РЕШЕЊА ПРВОГ КОЛОКВИЈУМА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 04.12.2021.

Група 1

1. (6 поена) Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+6}{3n+1}\right)^{4n^2}$.

2. (6 поена) Израчунати $\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{ctg}x)^x$.

3. (6 поена) Испитати монотоност и наћи екстремне вредности функције $y = 5x - \ln(5x)$.

4. (6 поена) Одредити асимптоте функције $y = x\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$.

5. (6 поена) Израчунати $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+6}$.

РЕШЕЊА

1. Означимо $a_n = \left(\frac{3n+6}{3n+1}\right)^{4n^2}$. Тада је

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n+6}{3n+1}\right)^{4n^2}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+6}{3n+1}\right)^{4n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1+5}{3n+1}\right)^{4n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{3n+1}\right)^{\frac{3n+1}{5}\cdot\frac{5}{3n+1}\cdot 4n}\\
&= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{20n}{3n+1}}\\
&= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{20n}{3n+1}}\\
&= e^{\frac{20}{3}} > 1,
\end{aligned}$$

па ред дивергира на основу Кошијевог критеријума.

2.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}(\mathrm{ctg}x)^x &= \lim_{x\to 0} e^{\ln((\mathrm{ctg}x)^x)}\\
&= \lim_{x\to 0} e^{x\ln(\mathrm{ctg}x)}\\
&= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(\mathrm{ctg}x)}{\frac{1}{x}}}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\mathrm{ctg}x)}{\frac{1}{x}}}\\
&\overset{L.P.}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{\sin^2 x\mathrm{ctg}x}}{\frac{-1}{x^2}}}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x\cdot\mathrm{ctg}x}}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\mathrm{ctg}x}}\\
&= e^0\\
&= 1
\end{aligned}$$

3. Домен функције $y = 5x - \ln(5x)$ је $\mathcal{D}_y = (0, +\infty)$, а њени први извод је

$$y' = 5 - \frac{5}{5x} = 5 - \frac{1}{x} = \frac{5x-1}{x}.$$

Како је $x > 0$ на целом домену, то на знак првог извода утиче једино $5x - 1$.

	0		$\frac{1}{5}$	
$5x-1$	//////	$-$		$+$
y'	//////	$-$		$+$

Закључијемо да функција опада на $(0, \frac{1}{5})$, расте на $(\frac{1}{5}, +\infty)$ и тачка $x = \frac{1}{5}$ је тачка локалног минимума.

4. Потребно је да прво одредимо домен дате функције. Услови су да је $x + 2 \neq 0$, тј. $x \neq -2$, као и $\frac{x+1}{x+2} \geq 0$. Када решимо систем ове две неједначине, добијамо да је домен $\mathcal{D}_y = (-\infty, -2) \cup [-1, +\infty)$.

Вертикалне асимптоте: Кандидати за вертикалну асимптоту су $x = -2$ и $x = -1$. Како функција није дефинисана на интервалу $(-2, -1)$, то не постоји десни лимес у -2 и леви у -1, па само тражимо леви лимес у -2 и десни у -1.

$$\lim_{x\to -2-} x\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to -1+} x\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} = 0,$$

па права $x = -2$ јесте једина вертикална асимптота дате функције.

Хоризонталне асимптоте:

$$\lim_{x\to \infty} x\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} = \infty,$$

па функција нема хоризонталних асимптота.

Косе асимптоте:

$$
\begin{aligned}
k &= \lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}}{x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x+1}{x+2}} \\
&= 1, \\
n &= \lim_{x\to\infty} \left(x\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} - 1\cdot x \right) \\
&= \lim_{x\to\infty} x \left(\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} - 1 \right) \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} - 1}{\frac{1}{x}} \\
&\overset{L.P.}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}(x+2)^2}}{\frac{-1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x+2}{x+1}} \cdot \frac{-x^2}{2(x+2)^2} \\
&= 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Дакле, права $y = x - \frac{1}{2}$ је коса асимптота дате функције.

5.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+6} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2+2} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}x}{2\left(\frac{(x+2)^2}{2}+1\right)} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}x}{2\left(\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right)} \\
&= \begin{bmatrix} t = \frac{x+2}{\sqrt{2}} \\ \mathrm{d}x = \sqrt{2}\mathrm{d}t \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{2}}{t^2+1}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg} t + c \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right) + c
\end{aligned}
$$

Група 2

1. (6 поена) Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{12n+4}{12n+2}\right)^{2n^2}$.

2. (6 поена) Израчунати $\lim_{x\to 0}(\mathrm{tg}x)^x$.

3. (6 поена) Испитати монотоност и наћи екстремне вредности функције $y=7x-\ln(6x)$.

4. (6 поена) Одредити асимптоте функције $y=x\sqrt{\frac{x+4}{x+7}}$.

5. (6 поена) Израчунати $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+6x+14}$.

РЕШЕЊА

1. Означимо $a_n=\left(\frac{12n+4}{12n+2}\right)^{2n^2}$. Тада је

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{12n+4}{12n+2}\right)^{2n^2}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{12n+4}{12n+2}\right)^{2n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{12n+2+2}{12n+2}\right)^{2n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{12n+2}\right)^{\frac{12n+2}{2}\cdot\frac{2}{12n+2}\cdot 2n} \\
&= \lim_{n\to\infty}e^{\frac{4n}{12n+2}} \\
&= e^{\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{12n+2}} \\
&= e^{\frac{1}{3}}>1,
\end{aligned}
$$

па ред дивергира на основу Кошијевог критеријума.

2.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}(\mathrm{tg}x)^x &= \lim_{x\to 0} e^{\ln((\mathrm{tg}x)^x)}\\
&= \lim_{x\to 0} e^{x\ln(\mathrm{tg}x)}\\
&= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(\mathrm{tg}x)}{\frac{1}{x}}}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\mathrm{tg}x)}{\frac{1}{x}}}\\
&\overset{L.P.}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x\,\mathrm{tg}x}}{\frac{-1}{x^2}}}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x^2}{\mathrm{tg}x}}\\
&\overset{L.P.}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2x}{\frac{1}{\cos^2 x}}}\\
&= e^0\\
&= 1
\end{aligned}$$

3. Домен функције $y = 7x - \ln(6x)$ је $\mathcal{D}_y = (0, +\infty)$, а њени први извод је

$$y' = 7 - \frac{6}{6x} = 7 - \frac{1}{x} = \frac{7x-1}{x}.$$

Како је $x > 0$ на целом домену, то на знак првог извода утиче једино $7x - 1$.

		0		$\frac{1}{7}$	
$7x - 1$	//////		$-$		$+$
y'	//////		$-$		$+$

Закључијемо да функција опада на $(0, \frac{1}{7})$, расте на $(\frac{1}{7}, +\infty)$ и тачка $x = \frac{1}{7}$ је тачка локалног минимума.

4. Потребно је да прво одредимо домен дате функције. Услови су да је $x + 7 \neq 0$, тј. $x \neq -7$, као и $\frac{x+4}{x+7} \geq 0$. Када решимо систем ове две неједначине, добијамо да је домен $\mathcal{D}_y = (-\infty, -7) \cup [-4, +\infty)$.

Вертикалне асимптоте: Кандидати за вертикалну асимптоту су $x = -7$ и $x = -4$. Како функција није дефинисана на интервалу $(-7, -4)$, то не постоји десни лимес у -7 и леви у -4, па само тражимо леви лимес у -7 и десни у -4.

$$\lim_{x\to -7-} x\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to -4+} x\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} = 0,$$

па права $x = -7$ јесте једина вертикална асимптота дате функције.

Хоризонталне асимптоте:

$$\lim_{x\to \infty} x\sqrt{\frac{x+4}{x+7}} = \infty,$$

па функција нема хоризонталних асимптота.
<u>Косе асимптоте:</u>

$$\begin{aligned}
k &= \lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt{\frac{x+4}{x+7}}}{x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x+4}{x+7}} \\
&= 1, \\
n &= \lim_{x\to\infty} \left(x\sqrt{\frac{x+4}{x+7}} - 1\cdot x \right) \\
&= \lim_{x\to\infty} x \left(\sqrt{\frac{x+4}{x+7}} - 1 \right) \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{x+4}{x+7}} - 1}{\frac{1}{x}} \\
&\underset{\frac{0}{0}}{\overset{L.P.}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{2\sqrt{\frac{x+4}{x+7}}(x+7)^2}}{\frac{-1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x+7}{x+4}} \cdot \frac{-3x^2}{2(x+7)^2} \\
&= 1\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) \\
&= -\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Дакле, права $y = x - \frac{3}{2}$ је коса асимптота дате функције.

5.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+6x+14} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+3)^2+5} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}x}{5\left(\frac{(x+3)^2}{5}+1\right)} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}x}{5\left(\left(\frac{x+3}{\sqrt{5}}\right)^2+1\right)} \\
&= \begin{bmatrix} t = \frac{x+3}{\sqrt{5}} \\ \mathrm{d}x = \sqrt{5}\mathrm{d}t \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{5}\int \frac{\sqrt{5}}{t^2+1}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg} t + c \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\left(\frac{x+3}{\sqrt{5}}\right) + c
\end{aligned}$$

РЕШЕЊА ДРУГОГ КОЛОКВИЈУМА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 12.01.2022.

Група 1

1. (6 поена) Израчунати површину фигуре ограничену кривама $y = 9 - x^2$ и $y = 5$.
2. (6 поена) Наћи опште решење диференцијалне једначине $y' + \frac{y}{x} = \ln x$.
3. (6 поена) Наћи опште решење диференцијалне једначине $y'' - 3y' + 2y = 10\cos x$.
4. (6 поена) У две кутије налазе се цедуље обележене бројевима. У првој кутији су цедуље са бројевима од 1 до 20, а у другој од 6 до 15. Насумично се бира једна кутија и из ње извлачи једна цедуља.
(а) Која је вероватноћа да је извучена цедуља са бројем који је дељив са 3?
(б) Ако је извучена цедуља са бројем који је дељив са 3, која је вероватноћа да је из прве кутије?
5. (6 поена) Нека је дата случајна величина X која зависи од параметра

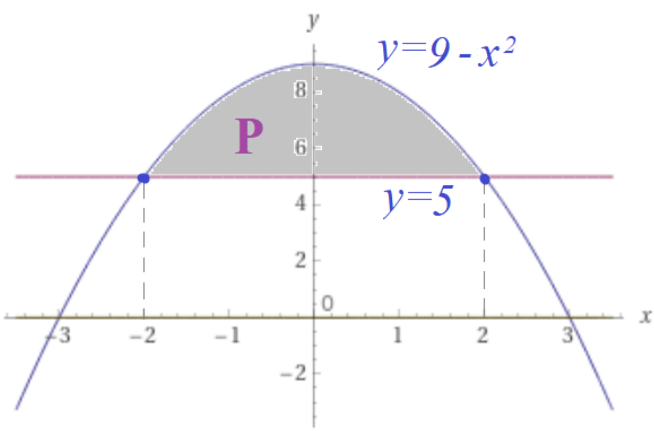
$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{3a}{2} & \frac{5a^2}{2} & 2a & a \end{pmatrix}$$

Одредити параметар a, $E(X)$ и $D(X)$.

РЕШЕЊА

1. Пресечне тачке графика функција $y = 9 - x^2$ и $y = 5$ су решења једначине $9 - x^2 = 5$, тј. $x^2 - 4 = 0$. Решења ове једначине су $x = -2$ и $x = 2$. Треба још видети у датом интервалу који је график "горе", а који "доле", што видимо са слике. Тражена површина је

$$P = \int_{-2}^{2} (9 - x^2 - 5)\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\mathrm{d}x = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{2}$$
$$= 4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} - \left(4 \cdot (-2) - \frac{(-2)^3}{3}\right) = \frac{32}{3}$$



2. Дата једначина је линеарна диференцијална једначина првог реда. Имамо да је

$$p(x) = \frac{1}{x}, \; q(x) = \ln x.$$

Одредимо, најпре,

$$\int p(x)\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x|.$$

Нека је $x > 0$, тј. $\ln|x| = \ln x$, а случај када је $x < 0$ се слично решава. Опште решење дате линеарне једначине је

$$\begin{aligned}
y &= e^{-\ln x}\left(c + \int \ln x e^{\ln x}\mathrm{d}x\right)\\
&= \frac{1}{x}\left(c + \int x\ln x\mathrm{d}x\right)\\
&= \begin{bmatrix} u = \ln x & \mathrm{d}v = x\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x & v = \frac{1}{2}x^2\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{x}\left(c + \frac{1}{2}x^2\ln x - \int \frac{1}{2}x^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x\right)\\
&= \frac{1}{x}\left(c + \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2\right)\\
&= \frac{c}{x} + \frac{1}{2}x\ln x - \frac{1}{4}x
\end{aligned}$$

3. Решимо прво хомогену једначину $y'' - 3y' + 2y = 0$. Њена карактеристична једначина је $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ чија су решења $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ па је решење ове хомогене једначине

$$y_h = c_1e^x + c_2e^{2x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Сада нађимо партикуларно решење дате једначине. Оно ће бити облика $y_p = A\cos x + B\sin x$. Први и други извод овог партикуларног решења су

$$\begin{aligned}
y_p' &= -A\sin x + B\cos x,\\
y_p'' &= -A\cos x - B\sin x.
\end{aligned}$$

Убацимо ово у полазну једначину.

$$y_p'' - 3y_p' + 2y_p = 10\cos x$$

$$-A\cos x - B\sin x - 3(-A\sin x + B\cos x) + 2(A\cos x + B\sin x) = 10\cos x$$

$$\cos x(A - 3B) + \sin x(3A + B) = 10\cos x$$

Сада изједначимо са леве и десне стране шта је уз $\sin x$, а шта уз $\cos x$ и добијамо систем једначина:

$$\begin{aligned}
A - 3B &= 10\\
3A + B &= 0
\end{aligned}$$

чије је решење $A = 1$, $B = -3$. Дакле, добили смо да је $y_p = \cos x - 3\sin x$, па је тражено опште решење

$$y = y_h + y_p = c_1e^x + c_2e^{2x} + \cos x - 3\sin x,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

4. Означимо са A догађај да је извучена цедуља са бројем који је дељив са 3. Како вероватноћа догађаја A зависи од тога из које се кутије извлаче цедуље, означимо са H_1 и H_2 хипотезе да се цедуља извуче из прве односно друге кутије.

(а) На основу формуле тоталне вероватноће је

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2).$$

Остаје још да израчунамо вероватноће које се појављују у претходној формули. Како насумице бирамо кутију, то је

$$P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}.$$

Даље, вероватноћа $P(A|H_1)$ је вероватноћа да извучемо цедуљу са бројем дељивим са 3 из прве кутије, а у првој кутији има 6 таквих цедуља од укупно 20 (то су цедуље са бројевима 3, 6, 9, 12, 15 и 18), па је

$$P(A|H_1) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}.$$

Слично, у другој кутији има укупно 10 цедуља, а повољно је њих 4 (то су цедуље са бројевима 6, 9 и 12 и 15), па је

$$P(A|H_2) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

Коначно,

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{7}{20}.$$

(б) Овде тражимо условну вероватноћу $P(H_1|A)$, а то рачунамо по формули

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10}}{\frac{7}{20}} = \frac{3}{7}.$$

5. Да би функција расподеле била добро дефинисана, сума вероватноћа мора да буде 1 тј.

$$\frac{3a}{2} + \frac{5a^2}{2} + 2a + a = 1$$

$$5a^2 + 9a - 2 = 0$$

Решења ове једначине су $a_1 = \frac{1}{5}$ и $a_2 = -2$, али како вероватноће не могу бити негативне, одбацујемо могућност a_2 и закључујемо да је $a = \frac{1}{5}$. Наша функција расподеле изгледа овако:

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Математичко очекивање је

$$E(X) = 1 \cdot \frac{3}{10} + 2 \cdot \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{2}{5} + 4 \cdot \frac{1}{5} = \frac{5}{2}$$

Расподела од X^2 је

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

па је

$$E(X^2) = 1 \cdot \frac{3}{10} + 4 \cdot \frac{1}{10} + 9 \cdot \frac{2}{5} + 16 \cdot \frac{1}{5} = \frac{15}{2},$$

па коначно добијамо

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{15}{2} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}.$$

Група 2

1. (6 поена) Израчунати површину фигуре ограничену кривама $y = x^2 - 9$ и $y = -5$.
2. (6 поена) Наћи опште решење диференцијалне једначине $y' - \frac{y}{x} = \ln x$.
3. (6 поена) Наћи опште решење диференцијалне једначине $y'' - 3y' + 2y = 10 \sin x$.
4. (6 поена) У две кутије налазе се цедуље обележене бројевима. У првој кутији су цедуље са бројевима од 1 до 20, а у другој од 6 до 15. Насумично се бира једна кутија и из ње извлачи једна цедуља.
(а) Која је вероватноћа да је извучена цедуља са бројем који је дељив са 4?
(б) Ако је извучена цедуља са бројем који је дељив са 4, која је вероватноћа да је из друге кутије?
5. (6 поена) Нека је дата случајна величина X која зависи од параметра

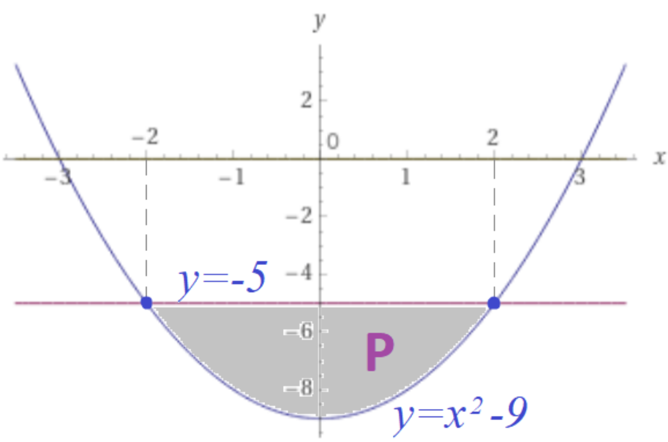
$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a^2 & \frac{a}{2} & \frac{a^2}{2} & \frac{3a}{4} \end{pmatrix}$$

Одредити параметар a, $E(X)$ и $D(X)$.

РЕШЕЊА

1. Пресечне тачке графика функција $y = x^2 - 9$ и $y = -5$ су решења једначине $x^2 - 9 = -5$, тј. $x^2 - 4 = 0$. Решења ове једначине су $x = -2$ и $x = 2$. Треба још видети у датом интервалу који је график "горе", а који "доле", што видимо са слике. Тражена површина је

$$\begin{aligned} P &= \int_{-2}^{2} (-5 - (x^2 - 9)) \mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} (4 - x^2) \mathrm{d}x = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2} \\ &= 4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} - \left(4 \cdot (-2) - \frac{(-2)^3}{3}\right) = \frac{32}{3} \end{aligned}$$



2. Дата једначина је линеарна диференцијална једначина првог реда. Имамо да је

$$p(x) = -\frac{1}{x}, \ q(x) = \ln x.$$

Одредимо, најпре,

$$\int p(x) \mathrm{d}x = -\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = -\ln |x|.$$

Нека је $x > 0$, тј. $\ln|x| = \ln x$, а случај када је $x < 0$ се слично решава. Опште решење дате линеарне једначине је

$$\begin{aligned}
y &= e^{\ln x}\left(c + \int \ln x e^{-\ln x}\mathrm{d}x\right)\\
&= x\left(c + \int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x\right)\\
&= \begin{bmatrix} t = \ln x \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{x}\mathrm{d}x \end{bmatrix}\\
&= x\left(c + \int t\mathrm{d}t\right)\\
&= x\left(c + \frac{1}{2}t^2\right)\\
&= x\left(c + \frac{1}{2}(\ln x)^2\right)
\end{aligned}$$

3. Решимо прво хомогену једначину $y'' - 3y' + 2y = 0$. Њена карактеристична једначина је $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ чија су решења $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ па је решење ове хомогене једначине

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{2x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Сада нађимо партикуларно решење дате једначине. Оно ће бити облика $y_p = A\cos x + B\sin x$. Први и други извод овог партикуларног решења су

$$\begin{aligned}
y_p' &= -A\sin x + B\cos x,\\
y_p'' &= -A\cos x - B\sin x.
\end{aligned}$$

Убацимо ово у полазну једначину.

$$y_p'' - 3y_p' + 2y_p = 10\sin x$$

$$-A\cos x - B\sin x - 3(-A\sin x + B\cos x) + 2(A\cos x + B\sin x) = 10\sin x$$

$$\cos x(A - 3B) + \sin x(3A + B) = 10\sin x$$

Сада изједначимо са леве и десне стране шта је уз $\sin x$, а шта уз $\cos x$ и добијамо систем једначина:

$$\begin{aligned}
A - 3B &= 0\\
3A + B &= 10
\end{aligned}$$

чије је решење $A = 3$, $B = 1$. Дакле, добили смо да је $y_p = 3\cos x + \sin x$, па је тражено опште решење

$$y = y_h + y_p = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + 3\cos x + \sin x,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

4. Означимо са A догађај да је извучена цедуља са бројем који је дељив са 4. Како вероватноћа догађаја A зависи од тога из које се кутије извлаче цедуље, означимо са H_1 и H_2 хипотезе да се цедуља извуче из прве односно друге кутије.
(а) На основу формуле тоталне вероватноће је

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2).$$

Остаје још да израчунамо вероватноће које се појављују у претходној формули. Како насумице бирамо кутију, то је

$$P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}.$$

Даље, вероватноћа $P(A|H_1)$ је вероватноћа да извучемо цедуљу са бројем дељивим са 4 из прве кутије, а у првој кутији има 5 таквих цедуља од укупно 20 (то су цедуље са бројевима 4, 8, 12, 16 и 20), па је

$$P(A|H_1) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}.$$

Слично, у другој кутији има укупно 10 цедуља, а повољно је њих 2 (то су цедуље са бројевима 8 и 12), па је

$$P(A|H_2) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$$

Коначно,

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{9}{40}.$$

(б) Овде тражимо условну вероватноћу $P(H_2|A)$, а то рачунамо по формули

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2)P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{9}{40}} = \frac{4}{9}.$$

5. Да би функција расподеле била добро дефинисана, сума вероватноћа мора да буде 1 тј.

$$a^2 + \frac{a}{2} + \frac{a^2}{2} + \frac{3a}{4} = 1$$

$$6a^2 + 5a - 4 = 0$$

Решења ове једначине су $a_1 = \frac{1}{2}$ и $a_2 = -\frac{4}{3}$, али како вероватноће не могу бити негативне, одбацујемо могућност a_2 и закључујемо да је $a = \frac{1}{2}$. Наша функција расподеле изгледа овако:

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

Математичко очекивање је

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{3}{8} = \frac{21}{8}$$

Расподела од X^2 је

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

па је

$$E(X^2) = 1 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 9 \cdot \frac{1}{8} + 16 \cdot \frac{3}{8} = \frac{67}{8},$$

па коначно добијамо

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{67}{8} - \left(\frac{21}{8}\right)^2 = \frac{95}{64}.$$

РЕШЕЊА ЈАНУАРСКОГ РОКА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 26.01.2022.
Група 1

1. (8 п) Израчунати $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x-\sqrt{x^2-3x}}{-2x+1}$.
2. (8 п) Испитати монотоност и наћи екстремне вредности функције $y=\ln\frac{1+x}{1-x}$.
3. (8 п) Израчунати вредност интеграла $\int_e^{e^2}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^3 x}$.
4. (8 п) Наћи опште решење диференцијалне једначине $y'+2xy=2x^3y^3$.
5. (8 п) Претпоставља се да 5% мушкараца и 2% жена болује од далтонизма. Група је формирана од 20 жена и 5 мушкараца. Из групе се случајно бира једна особа. Колика је вероватноћа да је из групе изабрана особа женског пола, ако се зна да болује од далтонизма?
6. а) (5 п) Дати дефиницију асимптоте функције и како се израчунава.
б) (5 п) Наћи све асимптоте функције $y=\frac{x+1}{x}e^x$.
7. а) (3 п) Дефинисати биномну расподелу вероватноће.
б) (3 п) Дефинисати математичко очекивање случајне променљиве X.
в) (4 п) Израчунати математичко очекивање случајне променљиве X која има биномну расподелу.

РЕШЕЊА

1.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-x-\sqrt{x^2-3x}}{-2x+1}\begin{array}{c}:x\\ \\ :x\end{array}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1-\sqrt{1-\frac{3}{x}}}{-2+\frac{1}{x}}=\frac{-1-1}{-2}=1$$

2. Да би функција била дефинисана мора да важи $1-x\neq 0$, као и $\frac{1+x}{1-x}>0$. Одавде се добија да је домен дате функције је $\mathcal{D}=(-1,1)$. Први извод дате функције је

$$\begin{aligned}y'&=\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)'\\&=\frac{1}{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'\\&=\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}\\&=\frac{2}{(1-x)(1+x)}\end{aligned}$$

Како је први извод позитиван на целом домену, то је функција растућа на целом домену и нема екстремума.
3.

$$\int_e^{e^2}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^3 x}=\begin{bmatrix}t=\ln x\\ \mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}x}{x}\\ x=e\longrightarrow t=1\\ x=e^2\longrightarrow t=2\end{bmatrix}=\int_1^2\frac{\mathrm{d}t}{t^3}=\frac{1}{-2t^2}\Bigg|_1^2=\frac{1}{-8}-\frac{1}{-2}=\frac{3}{8}$$

4. Дата једначина је Бернулијева диференцијална једначина. Она се сменом $z=y^{1-3}$ своди на линеарну диференцијалну једначину. Уведимо смену.

$$y=\frac{1}{\sqrt{z}},\quad y'=\frac{-1}{2z\sqrt{z}}\cdot z',$$

па дата једначина постаје

$$\frac{-1}{2z\sqrt{z}}\cdot z'+2x\cdot\frac{1}{\sqrt{z}}=2x^3\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right)^3 \Big/ \cdot(-2z\sqrt{z})$$

$$z'-4xz=-4x^3$$

Означимо $p(x)=-4x$, $q(x)=-4x^3$. Израчунајмо

$$\int p(x)\mathrm{d}x=-4\int x\mathrm{d}x=-2x^2$$

Решење ове линеарне диференцијалне једначине добијамо помоћу формуле

$$\begin{aligned}
z&=e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left(c+\int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right)\\
&=e^{2x^2}\left(c-4\int x^3e^{-2x^2}\mathrm{d}x\right)\\
&=e^{2x^2}\left(c-4\underbrace{\int x^2e^{-2x^2}x\mathrm{d}x}_{I}\right)
\end{aligned}$$

Израчунајмо посебно I.

$$\begin{aligned}
I&=\begin{bmatrix} t=-2x^2\\ \mathrm{d}t=-4x\mathrm{d}x\\ x\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}\mathrm{d}t\\ x^2=-\frac{1}{2}t\end{bmatrix}\\
&=\int\left(-\frac{1}{2}\right)te^t\left(-\frac{1}{4}\right)\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{8}\int te^t\mathrm{d}t\\
&=\begin{bmatrix} u=t & \mathrm{d}v=e^t\mathrm{d}t\\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}t & v=e^t\end{bmatrix}\\
&=\frac{1}{8}\left(te^t-\int e^t\mathrm{d}t\right)\\
&=\frac{1}{8}(te^t-e^t)\\
&=\frac{1}{8}\left((-2x^2)e^{-2x^2}-e^{-2x^2}\right)
\end{aligned}$$

Вратимо се сад у рачунање z.

$$z=e^{2x^2}(c-4I)=e^{2x^2}\left(c-4\cdot\frac{1}{8}\left((-2x^2)e^{-2x^2}-e^{-2x^2}\right)\right)=ce^{2x^2}+x^2+\frac{1}{2}$$

И коначно добијамо да је тражено опште решење

$$y=\frac{1}{\sqrt{z}}=\frac{1}{\sqrt{ce^{2x^2}+x^2+\frac{1}{2}}}.$$

5. Означимо са A догађај да је из групе одабрана особа која болује од далтонизма, а са H_1 да је одабрана жена и H_2 да је одабран мушкарац. Имамо да је

$$P(H_1)=\frac{20}{25}=\frac{4}{5},\quad P(H_2)=\frac{5}{25}=\frac{1}{5},\quad P(A|H_1)=\frac{2}{100}=\frac{1}{50},\quad P(A|H_2)=\frac{5}{100}=\frac{1}{20}.$$

Одавде је

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{50} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{20} = \frac{13}{500}.$$

Тражена вероватноћа је

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{50}}{\frac{13}{500}} = \frac{8}{13}.$$

6. а) Видети у уџбенику.
б) Домен дате функције је $\mathcal{D}_y = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
<u>Вертикалне асимптоте:</u> Једини кандидат за вертикалну асимптоту је $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = -\infty,$$

па права $x = 0$ јесте вертикална асимптота.
<u>Хоризонталне асимптоте:</u>

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x}e^x = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x}e^x = 0,$$

па функција има хоризонталну асимптоту $y = 0$ у $-\infty$, а у $+\infty$ нема хоризонталних асимптота.
<u>Косе асимптоте:</u>
Тражимо косу асимптоту само у $+\infty$.

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x+1}{x}e^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)e^x}{x^2} \overset{L.P.}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+2)e^x}{2x} = +\infty,$$

па нема косих асимптота.
7. Видети у уџбенику.

Група 2

1. (8 п) Израчунати $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-3x+4}\right)$.
2. (8 п) Испитати монотоност и наћи екстремне вредности функције $y=\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}$.
3. (8 п) Израчунати вредност интеграла $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}\mathrm{d}x$.
4. (8 п) Наћи опште решење диференцијалне једначине $xy'+y=y^2\ln x$.
5. (8 п) Претпоставља се да 5% мушкараца и 2% жена болује од далтонизма. Група је формирана од 30 жена и 10 мушкараца. Из групе се случајно бира једна особа. Колика је вероватноћа да је из групе изабрана особа мушког пола, ако се зна да болује од далтонизма?
6. а) (5 п) Дати дефиницију асимптоте функције и како се израчунава.
б) (5 п) Наћи све асимптоте функције $y=\frac{x+1}{x}e^x$.
7. а) (3 п) Дефинисати биномну расподелу вероватноће.
б) (3 п) Дефинисати математичко очекивање случајне променљиве X.
в) (4 п) Израчунати математичко очекивање случајне променљиве X која има биномну расподелу.

РЕШЕЊА

1.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-3x+4}\right) &= \lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-3x+4}\right)\cdot\frac{x+\sqrt{x^2-3x+4}}{x+\sqrt{x^2-3x+4}}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-\left(\sqrt{x^2-3x+4}\right)^2}{x+\sqrt{x^2-3x+4}}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-(x^2-3x+4)}{x+\sqrt{x^2-3x+4}}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{3x-4}{x+\sqrt{x^2-3x+4}}\begin{matrix}:x\\ :x\end{matrix}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{4}{x}}{1+\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}}\\
&= \frac{3-0}{1+\sqrt{1-0+0}}\\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

2. Домен дате функције је $\mathcal{D} = \mathbb{R}\backslash\{1\}$. Први извод дате функције је

$$\begin{aligned}
y' &= \left(\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}\right)' \\
&= \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \left(\frac{1+x}{1-x}\right)' \\
&= \frac{1}{1+\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} \\
&= \frac{1}{\frac{x^2-x+1+x^2+2x+1}{x^2-2x+1}} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} \\
&= \frac{(x-1)^2}{2(x^2+1)} \cdot \frac{2}{(x-1)^2} \\
&= \frac{1}{x^2+1}
\end{aligned}$$

Како је први извод позитиван на целом домену, то је функција растућа на целом домену и нема екстремума.

3.

$$\begin{aligned}
\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}\mathrm{d}x &= \begin{bmatrix} t = \ln x \\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{x} \\ x = 1 \longrightarrow t = 0 \\ x = e \longrightarrow t = 1 \end{bmatrix} \\
&= \int_0^1 \sin t \mathrm{d}t \\
&= -\cos t\Big|_0^1 \\
&= -\cos 1 + \cos 0 \\
&= 1 - \cos 1
\end{aligned}$$

4. Дата једначина је Бернулијева диференцијална једначина. Она се сменом $z = y^{1-2}$ своди на линеарну диференцијалну једначину. Уведимо смену.

$$y = \frac{1}{z}, \quad y' = \frac{-1}{z^2} \cdot z',$$

па дата једначина постаје

$$x \cdot \frac{-1}{z^2} \cdot z' + \frac{1}{z} = \frac{1}{z^2}\ln x \Big/ \cdot \frac{-z^2}{x}$$

$$z' - \frac{1}{x}z = -\frac{\ln x}{x}$$

Означимо $p(x) = -\frac{1}{x}$, $q(x) = \frac{\ln x}{x}$. Израчунајмо

$$\int p(x)\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = -\ln|x|$$

Претпоставимо да је $x > 0$, тј. $\ln|x| = \ln x$, а случај $x < 0$ се слично решава. Решење ове линеарне диференцијалне једначине добијамо помоћу формуле

$$\begin{aligned} z &= e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left(c+\int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right) \\ &= e^{\ln x}\left(c-\int \frac{\ln x}{x}e^{-\ln x}\mathrm{d}x\right) \\ &= x\left(c-\underbrace{\int \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x}_{I}\right) \end{aligned}$$

Израчунајмо посебно I.

$$\begin{aligned} I &= \begin{bmatrix} u=\ln x & \mathrm{d}v=\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x & v=-\frac{1}{x} \end{bmatrix} \\ &= -\frac{\ln x}{x}+\int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x} \\ &= -\frac{\ln x+1}{x} \end{aligned}$$

Вратимо се сад у рачунање z.

$$z = x\,(c-I) = x\left(c+\frac{\ln x+1}{x}\right) = cx+\ln x+1$$

И коначно добијамо да је тражено опште решење

$$y=\frac{1}{z}=\frac{1}{cx+\ln x+1}.$$

5. Означимо са A догађај да је из групе одабрана особа која болује од далтонизма, а са H_1 да је одабрана жена и H_2 да је одабран мушкарац. Имамо да је

$$P(H_1)=\frac{30}{40}=\frac{3}{4},\quad P(H_2)=\frac{10}{40}=\frac{1}{4},\quad P(A|H_1)=\frac{2}{100}=\frac{1}{50},\quad P(A|H_2)=\frac{5}{100}=\frac{1}{20}.$$

Одавде је

$$P(A)=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{50}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{20}=\frac{11}{400}.$$

Тражена вероватноћа је

$$P(H_2|A)=\frac{P(H_2)P(A|H_2)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{20}}{\frac{11}{400}}=\frac{5}{11}.$$

6. а) Видети у уџбенику.
б) Домен дате функције је $\mathcal{D}_y=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.
Вертикалне асимптоте: Једини кандидат за вертикалну асимптоту је $x=0$.

$$\lim_{x\to 0-} f(x)=-\infty,$$

па права $x=0$ јесте вертикална асимптота.
Хоризонталне асимптоте:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}e^x=+\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x} e^x = 0,$$

па функција има хоризонталну асимптоту $y = 0$ у $-\infty$, а у $+\infty$ нема хоризонталних асимптота.

<u>Косе асимптоте:</u>

Тражимо косу асимптоту само у $+\infty$.

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x+1}{x} e^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)e^x}{x^2} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{L.P.}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+2)e^x}{2x} = +\infty,$$

па нема косих асимптота.

7. Видети у уџбенику.

РЕШЕЊА ФЕБРУАРСКОГ РОКА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 18.02.2022.
Група 1

1. (8 п) Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)^n}$.
2. (8 п) Испитати монотоност и наћи локалне екстремуме функције $y = \frac{1}{x^2-3x+2}$.
3. (8 п) Израчунати $\int \frac{\ln(x-1)}{x^2} \mathrm{d}x$.
4. (8 п) Наћи партикуларно решење једначине $y'' + 3y' + 2y = e^x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
5. (8 п) Новчић се баца 4 пута. Ако је X случајна величина која представља производ броја глава и броја писама, одредити $E(2X-3)$ и $D(2X-3)$
6. а) (5 п) Дати дефиницију конвексности и конкавности функције.
б) (5 п) Испитати конвексност и наћи превојне тачке функције $y = xe^{x-1}$.
7. (10 п) а) (2 п) Када кажемо да су догађаји дисјунктни? Када догађаји чине разбијање скупа свих елементарних догађаја?
б) (4 п) Формулисати и показати формулу потпуне вероватноће.
в) (4 п)Формулисати и доказати Бајесову теорему.

РЕШЕЊА

1. Означимо $a_n = \frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)^n}$. Тада је

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}}}{\frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)^n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)\cdot\cancel{n!}}{\frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}}}}{\frac{\cancel{n!}}{\frac{n^n}{2^n}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)2^{n+1}n^n}{(n+1)^{n+1}2^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(n+1)}\cdot 2\cdot\cancel{2^n}\cdot n^n}{(n+1)^n\cdot\cancel{(n+1)}\cdot\cancel{2^n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\frac{(n+1)^n}{n^n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \\
&= \frac{2}{e} < 1,
\end{aligned}$$

па ред конвергира на основу Даламберовог критеријума.
2. Одредимо најпре домен дате функције. Потребно је да је $x^2 - 3x + 2 \neq 0$. Решења квадратне једначине $x^2 - 3x + 2 = 0$ су $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$, па је домен дате функције $\mathcal{D} = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$. Први извод дате функције је

$$f'(x) = \frac{3-2x}{(x^2-3x+2)^2}.$$

Први извод је једнак нули за $3 - 2x = 0$, тј. $x = \frac{3}{2}$, па је то потенцијални екстремум. Како је $(x^2-3x+2)^2 > 0$ на целом домену, то знак првог извода зависи само од $3 - 2x$.

	1		$\frac{3}{2}$		2	
$3-2x$	$+$		$+$		$-$	$-$
$f'(x)$	$+$		$+$		$-$	$-$

Дакле, $f'(x) < 0$ на $(\frac{3}{2}, 2) \cup (2, +\infty)$ и $f'(x) > 0$ на $(-\infty, 1) \cup (1, \frac{3}{2})$, па функција f опада на $(\frac{3}{2}, 2) \cup (2, +\infty)$, расте на $(-\infty, 1) \cup (1, \frac{3}{2})$ и $x = \frac{3}{2}$ је тачка локалног максимума.

3.

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln(x-1)}{x^2}\mathrm{d}x &= \begin{bmatrix} u = \ln(x-1) & \mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \\ \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x-1} & v = -\frac{1}{x}\end{bmatrix} \\ &= -\frac{\ln(x-1)}{x} + \int \frac{1-x+x}{x(x-1)}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\ln(x-1)}{x} + \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\ln(x-1)}{x} + \ln|x-1| - \ln|x| + c\end{aligned}$$

4. Прво тражимо опште решење, па ћемо на крају убацити почетне услове. Најпре нађимо решење хомогене једначине $y'' + 3y' + 2y = 0$. Нуле карактеристичне једначине $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ су $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, па је $y_h = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x}$.
Партикуларно решење је облика $y_p = Ae^x$. Израчунајмо први и други извод партикуларног решења и убацимо га у полазну једначину.

$$y_p' = Ae^x, \quad y_p'' = Ae^x$$

па је

$$\begin{aligned}&y_p'' + 3y_p' + 2y_p = e^x \\ &Ae^x + 3Ae^x + 2Ae^x = e^x \\ &6A = 1,\end{aligned}$$

одакле је $A = \frac{1}{6}$. Добијамо да је партикуларно решење је

$$y_p = \frac{1}{6}e^x.$$

Коначно, опште решење дате једначине је

$$y = y_h + y_p = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + \frac{1}{6}e^x, \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Још остаје да убацимо почетне услове, тј. да нађемо константе c_1 и c_2. Из услова $y(0) = 0$ имамо

$$0 = c_1e^0 + c_2e^0 + \frac{1}{6}e^0,$$

тј. $c_1 + c_2 = -\frac{1}{6}$. Да бисмо искористили други услов, треба нам први извод општег решења, а то је

$$y' = -c_1e^{-x} - 2c_2e^{-2x} + \frac{1}{6}e^x,$$

па из услова $y'(0) = 0$ добијамо

$$0 = -c_1e^0 - 2c_2e^0 + \frac{1}{6}e^0,$$

тј. $c_1 + 2c_2 = \frac{1}{6}$. Дакле, добили смо систем две једначине

$$c_1 + c_2 = -\frac{1}{6}$$
$$c_1 + 2c_2 = \frac{1}{6}$$

чије је решење $c_1 = -\frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{1}{3}$, па је тражено партикуларно решење

$$y = -\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{3}e^{-2x} + \frac{1}{6}e^{x}.$$

5. Како новчић бацамо 4 пута, имамо 5 могућности: да падне 0 глава и 4 писама, да падне 1 глава и 3 писама, да падну 2 главе и 2 писма, да падну 3 главе и 1 писмо и да падну 4 главе и 0 писама. Како X представља производ броја глава и писама имамо да је $X = \{0\cdot 4, 1\cdot 3, 2\cdot 2, 3\cdot 1, 4\cdot 0\} = \{0,3,4,3,0\}$, тј. $X \in \{0,3,4\}$. Како је

$$P\{X=0\} = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^4}_{\text{пало 4 писма}} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^4}_{\text{пале 4 главе}} = \frac{1}{8}$$

$$P\{X=3\} = \underbrace{\binom{4}{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3}_{\text{1 глава и 3 писма}} + \underbrace{\binom{4}{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1}_{\text{3 главе и 1 писмо}} = \frac{1}{2}$$

$$P\{X=4\} = \underbrace{\binom{4}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2}_{\text{2 главе и 2 писма}} = \frac{3}{8}$$

то X има расподелу

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \end{pmatrix},$$

$2X-3$ има расподелу

$$2X-3 : \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \end{pmatrix},$$

а $(2X-3)^2$ има расподелу

$$(2X-3)^2 : \begin{pmatrix} 9 & 9 & 4 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \end{pmatrix},$$

па је

$$E(2X-3) = (-3)\cdot\frac{1}{8} + 3\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{3}{8} = \frac{15}{8},$$
$$E((2X-3)^2) = 9\cdot\frac{1}{8} + 9\cdot\frac{1}{2} + 4\cdot\frac{3}{8} = \frac{57}{8},$$
$$D(2X-3) = E((2X-3)^2) - E(2X-3)^2 = \frac{57}{8} - \left(\frac{15}{8}\right)^2 = \frac{231}{64}.$$

6. (а) Видети у уџбенику.
(б) Домен дате функције је $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Нађимо њен други извод.

$$f'(x) = (xe^{x-1})' = e^{x-1} + xe^{x-1}, \quad f''(x) = e^{x-1} + e^{x-1} + xe^{x-1} = (2+x)e^{x-1}.$$

Како је $e^{x-1} > 0$, то на знак другог извода утиче само $2+x$, па закључујемо да је функција конвексна на $(-2,+\infty)$, конкавна на $(-\infty,-2)$ и $x=-2$ је превојна тачка.
7. Видети у уџбенику.

Група 2

1. (8 п) Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{3}\right)^n}$.
2. (8 п) Испитати монотоност и наћи локалне екстремуме функције $y = \frac{1}{x^2+3x+2}$.
3. (8 п) Израчунати $\int \frac{\ln(x+1)}{x^2} \mathrm{d}x$.
4. (8 п) Наћи партикуларно решење једначине $y'' - 3y' + 2y = -e^x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
5. (8 п) Новчић се баца 4 пута. Ако је X случајна величина која представља производ броја глава и броја писама, одредити $E(3X+2)$ и $D(3X+2)$
6. а) (5 п) Дати дефиницију конвексности и конкавности функције.
б) (5 п) Испитати конвексност и наћи превојне тачке функције $y = xe^{x-1}$.
7. (10 п) а) (2 п) Када кажемо да су догађаји дисјунктни? Када догађаји чине разбијање скупа свих елементарних догађаја?
б) (4 п) Формулисати и показати формулу потпуне вероватноће.
в) (4 п) Формулисати и доказати Бајесову теорему.

РЕШЕЊА

1. Означимо $a_n = \frac{n!}{\left(\frac{n}{3}\right)^n}$. Тада је

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{\left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}}}{\frac{n!}{\left(\frac{n}{3}\right)^n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)\cdot\cancel{n!}}{\frac{(n+1)^{n+1}}{3^{n+1}}}}{\frac{\cancel{n!}}{\frac{n^n}{3^n}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)3^{n+1}n^n}{(n+1)^{n+1}3^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(n+1)}\cdot 3\cdot \cancel{3^n}\cdot n^n}{(n+1)^n\cdot\cancel{(n+1)}\cdot\cancel{3^n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\frac{(n+1)^n}{n^n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \\
&= \frac{3}{e} > 1,
\end{aligned}$$

па ред дивергира на основу Даламберовог критеријума.
2. Одредимо најпре домен дате функције. Потребно је да је $x^2 + 3x + 2 \neq 0$. Решења квадратне једначине $x^2 + 3x + 2 = 0$ су $x_1 = -1$ и $x_2 = -2$, па је домен дате функције $\mathcal{D} = (-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (-1, +\infty)$. Први извод дате функције је

$$f'(x) = \frac{-2x-3}{(x^2+3x+2)^2}.$$

Први извод је једнак нули за $-2x - 3 = 0$, тј. $x = -\frac{3}{2}$, па је то потенцијални екстремум. Како је $(x^2+3x+2)^2 > 0$ на целом домену, то знак првог извода зависи само од $-2x-3$.

	-2		$-\frac{3}{2}$		-1	
$-2x-3$	$+$		$+$		$-$	$-$
$f'(x)$	$+$		$+$		$-$	$-$

Дакле, $f'(x) < 0$ на $(-\frac{3}{2}, -1) \cup (-1, +\infty)$ и $f'(x) > 0$ на $(-\infty, -2) \cup (-2, -\frac{3}{2})$, па функција f опада на $(-\frac{3}{2}, -1) \cup (-1, +\infty)$, расте на $(-\infty, -2) \cup (-2, -\frac{3}{2})$ и $x = -\frac{3}{2}$ је тачка локалног максимума.

3.

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln(x-1)}{x^2}\mathrm{d}x &= \begin{bmatrix} u = \ln(x+1) & \mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \\ \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x+1} & v = -\frac{1}{x} \end{bmatrix} \\ &= -\frac{\ln(x+1)}{x} + \int \frac{1+x-x}{x(x+1)}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\ln(x+1)}{x} + \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\ln(x+1)}{x} + \ln|x| - \ln|x+1| + c\end{aligned}$$

4. Прво тражимо опште решење, па ћемо на крају убацити почетне услове. Најпре нађимо решење хомогене једначине $y'' - 3y' + 2y = 0$. Нуле карактеристичне једначине $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ су $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$, па је $y_h = c_1e^x + c_2e^{2x}$.
Партикуларно решење је облика $y_p = Axe^x$. Израчунајмо први и други извод партикуларног решења и убацимо га у полазну једначину.

$$y_p' = A(1+x)e^x, \quad y_p'' = A(2+x)e^x$$

па је

$$\begin{aligned}&y_p'' - 3y_p' + 2y_p = -e^x \\ &A(2+x)e^x - 3A(1+x)e^x + 2Axe^x = -e^x \\ &-A = -1,\end{aligned}$$

одакле је $A = 1$. Добијамо да је партикуларно решење је

$$y_p = xe^x.$$

Коначно, опште решење дате једначине је

$$y = y_h + y_p = c_1e^x + c_2e^{2x} + xe^x,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Још остаје да убацимо почетне услове, тј. да нађемо константе c_1 и c_2. Из услова $y(0) = 0$ имамо

$$0 = c_1e^0 + c_2e^0 + 0e^0,$$

тј. $c_1 + c_2 = 0$. Да бисмо искористили други услов, треба нам први извод општег решења, а то је

$$y' = c_1e^x + 2c_2e^{2x} + e^x + xe^x,$$

па из услова $y'(0) = 0$ добијамо

$$0 = c_1e^0 + 2c_2e^0 + e^0 + 0e^0,$$

тј. $c_1 + 2c_2 = -1$. Дакле, добили смо систем две једначине

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ c_1 + 2c_2 &= -1 \end{aligned}$$

чије је решење $c_1 = 1$, $c_2 = -1$, па је тражено партикуларно решење

$$y = e^x - e^{2x} + xe^x.$$

5. Како новчић бацамо 4 пута, имамо 5 могућности: да падне 0 глава и 4 писама, да падне 1 глава и 3 писама, да падну 2 главе и 2 писма, да падну 3 главе и 1 писмо и да падну 4 главе и 0 писама. Како X представља производ броја глава и писама имамо да је $X = \{0 \cdot 4, 1 \cdot 3, 2 \cdot 2, 3 \cdot 1, 4 \cdot 0\} = \{0, 3, 4, 3, 0\}$, тј. $X \in \{0, 3, 4\}$. Како је

$$\begin{aligned} P\{X=0\} &= \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^4}_{\text{пало 4 писма}} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^4}_{\text{пале 4 главе}} = \frac{1}{8} \\ P\{X=3\} &= \underbrace{\binom{4}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3}_{\text{1 глава и 3 писма}} + \underbrace{\binom{4}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1}_{\text{3 главе и 1 писмо}} = \frac{1}{2} \\ P\{X=4\} &= \underbrace{\binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2}_{\text{2 главе и 2 писма}} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

то X има расподелу

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \end{pmatrix},$$

$3X + 2$ има расподелу

$$3X + 2 : \begin{pmatrix} 2 & 11 & 14 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \end{pmatrix},$$

а $(3X + 2)^2$ има расподелу

$$(3X + 2)^2 : \begin{pmatrix} 4 & 121 & 196 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \end{pmatrix},$$

па је

$$\begin{aligned} E(3X+2) &= 2 \cdot \frac{1}{8} + 11 \cdot \frac{1}{2} + 14 \cdot \frac{3}{8} = 11, \\ E((3X+2)^2) &= 4 \cdot \frac{1}{8} + 121 \cdot \frac{1}{2} + 196 \cdot \frac{3}{8} = \frac{269}{2}, \\ D(3X+2) &= E((3X+2)^2) - E(3X+2)^2 = \frac{269}{2} - 11^2 = \frac{27}{2}. \end{aligned}$$

6. (а) Видети у уџбенику.
(б) Домен дате функције је $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Нађимо њен други извод.

$$f'(x) = (xe^{x-1})' = e^{x-1} + xe^{x-1}, \quad f''(x) = e^{x-1} + e^{x-1} + xe^{x-1} = (2 + x)e^{x-1}.$$

Како је $e^{x-1} > 0$, то на знак другог извода утиче само $2 + x$, па закључујемо да је функција конвексна на $(-2, +\infty)$, конкавна на $(-\infty, -2)$ и $x = -2$ је превојна тачка.
7. Видети у уџбенику.

РЕШЕЊА ЈУНСКОГ РОКА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 22.06.2022.

ЗАДАЦИ

1. (8 п) Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{\ln n}$.
2. (8 п) Испитати монотоност и одредити локалне екстремуме функције $y = \mathrm{arctg}(x^3 - 3x^2 - 9x)$.
3. (8 п) Израчунати $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x - \sin^2 x + 1} \mathrm{d}x$.
4. (8 п) Наћи опште решење диференцијалне једначине $y'' - 2y' - 3y = xe^x$.
5. (8 п) У кутији се налазе 3 црне и 2 беле куглице. Извлачи се једна по једна куглица све док се не извуче бела. Ако је X случајна величина која представља укупан број извлачења, одредити расподелу од X, $E(X)$ и $D(X)$.
6. (а) **(5 п)** Како гласи Кошијев критеријум за конвергенцију редова са позитивним члановима?
(б) **(5 п)** Користећи Кошијев критеријум испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n$, у зависности од реалног параметра $a > 0$.
7. (а) **(2 п)** Формулисати теорему о дужини лука криве графика непрекидно диференцијабилне функције на сегменту $[a, b]$.
(б) **(5 п)** Доказати теорему.
(б) **(3 п)** Одредити дужину дела параболе $y^2 = 4x$ у првом квадранту, за x из скупа $[0, 4]$.

РЕШЕЊА

1. Означимо са $a_n = \frac{2^n}{\ln n}$. Како је $2^n >> \ln n$, то је

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{\ln n} = +\infty,$$

па дати ред дивергира јер није успуњен неопходан услов конвергенције.

2. Домен дате функције је $\mathcal{D}_y = \mathbb{R}$. Први извод дате функције је

$$y' = \frac{1}{1 + (x^3 - 3x^2 - 9x)^2} \cdot (3x^2 - 6x - 9) = \frac{3(x^2 - 2x - 3)}{1 + (x^3 - 3x^2 - 9x)^2} = \frac{3(x+1)(x-3)}{1 + (x^3 - 3x^2 - 9x)^2}.$$

Како је $y' = 0$ за $x = -1$ и $x = 3$ то су потенцијални екстремуми. Знамо да је функција $1 + (x^3 - 3x^2 - 9x)^2$ увек позитивна, па знак првог извода зависи само од $(x+1)(x-3)$ и то је

$$\begin{aligned} &y' > 0, \ \text{ за } x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty), \\ &y' < 0, \ \text{ за } x \in (-1, 3), \end{aligned}$$

па закључујемо да

$$\begin{aligned} &y \text{ расте на} (-\infty, -1) \cup (3, +\infty), \\ &y \text{ опада на } (-1, 3), \\ &x = -1 \text{ је локални максимум}, \\ &x = 3 \text{ је локални минимум}, \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{\cos^2 x - \sin^2 x + 1}\mathrm{d}x &= \int \frac{\sin x}{\cos^2 x - (1-\cos^2 x) + 1}\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{\sin x}{2\cos^2 x}\mathrm{d}x \\ &= \begin{bmatrix} t = \cos x \\ \mathrm{d}t = -\sin x \mathrm{d}x \end{bmatrix} \\ &= -\int \frac{1}{2t^2}\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{2}\int t^{-2}\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{t} + c \\ &= \frac{1}{2\cos x} + c\end{aligned}$$

4. Одредимо прво решење хомогене једначине $y'' - 2y' - 3y = 0$. Њена партикуларна једначина је

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0,$$

а решења ове једначине су $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$, па је решење хомогене једначине

$$y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}.$$

Сада тражимо једно партикуларно решење полазне једначине. Оно ће бити облика

$$y_p = e^x(\cos 0(Ax+B) + \sin 0(Cx+D)) = (Ax+B)e^x.$$

Први и други извод партикуларног решења су:

$$y_p' = Ae^x + (Ax+B)e^x = (Ax+A+B)e^x,$$

$$y_p'' = Ae^x + (Ax+A+B)e^x = (Ax+2A+B)e^x.$$

Убацимо ово у полазну једначину:

$$y_p'' - 2y_p' - 3y_p = xe^x$$

$$(Ax+2A+B)e^x - 2(Ax+A+B)e^x - 3(Ax+B)e^x = xe^x$$

$$(Ax+2A+B-2Ax-2A-2B-3Ax-3B)\cancel{e^x} = x\cancel{e^x}$$

$$-4Ax - 4B = x,$$

Када изједначимо коефицијенте уз 1 и уз x добијамо да је $-4B = 0$ и $-4A = 1$, тј. $B = 0$ и $A = -\frac{1}{4}$, па је

$$y_p = -\frac{1}{4}xe^x.$$

Коначно, опште решење дате једначине је

$$y = y_h + y_p = c_1e^{-x} + c_2e^{3x} - \frac{1}{4}xe^x.$$

5. Приметимо да $X \in \{1,2,3,4\}$ (нпр. ако одмах извучемо белу, онда је $X = 1$, ако извучемо прво једну црну па белу онда је то два извлачења и $X = 2$, итд.)

$$P(X=1) = \frac{2}{5},$$

$$P(X=2) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} = \frac{3}{10},$$
$$P(X=3) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot 23 = \frac{1}{5},$$
$$P(X=4) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot 13\cdot\frac{2}{2} = \frac{1}{10},$$

па је тражена расподела

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

Одавде лако добијамо

$$E(X) = 1\cdot\frac{2}{5} + 2\cdot\frac{3}{10} + 3\cdot\frac{1}{5} + 4\cdot\frac{1}{10} = 2$$
$$E(X^2) = 1\cdot\frac{2}{5} + 4\cdot\frac{3}{10} + 9\cdot\frac{1}{5} + 16\cdot\frac{1}{10} = 5$$
$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 5 - 2^2 = 1$$

6. (а) Видети у уџбенику.
(б) Означимо општи члан реда са $a_n = a^n$. Како је

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n} = a,$$

то на основу Кошијевог критеријума ред конвергира за $0 < a < 1$, дивергира за $a > 1$, а за $a = 1$ нам Кошијев критеријум не даје одговор. Ако је баш $a = 1$, онда је наш ред у ствари

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty,$$

па коначно ред дивергира за $a \geqslant 1$.
7. (а) и (б) Видети у уџбенику.
(в) Једначина дела криве у првом квадранту је $y = 2\sqrt{x}$, па је тражена дужина лука криве једнака

$$\begin{aligned}
l &= \int_0^4 \sqrt{1+(y')^2}\mathrm{d}x = \int_0^4 \sqrt{1+\left(\frac{2}{2\sqrt{x}}\right)^2}\mathrm{d}x = \int_0^4 \sqrt{\frac{1+x}{x}}\mathrm{d}x \\
&= \begin{bmatrix} t^2 = \frac{1+x}{x} \\ x = \frac{1}{t^2-1} \\ \mathrm{d}x = \frac{-2t}{(t^2-1)^2}\mathrm{d}t \\ x = 0 \to t = +\infty \\ x = 4 \to t = \frac{\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} = \int_{\frac{\sqrt{5}}{2}}^{+\infty} \sqrt{t^2}\cdot\frac{2t}{(t^2-1)^2}\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{4}\int_{\frac{\sqrt{5}}{2}}^{+\infty}\left(\frac{1}{t-1} + \frac{1}{(t-1)^2} - \frac{1}{t+1} + \frac{1}{(t+1)^2}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln\frac{t-1}{t+1} - \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)\Bigg|_{\frac{\sqrt{5}}{2}}^{+\infty} \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}-1}{\frac{\sqrt{5}}{2}+1} - \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}-1} - \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln(9-4\sqrt{5}) + 4\sqrt{5}\right)
\end{aligned}$$

РЕШЕЊА ЈУЛСКОГ РОКА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 13.07.2022.

ЗАДАЦИ

1. (8 п) Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$.

2. (8 п) Испитати конвексност и наћи превојне тачке функције $y=\sqrt{(x^2-9)^3}$.

3. (8 п) Израчунати $\int\frac{x^3+x^2-16x+16}{x^2-4x+3}\mathrm{d}x$.

4. (8 п) Наћи опште решење диференцијалне једначине $(1+\mathrm{tg}y)y'=x^2+1$.

5. (8 п) У фрижидеру са сладоледима налази се једнак број сладоледа на штапићу и корнет сладоледа, а дупло више породичних сладоледа. У току је наградна игра и зна се да од корнет сладоледа 2% су "добитни", као и 4% породичних и 3% сладоледа на штапићу. Случајно узимамо 1 сладолед из фрижидера. Која је вероватноћа да смо освојили неку награду?

6. (5 п) а) Дати дефиницију локалних екстремума функције реалне промењљиве.

(5 п) б) Наћи све локалне екстремуме функције $y=(x+1)e^{1-x^2}$.

7. (5 п) а) Извести формулу за одређивање општег решења линеарне диференцијалне једначине првог реда $y'+P(x)y=Q(x)$.

(5 п) б) Извести формулу за одређивање општег решења Бернулијеве диференцијалне једначине $y'+P(x)y=y^nQ(x)$, $n\neq 0,1$.

РЕШЕЊА

1. Означимо $a_n=\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$. Како је

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{-2}}\right)^{\frac{n+1}{-2}\,\frac{-2}{n+1}\cdot(n-1)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-2(n-1)}{n+1}}=e^{-2}<1,$$

то дати ред конвергира по Кошијевом критеријуму.

2. Домен функције је $\mathcal{D}=(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$. Израчунајмо први и други извод дате функције

$$f'(x)=\frac{3(x^2-9)^2\cdot 2x}{2\sqrt{(x^2-9)^3}},\quad f''(x)=\frac{2(x^2-9)(2x^2-9)}{\sqrt{(x^2-9)^3}}.$$

Имамо да је $f''(x)=0$ за $x=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}$, али те тачке нису у домену. Како је $x^2-9>0$ на целом домену, то на знак другог извода утиче само $2x^2-9$, али видимо да је и $2x^2-9>0$ на целом домену (јер је ова функција негативна на интервалу $(-\frac{3}{\sqrt{2}},\frac{3}{\sqrt{2}})$ али то није у домену), па је коначно други извод увек позитиван и функција је конвексна.

3. Када поделимо $x^3+x^2-16x+16$ са x^2-4x+3 добијемо количник $x+5$ и остатак $x+1$, па је

$$\frac{x^3+x^2-16x+16}{x^2-4x+3}=x+5+\frac{x+1}{x^2-4x+3}.$$

Како је $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$, имамо

$$\frac{x+1}{x^2-4x+3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3},$$

одакле рачуном добијамо $A=-1$, $B=2$. Дакле,

$$\frac{x^3+x^2-16x+16}{x^2-4x+3}=x+5-\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-3},$$

па је дати интеграл

$$\int \frac{x^3+x^2-16x+16}{x^2-4x+3}\mathrm{d}x = \int \left(x+5-\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-3}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}+5x-\ln|x-1|+2\ln|x-3|+c.$$

4. Дата једначина је диференцијална једначина која раздваја промењиве.

$$(1+\mathrm{tg}y)y' = x^2+1$$

$$\left(1+\frac{\sin y}{\cos y}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2+1$$

$$\left(1+\frac{\sin y}{\cos y}\right)\mathrm{d}y = (x^2+1)\mathrm{d}x$$

$$\int \left(1+\frac{\sin y}{\cos y}\right)\mathrm{d}y = \int (x^2+1)\mathrm{d}x$$

$$y-\ln|\cos y| = \frac{x^3}{3}+x+c.$$

Користили смо да је $\int \frac{\sin y}{\cos y}\mathrm{d}y = -\ln|\cos y|$ (ово се решава сменом $t=\cos y$).
5. Означимо са A догађај да је освојена награда, а са H_1, H_2 и H_3 хипотезе да је извучен корнет, породични односно сладолед на штапићу. Имамо

$$P(H_1)=P(H_2)=\frac{1}{4},\ P(H_3)=\frac{1}{2},$$

$$P(A|H_1)=\frac{2}{100},\ P(A|H_2)=\frac{4}{100},\ P(A|H_3)=\frac{3}{100}.$$

Тражена вероватноћа је

$$P(A)=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)+P(H_3)P(A|H_3)=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{100}+\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{100}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{100}=\frac{3}{100}.$$

6. (а) Видети у уџбенику.
(б) Домен дате функције је $\mathcal{D}=\mathbb{R}$. Нађимо први извод функције.

$$y' = e^{1-x^2}+(x+1)(-2x)e^{1-x^2} = (-2x^2-2x+1)e^{1-x^2}$$

Имамо да је $y'=0$ за $x=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $x=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ па су то потенцијални екстремуми. Функција e^{1-x^2} је увек позитивна па не утиче на знак првог извода, већ имамо да је $y'>0$ за $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2},+\infty\right)$ и $y'<0$ за $x\in\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, тј. функција расте на $\left(-\infty,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2},+\infty\right)$, опада на $\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $x=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$ је тачка локалног максимума и $x=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ је тачка локалног минимума.
7. Видети у уџбенику.

РЕШЕЊА АВГУСТОВСКОГ РОКА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 31.08.2022.

ЗАДАЦИ

1. (8 п) Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^2 \cdot 2^{n+2}}{n+2}$.

2. (8 п) Одредити асимптоте функције $y = \frac{x^2}{e^x(x-5)}$.

3. (8 п) Израчунати $\int x \sin(2x) \mathrm{d}x$.

4. (8 п) Наћи партикуларно решење диференцијалне једначине $y' + xy - x^3 = 0$ са почетним условом $y(0) = 0$.

5. (8 п) Новчић се баца 4 пута. Ако је X случајна величина која представља број палих писама, одредити $E(X^3)$ и $E(2X+1)$.

6. (а) **(5 п)** Дати дефиницију конвексности и конкавности функције.

(б) **(5 п)** Испитати конвексност и наћи превојне тачке функције $y = \frac{2x+1}{3x-1}$.

7. (а) **(5 п)** Ако је γ крива у простору $\mathbb{R}^3$ параметризована помоћу $x(t), y(t), z(t)$ за $t \in [a,b]$ и $f : \gamma \to \mathbb{R}$ непрекидна функција, дефинисати криволинијски интеграл функције f по кривој γ.

(б) **(5 п)** Нека је крива γ део завојнице задата са: $x(t) = a\cos t$, $y(t) = a \sin t$, $z(t) = bt$, $t \in [0, 2\pi]$. Израчунати криволинијски интеграл функције $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ по кривој γ.

РЕШЕЊА

1. Означимо са $a_n = \frac{e^2 \cdot 2^{n+2}}{n+2}$. Како је

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{e^2}\,\sqrt[n]{2^n \cdot 2^2}}{\sqrt[n]{n+2}} = 2 > 1,$$

то дати ред дивергира на основу Кошијевог критеријума критеријума.
Други начин: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ јер $2^{n+2} >> n+2$, па ред дивергира јер није испуњен неопходан услов конвергенције.

2. Домен дате функције је $\mathcal{D}_y = (-\infty, 5) \cup (5, +\infty)$.
Вертикалне асимптоте: Из домена видимо да је једина потенцијална вертикална асимптота права $x = 5$. Како је

$$\lim_{x\to 5+} f(x) = +\infty,$$

то права $x = 5$ јесте вертикална асимптота.
Хоризонталне асимптоте:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

јер је $e^x(x-5) >> x^2$ (а могли смо и користити Лопиталово правило за рачунање овог лимеса), па је права $y = 0$ хоризонтална асимптота дате функције.
Вертикалне асимптоте: Како функција има хоризонталну, не може имати косу асимптоту.

3.

$$\begin{aligned}\int x\sin(2x)\mathrm{d}x &= \begin{bmatrix} u = x & \mathrm{d}v = \sin(2x)\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x & v = -\frac{1}{2}\cos(2x)\end{bmatrix} \\ &= -\frac{x\cos(2x)}{2} + \frac{1}{2}\int \cos(2x)\mathrm{d}x \\ &= -\frac{x\cos(2x)}{2} + \frac{1}{4}\sin(2x) + c.\end{aligned}$$

4. Дата једначина је линеарна диференцијална једначина првог реда и њено опште решење је дато формулом

$$y = e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left(c + \int e^{\int p(x)\mathrm{d}x} q(x)\mathrm{d}x\right).$$

У датом примеру је $p(x) = x$, $q(x) = x^3$, па је $\int p(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2$. Опште решење дате једначине је

$$\begin{aligned}
y &= e^{-\frac{1}{2}x^2}\left(c + \int e^{\frac{1}{2}x^2} x^3 \mathrm{d}x\right) \\
&= \begin{bmatrix} t = \frac{1}{2}x^2 \\ \mathrm{d}t = x\mathrm{d}x \end{bmatrix} \\
&= e^{-\frac{1}{2}x^2}\left(c + 2\int te^t \mathrm{d}t\right) \\
&= e^{-\frac{1}{2}x^2}(c + 2e^t(t-1)) \\
&= e^{-\frac{1}{2}x^2}\left(c + (x^2-2)e^{\frac{1}{2}x^2}\right) \\
&= ce^{-\frac{1}{2}x^2} + x^2 - 2
\end{aligned}$$

Искористили смо $\int te^t\mathrm{d}t = e^t(t-1)$ што се добија применом парцијалне интеграције (рађено на вежбама).

Остаје још да убацимо почетни услов $y(0) = 0$ да би одредили константу c.

$$0 = ce^{-\frac{1}{2}0^2} + 0^2 - 2,$$

па је $c = 2$ и коначно тражено партикуларно решење је

$$y = 2e^{-\frac{1}{2}x^2} + x^2 - 2.$$

5. Прво се питамо које све вредности X може да узме. Закључујемо да је $X \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Даље, потребно је да одредимо вероватноће да X узима баш те вредности.

$$P\{X = 0\} = \binom{4}{0} \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$$

$$P\{X = 1\} = \binom{4}{1} \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{1}{4}$$

$$P\{X = 2\} = \binom{4}{2} \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{3}{8}$$

$$P\{X = 3\} = \binom{4}{3} \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{1}{4}$$

$$P\{X = 4\} = \binom{4}{4} \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$$

Дакле, X има расподелу

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

Сада можемо да израчунамо тражена очекивања.

$$E(X) = 0\cdot\frac{1}{16} + 1\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{3}{8} + 3\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{16} = 2$$
$$E(2X+1) = 2E(X) + 1 = 2\cdot 2 + 1 = 5,$$
$$E(X^3) = 0\cdot\frac{1}{16} + 1\cdot\frac{1}{4} + 8\cdot\frac{3}{8} + 27\cdot\frac{1}{4} + 64\cdot\frac{1}{16} = 14.$$

6. (а) Видети у уџбенику.

(б) Домен дате функције је $\mathcal{D}_y = \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\}$. Њени први и други изводи су

$$y' = -\frac{5}{(3x-1)^2},\quad y'' = \frac{30}{(3x-1)^3}.$$

Знак другог извода зависи од $(3x-1)^3$, па закључујемо да је функција конвексна на $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$, конкавна на $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$ и нема превојних тачака јер други извод никад није нула.
7. (а) Видети у уџбенику.
(б) Криволинијски интеграл рачунамо по формули

$$\int_\gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\mathrm{d}t$$

Имамо да је $x'(t) = -a\sin t$, $y'(t) = a\cos t$, $z'(t) = b$, па је

$$\begin{aligned}
\int_\gamma (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s &= \int_0^{2\pi} (a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t + b^2t^2)\sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\mathrm{d}t\\
&= \int_0^{2\pi} (a^2(\sin^2 t + \cos^2 t) + b^2t^2)\sqrt{a^2(\sin^2 t + \cos^2 t) + b^2}\mathrm{d}t\\
&= \int_0^{2\pi} (a^2 + b^2t^2)\sqrt{a^2+b^2}\mathrm{d}t\\
&= \sqrt{a^2+b^2}\left(a^2t + \frac{b^2}{3}t^3\right)\Bigg|_0^{2\pi}\\
&= \sqrt{a^2+b^2}\left(2a^2\pi + \frac{8b^2\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

РЕШЕЊА СЕПТЕМБАРСКОГ РОКА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 21.09.2022.

ЗАДАЦИ

1. (8 п) Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)!}$.
2. (8 п) Испитати монотоност и одредити екстремуме функције $y = \frac{e^x}{x+1}$.
3. (8 п) Израчунати $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$.
4. (8 п) Наћи опште решење диференцијалне једначине $y'' - 11y' + 30y = \sin x$.
5. (8 п) У првој кутији се налази 10 листића нумерисаних бројевима од 6 до 15, а у другој кутији се налази 10 листића нумерисаних бројевима од 26 до 35. Насумице бирамо кутију и извлачимо један листић из ње.

(4 п) (а) Колика је вероватноћа да је извучен листић са бројем који садржи цифру 2 ?

(4 п) (б) Ако је извучен број који садржи цифру два, колика је вероватноћа да је листић извучен из друге кутије?

6. (а) **(5 п)** Дати дефиницију асимптоте.
(б) **(5 п)** Наћи све асимптоте функције $y = \frac{2x^2 - \sin x}{x+3}$.
7. (а) **(4 п)** Дефинисати математичко очекивање и дисперзију случајне променљиве X.
(б) **(6 п)** Израчунати математичко очекивање $E(X)$ ако X има биномну расподелу.

РЕШЕЊА

1. Означимо са $a_n = \frac{3^n}{(n+2)!}$. Како је

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+3)!}}{\frac{3^n}{(n+2)!}}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3\cdot\cancel{3^n}}{(n+3)\cancel{(n+2)!}}}{\frac{\cancel{3^n}}{\cancel{(n+2)!}}}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+3}\\ &= 0 < 1,\end{aligned}$$

то дати ред конвергира на основу Даламберовог критеријума.

2. Домен дате функције је $\mathcal{D}_y = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. Први извод функције је

$$y' = \left(\frac{e^x}{x+1}\right)' = \frac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2} = \frac{xe^x}{(x+1)^2}.$$

Како је $e^x > 0$ и $(x+1)^2 > 0$ на целом домену, на знак првог извода утиче само x, па закључујемо да је $y' > 0$ за $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$, $y' < 0$ за $x \in (0, +\infty)$ и $y' = 0$ за $x = 0$, тј. дата функција опада на $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$, расте на $(0, +\infty)$ и тачка $x = 0$ је тачка локалног минимума.

3.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\mathrm{d}x \\
&= \begin{bmatrix} t = \sin x \\ \mathrm{d}t = \cos x \mathrm{d}x \\ x = 0 \longrightarrow t = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \longrightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \\
&= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} \\
&= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{(1-t)(1+t)}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\left(-\ln|1-t| + \ln|1+t|\right)\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1+t}{1-t}\right)\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} - \ln 1\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}
\end{aligned}$$

4. Дата једначина је нехомогена линеарна диференцијална једначина другог реда са константним коефицијентима. Нађимо најпре решење хомогене једначине $y''-11y'+30y=0$. Њена карактеристична једначина је $\lambda^2-11\lambda+30\lambda=0$, чија су решења $\lambda_1=5$, $\lambda_2=6$. Решење ове хомогене једначине је

$$y_h = c_1e^{5x} + c_2e^{6x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Сада тражимо партикуарно решење полазне једначине. Оно је облика $y_p = A\sin x + B\cos x$. Одредимо први и други извод од y_p и убацимо га у полазну једначину да бисмо нашли константе A и B.

$$y_p' = A\cos x - B\sin x, \quad y_p'' = -A\sin x - B\cos x.$$

Сада имамо

$$\begin{aligned}
y_p'' - 11y_p' + 30y_p &= \sin x \\
-A\sin x - B\cos x - 11(A\cos x - B\sin x) + 30(A\sin x + B\cos x) &= \sin x \\
\sin x(-A + 11B + 30A) + \cos x(-B - 11A + 30B) &= \sin x \\
\sin x(29A + 11B) + \cos x(29B - 11A) &= \sin x
\end{aligned}$$

Када изједначимо коефицијенте уз $\sin x$ и уз $\cos x$ са леве и десне стране знака једнакости добијамо систем једначина са две непознате:

$$29A + 11B = 1,$$

$$29B - 11A = 0,$$

чије је решење $A = \frac{29}{962}$ и $B = \frac{11}{962}$. Тражено партикуларно решење је $y_p = \frac{29}{962}\sin x + \frac{11}{962}\cos x$, па је опште решење полазне једначине

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{5x} + c_2 e^{6x} + \frac{29}{962}\sin x + \frac{11}{962}\cos x,\ \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

5.(а) Означимо са A догађај да је извучен листић са бројем који садржи цифру 2. Вероватноћа овог догађаја зависи од тога из које се кутије извлачи листић, па означимо са H_1 хипотезу да је одабрана прва кутија, а са H_2 да је одабрана друга кутија. Јасно је да важи $P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$. Поред тога, имамо

$$P(A|H_1) = \frac{1}{10}, \quad P(A|H_2) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2},$$

па је

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{10}.$$

(б) Потребно је одредити $P(H_2|A)$.

$$P(H_2|A) = \frac{P(AH_2)}{P(A)} = \frac{P(H_2)P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{3}{10}} = \frac{5}{6}.$$

6. (а) Видети у уџбенику.

(б) Домен дате функције је $\mathcal{D}_y = (-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$.

<u>Вертикалне асимптоте:</u> Једини кандидат за вертикалну асимптоту је права $x = -3$. Како је

$$\lim_{x\to -3+} \frac{2x^2 - \sin x}{x+3} = +\infty,$$

то $x = -3$ јесте вертикална асимптота.

<u>Хоризонталне асимптоте:</u>

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - \sin x}{x+3}\begin{matrix}{\scriptstyle :x}\\ \\ {\scriptstyle :x}\end{matrix} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{3}{x}} = \frac{\infty - 0}{1+0} = \infty,$$

па нема хоризонталних асимптота.

<u>Косе асимптоте:</u>

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - \sin x}{x^2+3x}\begin{matrix}{\scriptstyle :x^2}\\ \\ {\scriptstyle :x^2}\end{matrix} = \lim_{x\to\infty}\frac{2 - \frac{\sin x}{x^2}}{1 + \frac{3}{x}} = \frac{2 - 0}{1+0} = 2,$$

$$n = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2 - \sin x}{x+3} - 2x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2 - \sin x - 2x^2 - 6x}{x+3} = \lim_{x\to\infty}\frac{-6x - \sin x}{x+3} = -6,$$

па је права $y = 2x - 6$ коса асимптота дате функције.

7. Видети у уџбенику.