Топологија А - домаћи задаци 2022/23.

У сваком испитном року долази по један од ових 25 задатака и носи 8 поена.

1. Нека је X тополошки простор.

(а) Ако је B затворен скуп у X, доказати да је $\operatorname{int}(\partial B) = \emptyset$.
(б) Примером показати да тврђење (а) не важи ако се изостави претпоставка да је B затворен.
(в) Да ли би тврђење (а) важило кад би се претпоставка да је B затворен заменила претпоставком да је B отворен?
(г) Доказати да за сваки $A \subseteq X$ важи да је $\partial\partial\partial A = \partial\partial A$.

2. Дат је тополошки простор $(X, \mathcal{T}_X)$, фамилија тополошких простора $\{(X_\lambda, \mathcal{T}_{X_\lambda})\}_{\lambda\in\Lambda}$ и фамилија пресликавања $f_\lambda : X \to X_\lambda$. Доказати да је колекција $\mathcal{B} = \{f_\lambda^{-1}(V) \mid \lambda \in \Lambda,\ V \in \mathcal{T}_{X_\lambda}\}$ једна база топологије $\mathcal{T}_X$ ако и само ако су сва пресликавања f_λ непрекидна и $(\forall B \in \mathcal{F}_X)(\forall x \in X \setminus B)(\exists \lambda \in \Lambda)\ f_\lambda(x) \notin \overline{f_\lambda(B)}$.

3. Нека је $f : X \to Y$ непрекидно и затворено пресликавање. Нека је још $y \in Y$ и V отворен скуп у X такав да је $f^{-1}(\{y\}) \subseteq V$. Доказати да постоји $B \subseteq Y$ такав да $y \in B$, да је $f^{-1}(B)$ отворен у X и да је $f^{-1}(B) \subseteq V$.

4. Нека је $C \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ скуп свих конвергентних реалних низова и $f : C \to \mathbb{R}$ пресликавање дефинисано на следећи начин: за $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C$, $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

(а) Ако је C снабдевен Тихоновљевом топологијом производа (наслеђеном од $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$), испитати непрекидност пресликавања f.
(б) Ако је C снабдевен *box* топологијом (наслеђеном од $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$), испитати непрекидност пресликавања f.

5. (а) Нека је K компактан, а U отворен подскуп еуклидског простора $\mathbb{R}^n$ и нека важи $K \subseteq U$. Доказати да постоји компактан скуп $S \subseteq \mathbb{R}^n$ такав да је $K \subseteq \operatorname{int} S \subseteq S \subseteq U$.

(б) Да ли важи тврђење (а) ако се еуклидски простор $\mathbb{R}^n$ замени произвољним тополошким простором X?

6. Нека је $\mathcal{A}$ нека фамилија компактних подскупова еуклидског простора $\mathbb{R}^n$ таква да постоји $\delta > 0$ са својством да за све $A, B \in \mathcal{A}$ важи $A = B$ или $d(A, B) > \delta$.

(а) Доказати да је $\bigcup \mathcal{A}$ затворен скуп.
(б) Доказати да је $\bigcup \mathcal{A}$ компактан скуп ако и само ако је фамилија $\mathcal{A}$ коначна.
(в) Да ли би важило тврђење (а) ако бисмо изоставили услов да постоји $\delta > 0$ са горњим својством?

7. Нека је $f : X \to Y$ непрекидно пресликавање из T_2-простора X у T_1-простор Y. Ако је $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ опадајућа фамилија компактних скупова у X, доказати да је $f\left(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n\right) = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} f(K_n)$.

8. Нека је X локално компактан, Y Хауздорфов и $f : X \to Y$ непрекидна отворена сурјекција. Доказати да за сваки компактан скуп $K \subseteq Y$ постоји компактан скуп $C \subseteq X$ такав да је $f(C) = K$.

9. (а) Нека је X Хауздорфов простор, A његов потпростор, $a \in A$ и G околина тачке a таква да је скуп $G \cap A$ компактан. Доказати да постоји отворен скуп V такав да $a \in V \cap \overline{A} \subseteq A$.

(б) Нека је X локално компактан T_2-простор и A његов потпростор. Доказати да је A локално компактан ако и само ако се може представити као пресек једног отвореног и једног затвореног скупа.

10. Доказати да је тополошки простор X нормалан ако и само ако за свака два његова отворена права подскупа U и V која га покривају ($U \cup V = X$) важи да постоје непрекидне функције $f, g : X \to I$ такве да је $f(x) + g(x) = 1$ за свако $x \in X$, $f(U^c) = \{0\}$ и $g(V^c) = \{0\}$.

11. Нека је X компактан Хауздорфов простор и $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ његов отворен покривач. Доказати да постоји $n \in \mathbb{N}$ и непрекидне функције $f_1, f_2, \ldots, f_n : X \to I$ такве да важи:

(1) $(\forall i \in \{1, \ldots, n\})\ (\exists \lambda_i \in \Lambda)\ f_i|_{U^c_{\lambda_i}} \equiv 0$;

(2) $(\forall x \in X)\ \sum_{i=1}^{n} f_i(x) = 1.$

12. (а) Нека је X тополошки простор, $A, B \subseteq X$ такви да је $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset$ и $E \subseteq A \cup B$. Ако је E повезан, доказати да је онда $E \subseteq A$ или $E \subseteq B$.

(б) Да ли би тврђење (а) важило ако бисмо претпоставку да су скупови $A\cap\overline{B}$ и $\overline{A}\cap B$ празни заменили (слабијом) претпоставком да је само један од њих празан?

13. Нека је X тополошки простор (не обавезно некомпактан) и X^* његова компактификација једном тачком (Александровљева компактификација).

(а) Доказати да ако је X^* повезан, онда је X некомпактан.
(б) Примером показати да у тврђењу (а) не важи обрнута импликација.
(в) Доказати да ако је X повезан и некомпактан, онда је и X^* повезан.

14. Нека су $f, g : X \to \mathbb{R}$ два непрекидна пресликавања из повезаног простора X у реалну праву и нека су $\Gamma_f, \Gamma_g \subseteq X \times \mathbb{R}$ њихови графици. Доказати да је $\Gamma_f \cup \Gamma_g$ повезан потпростор производа $X \times \mathbb{R}$ ако и само ако постоји $x_0 \in X$ такво да је $f(x_0) = g(x_0)$.

15. Нека је X повезан тополошки простор и $\mathcal{U}$ његов отворен покривач. Доказати да за сваке две тачке $a, b \in X$ постоје $n \in \mathbb{N}$ и $U_1, U_2, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ такви да важе следећа три услова:

(1) $a \in U_1 \setminus (U_2 \cup \ldots \cup U_n)$;
(2) $b \in U_n \setminus (U_1 \cup \ldots \cup U_{n-1})$;
(3) $\big(\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}\big)\ [\ U_i \cap U_j \neq \emptyset \iff |i - j| \leqslant 1\ ]$.

16. Нека је $m \in \mathbb{N}$, Y метрички простор и $f : \mathbb{R}^m \to Y$ пресликавање такво да за све $A \subseteq \mathbb{R}^m$ важе импликације:

(1) ако је A компактан, онда је и $f(A)$ компактан;
(2) ако је A повезан, онда је и $f(A)$ повезан.

Доказати да је f непрекидно.

17. Нека је X тополошка група са операцијом $*$ (X је тополошки простор, X је група у односу на $*$ и $* : X^2 \to X$, као и инверз ${}^{-1} : X \to X$, јесу непрекидна пресликавања). Доказати да је компонента повезаности простора X која садржи неутрал нормална подгрупа од X.

18. У равни су дате кружница $k : (x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ $(p, q \in \mathbb{R},\ r > 0)$ и тачка $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Доказати да постоји квадрат облика $[x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - a, y_0 + a]$ $(a > 0)$ чија граница садржи (бар један) пар дијаметрално супротних тачака са кружнице k.

19. Нека је U отворен скуп у еуклидском простору $\mathbb{R}^n$ и $\varphi : I \to U$ пут у U. Доказати да постоји отворен путно повезан скуп $V \subseteq \mathbb{R}^n$ такав да је $\varphi(I) \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

20. Нека је $f : X \to Y$ количничко пресликавање.

(а) Примером показати да за $A \subseteq X$ рестрикција $f|_A : A \to f(A)$ (с кодоменом суженим на слику) не мора бити количничко.
(б) Ако је $B \subseteq Y$ отворен или затворен, доказати да је $f|_{f^{-1}(B)} : f^{-1}(B) \to B$ количничко.
(в) Примером показати да, за $B \subseteq Y$, $f|_{f^{-1}(B)} : f^{-1}(B) \to B$ не мора бити количничко.

21. Ако су X и Y Хауздорфови простори и $f : X \to Y$ непрекидно пресликавање, доказати да су онда и цилиндар и конус пресликавања f (M_f и C_f) такође Хауздорфови простори.

22. Нека је $S^n_+ = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} \geqslant 0\}$ горња полусфера и нека је $f : S^n_+ \to D^n$ непрекидно пресликавање. Доказати да постоји $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in S^n_+$ такво да је $f(x) = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$.

23. Нека су $F_1, F_2, \ldots, F_{n+1}$ затворени скупови на сфери S^n такви да је $S^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} F_i$. Доказати да постоји $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ такво да F_i садржи пар антподалних тачака са сфере.

24. Нека је $f : D^2 \to \mathbb{R}^2$ непрекидно пресликавање.

(a) Ако је $f(\partial D^2) \subseteq D^2$, доказати да постоји $x_0 \in D^2$ такво да је $f(x_0) = x_0$.

(b) Ако је $f(x) \neq x$ за све $x \in D^2$, доказати да постоје $x_0 \in \partial D^2$ и $\lambda > 1$ такво да је $f(x_0) = \lambda x_0$.

25. Нека је $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ матрица са позитивним вредностима. Нека је $S = \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \mid v_1, v_2 \geqslant 0,\ v_1 + v_2 = 1\}$ и $T = \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \mid v_1 + v_2 \neq 0\}$.

(a) Доказати да је $A(S) \subseteq T$ и наћи пресликавање $P : T \to \mathbb{R}^2$ такво да је $(P \circ A)(S) \subseteq S$.

(b) Доказати да матрица A има бар једну позитивну сопствену вредност. (Кажемо да је $\lambda \in \mathbb{R}$ сопствена вредност матрице A ако постоји вектор $v \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ такав да је $Av = \lambda v$.)