$$\mathbf{R}^k = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k) \mid x_j \in \mathbf{R} \text{ за } 1 \leq j \leq k\}$$

дефинисане су операције сабирања и множења скаларом на следећи начин. Нека је $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_k)$ и $\lambda \in \mathbf{R}$. Тада је

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_k + y_k), \quad \lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_k).$$

Тиме је скуп $\mathbf{R}^k$ снабдевен структуром векторског простора. Напоменимо да је неутрал за сабирање вектор $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$. Дефинишимо *скаларни производ* вектора $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ и *норму* вектора $\mathbf{x}$ са

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{j=1}^{k} x_j \cdot y_j \qquad \text{и} \qquad \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \Big(\sum_{j=1}^{k} x_j^2 \Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{1}$$

Норма вектора има следећа својства:

(H1) $\|\mathbf{x}\| \geq 0$
(H2) $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$
(H3) $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|$ за скалар λ
(H4) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$

Заиста, прва три својства су очигледна. Из Шварцове неједнакости (Теорема 25 на стр. 85) следи $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$ за све $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^k$, а одатле

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &= (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} \leq \\ &\leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2, \end{aligned}$$

одакле следи (H4). Општије, векторски простор V (над пољем $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$) на коме је дефинисана функција $\| \cdot \| : V \to \mathbf{R}$ са својствима (H1)–(H4) назива се *нормираним векторским простором*. Лако се види да је на нормираном векторском простору са

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$$

је дефинисана метрика. Метрику на $\mathbf{R}^k$ дефинисану помоћу норме (1) називамо *еуклидском метриком*. ♯

Задатак 12. Доказати да је $\|\mathbf{x}\| = \max\limits_{1 \leq j \leq k} |x_j|$ норма на $\mathbf{R}^k$. ✓

Задатак 13. Доказати да је за свако $p \geq 1$ са

$$\|\mathbf{x}\| = \Big(\sum_{j=1}^{k} |x_j|^p \Big)^{\frac{1}{p}}$$

дефинисана норма на $\mathbf{R}^k$. Специјално, за $p = 2$ ова норма дефинише стандардну еуклидску метрику.

Упутство: неједнакост троугла следи из неједнакости Минковског. ✓

Задатак 14. Доказати да је са $d(x, y) = \sqrt{|x - y|}$ дефинисана једна метрика на скупу $\mathbf{R}$. Упутство: за неједнакост троугла искористити Задатак 84 на стр. 56. ✓

Задатак 15. Да ли је са $d(x, y) = |x - y|^2$ дефинисана метрика на $\mathbf{R}$? ✓

Задатак 16. Доказати да је са $d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$ дефинисана метрика на $\mathbf{R}$. ✓

Задатак 17. Доказати да је са

$$d(x, y) = \frac{|x - y|}{\sqrt{(1 + x^2)(1 + y)^2}}$$

дефинисана метрика на $\mathbf{R}$. Упутство: Посматрати троугао са теменима $A = (0,1)$, $B = (x,0)$, $C = (y,0)$ у $\mathbf{R}^2$. Нека је α угао код темена A. Доказати да је $d(x,y) = 2\sin\alpha$ и доказати неједнакост $\sin(\alpha_1+\alpha_2) \le \sin\alpha_1 + \sin\alpha_2$. ✓

Пример 5. (Дискретна метрика) Нека је M непразан скуп и $d : M \times M \to \mathbf{R}$ пресликавање дефинисано са

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{за} \quad x \neq y \\ 0 & \text{за} \quad x = y. \end{cases}$$

Лако је видети да је d метрика; називамо је *дискретном метриком*, а M *дискретним метричким простором.* ♯

Задатак 18. Нека је (M,d) метрички простор и $f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ строго конкавна функција са особином

$$f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0.$$

Доказати да је са

$$d_f(x,y) := f(d(x,y))$$

дефинисана метрика на M.

Упутство: из строге конкавности функције f следи да је

$$\frac{f(c)-f(b)}{c-b} < \frac{f(c)-f(a)}{c-a} < \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

за све $0 \le a < b < c$. Применити ову неједнакост прво за тројку $a, b, c = a+b$, а затим за $0, a, b$ и доказати

$$\frac{f(a+b)-f(b)}{a} < \frac{f(a)-f(0)}{a} = \frac{f(a)}{a}.$$

Извести одатле неједнакост троугла. За доказ недегенерисаности искористити Задатак 46 на стр. 156. ✓

Задатак 19. Нека је (M,d) метрички простор. Доказати да су са

$$d_1(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \quad \text{и} \quad d_2(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}$$

дефинисане метрике на M. ✓

Задатак 20. Доказати да низ $x_n \in \mathbf{R}^k$ конвергира у односу на метрику дефинисану нормом из Задатка 12 ако и само ако конвергирају сви низови његових пројекција на координатне осе. ✓

Пример 6. Нека је $B(X)$ скуп ограничених функција $f : X \to \mathbf{C}$ дефинисаних на скупу X. Скуп $B(X)$ има структуру комплексног векторског простора у односу на операције дефинисане у (1) на стр. 97. Са

$$\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)| \qquad \text{и} \qquad d(f,g) = \|g-f\|$$

дефинисане су норма и метрика на $B(X)$. ♯

Задатак 21. Нека је $I \subset \mathbf{R}$ ограничен интервал и $C(I)$ скуп непрекидних функција $f : I \to \mathbf{C}$. Доказати да је за $p \ge 1$ са

$$\|f\| := \left(\int_I |f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

дефинисана норма на $C(I)$. ✓

Задатак 22. Нека су $f, g : [0,5] \to \mathbf{R}$ функције дате са

$$f(x) = 3x - 6, \qquad g(x) = x^2 - 4.$$

Израчунати $d(f,g)$ ако је

(а) d метрика из Примера 6;
(б) d метрика из Задатка 21.

✓

Пример 7. Скуп $BV[a,b]$ свих функција ограничене варијације на интервалу $[a,b]$ са вредностима у $\mathbb{C}$ је нормирани векторски простор, са нормом $\|f\| = \mathrm{Var}_a^b(f)$. ♯

Задатак 23. Нека је, $l^p(\mathbf{C})$ скуп свих комплексних низова c_n за које ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^p$$

конвергира и нека је $l^\infty(\mathbf{C})$ скуп свих комплексних низова c_n за које је

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} |c_n| < +\infty.$$

(а) Доказати да је за $1 \le p < +\infty$ са

$$\|\{c_n\}\| := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

дефинисана норма на $l^p(\mathbf{C})$.
(б) Доказати да је са

$$\|\{c_n\}\| := \sup_{n\in\mathbf{N}} |c_n|$$

дефинисана норма на $l^\infty(\mathbf{C})$.
(в) Нека је $c(\mathbf{C})$ скуп свих конвергентних комплексних низова и $c_0(\mathbf{C})$ скуп свих комплексних низова који конвергирају ка 0. Доказати да је

$$l^1(\mathbf{C}) \subset c_0(\mathbf{C}) \subset c(\mathbf{C}) \subset l^\infty(\mathbf{C})$$

и да су све ове инклузије строге.
(г) Доказати да је за $1 \le p < q$

$$l^p(\mathbf{C}) \subset l^q(\mathbf{C})$$

и да је ова инклузија строга.

✓

Задатак 24. Доказати да је на скупу свих комплексних низова са

$$d(\{a_n\},\{b_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|b_n - a_n|}{1 + |b_n - a_n|}$$

дефинисана метрика.

Упутство: доказати да за ненегативне реалне бројеве a, b, c важи импликација

$$a \le b + c \;\Leftrightarrow\; \frac{a}{1+a} \le \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}$$

и одатле извести неједнакост троугла. ✓

2.2. Непрекидност и гранична вредност. Појмови конвергенције, лимеса и непрекидности дефинисане у $\mathbf{C}$ преносе се на произвољни метрички простор M.

Дефиниција 4. Низ $x_n \in M$ конвергира ка x_∞ ако и само ако

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})\, n \geq n_0 \;\Rightarrow\; d(x_n, x_\infty) < \varepsilon.$$

Еквивалентно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_\infty) = 0$, где је последњи лимес раније дефинисан лимес низа у $\mathbf{R}$.

Лема 1. *Гранична вредност низа је јединствена.*

$\triangle$ Претпоставимо да низ x_n има две граничне вредности x_∞ и $\widetilde{x_\infty}$. Нека је $\varepsilon > 0$ Тада је за довољно велико n $d(x_\infty, x_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ и $d(x_n, \widetilde{x_\infty}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$

$$d(x_\infty, \widetilde{x_\infty}) \leq d(x_\infty, x_n) + d(x_n, \widetilde{x_\infty}) < \varepsilon.$$

Пошто је ε произвољно, следи да је $d(x_\infty, \widetilde{x_\infty}) = 0$, тј. $x_\infty = \widetilde{x_\infty}$. $\triangledown$

Задатак 25. Описати конвергентне низове у дискретном метричком простору (видети Пример 5). ✓

Дефиниција 5. Нека су M_1, M_2 метрички простори са метрикама d_1, d_2. Нека је $a \in M_1$. Кажемо да је $A \in M_2$ *гранична вредност* пресликавања $f : M_1 \to M_2$ у тачки $a \in M_1$ ако за сваки низ $x_n \in M_1 \setminus \{a\}$ важи

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a).$$

Еквивалентно, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ ако и само ако

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\; 0 < d_1(x, a) < \delta \;\Rightarrow\; d_2(f(x), A) < \varepsilon.$$

Дефиниција 6. Нека су M_1, M_2 метрички простори са метрикама d_1, d_2. Пресликавање $f : M_1 \to M_2$ је непрекидно у тачки $a \in M_1$ ако за сваки низ $x_n \in M_1$ важи

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a).$$

Еквивалентно, f је непрекидно у a ако и само ако важи $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, што је еквивалентно са

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\; d_1(x, a) < \delta \;\Rightarrow\; d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Пресликавање је *непрекидно* ако је непрекидно у свакој тачки домена.

Пример 8. **(Непрекидност метрике)** Нека је M метрички простор са метриком d и $c \in M$. Пресликавање

$$d(\cdot, c) : M \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto d(x, c) \tag{2}$$

је непрекидно (подразумева се да је метрика на $\mathbf{R}$ стандардна, дефинисана помоћу апсолутне вредности). Заиста, нека је $a \in M$, $x_n \to a$ и $\varepsilon > 0$. Тада, на основу дефиниције конвергенције, постоји $n_0 \in \mathbf{N}$ такво да важи

$$n \geq n_0 \;\Rightarrow\; d(x_n, a) < \varepsilon. \tag{3}$$

Из $d(x_n, c) \leq d(x_n, a) + d(a, c)$ и $d(a, c) \leq d(x_n, a) + d(x_n, c)$ следи

$$-d(x_n, a) \leq d(x_n, c) - d(a, c) \leq d(x_n, a),$$

тј.

$$|d(x_n, c) - d(a, c)| \leq d(x_n, a),$$

па је, на основу (3), $|d(x_n, c) - d(a, c)| < \varepsilon$ за $n \geq n_0$. То значи да је

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, c) = d(a, c),$$

тј. да је пресликавање (2) непрекидно. ♯

Задатак 26. Нека је $(V, \|\cdot\|)$ нормирани векторски простор. Доказати да је норма $\|\cdot\| : V \to \mathbf{R}$ непрекидно пресликавање. ✓

Задатак 27. Нека је $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$. Доказати да је

$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x, y)) = 1, \qquad \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x, y)) = -1$$

и да

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$$

не постоји. ✓

Задатак 28. Доказати да за функцију

$$f : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \setminus \{(0, 0)\}, \quad f(x, y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x - y)^2}$$

важи

$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x, y)) = \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x, y)),$$

али да не постоји

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y).$$

Упутство: посматрати низове (n^{-1}, n^{-1}) и $(2n^{-1}, n^{-1})$. ✓

Задатак 29. Доказати да за функцију $f(x, y) = (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ не постоје поновљени лимеси

$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x, y)) \quad \text{и} \quad \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x, y))$$

али да је

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0.$$

✓

Задатак 30. Пресликавање $f : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ је дефинисано са

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Доказати да је за свако x функција $y \mapsto f(x, y)$ непрекидна и да је за свако y функција $x \mapsto f(x, y)$ непрекидна, али да функција f није непрекидна у нули.

Упутство: за доказ прекидности у нули посматрати низ (n^{-1}, n^{-1}). ✓

Задатак 31. Доказати да је рестрикција функције

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

на сваку праву $y = ax$ непрекидна, али да је f прекидна у $(0, 0)$.

Упутство: посматрати низове (n^{-1}, n^{-1}) и (n^{-1}, n^{-2}). ✓

Задатак 32. Нека је $C[0,1]$ простор непрекидних функција $f : [0,1] \to \mathbf{C}$. Доказати да је $C[0,1] \subset B[0,1]$, где је $B[0,1]$ простор дефинисан у Примеру 6. Испитати непрекидност функције $f : C[0,1] \to C[0,1]$ у односу на метрику из тог примера ако је

(а) $f(x)(t) = \int_0^t e^{st} \sin(x(s))\, ds$;
(б) $f(x)(t) = \int_0^1 \sin(1 + tx(s))\, ds$;
(в) $f(x)(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 x(n^{-1}ts)\, ds$.

✓

2.3. Отворени и затворени скупови. Нека је M метрички простор са метриком d и $x_0 \in M$. Нека је r позитиван реалан број. Скупови

$$B(x_0, r) := \{x \in M \mid d(x, x_0) < r\} \quad \text{и} \quad B[x_0, r] := \{x \in M \mid d(x, x_0) \leq r\}$$

називају се *отвореном* и *затвореном лоптом* са центром x_0 и полупречником r. Скуп

$$S(x_0, r) := \{x \in M \mid d(x, x_0) = r\}$$

назива се *сфером* са центром x_0 и полупречником r.

Пример 9. Отворене лопте у метричком простору $\mathbf{R}$ са стандардном метриком $d(x, y) = |y - x|$ су отворени интервали, а затворене лопте затворени интервали. Сфера са центром $x_0 \in \mathbf{R}$ и полупречником r је двочлани скуп $\{x_0 - r, x_0 + r\}$. ♯

Пример 10. Отворене и затворене лопте у метричком простору $\mathbf{C}$ са метриком $d(z, w) = |w - z|$ су отворени и затворени дискови (в. Дефиницију 33 на стр. 74), а сфере су кружнице. ♯

Пример 11. Нека је (M, d) дискретан метрички простор и $r > 0$. Тада је

$$B(x_0, r) = \begin{cases} \{x_0\} & \text{ако је } r \leq 1 \\ M & \text{ако је } r > 1, \end{cases} \qquad B[x_0, r] = \begin{cases} \{x_0\} & \text{ако је } r < 1 \\ M & \text{ако је } r \geq 1 \end{cases}$$

и

$$S(x_0, r) = \begin{cases} \emptyset & \text{ако је } r \neq 1 \\ M \setminus \{x_0\} & \text{ако је } r = 1 \end{cases}$$

за свако $x_0 \in M$. ♯

Уопштавањем појма отворених и затворених скупова у $\mathbf{R}$ и $\mathbf{C}$ (в. стр. 53 и 74) долазимо до следеће дефиниције.

Дефиниција 7. Нека је M метрички простор. Подскуп $U \subset M$ називамо *отвореним* ако за свако $x \in U$ постоји $\varepsilon > 0$ такво да је $B(x, \varepsilon) \subset U$. Подскуп $F \subset M$ називамо *затвореним* ако је његов комплемент $F^c := M \setminus F$ отворен.

Лема 2. *Подскуп $F \subset M$ је затворен ако и само ако за сваки низ $x_n \in F$ важи*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_\infty \;\Rightarrow\; x_\infty \in F. \tag{4}$$

△ Нека је F затворен, тј. $M \setminus F$ отворен. Нека је $x_n \in F$ низ који конвергира ка x_∞. Претпоставимо да $x_\infty \notin F$. Пошто је $M \setminus F$ отворен, постоји лопта $B(x_\infty, \varepsilon) \subset M \setminus F$. Одатле следи $d(x_\infty, x_n) \geq \varepsilon$, што је у супротности са $\lim x_n = x_\infty$.

Претпоставимо сада да за сваки низ $x_n \in F$ важи (4). Докажимо да је F затворен, тј. да је $M \setminus F$ отворен. Нека је $a \in M \setminus F$. Претпоставимо да ни за једно $n \in \mathbf{N}$ лопта $B(a, n^{-1})$ није садржана у $M \setminus F$, тј. да за свако $n \in \mathbf{N}$ постоји $x_n \in F \cap B(a, n^{-1})$. Тада је $d(x_n, a) < n^{-1}$, па $x_n \to a$ кад $n \to \infty$. Одатле би, на основу (4), следило $a \in F$, што је у супротности са избором $a \in M \setminus F$. $\triangledown$

Дефиниција 8. Тачка $x_0 \in M$ се назива *тачком нагомилавања* скупа $A \subset M$ ако свака отворена лопта $B(x_0, \varepsilon)$ садржи бесконачно много тачака скупа A. Скуп свих тачака нагомилавања означаваћемо са A'. Скуп $\overline{A} := A \cup A'$ назива се *затварањем* скупа A. Ако је $B \subset A$ и $\overline{B} = A$ кажемо да је скуп B *густ* (или *свуда густ*) у A. Тачка $a_0 \in A$ која није тачка нагомилавања назива се *изолованом тачком* скупа A. Скуп $\partial A := \overline{A} \cap \overline{M \setminus A}$ назива се *рубом скупа* A. Тачка a_0 је *унутрашња тачка* скупа A ако је за неко $\varepsilon > 0$ $B(a_0, \varepsilon) \subset A$. Скуп свих унутрашњих тачака скупа A назива се *унутрашношћу скупа* A, и означава са $\operatorname{Int} A$.

Задатак 33. Одредити A', $\overline{A}$, ∂A и $\operatorname{Int} A$ за скуп A у метричком простору (M, d) ако је

(а) $A = [0, 1) \cup \{2\}$, $M = \mathbf{R}$, $d(x, y) = |x - y|$;
(б) $A = \mathbf{Q}$, $M = \mathbf{R}$, $d(x, y) = |x - y|$;
(в) $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ $M = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, d еуклидско растојање у равни.
(г) $A = \{(x, y) \mid y = x^2\}$ $M = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, d еуклидско растојање у равни. ✓

Задатак 34. Нека је A скуп у метричком простору (M, d). Доказати да су следећа тврђења еквивалентна:

(а) A је густ у M.
(б) A има непразан пресек са сваком отвореном лоптом.
(в) За сваку тачку $x \in M$ постоји низ a_n тачака скупа A такав да је $x = \lim_{n \to \infty} a_n$. ✓

Задатак 35. Нека су A и B подскупови у метричком простору (M, d). Доказати да је

(а) $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$;
(б) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
(в) $A \subset B \Rightarrow (\operatorname{Int} A \subset \operatorname{Int} B \wedge \overline{A} \subset \overline{B})$;
(г) $(\operatorname{Int} A)^c = \overline{A^c}$, $\overline{A}^c = \operatorname{Int}(A^c)$,

где је са $X^c := M \setminus X$ означен комплемент подскупа $X \subset M$. ✓

Задатак 36. Нека је (M, d) метрички простор. Доказати да је карактеристична функција подскупа $A \subset M$

$$\chi : M \to \mathbb{R}, \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

прекидна у тачкама руба ∂A и непрекидна у осталим тачкама. ✓

Задатак 37. Нека је x_n низ у метричком простору који коннвергира ка x_∞. Доказати да је скуп

$$A = \{x_n \mid n \in \mathbf{N}\} \cup \{x_\infty\}$$

затворен. ✓

Задатак 38. Нека су (M,d), (M,d_1) и (M,d_2) метрички простори из Задатка 19 и $A \subset M$. Доказати да су следеца тврђења еквивалентна

(а) A је затворен у (M,d);
(б) A је затворен у (M,d_1);
(в) A је затворен у (M,d_2).

✓

Лема 3. *$\overline{A}$ је најмањи затворен скуп који сарджи A.*

△ Очигледно је да важи $A \subset \overline{A}$. Докажимо да је скуп $\overline{A}$ затворен. Нека је a_n низ у A и $a_n \to a_\infty$ кад $n \to \infty$. Ако низ a_n није константан почевши од неког n, онда је a_∞ тачка нагомилавања скупа A, па је $a_\infty \in \overline{A}$. Ако је низ a_n константан почевши од неког n, онда је $a_\infty = a_n$ за велико n, па је $a_\infty \in A$, а самим тим $a_\infty \in \overline{A}$. Тиме је доказано да је скуп $\overline{A}$ затворен. Претпоставимо да је F затворен скуп и да је $A \subset F$. Нека је $x \in \overline{A} \setminus A$. Тада је x тачка нагомилавања скупа A, па постоји низ $a_n \in A$ који конвергира ка x. Пошто је тада $x_n \in F$, а скуп F је затворен, следи $x \in F$. Тиме је доказано да је $\overline{A} \subset F$, што значи да је $\overline{A}$ најмањи затворен скуп који сарджи A. ▽

Последица 1. *Скуп F је затворен ако и само ако је $F = \overline{F}$.*

Задатак 39. Доказати да је $\operatorname{Int} A$ највећи отворен скуп који је садржан у A. Доказати да је скуп A отворен ако и само ако је $\operatorname{Int} A = A$.

✓

Теорема 1. *Нека је τ_M фамилија свих отворених подскупова у метричком простору M. Тада важи:*

(T1) $M \in \tau_M$, $\emptyset \in \tau_M$
(T2) *ако је $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ фамилија скупова из τ_M, онда је* $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \tau_M$
(T3) $U_1, U_2 \in \tau_M \;\Rightarrow\; U_1 \cap U_2 \in \tau_M$.

△ Својство (T1) је очигледно. Нека је $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ фамилија скупова из τ_M и $x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$. Тада је $x \in U_{\lambda_0}$ за неко λ_0. Пошто је U_{λ_0} отворен, за неко $\varepsilon > 0$ важи $B(x,\varepsilon) \subset U_{\lambda_0}$, па је и $B(x,\varepsilon) \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$. Тиме је доказано да је $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ отворен скуп, тј. својство (T2). Докажимо (T3). Нека су U_1 и U_2 отворени и $x \in U_1 \cap U_2$. Из отворености скупа U_1 и $x \in U_1$ следи постоји $\varepsilon_1 > 0$ такво да је $B(x,\varepsilon_1) \subset U_1$. Слично, $B(x,\varepsilon_2) \subset U_2$ за неко $\varepsilon_2 > 0$. Нека је $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Тада је $B(x,\varepsilon) \subset U_1 \cap U_2$, што доказује да је $U_1 \cap U_2$ отворен. ▽

Последица 2. *Нека је ζ_M фамилија свих затворених подскупова у метричком простору M. Тада важи:*

(З1) $M \in \zeta_M$, $\emptyset \in \zeta_M$
(З2) $F_1, F_2 \in \zeta_M \;\Rightarrow\; F_1 \cup F_2 \in \zeta_M$
(З3) *ако је $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ фамилија скупова из ζ_M, онда је* $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda \in \zeta_M$.

△ Доказ следи из де Морганових[2] закона

$$\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c, \qquad \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c$$

[2]Де Морган (Augustus de Morgan, 1806–1871), шкотски математичар

и претходне теореме. ▽

Дефиниција 9. Фамилију свих отворених подскупова метричког простора називамо *топологијом* тог простора.

Непрекидност можемо да опишемо само у терминима топологије - важи следећа теорема.

Теорема 2. *Нека су M_1, M_2 метрички простори. За пресликавање $f : M_1 \to M_2$ следећа тврђења су еквивалентна:*

(а) *f је непрекидно пресликавање*
(б) *за сваки отворен скуп $V \subset M_2$ скуп $f^{-1}(V)$ је отворен*
(в) *за сваки затворен скуп $F \subset M_2$ скуп $f^{-1}(F)$ је затворен*
(г) *за сваки скуп $A \subset M_1$ важи $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.*

△ Претпоставимо да важи (а). Нека је $V \subset M_2$ отворен подскуп, $a \in f^{-1}(V)$. Докажимо да је нека кугла са центром у a садржана у $f^{-1}(V)$, чиме ћемо доказати да је скуп $f^{-1}(V)$ отворен. Нека је $b = f(a)$. Пошто је скуп V отворен, за неко $\varepsilon > 0$ је $B(b, \varepsilon) \subset V$. Из непрекидности пресликавања f у тачки a следи да постоји $\delta > 0$ такво да важи

$$d(x, a) < \delta \;\Rightarrow\; d(f(x), b) < \varepsilon,$$

тј. $f(B(a, \delta)) \subset B(b, \varepsilon) \subset V$. Одатле следи $B(a, \delta) \subset f^{-1}(V)$. Тиме је доказана импликација (а) ⇒ (б).

Претпоставимо да важи (б). Нека је $F \subset M_2$ затворен скуп. Тада је $M_2 \setminus F$ отворен. Из (б) и

$$f^{-1}(M_2 \setminus F) = M_1 \setminus f^{-1}(F)$$

следи да је скуп $M_1 \setminus f^{-1}(F)$ отворен, што значи да је скуп $f^{-1}(F)$ затворен. Тиме је доказана импликација (б) ⇒ (в).

Претпоставимо да важи (в). Нека је $A \subset M_1$. Скуп $\overline{f(A)}$ је затворен, па из (в) следи да је скуп $f^{-1}(\overline{f(A)})$ затворен и важи

$$A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\overline{f(A)}).$$

Пошто је $\overline{A}$ најмањи затворен скуп који садржи A, следи да је $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$, тј. $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$. Тиме је доказана импликација (в) ⇒ (г).

Претпоставимо да важи (г). Нека је $x_0 \in M_1$, $y_0 = f(x_0)$ и $\varepsilon > 0$. Докажимо да постоји $\delta > 0$ такво да је $f(B(x_0, \delta)) \subset B(y_0, \varepsilon)$, чиме ћемо доказати непрекидност пресликавања f у тачки x_0. Нека је $A = f^{-1}(M_2 \setminus B(y_0, \varepsilon)) = M_1 \setminus f^{-1}(B(y_0, \varepsilon))$. Тада важи $x_0 \notin \overline{A}$. Заиста, када би било $x_0 \in \overline{A}$, из (г) би следило

$$y_0 = f(x_0) \in f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} = \overline{f(f^{-1}(M_2 \setminus B(y_0, \varepsilon))} \subset \overline{M_2 \setminus B(y_0, \varepsilon)},$$

тј. $y_0 \notin B(y_0, \varepsilon)$, што је контрадикција. Дакле, x_0 припада отвореном скупу $M_1 \setminus \overline{A}$, па постоји $\delta > 0$ такво да је $B(x_0, \delta) \subset M_1 \setminus \overline{A}$. Одатле и из дефиниције скупа A следи да је $f(B(x_0, \delta)) \subset B(y_0, \varepsilon)$, што значи да је пресликавање f непрекидно у x_0. Тиме је доказана импликација (г) ⇒ (а). ▽

2.4. Еквивалентне метрике. Метрике d_1 и d_2 дефинисане на скупу M су *строго еквивалентне* ако постоје позитивне константе $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$, такве да је

$$\alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y).$$

Метрике d_1 и d_2 су *тополошки еквивалентне* ако дефинишу исту топологију на скупу M, тј. ако важи да је скуп $V \subset M$ отворен у метричком простору (M, d_1) ако и само ако је отворен у метричком простору (M, d_2).

Напомена 2. Пошто непрекидност и гранична вредност у метричком простору могу да се дефинишу само на језику топологије, ови појмови се неће мењати ако уместо једне метрике узмемо неку другу, њој тополошки еквивалентну. ◇

Лема 4. *Ако су метрике d_1 и d_2 строго еквивалентне, онда су оне и тополошки еквивалентне.*

△ Ако су d_1, d_2 строго еквивалентне метрике и $B_1(a; \rho)$, $B_2(a, \rho)$ помоћу њих дефинисане лопте са центром $a \in M$ и полупречником $\rho > 0$, онда је

$$B_1(a, \beta^{-1} r) \subset B_2(a, r) \subset B_1(a, \alpha^{-1} r).$$

Пошто топологија, тј. фамилија отворених скупова, може да се дефинише само помоћу лопти у метричком простору, одавде следи да су топологије дефинисане метрикама d_1 и d_2 исте. ▽

Задатак 40. Нека је (M, d) метрички простор. Доказати да су метрике d и

$$d_1(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

тополошки еквивалентне, али не обавезно и строго еквивалентне.

Упутство: $d_1(x, y) \leq 1$, док d не мора да буде ограничена. ✓

Задатак 40 показује да је сваки метрички простор тополошки еквивалентан *ограниченом метричком простору* – метрички простор (M, d) је *ограничен* ако је

$$d(M \times M) = \{d(x, y) \mid x, y \in M\}$$

ограничен подскуп у $\mathbf{R}$. Подскуп $A \subset M$ метричког простора је ограничен ако је метрички простор (A, d) ограничен.

Задатак 41. Доказати да је подскуп A метричког простора (M, d) ограничен ако и само ако је, за неко $p \in M$ и неко $\rho > 0$, $A \subset B(p, \rho)$. ✓

2.5. Кошијеви низови. Комплетни простори. По аналогији са случајем комплексних низова, низ x_n у метричком простору M називамо *Кошијевим низом* ако важи

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})\, m, n > n_0 \;\Rightarrow\; d(x_m, x_n) < \varepsilon. \tag{5}$$

Важи следећа лема.

Лема 5. *Сваки конвергентан низ је Кошијев.*

△ Нека је x_n низ који конвергира ка x_∞. Нека је $\varepsilon > 0$. Из дефиниције конвергенције низа у метричком простору следи да постоји $n_0 \in \mathbf{N}$ такво да важи $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, x_\infty) < 2^{-1}\varepsilon$. Тада за $m, n > n_0$ важи

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_\infty) + d(x_\infty, x_n) < 2^{-1}\varepsilon + 2^{-1}\varepsilon = \varepsilon,$$

што значи да је низ x_n Кошијев. ▽

Обрнуто не мора да важи, што показује следећи пример.

Пример 12. Нека је $M = (0,1)$ метрички простор са метриком $d(x,y) = |y - x|$. Тада је низ $x_n = \frac{1}{n}$ Кошијев, али није конвергентан, тј. не постоји тачка $x_\infty \in (0,1)$ таква да је $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = x_\infty$. ♯

Метричке просторе у којима је сваки Кошијев низ конвергентан издвајамо следећом дефиницијом.

Дефиниција 10. Метрички простор је *комплетан* ако сваки Кошијев низ $x_n \in M$ конвергира.

Метрички простор из Примера 12 није комплетан. Реална права $\mathbf{R}$ и комплексна раван $\mathbf{C}$ са стандардним метрикама су комплетни простори (Теорема 5 на стр. 180).

Задатак 42. Доказати да реална права са метриком уведеном у Задатку 16 на стр. 352 није комплетан простор. ✓

За функцију која има вредности у комплетном метричком простору важи Кошијев критеријум за егзистенцију лимеса:

Лема 6. *Нека је (N, d_N) произвољан, а (M, d_M) комплетан метрички простор. Нека је $X \subset N$, $f : X \to M$ функција дефинисана на X и $\eta \in \overline{X}$. Тада постоји $\lim\limits_{x\to\eta} f(x)$ ако и само ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ са својством*

$$(\forall x_1, x_2 \in X)\ d_N(x_1, \eta) < \delta \wedge d_N(x_2, \eta) < \delta \ \Rightarrow\ d_M(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon.$$

△ Доказ је аналоган доказу Последице 5 на стр. 180. ▽

Теорема 3. *Потпростор $S \subset M$ комплетног метричког простора M је комплетан ако и само ако је затворен.*

△ Претпоставимо да је S затворен. Нека је $x_n \in S$ Кошијев низ у S. Из комплетности простора M следи да x_n конвергира ка $x_\infty \in M$. Пошто је S затворен, важиће $x_\infty \in S$, што значи да x_n конвергира у S, па је S комплетан.

Претпоставимо сада да је S комплетан и нека је $x_n \in S$ низ у S који конвергира ка $x_\infty \in M$. Из Леме 5 следи да је x_n Кошијев низ, па из комплетности простора S следи да он конвергира ка некој тачки простора S. Из јединствености граничне вредности (Лема 1) следи да је та тачка управо x_∞, па је $x_\infty \in S$, што значи да је S затворен. ▽

Задатак 43. Који од следећих подскупова комплексне равни $\mathbf{C}$ су комплетни:

(а) $\{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z = 0\}$;
(б) $\{z \in \mathbf{C} \mid 1 < |z| \leq 2\}$;
(г) $\{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq 2 \wedge |\operatorname{Re} z| \leq 1\}$;
(д) $\{z \in \mathbf{C} \mid 0 < \operatorname{Re} z < 1 \wedge \operatorname{Im} z = \sin(1/\operatorname{Re} z)\}$?

✓

Задатак 44. (а) Нека је $I \subset \mathbf{R}$ ограничен и затворен интервал. Доказати да је простор $C(I)$ непрекидних функција $f : I \to \mathbf{C}$ са метриком

$$d(f,g) := \max_{t\in I} |f(t) - g(t)|$$

комплетан.

(б) Нека је $b(\mathbf{C})$ простор свих ограничених комплексних низова са метриком

$$d(\{x_n\},\{y_n\}) := \sup_{k\in\mathbf{N}} |x_k - y_k|.$$

Доказати да је $b(\mathbf{C})$ комплетан метрички простор.

Упутство за (а): Нека је f_n Кошијев низ у $C(I)$. Из

$$(\forall t \in I)\, |f_n(t) - f_m(t)| \le \max_{t\in I} |f_n(t) - f_m(t)| = d(f_n, f_m)$$

следи да је за свако $t \in I$ низ $f_n(t)$ Кошијев низ у $\mathbf{C}$. Пошто је комплексна раван $\mathbf{C}$ комплетан простор, одатле следи да за свако $t \in I$ постоји лимес

$$f_\infty(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t).$$

Остаје још да се докаже да је тако добијена функција f_∞ непрекидна, тј. да је она елемент простора $C(I)$, као и да низ f_n конвергира ка f_∞ у смислу конвергенције у метрици d. За доказ у конвергенцији у метрици d треба доказати да

$$\sup_{t\in I} |f_\infty(t) - f_n(t)| \to 0 \quad \text{кад} \quad n \to \infty,$$

што може да се види из Кошијевог услова

$$\sup_{t\in I} |f_m(t) - f_n(t)| < \varepsilon,$$

преласком на лимес кад $m \to \infty$. За доказ непрекидности функције f_∞ доказати неједнакост

$$|f_\infty(t) - f_\infty(t_0)| \le 2d(f_\infty, f_n) + |f_n(t) - f_n(t_0)|$$

и искористити непрекидност функција f_n и чињеницу да $f_n \to f_\infty$. Доказ тврђења (б) је сличан. ✓

Задатак 45. Нека је $p \in [1, +\infty)$. Доказати да простор $C(I)$ непрекидних функција $f : I \to \mathbb{C}$ на интервалу $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ *није* комплетан у односу на метрику

$$d(f,g) := \left(\int_a^b |f(t)|^p \right)^{1/p} \tag{6}$$

(упоредити са Задатком 44). Упутство: нека је

$$f_n(t) := \begin{cases} -1, & a \le t \le (a+b)/2 - 1/n, \\ 1, & (a+b)/2 + 1/n \le t \le b \end{cases}$$

и нека је f_n линеарна функција на интервалу $[(a+b)/2 - 1/n, (a+b)/2 + 1/n]$. Доказати да је f_n Кошијев низ у метрици (6), који не конвергира ка непрекидној функцији. ✓

2.6. Компактни простори. Метрички простор M називамо *компактним* ако сваки низ $x_n \in M$ има конвергентан подниз.

Пример 13. Из Теореме 3 на стр. 173 следи да је интервал $[0,1]$ компактан. Интервал $(0,1]$ није компактан: низ $\frac{1}{n} \in (0,1]$ нема подниз који конвергира ка неком $x_\infty \in (0,1]$. Реална права $\mathbf{R}$ и комплексна раван $\mathbf{C}$ нису компактни простори: низ $x_n = n$ нема конвергентан подниз. ♯

Теорема 4. *Сваки компактан метрички простор је комплетан.*

△ Доказ је дословна копија другог дела доказа Теореме 5 на стр. 180. Нека је M компактан метрички простор и $x_n \in M$ Кошијев низ. Из компактности следи да постоји подниз $x_{k(n)}$. Означимо лимес овог подниза са x_∞. Нека је $\varepsilon > 0$. Тада за неко $n_1 \in \mathbf{N}$ важи $n > n_1 \Rightarrow d(x_{k(n)}, x_\infty) < 2^{-1}\varepsilon$. Пошто је низ Кошијев, за неко $n_2 \in \mathbf{N}$ важи $n > n_2 \Rightarrow d(x_n, x_{k(n)}) < 2^{-1}\varepsilon$. Нека је $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Тада за $n > n_0$ важи

$$d(x_n, x_\infty) \leq d(x_n, x_{k(n)}) + d(x_{k(n)}, x_\infty) < \varepsilon,$$

тј. x_n конвергира ка x_∞. ▽

Лема 7. *Ако је M произвољан метрички простор и $S \subset M$ његов компактан потпростор, онда је S ограничен.*

△ Претпоставимо да S није ограничен. То значи да за $s \in S$ ниједна лопта $B(s,n)$ не садржи цео скуп S, па за свако n постоји $x_n \in S \setminus B(s,n)$. Ако би низ x_n имао подниз $x_{k(n)}$ који конвергира ка x_∞, важило би

$$d(s, x_{k(n)}) \leq d(s, x_\infty) + d(x_\infty, x_{k(n)}) < d(s, x_\infty) + \varepsilon \tag{7}$$

за довољно велико n. Међутим, из $x_n \notin B(s,n)$ и $k(n) \to \infty$ кад $n \to \infty$ следи да лева страна у (7) тежи ка ∞ кад $n \to \infty$, што је немогуће јер десна страна не зависи од n. Одатле следи да x_n нема конвергентан подниз, што је у супротности са претпоставком да је S компактан. ▽

Теорема 5. *Потпростор $S \subset M$ компактног метричког простора M је компактан ако и само ако је ограничен и затворен.*

△ Нека је S затворен и $x_n \in S$ низ у S. Због компактности простора M низ x_n има подниз $x_{k(n)}$ који конвергира ка некој тачки $x_\infty \in M$. Из затворености простора S следи да је $x_\infty \in S$, па подниз $x_{k(n)}$ конвергира у S, што значи да је S компактан.

Претпоставимо сада да је S компактан. Нека је $x_n \in S$ низ у S који конвергира ка $x_\infty \in M$. Из компактности простора S следи да низ x_n има подниз који конвергира ка некој тачки из S, а пошто сваки подниз конвергентног низа x_n конвергира ка x_∞ следи да је $x_\infty \in S$. То доказује да је S затворен. Ограниченост следи из Леме 7. ▽

Последица 3. *Подскуп реалне праве $\mathbf{R}$ или комплексне равни $\mathbf{C}$ је компактан ако и само ако је ограничен и затворен.*

△ Пошто сваки ограничен низ у $\mathbf{C}$ има конвергентан подниз, скуп $B(0,r) = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq r\}$ је компактан. Ако је $S \subset \mathbf{C}$ ограничен и затворен, онда је $S \subset B(0,r)$ за неко r, па доказ следи ис претходне теореме.

Обрнуто, ако је S компактан, из Леме 7 следи да је он ограничен, па је $S \subset B(0,r)$ за неко r и доказ следи из претходне теореме. ▽

Задатак 46. Нека је $A \subset \mathbf{R}^k$ подскуп k–димензионог еуклидског простора са стандардном еуклидском метриком. Доказати да је A компактан ако и само ако је ограничен и затворен. ✓

Задатак 47. Који од скупова из Задатка 43 су компактни? ✓

Теорема 6. *Нека је M компактан и N произвољан метрички простор и $f : M \to N$ непрекидно пресликавање. Тада је потпростор $f(M) \subset N$ компактан.*

△ Нека је $y_n = f(x_n)$ низ у $f(M)$. Из компактности простора M следи да постоји подниз $x_{k(n)}$ који конвергира ка $x_\infty \in M$, па из непрекидности функције f следи да подниз $y_{k(n)} = f(x_{k(n)})$ конвергира ка $f(x_\infty) \in f(M)$. ▽

Последица 4. *Нека је M компактан метрички простор и $f : M \to \mathbf{R}$ непрекидна функција. Тада постоје тачке $x_1, x_2 \in M$ такве да је*

$$f(x_1) = \max_{x \in M} f(x), \quad f(x_2) = \min_{x \in M} f(x).$$

△ Из претходне теореме следи да је скуп $f(M) \subset \mathbf{R}$ компактан, па из Последице 3 следи да је $f(M)$ ограничен и затворен. Одатле, на основу Аксиоме супремума, следи да постоје $\sup f(M)$ и $\inf f(M)$. Из дефиниције супремума следи да за свако $n \in \mathbf{N}$ постоји тачка $x_n \in M$ таква да је

$$f(x_n) - \frac{1}{n} < \sup f(M) < f(x_n) + \frac{1}{n}. \tag{8}$$

Пошто је M компактан, низ x_n има подниз који конвергира ка x_∞, па из (8) следи да је $f(x_\infty) = \sup f(M)$. Слично се доказује постојање тачке у којој f достиже инфимум. ▽

Задатак 48. Нека су $A, B \subset \mathbf{R}^n$ затворени подскупови, при чему је A ограничен. Дефинишимо

$$d(A, B) := \inf\{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\},$$

где је $d(a, b)$ стандардно еуклидско растојање између тачака a и b. Доказати да се овај инфимум достиже, тј. да постоје тачке $a_0 \in A$ и $b_0 \in B$ такве да је $d(A, B) = d(a_0, b_0)$. ✓

Задатак 49. Нека су M и N метрички простори и нека је M компактан. Доказати да је за сваку непрекидну бијекцију $f : M \to N$ инверзно пресликавање $f^{-1} : N \to M$ непрекидно. ✓

Задатак 50. Доказати да су метрике изведене из норми дефинисаних у Задацима 12 и 13 строго еквивалентне.

Упутство: Нека су $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ норме на $\mathbf{R}^k$. Треба доказати да за неке позитивне реалне бројеве α, β важи

$$\alpha\|\mathbf{x}\|_1 \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \beta\|\mathbf{x}\|_1$$

Пошто је $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\,\|\mathbf{x}\|$, довољно је доказати претходне неједнакости за $\mathbf{x}$ на јединичној сфери $S(0, 1) \subset \mathbf{R}^k$. Искористити чињеницу да је јединична сфера компактан скуп, а норма непрекидно пресликавање. ✓

Задатак 51. Нека су (X, d_X) и (Y, d_Y) метрички простори и нека је X компактан. Доказати да је на скупу $C(X, Y)$ свих непрекидних пресликавања $f : X \to Y$ са

$$d(f, g) := \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x))$$

добро дефинисана метрика.Доказати да је $(C(X, Y), d)$ комплетан ако и само ако је (Y, d_Y) комплетан. Упутство: видети Задатак 44. ✓

Дефиниција 11. Метрички простор M је *сепарабилан* ако има највише пребројив густ подскуп, тј. ако постоји највише пребројив подскуп $S \subset M$ такав да је $\overline{S} = M$.

Пример 14. Скуп $\mathbf{R}$ је сепарабилан, јер је $\overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}$. ♯

Теорема 7. *Ако је метрички простор M компактан, онда је он сепарабилан.*

△ Докажимо прво да за свако $n \in \mathbf{N}$ постоји коначан скуп S_n такав да важи

$$(\forall x \in M)(\exists s \in S_n)\, d(x, s) < \frac{1}{n}. \tag{9}$$

Претпоставимо супротно, да за неко $n_0 \in \mathbf{N}$ и за сваки коначан подскуп $S \subset M$ важи

$$(\exists x \in M)(\forall s \in S)\, d(x, s) \geq \frac{1}{n_0}. \tag{10}$$

Нека је $x_1 \in M$. Пошто је скуп $\{x_1\}$ коначан, из (10) следи да постоји тачка $x_2 \in M$ за коју важи $d(x_1, x_2) \geq \frac{1}{n_0}$. Поновимо овај поступак: претпоставимо да смо њиме издвојили коначан скуп тачака $\{x_1, \ldots, x_k\}$ такав да је $d(x_i, x_j) \geq \frac{1}{n_0}$. Тада из (10) следи да постоји тачка $x_{k+1} \in M$ таква да је $d(x_k, x_j) \geq \frac{1}{n_0}$ за свако $j < k$. Тиме смо конструисали низ $x_1, x_2, \ldots$ такав да важи

$$d(x_i, x_j) \geq \frac{1}{n_0} \quad \text{за} \quad i \neq j. \tag{11}$$

Из (11) следи да низ $x_1, x_2, \ldots$ нема Кошијев подниз па, на основу Леме 5, нема ни конвергентан подниз. То је у супротности са претпоставком да је M компактан. Тиме је доказано да за свако $n \in \mathbf{N}$ постоји коначан скуп S_n такав да важи (9). Нека је

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n.$$

Скуп S је пребројива унија коначних скупова, па је пребројив. Нека је $x \in M$ произвољна тачка. Из (9) следи да за свако $n \in \mathbf{N}$ постоји тачка $s_n \in S$ за коју важи $d(x, s_n) < \frac{1}{n}$. Тиме смо доказали да постоји низ $s_n \in S$ који конвергира ка x. Одатле следи да је $\overline{S} = M$. То доказује да је простор M сепарабилан. ▽

Дефиниција 12. Фамилија $\mathcal{U}$ отворених скупова се назива *отвореним покривачем* скупа A ако је $A \subset \cup_{U \in \mathcal{U}} U$. *Потпокривање* покривања $\mathcal{U}$ скупа A је фамилија $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ која је и сама покривање скупа A. Покривање називамо *коначним* ако се фамилија $\mathcal{U}$ састоји од коначног броја скупова.

Теорема 8. **(Борел–Лебегова теорема)** *Метрички простор M је компактан ако и само ако свако његово отворено покривање $\mathcal{U}$ има коначно потпокривање.*

Приметимо да смо специјални случај ове теореме већ доказали у Теореми 19 на стр. 50.

$\triangle$ Претпоставимо прво да свако отворено покривање простора M има коначно потпокривање и докажимо да је M компактан. Претпоставимо супротно – да M није компактан. Тада постоји низ $x_n \in M$ који нема конвергентан подниз. Докажимо да су скупови

$$U_k = M \setminus \{x_n \mid n \geq k\}$$

отворени. Нека је $y \in U_k$. Заиста, претпоставимо супротно: да свако $m \in \mathbf{N}$ скуп $B(y, \frac{1}{m})$ садржи неку тачку $x_k(m) \in \{x_n \mid n \geq k\}$. Тада $x_k(m) \to y$ кад $m \to \infty$, што је у супротности са претпоставком да низ x_n нема конвергентан подниз. Дакле, за сваку тачку $y \in U_k$ постоји лопта $B(y, \frac{1}{m}) \subset U_k$, тј. скуп U_k је отворен.

Докажимо сада да је фамилија $\{U_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ покривање простора M, тј. да свака тачка $p \in M$ припада неком од скупова U_k. Ако p није једна од тачака низа x_n то је очигледно, јер је тада $p \in U_k$ за свако k. Ако је $p = x_j$, онда је $p \in U_{j+1}$.

Тиме је доказано да је фамилија $\{U_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ отворено покривање простора M, па, по претпоставци, она има коначно потпокривање $U_{k_1}, \ldots, U_{k_n}$. Нека је $m = \max\{k_1, \ldots, k_n\} + 1$. Тада из дефиниције скупова U_k следи $x_m \notin U_{k_1} \cup \cdots \cup U_{k_n}$, што значи да фамилија $U_{k_1}, \ldots, U_{k_n}$ не покрива цео простор M, што је контрадикција. Тиме је један смер теореме доказан.

Претпоставимо сада да је простор M компактан. Нека је $\mathcal{U}$ његово отворено покривање. Докажимо да оно има коначно потпокривање.

Из Теореме 7 следи да постоји пребројив скуп $S \subset M$ такав да је $\overline{S} = M$. Одаберимо, за сваки пар $(s, n) \subset S \times \mathbf{N}$ произвољан скуп $U_{s,n} \in \mathcal{U}$ такав да је $B(s, \frac{1}{n}) \subset U_{s,n}$. Фамилија

$$\left\{U_{s,n}\right\}_{(s,n)\subset S\times\mathbf{N}}$$

је пребројива потфамилија фамилије $\mathcal{U}$. Докажимо да она покрива скуп M. Нека је $p \in M$. Тада је $p \in U$ за неко $U \in \mathcal{U}$. Пошто је U отворен, за неко $n \in \mathbf{N}$ важи $B(p, \frac{2}{n}) \subset U$. Из $\overline{S} = M$ следи да постоји тачка $s \in S$ таква да је $s \in B(p, \frac{1}{n})$, па из

$$B\left(p, \frac{1}{n}\right) \subset B\left(p, \frac{2}{n}\right) \subset U$$

следи да је $x \in U_{s,n}$. Овиме смо доказали да свако покривање има пребројиво потпокривање. Остаје још да докажемо да свако пребројиво покривање.

Претпоставимо супротно: да постоји пребројиво покривање $\left\{V_n\right\}_{n\in\mathbf{N}}$ које нема коначно потпокривање. Тада за свако $n \in \mathbf{N}$ постоји тачка $x_n \in M$ таква да важи

$$x_n \notin V_1 \cup \cdots \cup V_n.$$

Тада низ x_n нема конвергентан подниз. Заиста, нека је p произвољна тачка простора M. Тада је $p \in V_k$ за неко k. Пошто се сви чланови низа x_n осим можда првих k налазе ван скупа V_k, ниједан његов подниз не конвергира ка p. То је у контрадикцији са претпоставком о компактности простора M. $\triangledown$

Дефиниција 13. Нека су (M, d_M) и (N, d_N) метрички простори. Пресликавање $f : M \to N$ назива се *униформно* (или *равномерно*) *непрекидним* ако

важи

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in M)(\forall y \in M)\, d_M(x,y) < \delta \;\Rightarrow\; d_N(f(x), f(y)) < \varepsilon. \quad (12)$$

Из дефиниције непрекидности и униформне непрекидности лако следи да је свако униформно непрекидно пресликавање непрекидно (в. доказ Леме 8 на стр. 113). У случају када је простор M компактан, важи и обрнуто. Прецизније, важи следеће уопштење Теореме 7 на стр. 113.

Теорема 9. (Канторова теорема) *Нека је (M, d_M) компактан, а (N, d_N) произвољан метрички простор. Пресликавање $f : M \to N$ је непрекидно ако и само ако је униформно непрекидно.*

$\triangle$ Претпоставимо супротно: да је $f : M \to N$ непрекидно пресликавање које није униформно непрекидно. Тада

$$(\exists \varepsilon_0 > 0)(\forall n \in \mathbf{N})(\exists x_n, y_n \in M)\, d_M(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \wedge d_N(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0.$$

Пошто је простор M компактан, низ x_n има конвергентан подниз $x_{j(n)}$. Из истог разлога низ $y_{j(n)}$ има конвергентан подниз $y_{k(n)}$. Нека је

$$\lim_{n\to\infty} x_{k(n)} = x \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} y_{k(n)} = y.$$

Из $d_M(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ и непрекидности метрике следи

$$d(x,y) = \lim_{n\to\infty} d_M(x_{k(n)}, y_{k(n)}) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

па је $x = y$. Пошто је $d_N(f(x_{k(n)}), f(y_{k(n)})) \geq \varepsilon_0$, из непрекидности функције f и метрике следи

$$d(f(x), f(x)) = \lim_{n\to\infty} d_N(f(x_{k(n)}), f(y_{k(n)})) \geq \varepsilon_0,$$

што је контрадикција. $\triangledown$

Пример 15**.** Нека су (M, d_M) и (N, d_N) метрички простори. Пресликавање $f : M \to N$ је *Липшицово*[3]) ако постоји константа $L \geq 0$, таква да је

$$(\forall x, y \in M)\; d_N(f(x), f(y)) \leq L d_M(x, y).$$

Лако се види да је свако Липшицово пресликавање равномерно непрекидно. Специјално, ако је f реална функција реалне променљиве која је диференцихабилна и има ограничен први извод, из Лагранжеве теореме о средњој вредности следи да је она Липшицова, па зато и равномерно непрекидна. ♯

Пример 16**.** Пресликавање

$$f : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad f(x,y) = \arctan(x + y)$$

је равномерно непрекидно. Заиста, из Лагранжеве теореме о средњој вредности следи

$$|\arctan s - \arctan t| = \frac{|s-t|}{1+c^2} \leq |s-t|,$$

па је

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq |(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2)| \leq |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|.$$

Одатле следи равномерна непрекидност функције f. ♯

[3]Липшиц (Rudolf Lipschitz, 1802–1829), немачки математичар

Пример 17. Нека је (M,d) метрички простор и $a \in M$ произвољна тачка. Тада је пресликавање $\psi : M \to \mathbf{R}$, дефинисано са $\psi(x) = d(a,x)$, равномерно непрекидно. Заиста, из неједнакости троугла

$$d(x,a) \leq d(y,a) + d(x,y) \quad \text{и} \quad d(y,a) \leq d(x,a) + d(x,y)$$

добијамо $|\psi(x) - \psi(y)| \leq d(x,y)$, одакле следи равномерна непрекидност функције ψ. ♯

Пример 18. Нека је $(X, \|\cdot\|)$ нормирани векторски простор. Из претходног примера(за $a = 0$) следи да је $\|\cdot\| : X \to \mathbf{R}$ равномерно непрекидно пресликавање. ♯

Задатак 52. Нека су (M_1,d_1) и (M_2,d_2) метрички простори. Доказати да је пресликавање $f : M_1 \to M_2$ равномерно непрекидно ако и само ако за свака два низа a_n, b_n са особином $d_1(a_n,b_n) \to 0$ важи $d_2(f(a_n),f(b_n)) \to 0$. ✓

Пример 19. Пресликавање $f(x,y) = \arcsin\frac{x}{y}$ је непрекидно, али није равномерно непрекидно на свом домену. Заиста, домен овог пресликавања је

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R} \times (\mathbf{R} \setminus \{0\}) \mid |x| \leq |y|\}.$$

Посматрајмо низове $a_n = (n^{-1}, n^{-1}), b_n = (n^{-1}, -n^{-1}) \in D$. За њих важи

$$d(a_n,b_n) = \frac{2}{n} \to 0, \qquad |f(a_n) - f(b_n)| = \pi$$

(d је овде стандардна еуклидска метрика у равни), па f није равномерно нрпрекидно. ♯

Задатак 53. Испитати униформну непрекидност функција из Задатка 32 на стр. 357. ✓

2.7. Повезани простори. Интуитивно говорећи, метрички простор који се састоји из више „одвојених делова" је неповезан. Ову интуитивну представу можемо да формализујемо на два *неекивалентна* начина.

Дефиниција 14. Метрички простор M је *неповезан* ако и само ако постоје отворени и непразни подскупови $U, V \subset M$ такви да је $U \cup V = M$ и $U \cap V = \emptyset$. У супротном, простор M је *повезан.*

Дефиниција 15. Метрички простор M је *путно повезан* ако за сваке две тачке $x_0, x_1 \in M$ постоји непрекидно пресликавање $\gamma : [0,1] \to M$ („пут у M"), такво да је $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$.

Посматрајмо двочлани скуп $\{0,1\}$ као метрички простор са дискретном метриком $d(x,y) = 1 \Leftrightarrow x \neq y$, $d(x,x) = 0$. Важи следећа лема.

Лема 8. *Метрички простор M је неповезан ако и само ако постоји непрекидно пресликавање $\phi : M \to \{0,1\}$ које је НА.*

$\triangle$ Нека је M неповезан. Тада постоје непразни отворени подскупови $U, V \subset M$ такви да је $U \cup V = M$ и $U \cap V = \emptyset$. Пресликавање

$$\phi : M \to \{0,1\}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 \text{ за } x \in U \\ 0 \text{ за } x \in V \end{cases}$$

је НА. Докажимо да је оно непрекидно. Нека је $a \in U$ и нека је x_n низ који конвергира ка a. Пошто је U отворена околина граничне вредности a низа

x_n, постоји природан број n_0 такав да је $x_n \in U$ за $n \geq n_0$. Тада је, по дефиницији функције ϕ, $\phi(x_n) = 1$ за $n \geq n_0$, па је $\lim \phi(x_n) = 1 = \phi(a)$. Тиме је доказана непрекидност функције ϕ у тачки $a \in U$. На исти начин се доказује непрекидност у произвољној тачки скупа V.

Претпоставимо сада да постоји непрекидно пресликавање $\phi : M \to \{0, 1\}$ које је НА.

$$U = \phi^{-1}(B(1, \frac{1}{2})), \quad V = \phi^{-1}(B(0, \frac{1}{2})),$$

где су $(B(1, \frac{1}{2}))$ и $(B(0, \frac{1}{2}))$ отворене лопте полупречника $\frac{1}{2}$ у простору $\{0, 1\}$, са центрима у тачкама 1 и 0. Јасно је да је $M = U \cup V$. Пошто је пресликавање ϕ НА, скупови U и V су непразни. Из непрекидности пресликавања ϕ и Теореме 2 следи да су скупови U и V отворени. Тиме је доказано да је простор M неповезан. ▽

Лема 9. *Путно повезан простор је повезан.*

△ Претпоставимо супротно, да је M путно повезан, али да није повезан. Из Леме 8 следи да постоји непрекидно пресликавање $\phi : M \to \{0, 1\}$ које је НА. Нека су $x_0, x_1 \in M$ тачке простора M такве да је $\phi(x_0) = 0$, $\phi(x_1) = 1$. Пошто је M путно повезан, постоји непрекидно пресликавање $\gamma : [0, 1] \to M$ такво да је $\gamma(x_0) = 0$, $\gamma(x_1) = 1$. Тада је пресликавање $\phi \circ \gamma : [0, 1] \to \mathbf{R}$ непрекидно пресликавање интервала на $\{0, 1\}$. То је контрадикција, јер је непрекидна слика интервала интервал (Последица 9 на стр. 111). ▽

Задатак 54. Нека је A повезан скуп у метричком простору и $A \subset B \subset \overline{A}$. Доказати да је B повезан. ✓

Задатак 55. Доказати да је скуп

$$S = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid y = \sin \frac{1}{x}\} \cup \{(0, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$$

повезан, али да није путно повезан.

Упутство: искористити Задатак 54. ✓

Теорема 10. *Потпростор реалне праве* $\mathbf{R}$ *је повезан ако и само ако је интервал.*

△ Очигледно је да је интервал путно повезан, па је повезан.

Нека је скуп $M \subset \mathbf{R}$ повезан. Претпоставимо да M није интервал. Тада постоје тачке $p, q \in M$ и $a \in \mathbf{R} \setminus M$ такве да је $p < a < q$. Посматрајмо скупове

$$U = \{x \in M \mid x < a\} \quad \text{и} \quad V = \{x \in M \mid x > a\}$$

Очигледно је да је $U \cap V = \emptyset$ и $U \cup V = M$. Ако је $x_0 \in U$, онда је $x_0 < a$, па постоји је

$$B\big(x_0, \frac{a - x_0}{2}\big) = \big\{x \in M \mid d(x_0, x) < \frac{a - x_0}{2}\big\} \subset U,$$

што значи да је U отворен. Слично се доказује и да је V отворен. Пошто је $p \in U$, $q \in V$, скупови U и V су непразни. Одатле следи да је M неповезан скуп, што је контрадикција. Тиме је доказано да је сваки повезан подскуп реалне праве интервал. ▽

Теорема 11. *Нека је M повезан и N произвољан метрички простор и $f : M \to N$ непрекидно пресликавање. Тада је потпростор $f(M) \subset N$ повезан.*

△ Претпоставимо да је N неповезан. Из Леме 8 следи да постоји пресликавање $\phi : N \to \{0,1\}$ које је непрекидно и НА. Тада је и пресликавање $\phi \circ f : M \to \{0,1\}$ непрекидно и НА. Из Леме 8 тада би следило да је M неповезан, што је у супротности са претпоставком теореме. ▽

Напомена 3. Специјално, из претходне теореме следи теорема о међувредности за реалне функције на 110. страни: ако је $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ непрекидна функција, онда је $f([a,b])$ интервал. ◇

Теорема 12. *Нека је $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ фамилија повезаних подскупова метричког простора M, таква да за неко $\lambda_0 \in \Lambda$ важи*

$$(\forall \lambda \in \Lambda)\, A_{\lambda_0} \cap A_\lambda \neq \emptyset.$$

Тада је скуп

$$A = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$$

повезан.

△ Нека је $\phi : A \to \{0,1\}$ непрекидно пресликавање. Пошто су скупови A_λ повезани, на сваком од њих, на основу Леме 8, пресликавање φ је константно. Претпоставимо, не умањујући општост, да је $\phi \equiv 1$ на A_{λ_0}. Пошто је за свако λ скуп $A_{\lambda_0} \cap A_\lambda$ непразан, мора да важи $\phi(x) \equiv 1$ на сваком A_λ, тј. на целом A.

Тиме је доказано да је свако непрекидно пресликавање $\phi : A \to \{0,1\}$ константно. Одатле, на основу Леме 8, следи да је A повезан. ▽

Задатак 56. Нека је (M,d) метрички простор и $\sim$ релација на M, дефинисана са $x \sim y$ ако и само ако постоји повезан скуп који садржи x и y. Доказати да је $\sim$ релација еквиваленције и да је класа еквиваленције $[x]$ тачке $x \in M$ највећи повезан скуп који садржи x. ✓

Дефиниција 16. Класе еквиваленције из Задатка 56 називају се *компонентама повезаности* метричког простора (M,d). Ако је $A \subset M$, компоненте повезаности скупа A су компоненте повезаности метричког простора $(A, d|_A)$.

Задатак 57. Нека је $(X, \|\cdot\|)$ нормирани векторски простор и $V \subset X$ отворен подскуп. доказати да је свака компонента повезаности скупа V отворен скуп. ✓

2.8. Производ метричких простора. Нека су (M,d_M) и (N,d_N) метрички простори. Постоји више природних начина да се на скупу $M \times N$ дефинише метрика. Ми ћемо под производом метричких простора подразумевати метрички простор $M \times N$ са метриком

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) := \sqrt{\big(d_M(x_1,x_2)\big)^2 + \big(d_N(y_1,y_2)\big)^2}. \tag{13}$$

Из Коши–Шварцове неједнакости следи неједнакост троугла за метрику d, док се остала својства метрике проверавају лако. Овакав избор метрике на $M \times N$ уопштава дефиницију еуклидске метрике на $\mathbf{R}^n$.

Напомена 4. Лако можемо да дефинишемо и метрике на производу које уопштавају Задатак 50 на стр. 365 и тако добијемо друге, тополошки еквивалентне метрике на производу метричких простора. У складу са Напоменом 2, избор неке од тих метрика не утиче на појмове непрекидности и граничне вредности. ◇

Лема 10. *Низ (x_n, y_n) у $M \times N$ конвергира ка (x_∞, y_∞) ако и само ако низ $x_n \in M$ конвергира ка x_∞ и низ $y_n \in N$ конвергира ка y_∞.*

△ Доказ следи из неједнакости

$$d_M(x_n, x_\infty) \le \sqrt{\big(d_M(x_n, x_\infty)\big)^2 + \big(d_N(y_n, y_\infty)\big)^2},$$
$$d_N(y_n, y_\infty) \le \sqrt{\big(d_M(x_n, x_\infty)\big)^2 + \big(d_N(y_n, y_\infty)\big)^2}.$$

▽

Следећа последица уопштава Последицу 5 на стр. 106.

Последица 5. *Пројекције*

$$\pi_M : M \times N \to M, \quad \pi_M(x, y) = x \quad и \quad \pi_M : M \times N \to N, \quad \pi_N(x, y) = y$$

су непрекидна пресликавања.

△ Доказ следи из Леме 10 и дефиниције непрекидности помоћу низова. ▽

Као последицу, добијамо следеће уопштење Леме 4 на стр. 106.

Последица 6. *Нека су X, M и N метрички простори. Пресликавање $f : X \to M \times N$, $f(x) = (f_M(x), f_N(x))$ је непрекидно ако и само ако су непрекидна пресликавања $f_M : X \to M$ и $f_N : X \to N$.*

△ Пошто је $f_M = \pi_M \circ f$ и $f_N = \pi_N \circ f$, доказ следи из Последице 5. ▽

Задатак 58. Доказати да је пресликавање

$$f : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{R}^3, \qquad f(z_1, z_2) = (|z_1|^2 + (\operatorname{Re} z_2)^3, e^{\operatorname{Im} z_2} + \cos(\operatorname{Re} z_1), 0)$$

непрекидно. ✓

Пример 20. **(Непрекидност метрике)** Метрика

$$d : M \times M \to \mathbf{R}$$

је непрекидно пресликавање. Заиста, нека је (x_n, y_n) низ у $M \times M$ такав да $(x_n, y_n) \to (x_\infty, y_\infty)$ кад $n \to \infty$. На основу Леме 10 следи да тада $x_n \to x_\infty$ и $y_n \to y_\infty$. Из неједнакости троугла следи

$$d(x, y) \le d(x, x_\infty) + d(x_\infty, y_\infty) + d(y_\infty, y)$$
$$d(x_\infty, y_\infty) \le d(x, x_\infty) + d(x, y) + d(y_\infty, y).$$

Одатле следи

$$d(x_n, y_n) - d(x_\infty, y_\infty) \le d(x_n, x_\infty) + d(y_\infty, y_n)$$
$$d(x_\infty, y_\infty) - d(x_n, y_n) \le d(x_n, x_\infty) + d(y_\infty, y_n),$$

тј. $|d(x_n, y_n) - d(x_\infty, y_\infty)| \le d(x_n, x_\infty) + d(y_\infty, y_n)$. Из Примера 8 (стр. 355) следи да лева страна тежи нули кад $n \to \infty$. ♯

Задатак 59. Нека је $(V, \|\cdot\|)$ нормирани векторски простор. Доказати да је пресликавање

$$\varphi : V \times V \to \mathbf{R}, \qquad \varphi(x, y) = \|y - x\|$$

непрекидно. ✓

Задатак 60. Нека су (M_1, d_1) и (M_2, d_2) метрички простори и $f : M_1 \to M_2$ непрекидно пресликавање. Доказати да је график

$$\Gamma(f) := \{(x, f(x) \mid x \in M_1\}$$

затворен подскуп у $M_1 \times M_2$. ✓

Теорема 13. *Нека су (M, d_M) и (N, d_N) метрички простори. Метрички простор $M \times N$ има неко од следећих својстава*

1. *ограниченост*
2. *сепарабилност*
3. *комплетност*
4. *компактност*
5. *повезаност*

ако и само ако то својство има сваки од метричких простора (M, d_M) и (N, d_N).

△ Доказ за прва четири својства следи директно из дефиниције метрике (13) и дефиниција ограничености, сепарабилности, комплетности и компактности.

Докажимо још да је $M \times N$ повезан ако и само ако су M и N повезани. Нека је $M \times N$ повезан. Пошто су пројекције непрекидна пресликавања (Последица 5), из Теореме 11 следи да су M и N повезани.

Претпоставимо сада да су M и N повезани. За свако $x_0 \in M$ и $y \in N$ пресликавања

$$M \to M \times \{y\},\ x \mapsto (x, y) \quad \text{и} \quad N \to \{x_0\} \times N,\ y \mapsto (x_0, y)$$

су изометрије, па су скупови $\{x_0\} \times N$ и $M \times \{y\}$ повезани. Пошто је

$$M = \{x_0\} \times N \cup \bigcup_{y \in N} M \times \{y\} \quad \text{и} \quad \{x_0\} \times N \cap M \times \{y\} = \{(x_0, y\} \neq \emptyset,$$

из Теореме 12 следи да је $M \times N$ повезан. ▽

3. Непрекидност у тополошким просторима

Из Теореме 2 следи да се непрекидност може описати само у терминима топологије. Зато је природно разматрати структуре на којима је дефинисан само појам отвореног скупа, а не и појам метрике. Мотивисани Теоремом 1, овакве структуре уводимо следећом дефиницијом.

Дефиниција 17. Пар (X, τ_X), где је X скуп, а τ_X фамилија његових подскупова за коју важи

(T1) $X \in \tau_X$, $\emptyset \in \tau_X$

(T2) ако је $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ фамилија скупова из τ_X, онда је $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \tau_X$

(T3) $U_1, U_2 \in \tau_X \ \Rightarrow\ U_1 \cap U_2 \in \tau_X$.

називамо *тополошким простором*, а фамилију τ_X *топологијом на* X. Елементе фамилије τ_X називамо *отвореним скуповима*. Подскуп $F \subset X$ називамо *затвореним* ако је скуп $X \setminus F$ отворен.

Затворени скупови имају следећа својства.

Лема 11. *Нека је ζ_M фамилија свих затворених подскупова у метричком простору M. Тада важи:*

(31) $M \in \zeta_M$, $\emptyset \in \zeta_M$
(32) $F_1, F_2 \in \zeta_M \ \Rightarrow \ F_1 \cup F_2 \in \zeta_M$
(33) *ако је* $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *фамилија скупова из* ζ_M, *онда је* $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda \in \zeta_M$

△ Доказ је аналоган доказу Последице 2. ▽

Дефиниција 18. Нека су (X, τ_X) и (Y, τ_Y) тополошки простори. Пресликавање $f : X \to Y$ је *непрекидно у тачки* $a \in X$ ако за сваки отворен скуп $V \in \tau_Y$ који садржи тачку $f(a)$ постоји отворен скуп $U \in \tau_X$ који садржи тачку a такав да је $f(U) \subset V$. Пресликавање је *непрекидно на скупу* $A \subset X$ ако је непрекидно у свакој тачки $a \in A$. Специјално, пресликавање f је *непрекидно* ако је непрекидно на целом простору X.

Задатак 61. Доказати да Теорема 2 на страни 360 важи и у тополошким просторима (са незнатном модификацијом доказа). ✓

ДОДАТАК 2

Питања и задаци

1. Први семестар

1.1. Питања.

(1) Да ли постоји функција $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ (тј. таква да постоји n–ти извод $D^n f(x)$ за све $x \in \mathbb{R}$ и све $n \in \mathbb{N}$) таква да је $f(x) > 0$ за $x \in]0,1[$ и $f(x) = 0$ за $x \notin]0,1[$?

(2) Да ли постоји непрекидна функција $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ за коју је $f'_-(x) = x$ и $f'_+(x) = 2x$ за све $x \in]0,1[$?

(3) Нека је $(F, +, \cdot, 0, 1)$ поље и $S \subset F \setminus \{0\}$ подскуп који је затворен у односу на операције поља и за који је $S \cap (-S) = \emptyset$, $F = (-S) \cup \{0\} \cup S$. Са $x < y \Leftrightarrow x - y \in S$ је дефинисана релација тоталног поретка на S, таква да је $F_+^* = S$ (доказати!). Ако је $(F, +, \cdot, \leq, 0, 1)$ тотално уређено поље, да ли је релација поретка на њему дефинисана неким скупом S на претходно описан начин? Да ли је тај скуп јединствен?

(4) Нека је F скуп свих рационалних функција на $\mathbb{R}$, тј. скуп функција облика $p(x)/q(x)$ где су $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ полиноми који немају заједничку нулу (у $\mathbb{C}$), при чему q није идентички једнак нули. Нека је $S \subset F$ скуп свих рационалних функција облика $p(x)/q(x)$ таквих да најстарији коефицијенти (коефицијенти уз x са највећим степеном) полинома p и q имају исти знак (овај скуп задовољава услове Питања 3). Да ли је поље са релацијом поретка дефинисаном подскупом S архимедско?

(5) Да ли свако тотално уређено поље садржи потпоље рационалних бројева (прецизније: уређено потпоље изоморфно пољу рационалних бројева)? Да ли постоји тотално уређено поље у коме поље рационалних бројева није густо?

(6) Нека су a и b рационални бројеви и $[a,b]_{\mathbb{Q}} := \{q \in \mathbb{Q} \mid a \leq q \leq b\}$. Да ли за произвољну непрекидну функцију $f : [a,b]_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{R}$ важи неко од следећих тврђења:
   (а) f је ограничена;
   (б) f је равномерно непрекидна;
   (в) ако је $f(a)f(b) < 0$ онда је $f(c) = 0$ за неко $c \in]a,b[$;
   (г) f има минимум и максимум?
   (д) Да ли (г) важи ако је f равномерно непрекидна?

(7) Нека су a, b и $[a,b]_{\mathbb{Q}}$ као у Питању 6. Функција $f : [a,b]_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{C}$ је *диференцијабилна у тачки* $q_0 \in]a,b[\cap \mathbb{Q}$ ако постоји број $z_0' \in \mathbb{C}$ за који важи $f(q_0 + h) - f(q_0) = z_0' \cdot h + o(h)$ кад $\mathbb{Q} \ni h \to 0$. Да ли за такву функцију важи неко од следећих тврђења:
   (а) ако је $f'(x) \equiv 0$ онда је $f \equiv const$;
   (б) ако је $f([a,b]_{\mathbb{Q}}) \subset \mathbb{R}$ и $f(a) = f(b)$ онда је $f'(c) = 0$ за неко $c \in]a,b[$?

(8) Нека је $S \subset \mathbb{C}$ затворен скуп. Да ли постоји функција $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ која је прекидна у свим тачкама скупа S и непрекидна на $\mathbb{C} \setminus S$?

(9) Да ли за низ a_n из $\lim_{n\to\infty} |a_{n+p} - a_n| = 0$ за све $p \in \mathbb{N}$ следи да a_n конвергира?

(10) Да ли постоји скуп X и низ $A_n \in \mathcal{P}(X)$ његових подскупова за који истовремено важи $\liminf A_n = \limsup A_n = \emptyset$ и $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Card}(A_n) = \infty$?

(11) Да ли постоји функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ чији је извод у некој тачки строго позитиван, а она није монотона ни у једној околини те тачке?

(12) Да ли постоји *монотона* функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ за коју важи $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ и $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, али не и $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$?

(13) Да ли из непрекидности функције f на $[a, b]$ следи непрекидност функције $g(x) = \sup\{f(t) \mid a \le t \le x\}$?

(14) Да ли из диференцијабилности функције f на $]a, b[$ следи диференцијабилност функције $g(x) = \sup\{f(t) \mid a < t \le x\}$?

(15) Да ли из диференцијабилности функције f на $]a, b[$ следи да функција $g(x) = \sup\{f(t) \mid a < t \le x\}$ има леви и десни извод на $]a, b[$?

(16) Да ли постоји полином трећег степена чији график пролази кроз тачке $(-1, 0)$, $(0, 0)$, $(1, 0)$, такав да тангента на график у $(0, 0)$ образује са позитивним делом x–осе угао $\pi/4$? Ако постоји, да ли је јединствен?

(17) Нека је $A \subset \mathbb{C}$, $f : A \to \mathbb{C}$ непрекидна функција и $z_n \in A$ Кошијев низ. Да ли одатле следи да је низ $f(z_n)$ Кошијев?

(18) Нека је $B \subset \mathbb{C}$, $f : B \to \mathbb{C}$ равномерно непрекидна функција и $z_n \in B$ Кошијев низ. Да ли одатле следи да је низ $f(z_n)$ Кошијев?

(19) Нека су $a_0 < b_0 < a_1 < b_1 < \cdots < a_n < b_n$ реални бројеви. Да ли полином $p(x) = \prod_{k=0}^{n}(x + a_k) + 2\prod_{k=0}^{n}(x + b_k)$ има комплексну нулу?

(20) Да ли је извод диференцијабилне парне функције непарна функција? Да ли је извод диференцијабилне непарне функције парна функција?

(21) Да ли је извод диференцијабилне периодичне функције периодична функција?

(22) Да ли неконстантна диференцијабилна периодична функција има најмањи позитивни период?

(23) Да ли произвољна неконстантна периодична функција има најмањи позитивни период?

(24) Да ли функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ може да има строги локални екстремум у непребројиво много тачака?

(25) Да ли постоји непрекидна функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таква да за свако $y \in \mathbb{R}$ скуп $f^{-1}(y)$ има
   (а) два елемента;
   (б) три елемента?

(26) Да ли постоји непрекидна бијекција
   (а) реалне праве $\mathbb{R}$ на интервал $[0, 1]$;
   (б) реалне праве $\mathbb{R}$ на круг $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$?

(27) Нека је $b(\mathbb{C})$ скуп ограничених комплексних низова и $c_0(\mathbb{C})$ скуп комплексних низова који конвергирају ка 0 и нека је $\sim$ релација еквиваленције на $b(\mathbb{C})$ дефинисана са $\zeta_n \sim \eta_n \Leftrightarrow \zeta_n - \eta_n \in c_0(\mathbb{C})$. Да ли је $(b(\mathbb{C})/_\sim, +, \cdot)$ поље?

(28) Ако полином $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ има само реалне корене, да ли исто важи за полином $\frac{d}{dx}p$?
(29) Да ли неконстантна периодична функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ има $\lim_{x\to+\infty} f(x)$?
(30) Да ли из $(\forall a \in \mathbb{R}) \lim_{n\to 0} f(a/n) = 0$ следи $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$?

1.2. Одговори. (1) Да. (2) Не. (3) Да. (4) Не. (5) Да. (6) Не. (7) Не. (8) Да. (9) Не. (10) Да. (11) Да. (12) Да. (13) Да. (14) Не. (15) Да. (16) Да. (17) Не. (18) Да. (19) Не. (20) Да. (21) Да. (22) Да. (23) Не. (24) Не. (25) (а) Не. (б) Да. (26) Не. (27) Не. (28) Да. (29) Не. (30) Не.

1.3. Задаци.

(1) Скицирати скуп $\{z \in \mathbb{C} \mid \min\{|z-1-i|, |z+1-i|, |z+i|\} \leq 2\}$ у комплексној равни $\mathbb{C}$.
(2) Доказати да постоји реална функција f реалне промењљиве, таква да је крива $z : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{C}$, $z(t) = t(1-t^2)^{-1} + i(t-2t^3)(1-t^2)^{-1}$ њен график у $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$. Испитати функцију f и нацртати њен график.
(3) Балон се пење вертикално брзином 40 cm/s. У тренутку када је балон на висини 20 m кроз тачку испод њега пролази бициклиста који се креће брзином 5 m/s. Којом брзином се три секунде касније повећава растојање између бициклисте и балона?
(4) У Декартовом $x0y$–координатном систему скицирати криву γ задату у поларним координатама (r, θ) једначином $r^2 \sin 2\theta = 2a^2$, где је $a > 0$. Нека је $P \in \gamma$ произвољна тачка. Доказати да је троугао који образују тангента на γ у P, права OP и x–оса једнакокраки.
(5) Скицирати графике следећих функција:
   (а) $f_1(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + x^n + (1-x)^{2n}}$, $x \geq 0$;
   (б) $f_2(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + (x/2)^{2n} + (1/x)^{2n}}$, $x > 0$;
   (в) $f_3(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\cos^{2n} x + \sin^{2n} x}$, $x \in \mathbb{R}$;
   (г) $f_4(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(e^n + x^n)}{n}$, $x \geq 0$
   (д) $f_5(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2 e^{nx} + x}{e^{nx} + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.
(6) Одредити домене и испитати непрекидност следећих функција реалне промењљиве x:
   (а) $f(x) = \lim_{n\to\infty} x^n$
   (б) $g(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} k^{-x} 2^{-k}$
   (в) $h(x) = \sup\{n^{-x} 2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.
(7) Нека је $A(a_1, \cdots, a_n)$ аритметичка, а $G(a_1, \cdots, a_n)$ геометријска средина позитивних бројева $a_1, \ldots, a_n$. Доказати да функција
$$f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{A(a_1, \cdots, a_{n-1}, x)}{G(a_1, \cdots, a_{n-1}, x)}$$
има минимум у тачки која је аритметичка средина бројева $a_1, \ldots, a_{n-1}$.
(8) Нека је $\zeta = a + ib$ тачка у комплексној равни и L права кроз ζ која сече реалну и имагинарну осу у тачкама x_0 и iy_0. Доказати неједнакости
   (а) $|x_0 + iy_0| \geq (|a|^{2/3} + |b|^{2/3})^{3/2}$
   (б) $|x_0| + |y_0| \geq (\sqrt{|a|} + \sqrt{|b|})^2$
   (в) $|x_0 y_0| \geq 4|ab|$.

(9) Нека је z_n низ у $\mathbb{C}$.
   (а) Доказати или оповргнути тврђење: низ z_n конвергира ако и само ако конвергира сваки његов подниз.
   (в) Доказати или оповргнути тврђење: низ z_n има подниз који конвергира или подниз који је неограничен.
   (б) Нека је z_n низ који не конвергира ка $\zeta \in \mathbb{C}$. Доказати или оповргнути тврђење: постоји подниз $z_{\varphi(n)}$ са својством да ниједан његов подниз не конвергира ка ζ.

(10) Наћи све монотоне функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да за све $x, y \in \mathbb{R}$ важи $f(x+y) = e^y f(x) + e^x f(y)$.

(11) Наћи лимес супериор и лимес инфериор низа $x_n \in \mathbb{R}$ дефинисаног са

$$x_0 = 0, \quad x_{2n} = \frac{x_{2n-1}}{2}, \quad x_{2n+1} = \frac{1}{2} + x_{2n}.$$

(12) Нека је $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрекидна функција која има леви извод $f'_-(x)$ у свакој тачки $x \in]a,b[$.
   (а) Доказати да ако f није монотона онда постоји $c \in]a,b[$ за које је $f'_-(c) = 0$.
   (б) Доказати да ако је $f(a) = f(b)$, онда је

$$\inf_{a<x<b} f'_-(x) \le 0 \le \sup_{a<x<b} f'_-(x).$$

   (в) Доказати да је

$$\inf_{a<x<b} f'_-(x) \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le \sup_{a<x<b} f'_-(x).$$

(13) Функција $f :]a,b[\to \mathbb{C}$ има непрекидан десни извод $f'_+(x)$ у свакој тачки $x \in]a,b[$. Доказати да је f диференцијабилна на $]a,b[$.

(14) Нека је $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ двапут диференцијабилна функција и нека је $M_j := \sup_{x>0} |D^j f(x)|$ за $j \in \{0,1,2\}$. Доказати да је $M_1^2 \le 4M_0M_2$.

(15) Нека је $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ двапут диференцијабилна функција са ограниченим другим изводом, таква да је $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Доказати да је $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. Показати контрапримером да тврђење не важи ако се изостави услов ограничености другог извода.

(16) Нека су $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ диференцијабилне функције. Доказати да је функција $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ диференцијабилна у тачкама x у којима је $f(x) \neq g(x)$ и у онима у којима је $f(x) = g(x)$ и $f'(x) = g'(x)$. Чему је једнак извод $h'(x)$ у тим тачкама? Шта је са осталим тачкама?

(17) Нека је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрекидна функција и нека је $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Доказати да је функција $g(x) = \sup\{t \mid f(t) < x\}$ непрекидна ако и само ако је f строго растућа.

(18) Нека је $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ непрекидна функција која задовољава асимптотску релацију $f(x) = o(x)$ кад $x \to +\infty$. Доказати да за функцију $g(x) := \sup_{0\le t\le x} f(t)$ важи $g(x) = o(x)$ кад $x \to +\infty$.

(19) Доказати да је функција $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ конвексна ако и само ако за $x_1 < x_2 < x_3$ важи

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) \end{vmatrix} \ge 0$$

и да је строго конвексна ако и само ако важи строга неједнакост.

(20) Низ a_n је задат са $a_0 = \sqrt{a}$ за $a \in \mathbb{R}$, $a_{n+1} = \sqrt{a + a_n}$. Да ли $\lim_{n\to\infty} a_n$ непрекидно зависи од a?

(21) Функције f и g су диференцијабилне у тачки a. Израчунати

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{x - a}.$$

(22) Доказати да је ограничена конвексна функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ константна.

(23) Нека је E скуп свих низова $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ таквих да постоји $k \in \mathbb{Z}$ (које може да буде различито за различите a) са својством $a_n = 0$ за све $n < k$. У скупу E дефинисане су операције сабирања и множења помоћу

$$(a + b)_n = a_n + b_n, \quad (a \cdot b)_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}.$$

(а) Доказати да је $(E, +, \cdot)$ са овако дефинисаним операцијама поље. (Ово поље се назива пољем формалних редова $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n T^n$; дефинисане операције уопштавају правило множења коефицијената полинома; реч *формалних* значи да не постављамо питање конвергенције претходне суме, као ни домена променљиве T, већ је користимо само као другу ознаку за низ a, ради лакшег памћења и извођења дефинисаних операција поља.)

(б) Доказати да *лексикографски поредак*

$$a <_L b \Leftrightarrow a_{\min\{n|a_n\neq b_n\}} < b_{\min\{n|a_n\neq b_n\}}$$

дефинише релацију поретка $a \leq_L b \Leftrightarrow (a = b \vee a <_L b)$ и да је $(E, +, \cdot, \leq_L)$ тотално уређено поље.

(в) Доказати да у пољу $(E, +, \cdot, \leq_L)$ не важи Архимедова аксиома.

(24) Нека је $f : I \to \mathbb{R}$ функција дефинисана на интервалу $I \subset \mathbb{R}$. *Лежандровом трансформацијом* функције f назива се функција

$$f^*(t) = \sup_{x\in I}(tx - f(x)).$$

Нека је I^* домен функције f^*, тј. $I^* = \{t \in \mathbb{R} \mid f^*(t) \neq \infty\}$. Доказати:

(а) Скуп I^* је или празан, или једна тачка, или интервал.

(б) Ако је функција f конвексна, онда је $I^* \neq \emptyset$ и $(f^*)^* = f$ (тј. Лежандрова трансформација је *инволутивна*).

(в) Доказати да за све $(x, t) \in I \times I^*$ важи неједнакост

$$xt \leq f(x) + f^*(t).$$

(г) Извести из (в) доказ неједнакости

$$xt \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}t^q \quad \text{за} \quad 1/p + 1/q = 1$$

и неједнакости

$$xt \leq e^x + t\log(t/e).$$

(д) Ако је f диференцијабилна и конвексна, доказати да је

$$f^*(t) = tx(t) - f(x(t)),$$

где је $x(t)$ решење једначине $t = f'(x)$ по x (дајући при томе аргумент зашто та једначина има решење). Каква геометријска интерпретација Лежандрове трансформације се може дати на основу тога?

(25) Нека је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ конвексна функција и нека је

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Доказати да је $f \equiv 0$.

(26) Доказати да за сваку конвексну функцију $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ постоји (коначан или бесконачан) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$.

(27) Нека су $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ диференцијабилне функције које задовољавају $f'(x) = g(x)$, $f''(x) = -f(x)$ за све x и нека је $h(x) = (f(x))^2 + (g(x))^2$. Ако је $h(0) = 5$, наћи $h(10)$.

(28) Функција $f : A \to \mathbb{R}$ се назива *полунепрекидном одозго* у тачки $a \in A$ ако је

$$\limsup_{x\to a} f(x) \leq f(a),$$

а *полунепрекидном одоздо* ако је

$$\liminf_{x\to a} f(x) \geq f(a).$$

(а) Доказати да је функција непрекидна у тачки a ако и само ако је полунепрекидна и одоздо и одозго у тој тачки.

(б) Доказати да је карактеристична функција отвореног скупа полунепрекидна одоздо, а карактеристична функција затвореног скупа полунепрекидна одозго.

(в) Испитати полунепрекидност функције

$$f(x) = \begin{cases} (-1)^n \frac{n}{n+1}, & \text{ако је } x = \frac{m}{n} \text{ нескратив, } m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{за } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(г) Доказати да је *Риманова функција*

$$\mathcal{R}(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{ако је } x = \frac{m}{n} \text{ нескратив, } m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{за } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

полунепрекидна одозго у свакој тачки, а да је скуп њених прекида густ у $\mathbb{R}$.

(д) Доказати да је супремум фамилије функција полунепрекидних одоздо полунепрекидан одоздо. Формулисати и доказати дуално тврђење за инфимум.

(29) Дужине катета правоуглог троугла су a и 1, а дужина хипотенузе је c. Угао између катете дужине 1 и хипотенузе је s радијана. Израчунати лимесе следећих израза кад $s \to \pi/2$:

(а) $c - a$

(б) $c^2 - a^2$

(в) $c^3 - a^3$.

(30) Испитати функцију $f(x) = |x + 2|e^{-1/x}$ и нацртати њен график.

2. Други семестар

2.1. Задаци.

(1) Нека је

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right).$$

Наћи граничну вредност низа $x_n = \sqrt[n]{p_n}$.

(2) Израчунати

$$\int_0^4 \frac{|x-1|}{|x-2| + |x-3|}\, dx.$$

(3) Израчунати

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{1+e^x}\, dx.$$

(4) Израчунати

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin^{2014} x}{\sin^{2014} x + \cos^{2014} x}\, dx.$$

(5) Нека су $a_1, \ldots, a_k$ позитивни реални бројеви. Доказати да је

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + \cdots + a_k^n} = \max_{1\le j\le k} a_j.$$

Нека је $f : [0,1] \to [0, +\infty[$ непрекидна функција. Доказати да је

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_0^1 \big(f(t)\big)^n\, dt \right)^{\frac{1}{n}} = \max_{0\le t\le 1} f(t).$$

Испитати конвергенцију реда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 x^n e^{-nx}\, dx.$$

(6) Нека је $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ функција интеграбилна по Риману. Доказати да ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int_1^2 f(2^{-n}x)\, dx$$

конвергира и израчунати његов збир.

(7) Доказати да за $x, y \in \mathbb{R}$ важи формула

$$\cos(x+iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y,$$

где су $\sinh, \cosh$ хиперболички синус и косинус, а $i = \sqrt{-1}$.

(8) Нека је $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ неапсолутно конвергентан ред комплексних бројева. Доказати да за сваки број $\zeta \in \mathbb{C}$ постоји низ $\mu_n \in \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ такав да је

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n z_n = \zeta.$$

(9) Нека је $\tau(n)$ број делитеља природног броја n. Доказати да за $|z| < 1$ важи

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) z^n.$$

Доказати да је укупан број ненегативних решења независних Диофантових једначина[1]

$$\begin{gathered} x+2y=n-1,\\ 2x+3y=n-3,\\ 3x+4y=n-5,\\ \cdots\cdots\\ \cdots\cdots\\ \cdots\cdots \end{gathered}$$

једнак $n+2-\tau(n+2)$.

(10) Доказати да су функције

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{за } x\neq 0\\ 0 & \text{за } x=0\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases}0 & \text{за } x\notin\mathbb{Q}\\ \frac{1}{n} & \text{за } x=\frac{m}{n},\ m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N},\ m,n \text{ нескративи}\end{cases}$$

интеграбилне по Риману на сваком интервалу $[a,b]$, али да њихова композиција $f\circ g$ није ни на једном.

(11) Нека је $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ неапсолутно конвергентан ред у $\mathbb{R}$ и $s_n=|a_0|+\cdots+|a_n|$. Наћи граничну вредност низа

$$b_n=\frac{\operatorname{sign}(a_n)}{\sqrt{1+s_n}}.$$

Да ли ред $\sum_{n=0}^{\infty}a_nb_n$ конвергира?

(12) Испитати конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k\pi}{n}\right)^2.$$

(13) *Конволуција* низова a_n и b_n комплексних бројева је низ

$$a_n\star b_n:=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}.$$

Ако низ a_n конвергира ка a_∞ и ред $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ апсолутно конвергира, доказати да је

$$\lim_{n\to\infty}a_n\star b_n=a_\infty\sum_{n=0}^{\infty}b_n.$$

(14) Нека је $a_n=(-1)^n(n+1)^{-1/2}$ и $c_n=a_n\star a_n$. Доказати да ред $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ конвергира, а ред $\sum_{n=0}^{\infty}c_n$ дивергира. Овај пример показује да је могуће да се формалним Кошијевим множењем два конвергентна реда добије дивергентан ред.

(15) Нека је $a_0=2$, $b_0=-1$ и $a_n=2^{n-1}$, $b_n=1$ за $n\geq 1$. Доказати да редови $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ дивергирају, а да ред $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\star b_n)$ конвергира. Овај пример показује да је могуће да се формалним Кошијевим множењем два дивергентна реда добије конвергентан ред.

(16) Нека је $f:[1,+\infty]\to\mathbb{R}$ непрекидна функција таква да

$$\int_0^{+\infty}f(x)\,dx$$

[1] тј. број решења $x,y\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ прве једначине + број решења $x,y\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ друге $+\cdots$.

конвергира. Доказати да постоји неограничен растући низ a_n такав да је

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} f(a_n).$$

(17) Наћи све непрекидне функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ за које је

$$\int_0^x e^t f(x-t)\,dt = \sin x$$

за све $x \in \mathbb{R}$.

(18) Наћи све интеграбилне функције $f[0,1] \to \mathbb{C}$ за које је

$$f(x) = \frac{f\left(\frac{x}{3}\right) + f\left(\frac{x+1}{3}\right) + f\left(\frac{x+2}{3}\right)}{3}$$

за све $x \in [0,1]$ и $f(1/\pi) = 1$.

(19) Нека је $f : [0,+\infty[\to \mathbb{C}$ непрекидна функција, таква да низ

$$z_n = \int_0^1 f(n+t)\,dt$$

конвергира ка z_∞. Доказати да низ

$$\zeta_n = \int_0^1 f(nt)\,dt$$

конвергира и наћи његову граничну вредност.

(20) Нека је $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ непрекидна функција. Претпоставимо да важи

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = 0$$

за сваку непрекидну функцију $g : [a,b] \to \mathbb{C}$. Доказати да је $f \equiv 0$.

2.2. Питања.

(1) Да ли тврђење у задатку (20) важи ако се претпоставка у њему замени слабијом претпоставком

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = 0$$

за сваку непрекидну функцију $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ такву да је $g(a) = g(b) = 0$?

(2) Нека је a_n низ реалних бројева, такав да ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ конвергира. Да ли конвергира ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^4$?

(3) Да ли постоји низ реалних бројева a_n, такав да ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ конвергира, а ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^3$ дивергира?

(4) Да ли постоји непрекидна позитивна функција $f : [1,+\infty[\to]0,+\infty[$ таква да ред $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ конвергира, а интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ дивергира?

(5) Да ли постоји непрекидна позитивна функција $f : [1,+\infty[\to]0,+\infty[$ таква да ред $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ дивергира, а интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ конвергира?

(6) Да ли постоји непрекидна позитивна функција $f : [1,+\infty[\to]0,+\infty[$ таква да интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ конвергира, а $f(x)$ не тежи нули кад $x \to +\infty$?

(7) Да ли постоји непрекидна позитивна функција $f : [1, +\infty[\to]0, +\infty[$ која је неограничена на сваком интервалу $[a, +\infty[$, $a > 0$, а интеграл $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ конвергира?

(8) Нека $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ неапсолутно конвергентан ред. Да ли постоји низ b_n који конвергира ка нули, такав да ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ дивергира?

(9) Да ли постоји степени ред $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ који конвергира у само једној тачки $z \in \mathbb{C}$?

(10) Да ли постоји функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ чији Меклоренов ред $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ конвергира за све $x \in \mathbb{R}$, али једнакост $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ важи само у тачки $x = 0$?

(11) Нека је x_n низ позитивних бројева, такав да је $\liminf x_n = 0$. Да ли постоји низ позитивних бројева a_n који конвергира ка нули, такав да $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ дивергира и да је $\liminf a_n/x_n = 0$? Да ли постоји низ позитивних реалних бројева b_n такав да ред $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ конвергира и да је $\limsup b_n/x_n = 0$? Да ли постоје низови позитивних реалних бројева c_n и d_n такви да ред $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ конвергира, ред $\sum_{n=0}^{\infty} d_n$ дивергира и $c_n/d_n = x_n$?

(12) Нека су $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ конвергентни редови са позитивним члановима. Да ли ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} \max\{a_n, b_n\}$$

конвергира?

(13) Да ли постоје опадајући низови позитивних реалних бројева a_n и b_n такви да редови $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ дивергирају, а ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} \min\{a_n, b_n\}$$

конвергира?

(14) Нека је функција $f : [0, 1] \to \mathbb{C}$ интеграбилна по Риману. Да ли је функција $x \mapsto f(|x|)$ интеграбилна по Риману на интервалу $[-1, 1]$?

(15) Нека функција $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ има коначан лимес у свакој тачки. Да ли је f интеграбилна по Риману?

(16) Нека је функција $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ограничена. Да ли је функција $h(x) = \inf\{f(t) \mid t \in [a, x]\}$ интеграбилна по Риману?

(17) Нека су функције $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ интеграбилне по Риману. Да ли је функција $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ интеграбилна по Риману?

(18) Нека је $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ непрекидна функција класе C^1. Да ли конвергира низ

$$z_n = \int_a^b f(t) \sin^2(nt)\,dt?$$

(19) Нека је $f(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$. Шта је $f(\mathbb{C})$?

(20) Нека је $g(z) = \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$. Шта је $g(\mathbb{C})$?

2.3. Одговори: Да. $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. $\mathbb{C}$.

Литература

[1] М. Арсеновић, В. Драговић, *Функционалне једначине*, Друштво математичара Србије, Београд, 1999.

[2] Д. Аднађевић, З. Каделбург, *Математичка анализа 1*, Математички факултет у Београду, 2004.

[3] А.Я. Дороговцев, *Математический анализ – сборник задач*, Вища школа, Киев, 1987.

[4] В. А. Зорич, *Математический анализ*, Наука, Москва, 1981.

[5] Ј. Карамата, *Комплексан број*, Завод за уџбенике, Београд, 2007.

[6] А.Н. Колмогоров, С.В Фомин, *Елементы теории функций и функционального анализа*, Наука, Москва, 1968.

[7] Б. Пекић, *Беснило*, 1983.

[8] И.Н. Песин, *Развитие понятия интеграла*, Наука, Москва, 1966.

[9] Л. С. Понтрягин, *Непрерывные группы*, Наука, Москва, 1984.

[10] С. Симић, *Вежбе из Анализе 1989–90*, свеске

[11] Г.М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, ФИЗМАТГИЗ, Москва, 1962.

[12] Д. Ј. Стројк, *Кратак преглед историје математике*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 1987.

[13] S. Aljančić, Uvod u realnu i funkcionalnu analizu, 2. izdanje, Građevinska knjiga, Beograd, 1974.

[14] C.B. Boyer, U.C. Mezerbach, A History of Mathematics, 2nd ed, John Wiley and Sons, 1989.

[15] N. Bourbaki, Éléments de mathématique: Livre III. Topologie générale, Herman, Paris, 1958–1961.

[16] R. Courant, H. Robbins, What is Mathematics?, Oxford University Press, 1941.

[17] J. Dieudonné, Linearna algebra i elementarna geometrija, Školska knjiga, Zagreb, 1977.

[18] J. Dieudonné, Foundations of Modern Analysis, Academic Press, New York, 1960.

[19] P. Flajolet, I. Vardi, Zeta Function Expansions of Classical Constants, 1990, 1992, необјављени чланци, присутни на интернету

[20] T.P. Jameson, The Probability Integral by Volume of Revolution, Mathematical Gazette 78 (1994), 339–340

[21] S.G. Krantz, H.R. Parks, A primer of real analysis and functions, Birkhäuser, 1992, 2002.

[22] P. Loya, Amazing and Aesthetic Aspects of Analysis, непубликована књига, присутна на интернету

[23] S. Mardešić, Matematička analiza, Školska knjiga, Zagreb, 1979.

[24] M. Marjanović, Matematička analiza 1, 2. izdanje, Naučna knjiga, Beograd, 1983.

[25] V. Mićić, Z. Kadelburg, Uvod u teoriju brojeva, Društvo matematichara Srbije, 1989.

[26] M. Mršević, Dj. Dugošija, Zbirka rešenih zadataka iz Matematičke analize I, Građevinska knjiga, Beograd, 1978.

[27] Ivan Niven, A simple proof that π is irrational, Bulletin of American Mathematical Society, Volume 53, Number 6 (1947), 509

[28] G. Pólya, G. Szegö, Aufgaben und Lehrzätze aus der Analysis, Springer–Verlag, 1964.

[29] Wissam Raji, An Introductory Course in Elementary Number Theory

[30] W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1964.

[31] I. Shafarevich, Basic Notions of Algebra, 2nd ed., Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, 1997.

[32] Tomasova matematička biblija – Veština računanja, Građevinska knjiga, Beograd, 2007.

Индекс

C^1–функција, 145
$\mathbf{R}_+$, 20
$\operatorname{cis}\theta$, 78
$\overline{\mathbf{R}}$, 21
π, 75
e, 26

Абел, 11
Адамар, 164
Аксиома
  Архимедова, 8, 38
  Дедекиндова, 19
  Канторова, 17, 38
  непрекидности (потпуности), 19
  супремума, 17
Аксиоме
  Пеанове, 23
  рационалних бројева, 7
  реалних бројева, 7, 18
Алгоритам
  Еуклидов, 31
Антифон, 257
Апсолутна вредност
  комплексног броја, 71
  реалног броја, 49
Аргумент комплексног броја, 76
Архимед, 8
Аристотел, 15
Асимптотске релације, 126
Асимптота
  хоризонтална, 126
  коса, 126
  вертикална, 126

База
  филтера, 349
Бернштајн, 44
Бернули, 27
Бертран, 203
Бинарни запис реалног броја, 40
Болцано, 52
Борел, 50
Број
  алгебарски, 70
  дијадски, 40
  Гаусов, 71
  кардинални, $\operatorname{Card}(A)$, 42
  Лиувилов, 70, 146, 196
  Лудолфов, 76
  Ојлеров, 182
  прост, 29
  савршен, 35
  трансцендентан, 70, 76
Бројеви
  дијадски, 40, 52
  Мерсенови, 35
  узајамно прости, 29

Цео део реалног броја, 40
Чебишев, 91, 255
Чезаро, 221

Џонс, 76
Даламбер, 200
Дарбу, 147
де Морган, 359
Децимални запис реалног броја, 40
Дедекинд, 19
Дедекиндов пресек, 19
Декарт, 61
ди Бруно, 150
Диференцијабилност, 133
Диференцијал, 141
Дирихле, 172
Дирихлеов принцип, 45
Дискриминанта, 64, 217
Дужина лука, 75

Екстремум
  локални, 141
Епиморфизам, 36
ε–околина, 50, 74
Ермит, 268
Еудокс, 257
Еуклид, 31

Факторијел, 24
Фекете, 176
Ферари, 66

Ферма, 84
Фибоначи, 34
Фидија, 34
Филтер, 349
Формула
  Абелова, 204
  биномна, 25
    уопштена, 153
  Меклоренова, 152
  Моаврова, 78
  Ојлерова, 229
  Тејлорова, 150, 152, 267
  Вијетова, 65
Френе, 344
Фреше, 350
Фрулани, 286
Функција
  аналитичка, 227
  диференцијабилна, 133
    непрекидно, 246
  Дирихлеова, 232
  Дирихлеова бета, 234
  елементарна, 102
  Гама, 318
  генеришућа, 223
  конкавна, 154
  конвексна, 154
  Липшицова, 368
  Мебијусова, 234
  непарна, 77
  непрекидна, 104, 355
    униформно, 113, 368
  ограничена, 108
  ограничене варијације, 308
  Ојлерова фи, 88
  парна, 77
  полунепрекидна, 116
  Риманова зета, 231

Галилеј, 16
Галоа, 67
Гаус, 203
Гељфонд, 272
Генератор групе, 81
Геометријска прогресија, 25
Грана функције, 101
Гранична вредност
  функције, 117, 355
  низа, 167, 355
Грејвс, 333
Група, 10
  Абелова, 11
  Архимедска, 14
  циклична, 81
  еуклидска, 73
  ортогонална, 73
  пермутација, 10
  симетрична, 11
  специјална ортогонална, 79
  тополошка, 197

Хамилтон, 332
Хелдер, 158
Хевсајд, 106
Хилберт, 272
Хомеоморфизам, 123
Хомоморфизам, 36
Хук, 343

Идеал, 13
Идентитет
  Јакобијев, 331
Имагинарна јединица, 61
Имагинарни део комплексног броја, 61
Инфимум, inf, 8
  функције, 111
Интеграција
  парцијална, 245
Интеграл
  Дарбуов, 291
  елиптички, 256
  Фруланијев, 286
  горњи и доњи, 291
  хиперелиптички, 256
  Кошијев, 258
  неодређени, 243
  несвојствени, 279, 302
  Њутнов, 258
  одређени, 257
  по скупу, 299
  Пуасонов, 286, 316
  Риман–Стилтјесов, 303
  Риманов, 290
  Стилтјесов, 303
Изометрија, 73
Изоморфизам, 36
  поља, 36
    уређених, 36
Извод функције, 133
  десни и леви, 139
  други, 150
  вишег реда, 150

Јакоби, 331
Јанг, 157
Једначина
  диференцијална, 243
  функционална, 227
  Кошијева, 227
  линеарна диференцна, 27
  Пелова, 68
Јенсен, 157
Језгро хомоморфизма, 37

Кантор, 38
Кардано, 66
Кардиоида, 140

Кавалијери, 275
Кејли, 333
Кервер, 333
Коефицијенти
  биномни, 24
Колмогоров, 164
Комбинације, 42
Комплексна раван, 61
Компоненте повезаности, 371
Конјуговани комплексни број, 61
Конгруенција по модулу, 82
Константа
  Каталанова, 234
  Ојлерова, 182
Контракција, 182
Конвергенција
  низа, 119
  производа, 187
  реда, 187
    апсолутна, 191
Конволуција, 212
Координате
  поларне, 78
Координатни систем
  цилиндрички, 344
  Френе–Сереов, 346
  поларни, 344
  сферни, 344
Косинус
  cos, 77
  хиперболички, ch , 103
Крива
  рационална, 253
кривина
  криве, 345
    полупречник, 345
Кумер, 203
Квадранти, 61
Квадратура круга, 76
Кватерниони, 332

Лагранж, 143
Лајбниц, 76
Лајбницово правило, 135
  уопштено, 150
Ламберт, 76
Ландау, 126
Лебег, 50
Лема
  Фекетеова, 176
Лимес
  функције, $\lim_{x\to x_0}$, 117
  горњи и доњи, $\overline{\lim}, \underline{\lim}$
    функције, 174
    низа, 174
  низа, $\lim_{n\to\infty}$, 167
  супериор и инфериор, lim sup, lim inf
    функције, 174
    низа, 174
Линдеман, 76
Липшиц, 368
Лиувил, 70
Лопитал, 148
Лопта
  отворена, 357
  затворена, 357
Лудолф, 76

Мајоранта, 8
Максимум, max
  функције, 111
  скупа, 9
Меклорен, 152
Мера
  Жорданова, 298
Мерсен, 35
Метрика, 351
  дискретна, 353
  еуклидска, 352
Милнор, 333
Минимум, min
  функције, 111
  скупа, 9
Минковски, 159
Миноранта, 8
Множење редова, 211
Моавр, 78
Модул
  комплексног броја, 71
  непрекидности функције, 121
  реалног броја, 49
Мономорфизам, 36
Монотоност, 36
Морфизам
  поља, 36
    уређних, 36

Наполеон, 94
Неједнакост
  Адамар–Колмогоров–Ландауова, 164
  Бернулијева, 27
  Чебишевљева, 91
  Хелдерова, 158
    за интеграле, 313
  Јангова, 157
    за интеграле, 314
  Јенсенова, 157
  Коши–Шварцова, 85
    за интеграле, 312
  Минковског, 159
    за интеграле, 313
  Шурова, 91
Непрекидност, 104
  равномерна, 112
Нивен, 267
Низ

дивергентан, 167
конвергентан, 167
Кошијев, 180, 361
монотон, 176
низ
Фибоначијев, 34
Њутн, 258
Њутнови идентитети, 216

Ојлер, 27
Осцилација функције, 181
Остатак
производа, 188
реда, 188

Параметар
природни, 345
Параметар поделе, 294
Параметризација
природна, 345
рационална, 253
Пеано, 23
Пекић, Борислав, 15
Пел, 68
Пермутације, 10, 42
Питагора, 15
Питагорејци, 15
Подела интервала, 290
финија, 290
Подгрупа, 12, 29
циклична, 12
Поенкаре, 16
Поја, 222
Покривање
отворено, 50, 366
Поље, 14
алгебарски затворено, 61
Архимедско, 14
комплексних бројева, $\mathbf{C}$, 60
рационалних бројева, $\mathbf{Q}$, 36
реалних бројева, $\mathbf{R}$, 18
уређено, 14, 36
Полунепрекидност, 116
Полупречник конвергенције, 213
Потпокривање, 50, 366
Потпоље, 36
Потпрстен, 13
Правило
Лајбницово, 135
уопштено, 150
Принцип
Кавалијеријев, 275
Производ
бесконачни, 187
Декартов, 61
клинасти, 335
конвергентан, 187
мешовити, 335
скаларни, 327
спољашњи, 335
векторски, 328
Проширени скуп реалних бројева, $\overline{\mathbf{R}}$, 21
Простор
еуклидски, 351
метрички, 351
дискретан, 353
компактан, 364
комплетан, 362
ограничен, 361
повезан, 369
сепарабилан, 366
нормирани, 352
Прстен, 12
еуклидски, 99
комутативни, 13
полинома, 63, 99
са дељењем, 14
са јединицом, 13
са једнозначном факторизацијом, 63
Псеудометрика, 351

Рабе, 201
Раширење поља, 37
раван
оскулаторна, 345
Равномерна непрекидност, 112
Разломци
непрекидни (верижни), 32
Разломљени део реалног броја, 40
Реални део комплексног броја, 61
Ред
бесконачни, 187
биномни, 202, 229
Дирихлеов, 233
дивергентан, 187
двоструки, 209
геометријски, 188
конвергентан, 187
степени, 213
Тејлоров, 227
Релација
поретка, 8
Релна права, 14
Риман, 118, 230
Риманова зета функција, 231
Рол, 142
Руб скупа, 51, 74, 358

Сере, 344
Шануел, 272
Шнајдер, 272
Штолц, 169
Шур, 91
Симболи
Ландауови, o, O, 126
Синус
sin, 77
хиперболички, sh , 103

Скуп
(бес)коначан, 41
(не)пребројив, 45
дискретан, 51
густ, 51, 358
Канторов, 54, 295
мерљив по Жордану, 298
највише пребројив, 45
нигде густ, 55
ограничен, 8, 74
отворен, 74, 357
партитивни, 9
уређен, 8
потпуно, 17
тотално, 8
затворен, 51, 74, 357
Слика хомоморфизма, 37
Смене
Ојлерове, 252
Средина
аритметичка, 90, 157
геометријска, 90, 157
хармонијска, 90, 157
квадратна, 90, 157
реда t, 158
Став
Основни став алгебре, 61
Стилтјес, 303
Сума
Дарбуова, 290
Супремум, sup
функције, 111
скупа, 8

Тачка
фиксна, 111, 182
изолована, 51, 74, 358
нагомилавања, 51, 74, 358
непокретна, 111, 182
превојна, 155
унутрашња, 358
Тартаља, 66
Таубер, 220
Тејлор, 152, 227
Тејлоров полином, 152
Тело, 14
Теорема
Абелова, 218
Болцано-Вајерштрасова, 52
Борел-Лебегова, 50
Дарбуова, 147
Фермаова, 141
мала, 84
Кантор-Бернштајнова, 44
Канторова, 113
Кошијева, 142
Лагранжова, 143
Лопиталова, 148
Наполеонова, 94
о међувредности, 111
о средњој вредности, 141
Риманова, 209
Ролова, 142
Штолцова, 169
Тауберова, 220
Вајерштрасова, 112
Топологија, 360
релативна, 107
торзија
криве, 346
Трансформација
изометријска, 73

Угао
π, 75
између полуправих, 75
поларни, 76
прав, 75
Унутрашњост скупа, 358

Вајерштрас, 52
Валис, 76
Варијације
без понављања, 42
са понављањем, 42
вектор
бинормале, 345
нормале на криву, 345
Векторско поље, 341
Вијет, 65, 76, 254
Вивијани, 347

Жордан, 161
Затворење скупа, 51, 74, 358
Златни пресек, 33, 186