РЕШЕЊА ПРВОГ КОЛОКВИЈУМА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 30.11.2024.

Група 1

1. (5 поена) Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{2+3n}\right)^{\frac{n^2}{2}}$.

2. (5 поена) Израчунати $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+2}-2x\right)$.

3. (5 поена) Испитати монотоност и наћи екстремуме функције $y=\frac{x-1}{(1-2x)e^x}$.

4. (5 поена) Одредити асимптоте функције $y=\frac{4x^4+4}{3x^3+3}$.

5. (5 поена) Израчунати $\int\frac{\ln(\ln x)}{x}\mathrm{d}x$.

РЕШЕЊА

1. Означимо $a_n=\left(\frac{3n-1}{2+3n}\right)^{\frac{n^2}{2}}$. Тада је

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n-1}{2+3n}\right)^{\frac{n^2}{2}}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1}{2+3n}\right)^{\frac{n}{2}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1-1+\frac{3n-1}{2+3n}\right)^{\frac{n}{2}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3n-1-2-3n}{2+3n}\right)^{\frac{n}{2}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-3}{2+3n}\right)^{\frac{n}{2}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2+3n}{-3}}\right)^{\frac{2+3n}{-3}\cdot\frac{-3}{2+3n}\cdot\frac{n}{2}}\\
&= \lim_{n\to\infty}e^{\frac{-3n}{4+6n}}\\
&= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-3n}{4+6n}}\\
&= e^{\frac{-3}{6}}\\
&= e^{-\frac{1}{2}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{e}}<1,
\end{aligned}
$$

па ред конвергира на основу Кошијевог критеријума.

2.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+2}-2x\right) &= \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+2}-2x\right)\cdot\frac{\sqrt{4x^2-3x+2}+2x}{\sqrt{4x^2-3x+2}+2x}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2-3x+2}\right)^2-(2x)^2}{\sqrt{4x^2-3x+2}+2x}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-3x+2-4x^2}{\sqrt{4x^2-3x+2}+2x}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{-3x+2\quad{}^{:x}}{\sqrt{4x^2-3x+2}+2x\ {}_{:x}}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{-3+\frac{2}{x}}{\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+2}\\
&= \frac{-3}{4}
\end{aligned}
$$

3. Домен дате функције је $\mathcal{D}_y=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$, а њен први извод је

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{(1-2x)e^x-(x-1)(-2e^x+(1-2x)e^x)}{(1-2x)^2e^{2x}}\\
&= \frac{\cancel{e^x}(1-2x-(x-1)(-1-2x))}{(1-2x)^2e^{\cancel{2}x}}\\
&= \frac{1-2x+x+2x^2-1-2x}{(1-2x)^2e^x}\\
&= \frac{2x^2-3x}{(1-2x)^2e^x}\\
&= \frac{x(2x-3)}{(1-2x)^2e^x}
\end{aligned}
$$

Како је $(1-2x)e^x>0$ на целом домену, то на знак првог извода утиче само $x(2x-3)$.

		0		$\frac{3}{2}$	
x	$-$		$+$		$+$
$2x-3$	$-$		$-$		$+$
y'	$+$		$-$		$+$

Сетимо се да је тачка $x=\frac{1}{2}$ избачена из домена. Закључујемо да функција расте на $(-\infty,0)\cup\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$, опада на $\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$, тачка $x=0$ је тачка локалног максимума, док је $x=\frac{3}{2}$ тачка локалног минимума.

4. Потребно је да прво одредимо домен дате функције. Имамо да је $3x^3+3\neq 0$, тј. $x^3\neq -1$, па је $x\neq -1$. Дакле, домен дате функције је $\mathcal{D}_y=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.
Вертикалне асимптоте: Кандидат за вертикалну асимптоту је $x=-1$.

$$
\lim_{x\to-1-}\frac{4x^4+4}{3x^3+3}=-\infty,
$$

па права $x = -1$ јесте вертикална асимптота дате функције.
<u>Хоризонталне асимптоте:</u>

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^4+4}{3x^3+3}\,\begin{matrix}{\scriptstyle :x^3}\\ \\ {\scriptstyle :x^3}\end{matrix} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x+\frac{4}{x^3}}{3+\frac{3}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{3} = \infty,$$

па дата функција нема хоризонталних асимптота.
<u>Косе асимптоте:</u>

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^4+4}{x(3x^3+3)} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^4+4}{3x^4+3x}\,\begin{matrix}{\scriptstyle :x^4}\\ \\ {\scriptstyle :x^4}\end{matrix} = \lim_{x\to\infty} \frac{4+\frac{4}{x^4}}{3+\frac{3}{x^4}} = \frac{4}{3},$$

$$n = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x^4+4}{3x^3+3} - \frac{4}{3}x\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x^4+4}{3x^3+3} - \frac{4x+4x^4}{3+3x^3}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{4-4x}{3+3x^3} = 0,$$

па закључујемо да је права $y = \frac{4}{3}x$ коса асимптота дате функције.
5.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\ln(\ln(x))}{x}\mathrm{d}x &= \begin{bmatrix} t = \ln x \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{x}\mathrm{d}x \end{bmatrix} \\
&= \int \ln t \mathrm{d}t \\
&= \begin{bmatrix} u = \ln t & \mathrm{d}v = \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}t}{t} & v = t \end{bmatrix} \\
&= t\ln t - \int t \cdot \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&= t\ln t - t + c \\
&= \ln x \ln(\ln x) - \ln x + c
\end{aligned}$$

Група 2

1. (5 поена) Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^{\frac{n^2}{4}}$.

2. (5 поена) Израчунати $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{x\sqrt{x}\ln x}{\sin x}$.

3. (5 поена) Испитати монотоност и наћи екстремуме функције $y=(x-1)\frac{e^{-2x}}{-2x+1}$.

4. (5 поена) Одредити асимптоте функције $y=\frac{3x^3+3}{2x^2-2}$.

5. (5 поена) Израчунати $\int x\sin\frac{x+1}{2}\mathrm{d}x$.

РЕШЕЊА

1. Означимо $a_n=\left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^{\frac{n^2}{4}}$. Тада је

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^{\frac{n^2}{4}}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^{\frac{n}{4}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1-1+\frac{2n+3}{2n-1}\right)^{\frac{n}{4}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n+3-2n+1}{2n-1}\right)^{\frac{n}{4}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{2n-1}\right)^{\frac{n}{4}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n-1}{4}}\right)^{\frac{2n-1}{4}\cdot\frac{4}{2n-1}\cdot\frac{n}{4}}\\
&= \lim_{n\to\infty}e^{\frac{n}{2n-1}}\\
&= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}}\\
&= e^{\frac{1}{2}}\\
&= \sqrt{e}>1,
\end{aligned}$$

па ред дивергира на основу Кошијевог критеријума.

2.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0+} \frac{x\sqrt{x}\ln x}{\sin x} &= \lim_{x\to 0+} \sqrt{x}\ln x \cdot \frac{x}{\sin x} \\
&= \lim_{x\to 0+} \sqrt{x}\ln x \cdot 1 \\
&= \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \\
&\overset{\text{Л.П.}}{\underset{,,\frac{0}{0}"}{=}} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}} \\
&= \lim_{x\to 0+} (-2\sqrt{x}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

3. Када мало препакујемо функцију, видимо да је једнака

$$y = \frac{x-1}{(1-2x)e^{2x}}$$

Домен дате функције је $\mathcal{D}_y = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$, а њен први извод је

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{(1-2x)e^{2x} - (x-1)(-2e^{2x} + 2(1-2x)e^{x})}{(1-2x)^2\left(e^{2x}\right)^2} \\
&= \frac{\cancel{e^{2x}}(1-2x-(x-1)(-4x))}{(1-2x)^2\left(e^{2x}\right)^{\cancel{2}}} \\
&= \frac{1-2x+4x^2-4x}{(1-2x)^2e^{2x}} \\
&= \frac{4x^2-6x+1}{(1-2x)^2e^{2x}}
\end{aligned}$$

Како је $(1-2x)e^{2x} > 0$ на целом домену, то на знак првог извода утиче само $4x^2-6x+1$. Када раставимо ову квадратну функцију добијамо $4x^2-6x+1 = \left(x-\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{5}}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{5}}{4}\right)$.

	$\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{5}}{4}$	$\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{5}}{4}$	
$x-\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{5}}{4}$	$-$	$-$	$+$
$x-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{5}}{4}$	$-$	$+$	$+$
y'	$+$	$-$	$+$

Сетимо се да је тачка $x = \frac{1}{2}$ избачена из домена. Закључујемо да функција расте на $\left(-\infty, \frac{3}{4}-\frac{\sqrt{5}}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{5}}{4}, +\infty\right)$, опада на $\left(\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{5}}{4}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}+\frac{\sqrt{5}}{4}\right)$, тачка $x = \frac{3}{4}-\frac{\sqrt{5}}{4}$ је тачка локалног максимума, док је $x = \frac{3}{4}+\frac{\sqrt{5}}{4}$ тачка локалног минимума.

4. Потребно је да прво одредимо домен дате функције. Имамо да је $2x^3-2 \neq 0$, тј. $x^2 \neq 1$, па је $x \neq \pm 1$. Дакле, домен дате функције је $\mathcal{D}_y = (-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.
<u>Вертикалне асимптоте:</u> Кандидати за вертикалну асимптоту су $x=-1$ и $x=1$.

$$\lim_{x\to -1-} \frac{3x^3+3}{2x^2-2} = \lim_{x\to -1-} \frac{3\cancel{(x+1)}(x^2+x+1)}{2(x-1)\cancel{(x+1)}} = \lim_{x\to -1-} \frac{3(x^2+x+1)}{2(x-1)} = \frac{3(1-1+1)}{2(-1-1)} = -\frac{3}{2}$$

и слично
$$\lim_{x\to -1+}\frac{3x^3+3}{2x^2-2}=-\frac{3}{2},$$
па права $x=-1$ није вертикална асимптота (леви и десни лимес у -1 смо могли да израчунамо и коришћењењм Лопиталовог правила јер је разломак облика $\frac{0}{0}$). Како је
$$\lim_{x\to 1-}\frac{3x^3+3}{2x^2-2}=-\infty,$$
то права $x=1$ јесте вертикална асимптота дате функције.

<u>Хоризонталне асимптоте:</u>
$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+3^{\,:x^2}}{2x^2-2_{\,:x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+\frac{3}{x^2}}{2-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{2}=\infty,$$
па дата функција нема хоризонталних асимптота.

<u>Косе асимптоте:</u>
$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+3}{x(2x^2-2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+3^{\,:x^3}}{2x^3-2x_{\,:x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{3}{x^3}}{2-\frac{2}{x^2}}=\frac{3}{2},$$
$$n=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^3+3}{2x^2-2}-\frac{3}{2}x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^3+3}{2x^2-2}-\frac{3x^3-3x}{2x^2-2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3+3x}{2x^2-2}=0,$$
па закључујемо да је права $y=\frac{3}{2}x$ коса асимптота дате функције.

5.
$$\begin{aligned}\int x\sin\frac{x+1}{2}\mathrm{d}x&=\begin{bmatrix}u=x & \mathrm{d}v=\sin\frac{x+1}{2}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}x & v=-2\cos\frac{x+1}{2}\end{bmatrix}\\&=-2x\cos\frac{x+1}{2}+2\int\cos\frac{x+1}{2}\mathrm{d}x\\&=-2x\cos\frac{x+1}{2}+4\sin\frac{x+1}{2}+c\end{aligned}$$