РЕШЕЊА ПРВОГ КОЛОКВИЈУМА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 28.11.2020.

Група $12h$

1. (6 поена) Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

2. (6 поена) Израчунати $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$.

3. (6 поена) Испитати конвексност и наћи превојне тачке функције $y=\ln^2(x+3)+2x-5$.

4. (6 поена) Одредити асимптоте функције $y=4e^{-\frac{2}{x}}$.

5. (6 поена) Израчунати $\int \frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

РЕШЕЊА

1. Означимо $a_n=\frac{n!}{n^n}$. Тада је

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\cancel{(n+1)}\cdot\cancel{n!}}{\cancel{(n+1)}\cdot(n+1)^n}}{\frac{\cancel{n!}}{n^n}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1-1+\frac{n}{n+1}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n-n-1}{n+1}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-(n+1)}\right)^{-(n+1)\cdot\frac{1}{-(n+1)}\cdot n} \\
&= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{n}{-n-1}} \\
&= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{-n-1}} \\
&= e^{-1} \\
&= \frac{1}{e}<1,
\end{aligned}$$

па ред конвергира на основу Даламберовог критеријума.

2.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right) &= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2+x}+x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x})^2-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}\begin{matrix}{}^{:x}\\ {}_{:x}\end{matrix}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

3. Домен функције $y=\ln^2(x+3)+2x-5$ је $\mathcal{D}_y=(-3,+\infty)$, а њени први и други извод су

$$\begin{aligned}y' &= (\ln^2(x+3)+2x-5)=\frac{2\ln(x+3)}{x+3}+2,\\ y'' &= \left(\frac{2\ln(x+3)}{x+3}+2\right)'=2\cdot\frac{\frac{1}{x+3}\cdot(x+3)-\ln(x+3)}{(x+3)^2}=\frac{2(1-\ln(x+3))}{(x+3)^2}.\end{aligned}$$

Имамо да је $y''=0$ за $x=e-3$, па је то потенцијална превојна тачка. Како је $(x+3)^2$ увек позитивно, знак првог извода зависи од знака $1-\ln(x+3)$.

	-3		$e-3$
$1-\ln(x+3)$	//////	$+$	$-$
y'	//////	$+$	$-$

Закључујемо да је функција конвексна на $(-3,e-3)$, конкавна на $(e-3,+\infty)$ и $x=e-3$ је превојна тачка.

4. Домен дате функције је

$$\mathcal{D}_y=(-\infty,0)\cup(0,+\infty).$$

Вертикалне асимптоте: Кандидат за вертикалну асимптоту је $x=0$.
Испитујемо да ли је ово асимптота.

$$\lim_{x\to0+}4e^{-\frac{2}{x}}=0,$$

$$\lim_{x\to0-}4e^{-\frac{2}{x}}=+\infty,$$

па права $x=0$ јесте вертикална асимптота.
Хоризонталне асимптоте:

$$\lim_{x\to\pm\infty}4e^{-\frac{2}{x}}=4e^0=4,$$

па је права $y=4$ вертикална асимптота.
Косе асимптоте:
Како функција има хоризонталну асимптоту, нема косу.

5.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x &= \begin{bmatrix} u = x & \mathrm{d}v = \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x & v = \mathrm{tgx} \end{bmatrix} \\
&= x\mathrm{tg}x - \int \mathrm{tg}x\mathrm{d}x \\
&= x\mathrm{tg}x - \int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x \\
&= \begin{bmatrix} t = \cos x \\ \mathrm{d}t = -\sin x\mathrm{d}x \end{bmatrix} \\
&= x\mathrm{tg}x - \int \frac{-1}{t}\mathrm{d}t \\
&= x\mathrm{tg}x + \ln|t| + c \\
&= x\mathrm{tg}x + \ln|\cos x| + c
\end{aligned}
$$

Група $14h$

1. (6 поена) Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2n^2}{n^4}\right)^n$.

2. (6 поена) Израчунати $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2\ln x}$.

3. (6 поена) Испитати монотоност и наћи екстремуме функције $y=e^{2x}(x^2-4x+2)$.

4. (6 поена) Одредити асимптоте функције $y=\frac{3x^2+2x-4}{2x^2-x-1}$.

5. (6 поена) Израчунати $\int x\cdot\ln(x+1)\mathrm{d}x$.

РЕШЕЊА

1. Означимо $a_n=\left(\frac{n+2n^2}{n^4}\right)^n$. Тада је

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}&=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+2n^2}{n^4}\right)^n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2n^2}{n^4}\begin{matrix}{\scriptstyle :n^4}\\ \\{\scriptstyle :n^4}\end{matrix}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^3}+\frac{2}{n^2}}{1}\\&=\frac{0+0}{1}\\&=0<1,\end{aligned}$$

па ред конвергира на основу Кошијевог критеријума.

2.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2\ln x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{x\ln x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\\&\overset{L.P.}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}}\\&=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x}\right)\\&=\infty\end{aligned}$$

3. Домен функције $y=e^{2x}(x^2-4x+2)$ је $\mathcal{D}_y=\mathbb{R}$, а њен први извод је

$$y'=(e^{2x}(x^2-4x+2))'=2e^{2x}(x^2-4x+2)+e^{2x}(2x-4)=e^{2x}(2x^2-6x)=2x(x-3)e^{2x}.$$

Имамо да је $y'=0$ за $x=0$ или $x=3$, па су то потенцијални екстремуми. Како је експоненцијална функција увек позитивна, знак првог извода зависи од знака $x(x-3)$.

		0		3	
x	$-$		$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$		$+$
y'	$+$		$-$		$+$

Закључујемо да функција расте на $(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$, опада на $(0,3)$, $x=0$ је тачка локалног максимума и $x=3$ је тачка локалног минимума.

4. Одређујемо домен. Потребно је да важи $2x^2-x-1\neq 0$.

$$x_{1/2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4},$$

па мора да важи $x\neq 1$ и $x\neq -\frac{1}{2}$. Дакле, домен дате функције је

$$\mathcal{D}_y=\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},1\right)\cup(1,+\infty).$$

Вертикалне асимптоте: Кандидати за вертикалне асимптоте су $x=1$ и $x=-\frac{1}{2}$. Испитујемо да ли је нешто од овога асимптота.

$$\lim_{x\to 1+}\frac{3x^2+2x-4}{2x^2-x-1}=+\infty,$$

па права $x=1$ јесте вертикална асимптота.

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}+}\frac{3x^2+2x-4}{2x^2-x-1}=+\infty,$$

па права $x=-\frac{1}{2}$ јесте вертикална асимптота.

Хоризонталне асимптоте:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2+2x-4}{2x^2-x-1}=\frac{3}{2},$$

па је права $y=\frac{3}{2}$ вертикална асимптота.

Косе асимптоте:

Како функција има хоризонталну асимптоту, нема косу.

5.

$$\begin{aligned}\int x\ln(x+1)\mathrm{d}x &= \begin{bmatrix} u=\ln(x+1) & \mathrm{d}v=x\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u=\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x & v=\frac{x^2}{2}\end{bmatrix}\\
&=\frac{x^2}{2}\ln(x+1)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x+1}\mathrm{d}x\\
&=\frac{x^2}{2}\ln(x+1)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2-1+1}{x+1}\mathrm{d}x\\
&=\frac{x^2}{2}\ln(x+1)-\frac{1}{2}\int\frac{(x-1)(x+1)+1}{x+1}\mathrm{d}x\\
&=\frac{x^2}{2}\ln(x+1)-\frac{1}{2}\int\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x\\
&=\frac{x^2}{2}\ln(x+1)-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\ln|x+1|+c.\end{aligned}$$

РЕШЕЊА ДРУГОГ КОЛОКВИЈУМА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 18.01.2021.

Група у $12h$

1. (6 поена) Израчунати површину фигуре ограничену кривама

$$y = -x^2 + 1,\ y = x - 2,\ x \leqslant 0.$$

2. (6 поена) Наћи опште решење диференцијалне једначине $y' + y = e^x \sin x$.

3. (6 поена) Наћи опште решење диференцијалне једначине $y'' + \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$.

4. (6 поена) У две кутије налазе се куглице обележене бројевима. У првој кутији су куглице са бројевима од 2 до 27, а у другој од 21 до 33. Насумично се бира једна кутија и из ње извлачи једна куглица.

(а) Која је вероватноћа да је извучена куглица са бројем који садржи цифру 3 у свом запису?

(б) Ако је извучена куглица са бројем који садржи цифру 3, која је вероватноћа да је из друге кутије?

5. (6 поена) Нека је дата случајна величина X која зависи од параметра

$$X : \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ a & \frac{a}{2} & \frac{1}{2} & \frac{a}{2} & a \end{pmatrix}$$

(а) Одредити параметар a;

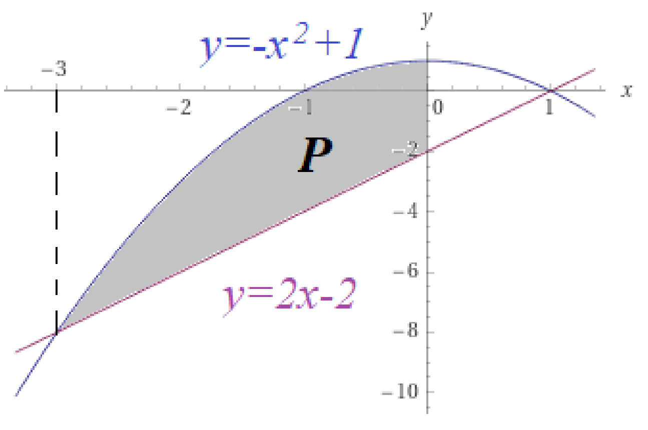
(б) Одредити $E(X^2 + 5)$.

РЕШЕЊА

1. Пресечне тачке графика функција $y = -x^2 + 1$ и $y = 2x - 2$ су решења једначине $-x^2 + 1 = 2x - 2$, тј. $x^2 + 2x - 3 = 0$. Решења ове једначине су $x = -3$ и $x = 1$. Како имамо и услов да је $x \leqslant 0$, границе интеграла ће бити -3 и 0. Треба још видети у датом интервалу који је график "горе", а који "доле", што видимо са слике. Тражена површина је

$$P = \int_{-3}^{0} (-x^2 + 1 - (2x - 2))\mathrm{d}x = \int_{-3}^{0} (-x^2 - 2x + 3)\mathrm{d}x = \left(-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right)\Big|_{-3}^{0}$$

$$= 0 - \left(\frac{(-3)^3}{3} - (-3)^2 + 3 \cdot (-3)\right) = 27$$



2. Дата једначина је линеарна диференцијална једначина првог реда. Имамо да је

$$p(x) = -1,\ q(x) = e^x \sin 2x.$$

Одредимо, најпре,

$$\int p(x)\mathrm{d}x = \int (-1)\mathrm{d}x = -x,$$

Опште решење дате линеарне једначине је

$$\begin{aligned} y &= e^x \left(c + \int e^x \sin 2x \cdot e^{-x} \mathrm{d}x \right) \\ &= e^{-x} \left(c + \int \sin 2x \mathrm{d}x \right) \\ &= e^{-x} \left(c - \frac{1}{2} \cos 2x \right) \end{aligned}$$

3. Решимо прво хомогену једначину $y'' + \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}y = 0$. Њена карактеристична једначина је $\lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} = 0$ чија су решења $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ па је решење ове хомогене једначине

$$y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{\frac{x}{2}},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Сада нађимо партикуларно решење дате једначине. Оно ће бити облика $y_p = Axe^{\frac{x}{2}}$. Први и други извод овог партикуларног решења су

$$\begin{aligned} y_p' &= \frac{1}{2}Axe^{\frac{x}{2}} + Ae^{\frac{x}{2}} = e^{\frac{x}{2}} \left(\frac{1}{2}Ax + A \right), \\ y_p'' &= \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} \left(\frac{1}{2}Ax + A \right) + \frac{1}{2}Ae^{\frac{x}{2}} = e^{\frac{x}{2}} \left(\frac{1}{4}Ax + A \right). \end{aligned}$$

Убацимо ово у полазну једначину.

$$y_p'' + \frac{1}{2}y_p' - \frac{1}{2}y_p = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$$

$$e^{\frac{x}{2}} \left(\frac{1}{4}Ax + A \right) + \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} \left(\frac{1}{2}Ax + A \right) - \frac{1}{2}Axe^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$$

$$\cancel{e^{\frac{x}{2}}} \left(\frac{1}{4}Ax + A + \frac{1}{4}Ax + \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}Ax \right) = \frac{1}{2}\cancel{e^{\frac{x}{2}}}$$

$$\frac{3}{2}A = \frac{1}{2}$$

$$A = \frac{1}{3}$$

Дакле, добили смо да је $y_p = \frac{1}{3}xe^{\frac{x}{2}}$, па је тражено опште решење

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{3}xe^{\frac{x}{2}},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

4. Означимо са A догађај да је извучена куглица са бројем који садржи цифру 3. Како вероватноћа догађаја A зависи од тога из које се кутије извлаче куглице, означимо са H_1 и H_2 хипотезе да се куглица извуче из прве односно друге кутије.
(а) На основу формуле тоталне вероватноће је

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2).$$

Остаје још да израчунамо вероватноће које се појављују у претходној формули. Како насумице бирамо кутију, то је

$$P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}.$$

Даље, вероватноћа $P(A|H_1)$ је вероватноћа да извучемо куглицу са бројем 3 из прве кутије, а у првој кутији има 3 такве куглице од укупно 26 (то су куглице са бројевима 3, 13 и 23), па је

$$P(A|H_1) = \frac{3}{26}.$$

Слично, у другој кутији има укупно 13 куглица, а повољно је њих 5 (то су куглице са бројевима 23, 30, 31, 32 и 33), па је

$$P(A|H_2) = \frac{5}{13}.$$

Коначно,

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{26} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{13} = \frac{1}{4}.$$

(б) Овде тражимо условну вероватноћу $P(H_2|A)$, а то рачунамо по формули

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2)P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{13}}{\frac{1}{4}} = \frac{10}{13}.$$

5. а) Да би функција расподеле била добро дефинисана, сума вероватноћа мора да буде 1 тј.

$$a + \frac{a}{2} + \frac{1}{2} + \frac{a}{2} + a = 1$$

$$3a = \frac{1}{2}$$

Решавајући ову једначину, добијамо да је $a = \frac{1}{6}$, па наша функција расподеле изгледа овако:

$$X : \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{2} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

б) Расподела од $X^2 + 5$ је

$$X^2 + 5 : \begin{pmatrix} 9 & 6 & 5 & 6 & 9 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{2} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \end{pmatrix},$$

па је

$$E(X^2 + 5) = 9 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{12} + 5 \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot \frac{1}{12} + 9 \cdot \frac{1}{6} = \frac{13}{2}.$$

Група у $14h$

1. (6 поена) Израчунати површину фигуре ограничену кривама
$$y = x^2 - 4,\ y = 4 - x^2.$$
2. (6 поена) Наћи опште решење диференцијалне једначине $y' - y\mathrm{tg}x = \cos x$.
3. (6 поена) Наћи опште решење диференцијалне једначине $y'' + y = \sin x + \cos x$.
4. (6 поена) У две кутије налазе се карте за игру. У првој кутији је цео шпил од 52 карте, а у другој само карте са бројевима 2, 3, 4, 5, 6 и 7, тј. укупно 24 карте. Насумично се бира једна кутија и из ње извлачи једна карта.
(а) Која је вероватноћа да је извучена карта са бројем 7?
(б) Ако је извучена карта са бројем 7, која је вероватноћа да је из прве кутије?
5. (6 поена) Нека је дата случајна величина X која зависи од параметра

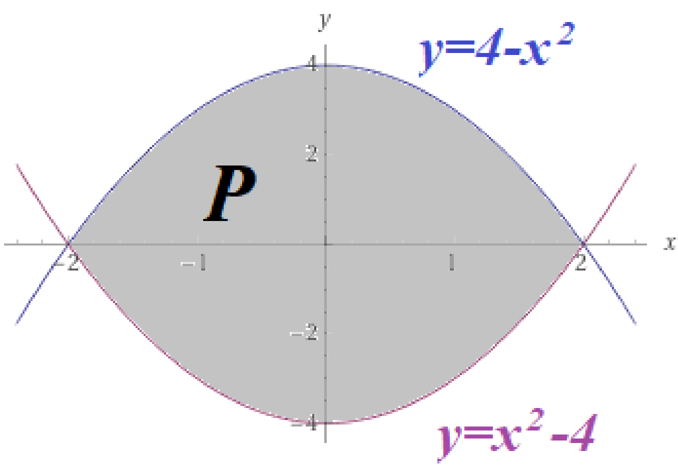
$$X : \begin{pmatrix} -12 & -3 & 0 & 3 & 12 \\ \frac{1}{12} & 2a & 6a^2 & a + \frac{1}{6} & \frac{a}{2} \end{pmatrix}$$

(а) Одредити параметар a;
(б) Одредити $D(X)$.

РЕШЕЊА

1. Пресечне тачке графика функција $y = x^2 - 4$ и $y = 4 - x^2$ су решења једначине $x^2 - 4 = 4 - x^2$, тј. $x^2 - 4 = 0$. Решења ове једначине су $x = -2$ и $x = 2$ што ће бити границе интеграла. Треба још видети у датом интервалу који је график "горе", а који "доле", што видимо са слике. Тражена површина је

$$\begin{aligned} P &= \int_{-2}^{2} (4 - x^2 - (x^2 - 4))\mathrm{d}x \\ &= \int_{-2}^{2} (8 - 2x^2)\mathrm{d}x \\ &= 8x - \frac{2x^3}{3}\Big|_{-2}^{2} \\ &= 8 \cdot 2 - \frac{2 \cdot 2^3}{3} - \left(8 \cdot (-2) - \frac{2 \cdot (-2)^3}{3}\right) \\ &= \frac{64}{3}. \end{aligned}$$



2. Дата једначина је линеарна диференцијална једначина првог реда, па је

$$p(x) = -\mathrm{tg}x,\ q(x) = \cos x.$$

Одредимо, најпре,

$$\int p(x)\mathrm{d}x = -\int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} t = \cos x \\ \mathrm{d}t = -\sin x\mathrm{d}x \end{bmatrix} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| = \ln|\cos x|.$$

Претпоставимо да је $\cos x > 0$, па је $|\cos x| = \cos x$. Случај $\cos x < 0$ се слично решава. Опште решење дате линеарне једначине је

$$\begin{aligned} y &= e^{-\ln(\cos x)}\left(c + \int \cos x \cdot e^{\ln(\cos x)}\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{\cos x}\left(c + \int \cos^2 x\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{\cos x}\left(c + \int \frac{1+\cos 2x}{2}\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{\cos x}\left(c + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x\right) \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

3. Решимо прво хомогену једначину $y''y = 0$. Њена карактеристична једначина је $\lambda^2 + 1 = 0$ чија су решења $\lambda_1 = -i$, $\lambda_2 = i$ па је решење ове хомогене једначине

$$y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Сада нађимо партикуларно решење дате једначине. Оно ће бити облика $y_p = x(A\cos x + B\sin x)$. Први и други извод овог партикуларног решења су

$$\begin{aligned} y_p' &= A\cos x + B\sin x + x(-A\sin x + B\cos x) = \cos x(A + Bx) + \sin x(B - Ax), \\ y_p'' &= -\sin x(A + Bx) + B\cos x + \cos x(B - Ax) - A\sin x = \cos x(2B - Ax) + \sin x(-2A - Bx). \end{aligned}$$

Убацимо ово у полазну једначину.

$$y_p'' + y_p = \sin x + \cos x$$

$$\cos x(2B - Ax) + \sin x(-2A - Bx) + Ax\cos x + Bx\sin x = \sin x + \cos x$$

$$2B\cos x - 2A\sin x = \sin x + \cos x.$$

Изједначавањем коефицијената уз $\sin x$ и $\cos x$ са леве и десне стране добијамо

$$2B = 1, \quad -2A = 1,$$

тј. $A = -\frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$, па је $y_p = -\frac{1}{2}x\cos x + \frac{1}{2}x\sin x$, одакле је тражено опште решење

$$y = y_h + y_p = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2}x\cos x + \frac{1}{2}x\sin x,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

4. Означимо са A догађај да је извучена карта са бројем 7. Како вероватноћа догађаја A зависи од тога из које се кутије извлаче куглице, означимо са H_1 и H_2 хипотезе да се куглица извуче из прве односно друге кутије.
(a) На основу формуле тоталне вероватноће је

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2).$$

Остаје још да израчунамо вероватноће које се појављују у претходној формули. Како насумице бирамо кутију, то је

$$P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}.$$

Даље, вероватноћа $P(A|H_1)$ је вероватноћа да извучемо карту 7 из прве кутије, а то је

$$P(A|H_1) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}.$$

Слично,

$$P(A|H_2) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}.$$

Коначно,

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{13} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{19}{156}.$$

(б) Тражена вероватноћа је $P(H_1|A)$ и то се рачуна по формули

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{13}}{\frac{19}{156}} = \frac{6}{19}$$

5. а) Да би функција расподеле била добро дефинисана, сума вероватноћа мора да буде 1 тј.

$$\frac{1}{12} + 2a + 6a^2 + a + \frac{1}{6} + \frac{a}{2} = 1$$

$$6a^2 + \frac{7}{2}a - \frac{3}{4} = 0$$

Решавајући ову једначину, добијамо да је $a = -\frac{3}{4}$ или $a = \frac{1}{6}$, али како вероватноће морају бити бројеви у интервалу $[0, 1]$, то једино може бити $a = \frac{1}{6}$, па наша функција расподеле изгледа овако:

$$X : \begin{pmatrix} -12 & -3 & 0 & 3 & 12 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}.$$

б)

$$E(X) = (-12) \cdot \frac{1}{12} + (-3) \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{3} + 12 \cdot \frac{1}{12} = 0.$$

Даље, имамо да је

$$X^2 : \begin{pmatrix} 144 & 9 & 0 & 9 & 144 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} \end{pmatrix},$$

па је

$$E(X^2) = 144 \cdot \frac{1}{12} + 9 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{6} + 9 \cdot \frac{1}{3} + 144 \cdot \frac{1}{12} = 30.$$

Коначно,

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 30 - 0^2 = 30.$$

РЕШЕЊА ЈАНУАРСКОГ РОКА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 03.02.2021.
Група 1

1. (8 п) Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7^n+n}{7^n}\right)^n$.

2. (8 п) Испитати конвексност и наћи превојне тачке функције $y = \frac{3-x^2}{x+2}$.

3. (8 п) Израчунати вредност интеграла $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} \mathrm{d}x$.

4. (8 п) Наћи опште решење диференцијалне једначине $(1+\cos x)y' - y\sin x = \ln x$.

5. (8 п) МАТФ пржионица кафе пакује јаче и слабије пржену кафу. Кесице кафе се пакују у кутије, а оне се затим утоварују у камион. Правило је да свака кутија садржи тачно 20 кесица исте врсте, међутим десила се грешка и у једну кутију са јаче прженом кафом убачена је 1 кесица слабије пржене кафе и 19 кесица јаче пржене кафе. У камиону је 6 кутија јаче пржене кафе, 13 кутија слабије пржене кафе и једна кутија са грешком. Случајно се бира 1 кесица из камиона.

а) (5 п) Колика је вероватноћа да је одабрана кесица са слабије прженом кафом?

б) (3 п) Ако је извучена кесица са слабије прженом кафом, која је вероватноћа да је она из кутије са грешком?

6. а) (5 п) Дати дефиницију асимптоте функције и како се израчунава вертикална и коса асимптота.

б) (5 п) Наћи све асимптоте функције из другог задатка.

7. а) (5 п) Дефиниција математичког очекивања и дисперзије непрекидне случајне променљиве.

б) (5 п) Нормална расподела и Гаусова крива.

РЕШЕЊА

1. Означимо $a_n = \left(\frac{7^n+n}{7^n}\right)^n$. Пробамо да применимо Кошијев критеријум. Како је

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{7^n+n}{7^n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{7^n+n}{7^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{n}{7^n}\right) = 1,$$

па нам Кошијев критеријум не даје одговор на питање да ли дати ред конвергира.

Испитајмо да ли је испуњен неопходан услов конвергенције.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{7^n+n}{7^n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{n}{7^n}\right)^n \neq 0,$$

па није испуњен неопходан услов конвергенције, тј. дати ред дивергира.

2. Домен дате функције је $\mathcal{D} = (-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$. Први и други изводи дате функције су

$$y' = \frac{(-2x)(x+2)-(3-x^2)\cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{-2x^2-4x-3+x^2}{(x+2)^2} = \frac{-x^2-4x-3}{(x+2)^2},$$

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(-2x-4)(x^2+4x+4)-(2x+4)(-x^2-4x-3)}{(x+2)^4} \\ &= \frac{-2x^3-8x^2-8x-4x^2-16x-16+2x^3+8x^2+6x+4x^2+16x+12}{(x+2)^4} \\ &= \frac{-2(x+2)}{(x+2)^4} \\ &= \frac{-2}{(x+2)^3} \end{aligned}$$

Приметимо да други извод никад није нула, па дата функција нема превојних тачака. Знак другог извода зависи само од $x+2$

	-2	
$x+2$	$-$	$+$
$(x+2)^3$	$-$	$+$
y''	$+$	$-$

па закључујемо да је $y'' < 0$ за $x \in (-2, +\infty)$, $y'' > 0$ за $x \in (-\infty, -2)$. Дакле, y је конкавна на $(-2, +\infty)$, а конвексна на $(-\infty, -2)$.

3.

$$\int \frac{\mathrm{arctg} x}{x^2} \mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = \mathrm{arctg} x & \mathrm{d}v = \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x & v = -\frac{1}{x} \end{bmatrix}$$
$$= -\frac{1}{x}\mathrm{arctg} x + \underbrace{\int \frac{1}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x}_{I}$$

Израчунајмо посебно интеграл $I = \int \frac{1}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x$.

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$
$$1 = Ax^2 + A + Bx^2 + Cx$$
$$1 = x^2(A+B) + Cx + A$$

Изједначавајући коефицијенте уз 1, x и x^2 добијамо систем

$$1 = A$$
$$0 = C$$
$$0 = A + B$$

чије је решење $A = 1$, $B = -1$, $C = 0$, тј. $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$, па је

$$I = \int \frac{1}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c.$$

Вратимо се на полазни интеграл.

$$\int \frac{\mathrm{arctg} x}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{x}\mathrm{arctg} x + I = -\frac{1}{x}\mathrm{arctg} x + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$$

4. Дата једначина $(1+\cos x)y' - y\sin x = \ln x$ је линеарна диференцијална једначина првог реда. Поделимо је са $1+\cos x$. Добијамо

$$y' - y\frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{\ln x}{1+\cos x},$$

одакле је $p(x) = -\frac{\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$, $q(x) = \frac{\ln x}{1+\cos x}$, па је

$$\int p(x)\mathrm{d}x = \int \frac{-\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} t = \cos x \\ \mathrm{d}t = -\sin x \mathrm{d}x \end{bmatrix} = \int \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln|t| = \ln|1+\cos x|.$$

Претпоставимо да је $1+\cos x > 0$, тј. $|1+\cos x| = 1+\cos x$, а случај $1+\cos x < 0$ се слично ради.

Опште решење дате једначине је

$$
\begin{aligned}
y &= e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left(c+\int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right)\\
&= e^{-\ln 1+\cos x}\left(c+\int \frac{\ln x}{1+\cos x}e^{\ln(1+\cos x)}\mathrm{d}x\right)\\
&= \frac{1}{1+\cos x}\left(c+\int \frac{\ln x}{1+\cos x}(1+\cos x)\mathrm{d}x\right)\\
&= \frac{1}{1+\cos x}\left(c+\int \ln x\mathrm{d}x\right)\\
&= \begin{bmatrix} u=\ln x & \mathrm{d}v=\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x & v=x\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{1+\cos x}\left(c+x\ln x-\int \mathrm{d}x\right)\\
&= \frac{1}{1+\cos x}\left(c+x\ln x-x\right).
\end{aligned}
$$

5. Означимо са A догађај да је одабрана кесица са слабије прженом кафом. Нека су H_1, H_2 и H_3 хипотезе да је одабрана кутија са јаче прженом кафом, са слабије прженом кафом односно кутија са грешком.
(а) Тражена вероватноћа је $P(A)=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)+P(H_3)P(A|H_3)$. Потребно је још да одредимо ових шест вероватноћа. У камиону је укупно 20 кутија, па је

$$P(H_1)=\frac{6}{20}=\frac{3}{10},\quad P(H_2)=\frac{13}{20},\quad P(H_3)=\frac{1}{20}.$$

Даље,

$$P(A|H_1)=\frac{0}{20}=0,\quad P(A|H_2)=\frac{20}{20}=1,\ P(A|H_3)=\frac{1}{20}.$$

Коначно, тражена вероватноћа је

$$P(A)=\frac{3}{10}\cdot 0+\frac{13}{20}\cdot 1+\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{20}=\frac{261}{400}.$$

(б) Тражимо $P(H_3|A)$.

$$P(H_3|A)=\frac{P(H_3)P(A|H_3)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{20}}{\frac{261}{400}}=\frac{1}{261}.$$

6. а) Видети у уџбенику.
б) Домен дате функције је $\mathcal{D}_y=(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$.
Вертикалне асимптоте: Једини кандидат за вертикалну асимптоту је $x=-2$.

$$\lim_{x\to -2-}\frac{3-x^2}{x+2}=+\infty,$$

па права $x=-2$ јесте вертикална асимптота.
Хоризонталне асимптоте:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3-x^2}{x+2}=\infty,$$

па функција нема хоризонталних асимптота.
Косе асимптоте:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3-x^2}{x+2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-x^2}{x^2+2x}=-1,$$
$$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3-x^2}{x+2}+x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3-x^2+x^2+2x}{x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+2x}{x+2}=2,$$

па је права $y=-x+2$ коса асимптота.

7. Видети у уџбенику.

Група 2

1. (8 п) Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n+n^2}{2^n}\right)^n$.

2. (8 п) Испитати монотоност и наћи екстремне вредности функције $y=\frac{2-x^2}{x+3}$.

3. (8 п) Израчунати вредност интеграла $\int\frac{\ln(x^2+1)}{x^3}\mathrm{d}x$.

4. (8 п) Наћи опште решење диференцијалне једначине $(1+\sin x)y'+y\cos x=xe^x$.

5. (8 п) МАТФ фабрика чајева пакује чај од нане и камилице. Кесице чаја се пакују у кутије, а оне се затим утоварују у камион. Правило је да свака кутија садржи тачно 20 кесица исте врсте, међутим десила се грешка и у једну кутију чаја са наном убачена је 1 кесица камилице и 19 кесица нане. У камиону је 16 кутија чаја од нане, 13 кутија чаја од камилице и једна кутија са грешком. Случајно се бира 1 кесица из камиона.

а) (5 п) Колика је вероватноћа да је одабрана кесица чаја од камилице?

б) (3 п) Ако је извучена кесица чаја од камилице, која је вероватноћа да је она из кутије са грешком?

6. а) (5 п) Дати дефиницију асимптоте функције и како се израчунава вертикална и коса асимптота.

б) (5 п) Наћи све асимптоте функције из другог задатка.

7. а) (5 п) Дефиниција математичког очекивања и дисперзије непрекидне случајне променљиве.

б) (5 п) Нормална расподела и Гаусова крива.

РЕШЕЊА

1. Означимо $a_n=\left(\frac{2^n+n^2}{2^n}\right)^n$. Пробамо да применимо Кошијев критеријум. Како је

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2^n+n^2}{2^n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+n^2}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n^2}{2^n}\right)=1,$$

па нам Кошијев критеријум не даје одговор на питање да ли дати ред конвергира.

Испитајмо да ли је испуњен неопходан услов конвергенције.

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n+n^2}{2^n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n^2}{2^n}\right)^n\neq 0,$$

па није испуњен неопходан услов конвергенције, тј. дати ред дивергира.

2. Домен дате функције је $\mathcal{D}=(-\infty,-3)\cup(-3,+\infty)$. Први извод дате функције је

$$y'=\frac{(-2x)(x+3)-(2-x^2)\cdot 1}{(x+3)^2}=\frac{-2x^2-6x-2+x^2}{(x+3)^2}=\frac{-x^2-6x-2}{(x+3)^2}.$$

Како је $(x+3)^2$ увек позитивно, на знак извода утиче само $-x^2-6x-2$. Нуле квадратне једначине $-x^2-6x-2$ су $x_1=-3-\sqrt{7}$, $x_2=-3+\sqrt{7}$.

		$-3-\sqrt{7}$	$-3+\sqrt{7}$
$-x^2-6x-2$	$-$	$+$	$-$
y'	$-$	$+$	$-$

па закључујемо да је $y' > 0$ за $x \in (-3+\sqrt{7}, -3) \cup (-3, -3+\sqrt{7})$, $y' < 0$ за $x \in (-\infty, -3-\sqrt{7}) \cup (-3+\sqrt{7})$ и $y' = 0$ за $x = -3 \pm \sqrt{7}$.

Дакле, функција расте на $x \in (-3+\sqrt{7}, -3) \cup (-3, -3+\sqrt{7})$, опада на $x \in (-\infty, -3-\sqrt{7}) \cup (-3+\sqrt{7})$, $x = -3-\sqrt{7}$ је тачка локалног минимума, а $x = -3+\sqrt{7}$ је тачка локалног максимума.

3.

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln(x^2+1)}{x^3}\mathrm{d}x &= \begin{bmatrix} u = \ln(x^2+1) & \mathrm{d}v = \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \frac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x & v = -\frac{1}{2x^2}\end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{2x^2}\ln(x^2+1) + \int \frac{2x}{x^2+1}\cdot\frac{1}{2x^2}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2x^2}\ln(x^2+1) + \underbrace{\int \frac{1}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x}_{I}\end{aligned}$$

Израчунајмо посебно интеграл $I = \int \frac{1}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x$.

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$1 = Ax^2 + A + Bx^2 + Cx$$

$$1 = x^2(A+B) + Cx + A$$

Изједначавајући коефицијенте уз 1, x и x^2 добијамо систем

$$\begin{aligned}1 &= A\\ 0 &= C\\ 0 &= A+B\end{aligned}$$

чије је решење $A = 1$, $B = -1$, $C = 0$, тј. $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$, па је

$$I = \int \frac{1}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c.$$

Вратимо се на полазни интеграл.

$$\int \frac{\ln(x^2+1)}{x^3}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2x^2}\ln(x^2+1) + I = -\frac{1}{2x^2}\ln(x^2+1) + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$$

4. Дата једначина $(1+\sin x)y' + y\cos x = xe^x$ је линеарна диференцијална једначина првог реда. Поделимо је са $1+\sin x$. Добијамо

$$y' + y\frac{\cos x}{1+\sin x} = \frac{xe^x}{1+\sin x},$$

одакле је $p(x) = \frac{\cos x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$, $q(x) = \frac{xe^x}{1+\sin x}$, па је

$$\int p(x)\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{1+\sin x}\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} t = \sin x \\ \mathrm{d}t = \cos x\mathrm{d}x\end{bmatrix} = \int \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln|t| = \ln|1+\sin x|.$$

Претпоставимо да је $1+\sin x > 0$, тј. $|1+\sin x| = 1+\sin x$, а случај $1+\sin x < 0$ се слично ради.

Опште решење дате једначине је

$$\begin{aligned}
y &= e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left(c+\int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right)\\
&= e^{-\ln 1+\sin x}\left(c+\int \frac{xe^x}{1+\sin x}e^{\ln(1+\sin x)}\mathrm{d}x\right)\\
&= \frac{1}{1+\sin x}\left(c+\int \frac{xe^x}{1+\sin x}(1+\sin x)\mathrm{d}x\right)\\
&= \frac{1}{1+\sin x}\left(c+\int xe^x\mathrm{d}x\right)\\
&= \begin{bmatrix} u=x & \mathrm{d}v=e^x\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}x & v=e^x\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{1+\sin x}\left(c+xe^x-e^x\right).
\end{aligned}$$

5. Означимо са A догађај да је одабрана кесица са чајем од камилице. Нека су H_1, H_2 и H_3 хипотезе да је одабрана кутија чаја од нане, чаја од камилице односно кутија са грешком.
(а) Тражена вероватноћа је $P(A)=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)+P(H_3)P(A|H_3)$. Потребно је још да одредимо ових шест вероватноћа. У камиону је укупно 30 кутија, па је

$$P(H_1)=\frac{16}{30}=\frac{8}{15},\quad P(H_2)=\frac{13}{30},\quad P(H_3)=\frac{1}{30}.$$

Даље,

$$P(A|H_1)=\frac{0}{20}=0,\quad P(A|H_2)=\frac{20}{20}=1,\ P(A|H_3)=\frac{1}{20}.$$

Коначно, тражена вероватноћа је

$$P(A)=\frac{8}{15}\cdot 0+\frac{13}{30}\cdot 1+\frac{1}{30}\cdot\frac{1}{20}=\frac{87}{200}.$$

(б) Тражимо $P(H_3|A)$.

$$P(H_3|A)=\frac{P(H_3)P(A|H_3)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{30}\cdot\frac{1}{20}}{\frac{87}{200}}=\frac{1}{261}.$$

6. а) Видети у уџбенику.
б) Домен дате функције је $\mathcal{D}_y=(-\infty,-3)\cup(-3,+\infty)$.
Вертикалне асимптоте: Једини кандидат за вертикалну асимптоту је $x=-3$.

$$\lim_{x\to-3-}\frac{2-x^2}{x+3}=+\infty,$$

па права $x=-2$ јесте вертикална асимптота.
Хоризонталне асимптоте:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2-x^2}{x+3}=\infty,$$

па функција нема хоризонталних асимптота.
Косе асимптоте:

$$\begin{aligned}
k&=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2-x^2}{x+3}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-x^2}{x^2+3x}=-1,\\
n&=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2-x^2}{x+3}+x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2-x^2+x^2+3x}{x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+2x}{x+2}=3,
\end{aligned}$$

па је права $y=-x+3$ коса асимптота.
7. Видети у уџбенику.

РЕШЕЊА ФЕБРУАРСКОГ РОКА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 26.02.2021.
Група 1

1. (8 п) Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n^3}{1+n^3}\right)^{n+n^4}$.

2. (8 п) Испитати монотоност и наћи локалне екстремуме функције $y=\ln(x^2-3x+2)$.

3. (8 п) Израчунати $\int\limits_0^{\frac{\pi}{10}}\frac{\cos(5x)}{\sin^2(5x)+1}\mathrm{d}x$.

4. (8 п) Наћи партикуларно решење једначине $y''+y=4\sin x$, $y(0)=0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

5. (8 п) У кутији се налази 5 жутих, 4 црвене и 3 плаве куглице. Извлаче се 4 куглице одједном. Ако је X случајна променљива која представља број извучених плавих куглица, одредити $E(X)$ и $D(X)$.

6. а) (5 п) Дати дефиницију Лајбницовог реда и навести како гласи теорема о конвергенцији за Лајбницове редове.

б) (5 п) Дати пример Лајбницовог реда са доказом да је у питању Лајбницов ред и испитати његову конвергенцију.

7. (10 п) Бернулијева диференцијална једначина.

РЕШЕЊА

1. Означимо $a_n=\left(\frac{n^3}{1+n^3}\right)^{n+n^4}$. Тада је

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n^3}{1+n^3}\right)^{n+n^4}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3}{1+n^3}\right)^{1+n^3}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1-1+\frac{n^3}{1+n^3}\right)^{1+n^3}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n^3-(1-n^3)}{1+n^3}\right)^{1+n^3}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{1+n^3}\right)^{1+n^3}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n^3}{-1-n^3}\right)^{(-1-n^3)\cdot\frac{1+n^3}{-1-n^3}}\\
&= \lim_{n\to\infty}e^{\frac{1+n^3}{-1-n^3}}\\
&= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+n^3}{-1-n^3}}\\
&= e^{-1}\\
&= \frac{1}{e}<1,
\end{aligned}$$

па ред конвергира на основу Кошијевог критеријума.

2. Одредимо најпре домен дате функције. Потребно је да је $x^2-3x+2>0$. Решења квадратне једначине $x^2-3x+2=0$ су $x_1=1$ и $x_2=2$, па како треба да је фунција x^2-3x+2 позитивна, добијамо да је домен дате функције $\mathcal{D}=(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$. Први извод дате функције је

$$f'(x)=\frac{2x-3}{x^2-3x+2}.$$

Први извод је једнак нули за $2x-3=0$, тј. $x=\frac{3}{2}$, па је то потенцијални екстремум, али како $\frac{3}{2}$ није у домену, нећемо разматрати ту тачку, тј. нема екстремума. Како је $x^2-3x+2>0$ на целом домену, то знак првог извода зависи само од $2x-3$.

	$-\infty$ … 1	1 … 2	2 … $+\infty$
$2x-3$	$-$	/////////	$+$
$f'(x)$	$-$	/////////	$+$

Дакле, $f'(x)<0$ на $(-\infty,1)$ и $f'(x)>0$ на $(2,+\infty)$, па функција f опада на $(-\infty,1)$, а расте на $(2,+\infty)$.

3.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{10}} \frac{\cos(5x)}{\sin^2(5x)+1}\mathrm{d}x &= \begin{bmatrix} t=\sin 5x \\ \mathrm{d}t = 5\cos 5x \mathrm{d}x \\ \cos 5x\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\mathrm{d}t \\ x=0 \Longrightarrow t=0 \\ x=\frac{\pi}{10} \Longrightarrow t=1 \end{bmatrix} \\
&= \int_0^1 \frac{\frac{1}{5}}{t^2+1}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{5}\mathrm{arctg} t\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{5}\mathrm{arctg}1 - \frac{1}{5}\mathrm{arctg}0 \\
&= \frac{1}{5}\cdot\frac{\pi}{4} - 0 \\
&= \frac{\pi}{20}.
\end{aligned}$$

4. Прво тражимо опште решење, па ћемо на крају убацити почетне услове. Најпре нађимо решење хомогене једначине $y''+y=0$. Нуле карактеристичне једначине $\lambda^2+1=0$ су $\lambda_1=i,\ \lambda_2=-i$, па је $y_h=c_1\cos x+c_2\sin x$.
Партикуларно решење је облика $y_p=x(A\cos x+B\sin x)=Ax\cos x+Bx\sin x$. Израчунајмо први и други извод партикуларног решења и убацимо га у полазну једначину.

$$\begin{aligned}
y_p' &= A\cos x - Ax\sin x + B\sin x + Bx\cos x \\
&= (A+Bx)\cos x + (-Ax+B)\sin x,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_p'' &= B\cos x - (A+Bx)\sin x - A\sin x + (-Ax+B)\cos x \\
&= (-Ax+2B)\cos x + (-Bx-2A)\sin x,
\end{aligned}$$

па је

$$\begin{aligned}
&y_p''+y_p = x\sin x \\
&(-Ax+2B)\cos x + (-Bx-2A)\sin x + Ax\cos x + Bx\sin x = 4\sin x \\
&2B\cos x - 2A\sin x = 4\sin x
\end{aligned}$$

изједначавањем израза уз $\cos x$ и уз $\sin x$ са леве и десне стране једнакости имамо

$$\begin{aligned}
2B &= 0 \\
-2A &= 4,
\end{aligned}$$

чије је решење $A=-2$, $B=0$. Добијамо да је партикуларно решење је

$$y_p=-2x\cos x.$$

Коначно, опште решење дате једначине је

$$y=y_h+y_p=c_1\cos x+c_2\sin x-2x\cos x,\ \ c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

Још остаје да убацимо почетне услове, тј. да нађемо константе c_1 и c_2. Из услова $y(0)=1$ имамо

$$1=c_1\cos 0+c_2\sin 0-2\cdot 0\cdot\cos 0,$$

тј. $c_1=1$. Из услова $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$ имамо

$$2=c_1\cos\frac{\pi}{2}+c_2\sin\frac{\pi}{2}-2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{2},$$

па је $c_2=2$. Тражено партикуларно решење је

$$y=\cos x+2\sin x-2x\cos x.$$

5. Приметимо да $X\in\{0,1,2,3\}$ јер од четири извучене куглице може бити ниједна, једна, две или три плаве куглице. Како је

$$\begin{aligned}
P\{X=0\}&=\frac{\binom{9}{4}}{\binom{12}{4}}=\frac{\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1}}{\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9}{4\cdot3\cdot2\cdot1}}=\frac{14}{55}\\
P\{X=1\}&=\frac{\binom{3}{1}\binom{9}{3}}{\binom{12}{4}}=\frac{28}{55}\\
P\{X=2\}&=\frac{\binom{3}{2}\binom{9}{2}}{\binom{12}{4}}=\frac{12}{55}\\
P\{X=3\}&=\frac{\binom{3}{3}\binom{9}{1}}{\binom{12}{4}}=\frac{1}{55}
\end{aligned}$$

то X има расподелу

$$X:\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ \frac{14}{55} & \frac{28}{55} & \frac{12}{55} & \frac{1}{55}\end{pmatrix},$$

а X^2 има расподелу

$$X^2:\begin{pmatrix}0 & 1 & 4 & 9\\ \frac{14}{55} & \frac{28}{55} & \frac{12}{55} & \frac{1}{55}\end{pmatrix},$$

па је

$$\begin{aligned}
E(X)&=0\cdot\frac{14}{55}+1\cdot\frac{28}{55}+2\cdot\frac{12}{55}+3\cdot\frac{1}{55}=1,\\
E(X^2)&=0\cdot\frac{14}{55}+1\cdot\frac{28}{55}+4\cdot\frac{12}{55}+9\cdot\frac{1}{55}=\frac{17}{11},\\
D(X)&=E(X^2)-E(X)^2=\frac{17}{11}-1^2=\frac{6}{17}.
\end{aligned}$$

6. Видети у уџбенику.
7. Видети у уџбенику.

Група 2

1. **(8 п)** Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n^2-3}{n^2+3}\right)^{n^3}$.

2. **(8 п)** Испитати монотоност и наћи локалне екстремуме функције $y=\ln(x^2+3x+2)$.

3. **(8 п)** Израчунати $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin(3x)}{\cos^2(3x)+1}\mathrm{d}x$.

4. **(8 п)** Наћи партикуларно решење једначине $y''-3y'+2y=2xe^{2x}$, $y(0)=0$, $y(1)=1$.

5. **(8 п)** У кутији се налази 9 жутих, 6 црвених и 3 плаве куглице. Извлаче се 4 куглице одједном. Ако је X случајна промењљива која представља број извучених плавих куглица, одредити $E(X)$ и $D(X)$.

6. **а)** **(5 п)** Дати дефиницију Лајбницовог реда и навести како гласи теорема о конвергенцији за Лајбницове редове.

б) **(5 п)** Дати пример Лајбницовог реда са доказом да је у питању Лајбницов ред и испитати његову конвергенцију.

7. **(10 п)** Бернулијева диференцијална једначина.

РЕШЕЊА

1. Означимо $a_n=\left(\frac{n^2-3}{n^2+3}\right)^{n^3}$. Тада је

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}&=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n^2-3}{n^2+3}\right)^{n^3}}\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-3}{n^2+3}\right)^{n^2}\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(1-1+\frac{n^2-3}{n^2+3}\right)^{n^2}\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n^2-3-(n^2+3)}{n^2+3}\right)^{n^2}\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-6}{n^2+3}\right)^{n^2}\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^2+3}{-6}}\right)^{\frac{n^2+3}{-6}\cdot\frac{-6n^2}{n^2+3}}\\
&=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{-6n^2}{n^2+3}}\\
&=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-6n^2}{n^2+3}}\\
&=e^{-6}\\
&=\frac{1}{e^6}<1,
\end{aligned}$$

па ред конвергира на основу Кошијевог критеријума.

2. Одредимо најпре домен дате функције. Потребно је да је $x^2+3x+2>0$. Решења квадратне једначине $x^2+3x+2=0$ су $x_1=-1$ и $x_2=-2$, па како треба да је фунција x^2+3x+2 позитивна, добијамо да је домен дате функције $\mathcal{D}=(-\infty,-2)\cup(-1,+\infty)$. Први извод дате функције је

$$f'(x)=\frac{2x+3}{x^2+3x+2}.$$

Први извод је једнак нули за $2x+3=0$, тј. $x=-\frac{3}{2}$, па је то потенцијални екстремум, али како $-\frac{3}{2}$ није у домену, нећемо разматрати ту тачку, тј. нема екстремума. Како је $x^2+3x+2>0$ на целом домену, то знак првог извода зависи само од $2x+3$.

		-2	-1	
$2x+3$	$-$	/////////		$+$
$f'(x)$	$-$	/////////		$+$

Дакле, $f'(x)<0$ на $(-\infty,-2)$ и $f'(x)>0$ на $(-1,+\infty)$, па функција f опада на $(-\infty,-2)$, а расте на $(-1,+\infty)$.

3.

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin(3x)}{\cos^2(3x)+1}\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} t=\cos 3x \\ \mathrm{d}t=-3\cos 3x\mathrm{d}x \\ \cos 3x\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\mathrm{d}t \\ x=0 \Longrightarrow t=1 \\ x=\frac{\pi}{6} \Longrightarrow t=0 \end{bmatrix}$$
$$= \int_1^0 \frac{-\frac{1}{3}}{t^2+1}\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{3}\mathrm{arctg}t\Big|_0^1$$
$$= \frac{1}{3}\mathrm{arctg}1-\frac{1}{3}\mathrm{arctg}0$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{4}-0$$
$$= \frac{\pi}{12}.$$

4. Прво тражимо опште решење, па ћемо на крају убацити почетне услове. Најпре нађимо решење хомогене једначине $y''-3y'+2y=0$. Нуле карактеристичне једначине $\lambda^2-3\lambda+2=0$ су $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, па је $y_h=c_1e^x+c_2e^{2x}$.
Партикуларно решење је облика $y_p=x(Ax+B)e^{2x}=(Ax^2+Bx)e^{2x}$. Израчунајмо први и други извод партикуларног решења и убацимо га у полазну једначину.

$$y_p'=(2Ax+B)e^{2x}+2(Ax^2+Bx)e^{2x}=(2Ax^2+(2A+2B)x+B)e^{2x},$$

$$y_p''=(4Ax+2A+2B)e^{2x}+2(2Ax^2+(2A+2B)x+B)e^{2x}=(4Ax^2+(8A+4B)x+2A+4B)e^{2x}$$

па је

$$y_p''-3y_p'+2y_p=2xe^{2x}$$
$$(4Ax^2+(8A+4B)x+2A+4B)e^{2x}-3(2Ax^2+(2A+2B)x+B)e^{2x}+2(Ax^2+Bx)e^{2x}=2xe^{2x}$$
$$2Ax+2A+B=2x$$

изједначавањем израза уз x и уз 1 са леве и десне стране једнакости имамо

$$2A=2$$
$$2A+B=0$$

чије је решење $A = 1$, $B = -2$. Добијамо да је партикуларно решење је

$$y_p = (x^2 - 2x)e^{2x}.$$

Коначно, опште решење дате једначине је

$$y = y_h + y_p = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + (x^2 - 2x)e^{2x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Још остаје да убацимо почетне услове, тј. да нађемо константе c_1 и c_2. Из услова $y(0) = 0$ имамо

$$0 = c_1 e^0 + c_2 e^0 + (0^2 - 2 \cdot 0)e^{20},$$

тј. $c_1 + c_2 = 0$. Из услова $y(1) = 1$ имамо

$$1 = c_1 e^1 + c_2 e^2 + (1^2 - 2)e^2,$$

$$1 = c_1 e + c_2 e^2 - e^2,$$

па у ствари имамо систем

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ c_1 e + c_2 e^2 - e^2 &= 1 \end{aligned}$$

чије је решење $c_1 = \frac{1+e^2}{e-e^2}$, $c_2 = \frac{1+e^2}{e^2-e}$ Тражено партикуларно решење је

$$y = \frac{1+e^2}{e-e^2} \cdot e^x + \frac{1+e^2}{e^2-e} \cdot e^{2x} + (x^2 - 2x)e^{2x}.$$

5. Приметимо да $X \in \{0, 1, 2, 3\}$ јер од четири извучене куглице може бити ниједна, једна, две или три плаве куглице. Како је

$$P\{X = 0\} = \frac{\binom{15}{4}}{\binom{18}{4}} = \frac{\frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}{\frac{18\cdot 17\cdot 16\cdot 15}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}} = \frac{91}{204}$$

$$P\{X = 1\} = \frac{\binom{3}{1}\binom{15}{3}}{\binom{18}{4}} = \frac{91}{204}$$

$$P\{X = 2\} = \frac{\binom{3}{2}\binom{15}{2}}{\binom{18}{4}} = \frac{7}{68}$$

$$P\{X = 3\} = \frac{\binom{3}{3}\binom{15}{1}}{\binom{18}{4}} = \frac{1}{204}$$

то X има расподелу

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{91}{204} & \frac{91}{204} & \frac{7}{68} & \frac{1}{204} \end{pmatrix},$$

а X^2 има расподелу

$$X^2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ \frac{91}{204} & \frac{91}{204} & \frac{7}{68} & \frac{1}{204} \end{pmatrix},$$

па је

$$E(X) = 0 \cdot \frac{91}{204} + 1 \cdot \frac{91}{204} + 2 \cdot \frac{7}{68} + 3 \cdot \frac{1}{204} = \frac{2}{3},$$

$$E(X^2) = 0 \cdot \frac{91}{204} + 1 \cdot \frac{91}{204} + 4 \cdot \frac{7}{68} + 9 \cdot \frac{1}{204} = \frac{46}{51},$$

$$D(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{46}{51} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{70}{153}.$$

6. Видети у уџбенику.
7. Видети у уџбенику.

РЕШЕЊА ЈУНСКОГ РОКА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 30.06.2021.

ЗАДАЦИ

1. (8 п) Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\left(2020+\frac{1}{n}\right)^n}$.

2. (8 п) Испитати монотоност и одредити локалне тачке екстремума функције $y = \frac{e^x}{x}$.

3. (8 п) Израчунати површину фигуре ограничене кривама $y = 2x + 4$ и $y = x^2 - x - 6$.

4. (8 п) Наћи опште решење диференцијалне једначине $(x^2 - 1)y' - 2xy + 2x - 2x^3 = 0$.

5. (8 п) На испит из математике изашло је 60% студената који полажу први пут и 40% осталих (који не полажу први пут). Вероватноћа да ће студент који полаже први пут положити испит је 0.3, а за остале 0.4. Одредити вероватноћу да ће случајно изабрани студент положити испит.

6. (а) **(5 п)** Дати дефиницију конвексности функције.

(б) **(5 п)** Испитати конвексност функције из другог задатка.

7. (10 п) Условна вероватноћа и Бајесова формула.

РЕШЕЊА

1. Означимо са $a_n = \frac{n}{\left(2020+\frac{1}{n}\right)^n}$. Како је

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{\left(2020+\frac{1}{n}\right)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2020+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2020} < 1,$$

то дати ред конвергира на основу Кошијевог критеријума.

2. Домен дате функције је $\mathcal{D}_y = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Први извод дате функције је

$$y' = \frac{xe^x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}.$$

Како је $y' = 0$ за $x = 1$ то је потенцијални екстремум. Знамо да су функције e^x и x^2 позитивне, па знак првог извода зависи само од $x - 1$ и то је

$$\begin{aligned} y' > 0, &\ \ \text{за } x \in (1, +\infty), \\ y' < 0, &\ \ \text{за } x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1), \end{aligned}$$

па закључујемо да

$$\begin{aligned} &y \text{ расте на} (1, +\infty), \\ &y \text{ опада на } (-\infty, 0) \cup (0, 1), \\ &x = 1 \text{ је локални минимум.} \end{aligned}$$

3. Да бисмо одредили у којим тачкама се секу графици датих функција, потребно је да решимо систем

$$y = 2x + 4,$$

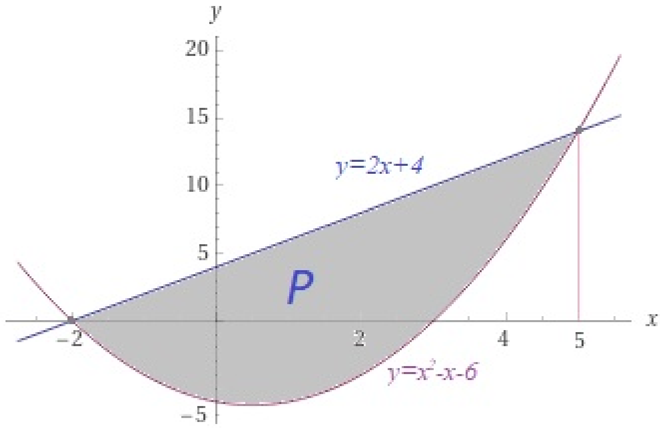
$$y = x^2 - x - 6.$$

Изједначавањем ове две једначине добијамо

$$x^2 - x - 6 = 2x + 4,$$

$$x^2 - 3x - 10 = 0,$$

чија су решења -2 и 5. Скицирањем графика



видимо да је тражена површина

$$P = \int_{-2}^{5} (2x + 4 - x^2 + x + 6)\mathrm{d}x = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 10x\right)\Big|_{-2}^{5} = \frac{343}{6}.$$

4. Дата једначина је линеарна диференцијална једначина првог реда. Поделимо је са $x^2 - 1$.

$$y' - \frac{2x}{x^2 - 1}y + 2x - 2x^3 = \frac{2x(x^2 - 1)}{x^2 - 1},$$

$$y' - \frac{2x}{x^2 - 1}y + 2x - 2x^3 = 2x.$$

Одавде је $p(x) = -\frac{2x}{x^2-1}$, па је $\int p(x)\mathrm{d}x = -\ln|x^2 - 1|$, а $q(x) = 2x$. Опште решење дате једначине је

$$\begin{aligned}
y &= e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left(c + \int e^{\int p(x)\mathrm{d}x} q(x)\mathrm{d}x\right)\\
&= e^{\ln|x^2-1|}\left(c + \int e^{-\ln|x^2-1|} 2x\mathrm{d}x\right)\\
&= (x^2 - 1)\left(c + \int \frac{2x}{x^2 - 1}\mathrm{d}x\right)\\
&= \begin{bmatrix} t = x^2 - 1 \\ \mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x \end{bmatrix}\\
&= (x^2 - 1)\left(c + \int \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)\\
&= (x^2 - 1)\left(c + \ln t\right)\\
&= (x^2 - 1)\left(c + \ln(x^2 - 1)\right)
\end{aligned}$$

У трећој једнакости смо изгубили апсолутну вредност, а у ствари смо нашли опште решење када је $x^2 - 1 > 0$ (па смо зато могли да склонимо апсолутне заграде), а у случају $x^2 - 1 < 0$ задатак се аналогно решава.

5. Означимо са A догађај да је случајно изабрани студент положио испит. Потребно је да одредимо $P(A)$. Како нам вероватноћа догађаја A зависи од тога да ли је тај студент до сада излазио на испит, означимо са H_1 и H_2 да студент испит полаже први пут, односно да га не полаже први пут. Тада је

$$P(H_1) = 0.6, \quad P(H_2) = 0.4, \quad P(A|H_1) = 0.3, \quad P(A|H_2) = 0.4,$$

па на основу формуле тоталне вероватноће

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = 0.6 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.4 = 0.34.$$

6. (а) Видети у уџбенику.
(б) Домен дате функције је $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Нађимо први и други извод.

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2},$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{((x-1)e^x)' \cdot x^2 - 2x(x-1)e^x}{x^4} \\ &= \frac{(e^x + (x-1)e^x) \cdot x^2 - 2x(x-1)e^x}{x^4} \\ &= \frac{x^2e^x - 2(x-1)e^x}{x^3} \\ &= \frac{(x^2-2x+2)e^x}{x^3}. \end{aligned}$$

Како је $e^x > 0$ и $x^2 - 2x + 2 > 0$ за свако $x \in \mathcal{D}_f$, то знак другог извода зависи само од x^3. Имамо да је $x^3 > 0$ за $x \in (0, +\infty)$ и $x^3 < 0$ за $x \in (-\infty, 0)$, па је дата функција конвексна на $(0, +\infty)$, а конкавна на $(-\infty, 0)$. Нема превојних тачака јер други извод нема нула.
7. Видети у уџбенику.

РЕШЕЊА ЈУЛСКОГ РОКА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 21.07.2021.

ЗАДАЦИ

1. (8 п) Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n-7}\right)^{n^2}$.
2. (8 п) Испитати конвексност и наћи превојне тачке функције $y=\ln^2 x+\ln x$.
3. (8 п) Израчунати $\int\frac{\cos x}{\cos 2x}\mathrm{d}x$.
4. (8 п) Наћи опште решење диференцијалне једначине $y''+y'-2y=20\sin 2x$.
5. (8 п) Из шпила од 52 карте извлаче се три карте одједном.
(4 п) а) Одредити вероватноћу да ниједна од три карте није у знаку срца.
(4 п) б) Ако знамо да ниједна од три карте није у знаку срца, одредити вероватноћу да су извучена тачно два краља.
6. (5 п) а) Дати дефиницију локалних екстремума функције реалне промењљиве.
(5 п) б) Наћи све локалне екстремуме функције $y=xe^x$.
7. (10 п) Линеарна диференцијална једначина, опште решење и Кошијев проблем.

РЕШЕЊА

1. Означимо $a_n=\left(\frac{2n}{2n-7}\right)^{n^2}$. Како је

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{2n-7}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n-7}{7}}\right)^{\frac{2n-7}{7}\frac{7}{2n-7}\cdot n}=e^{\frac{7}{2}}>1,$$

то дати ред дивергира по Кошијевом критеријуму.

2. Домен функције је $\mathcal{D}=(0,+\infty)$. Израчунајмо први и други извод дате функције

$$f'(x)=\frac{2\ln x}{x}+\frac{1}{x}=\frac{2\ln x+1}{x},\quad f''(x)=\frac{1-2\ln x}{x^2}.$$

Имамо да је $f''(x)=0$ за $x=\sqrt{e}$ и

$$f''(x)>0 \text{ за } x\in(0,\sqrt{e}),$$
$$f'(x)<0 \text{ за } x\in(\sqrt{e},+\infty),$$

па закључујемо да је

f ковексна на $(0,\sqrt{e})$,
f конкавна на $(\sqrt{e},+\infty)$,
тачка $x=\sqrt{e}$ је превојна тачка.

3.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos x}{\cos 2x}\mathrm{d}x &= \int \frac{\cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\cos x}{1 - 2\sin^2 x}\mathrm{d}x \\
&= \begin{bmatrix} t = \sin x \\ \mathrm{d}t = \cos x \mathrm{d}x \end{bmatrix} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}t}{1 - 2t^2} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}t}{(1 - t\sqrt{2})(1 + t\sqrt{2})} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2}{(1 - t\sqrt{2})(1 + t\sqrt{2})}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1 - t\sqrt{2} + 1 + t\sqrt{2}}{(1 - t\sqrt{2})(1 + t\sqrt{2})}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1 + t\sqrt{2}} + \frac{1}{1 - t\sqrt{2}}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\ln(1 + t\sqrt{2}) - \ln(1 - t\sqrt{2})\Big) + c \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{1 + t\sqrt{2}}{1 - t\sqrt{2}}\right) + c \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{1 + \sin x \cdot \sqrt{2}}{1 - \sin x \cdot \sqrt{2}}\right) + c
\end{aligned}$$

4. Најпре нађимо решење хомогене једначине $y'' + y' - 2y = 0$. Нуле карактеристичне једначине $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ су $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, па је $y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$.
Партикуларно решење је облика $y_p = A\sin 2x + B\cos 2x$. Израчунајмо први и други извод партикуларног решења и убацимо га у полазну једначину.

$$y_p' = 2A\cos 2x - 2B\sin 2x, \quad y_p'' = -4A\sin 2x - 4B\cos 2x$$

па је

$$-4A\sin 2x - 4B\cos 2x + 2A\cos 2x - 2B\sin 2x - 2(A\sin 2x + B\cos 2x) = 20\sin 2x$$

односно након сређивања

$$\sin 2x(-6A - 2B) + \cos 2x(2A - 6B) = 20\sin 2x$$

одакле изједначавањем коефицијената уз $\sin 2x$ и $\cos 2x$ добијамо систем две једначине са две непознате.

$$\begin{aligned}
-6A - 2B &= 20 \\
2A - 6B &= 0
\end{aligned}$$

Решење овог система је $A = -3$, $B = -1$, па добијамо да је партикуларно решење је $y_p = -3\sin 2x - \cos 2x$.
Коначно, опште решење дате једначине је

$$y = y_h + y_p = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} - 3\sin 2x - \cos 2x, \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

5. (а) Означимо са A догађај да ниједна извучена карта није у знаку срца. Тражимо $P(A)$. Укупан број исхода при извлачењу три карте одједном из шпила од 52 карте је $\binom{52}{3}$, а број повољних исхода је $\binom{39}{3}$ јер нам одговара да извучемо било које три карте које нису срце, а тих карата има укупно 39. Дакле, по дефиницији тражена вероватноћа је

$$P(A) = \frac{\binom{39}{3}}{\binom{52}{3}} = \frac{\frac{39\cdot 38\cdot 37}{3\cdot 2\cdot 1}}{\frac{52\cdot 51\cdot 50}{3\cdot 2\cdot 1}} = \frac{703}{1700}.$$

(б) Означимо са B догађај да су извучена тачно два краља. У овом делу задатка нама се тражи условна вероватноћа $P(B|A)$ коју рачунамо по формули

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Вероватноћу $P(A)$ смо већ израчунали па остаје само да одредимо вероватноћу $P(AB)$ тј. колика је вероватноћа да се догађаји A и B истовремено испуне, односно да су извучена тачна два краља и да ниједна од карата није у знаку срца. Укупан број исхода при овом извлачењу је поново $\binom{52}{3}$, а број повољних исхода рачунамо као $\binom{3}{2}\cdot\binom{37}{1}$ (од три краља који нису срце бирамо два и то је $\binom{3}{2}$ могућности и то множимо са бројем могућности да од преосталих 37 карата које нису ни та два краља нити срце изаберемо једну, тј. $\binom{37}{1}$). Коначно,

$$P(B|A) = \frac{\frac{\binom{3}{2}\cdot\binom{37}{1}}{\binom{52}{3}}}{\frac{703}{1700}} = \frac{3}{247}.$$

6. (а) Видети у уџбенику.
(б) Домен дате функције је $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Нађимо први извод функције.

$$y' = e^x + xe^x = (x+1)e^x.$$

Имамо да је $y' = 0$ за $x = -1$ па је то потенцијални екстремум. Функција e^x је увек позитивна па не утиче на знак првог извода, већ имамо да је $y' > 0$ за $x > -1$ и $y' < 0$ за $x < -1$, тј. функција расте на $(-1, +\infty)$, опада на $(-\infty, -1)$ и тачка $x = 1$ је локални минимум.
7. Видети у уџбенику.

РЕШЕЊА АВГУСТОВСКОГ РОКА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 01.09.2020.

ЗАДАЦИ

1. (8 п) Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\cdot(2n)!}{(3n)!}$.

2. (8 п) Испитати монотоност и наћи екстремне вредности функције $y = \ln\sqrt{1-x^2}$.

3. (8 п) Израчунати $\int \ln\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.

4. (8 п) Наћи опште решење диференцијалне једначине $y' = x(y'' - xe^x)$.

5. (8 п) У кутији се налази 10 црвених, 15 плавих и 20 белих куглица. Извлаче се 3 куглице одједном. Ако је X случајна променљива која представља број извучених белих куглица, одредити $E(X)$ и $D(X)$.

6. (а) **(5 п)** Како гласи Кошијев критеријум за конвергенцију редова са позитивним члановима?

(б) **(5 п)** Испитати Кошијевим критеријумом конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$.

7. (10 п) Линеарна диференцијална једначина другог реда са константним коефицијентима.

РЕШЕЊА

1. Означимо са $a_n = \frac{n!\cdot(2n)!}{(3n)!}$. Како је

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!\cdot(2(n+1))!}{(3(n+1))!}}{\frac{n!\cdot(2n)!}{(3n)!}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!\cdot(2n+2)!}{(3n+3)!}}{\frac{n!\cdot(2n)!}{(3n)!}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)\cdot\cancel{n!}\cdot(2n+2)\cdot(2n+1)\cdot\cancel{(2n)!}}{(3n+3)\cdot(3n+2)\cdot(3n+1)\cdot\cancel{(3n)!}}}{\frac{\cancel{n!}\cdot\cancel{(2n)!}}{\cancel{(3n)!}}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+2)(2n+1)}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \\
&= \frac{1\cdot 2\cdot 2}{3\cdot 3\cdot 3} \\
&= \frac{4}{27} < 1,
\end{aligned}$$

то дати ред конвергира на основу Даламберовог критеријума.

2. Домен дате функције је $\mathcal{D}_y = (-1,1)$ (јер је због логаритма потребно да важи $1-x^2>0$). Први извод дате функције је

$$y' = (\ln\sqrt{1-x^2})' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot(\sqrt{1-x^2})' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(1-x^2)' =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x) = \frac{x}{x^2-1}.$$

Како је $y'=0$ за $x=0$, то је ово потенцијални екстремум. Како смо домен одредили тако да $1-x^2$ буде позитивно, то значи да x^2-1 које се појављује у изводу је негативно, па знак извода зависи од знака x и биће супротан од тога (јер имамо дељење негативним x^2-1). Дакле, $y'>0$ за $x<0$ и $y'<0$ за $x>0$, па коначно закључујемо да функција расте на $(-1,0)$, опада на $(0,1)$ и $x=0$ је локални максимум.

3.

$$\begin{aligned}
\int \ln\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x &= \begin{bmatrix} u=\ln\sqrt{1-x^2} & \mathrm{d}v=\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u=\frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x & v=x \end{bmatrix} \\
&= x\ln\sqrt{1-x^2} - \int \frac{x^2}{x^2-1}\mathrm{d}x \\
&= x\ln\sqrt{1-x^2} - \int \frac{x^2-1+1}{x^2-1}\mathrm{d}x \\
&= x\ln\sqrt{1-x^2} - \int \left(1+\frac{1}{x^2-1}\right)\mathrm{d}x \\
&= x\ln\sqrt{1-x^2} - x + \frac{1}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{2}\ln(1+x) + c
\end{aligned}$$

Интеграл $\int \frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{2}\ln(1+x) + c$ је рађен више пута на вежбама, па овде није детаљно решаван.

4. Ово је диференцијална једначина другог реда и примећујемо да се у њој не појављује y, па уводимо смену $z = y'$. Једначина постаје

$$z = x(z' - xe^x).$$

Када мало препакујемо видимо да је у питању линеарна једначина првог реда:

$$z' - \frac{1}{x}z = xe^x.$$

Означимо $p(x) = -\frac{1}{x}$, $q(x) = xe^x$. Имамо да је

$$\int p(x)\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = -\ln|x|,$$

а у наставку задатка претпостављамо да је $x > 0$, тј. да је $\ln|x| = \ln x$. Случај $x < 0$, тј. $\ln|x| = \ln(-x)$ се слично ради. Формула за решавање линеарне диференцијалне једначине првог реда нам каже да је опште решење дато формулом

$$\begin{aligned}
z &= e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left(c + \int e^{\int p(x)\mathrm{d}x} q(x)\mathrm{d}x\right) \\
&= e^{\ln x}\left(c + \int e^{-\ln x} xe^x\mathrm{d}x\right) \\
&= x\left(c + \int \frac{1}{\cancel{x}}\cancel{x}e^x\mathrm{d}x\right) \\
&= x\left(c + \int e^x\mathrm{d}x\right) \\
&= x\left(c + e^x\right) \\
&= cx + xe^x
\end{aligned}$$

Остаје још да вратимо смену. $z = y'$, па је $y = \int z\mathrm{d}x$, тј.

$$\begin{aligned}
y &= \int (cx + xe^x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{c}{2}x^2 + xe^x - e^x + d
\end{aligned}$$

Интеграл $\int xe^x \mathrm{d}x = xe^x - e^x + d$ је рађен на вежбама (решава се једном парцијалном интеграцијом), па овде није наведен детаљан поступак решења.

Дакле, опште решење дате једначине је

$$y = \frac{c}{2}x^2 + xe^x - e^x + d, \ c, d \in \mathbb{R}.$$

5. Прво се питамо које све вредности X може да узме. Како извлачимо 3 куглице одједном, међу њима може да буде 0, 1, 2 или 3 беле, па је $X \in \{0, 1, 2, 3\}$. Даље, потребно је да одредимо вероватноће да X узима баш те вредности.

$$P\{X = 0\} = \frac{\binom{25}{3}}{\binom{45}{3}} = \frac{\frac{25\cdot24\cdot23}{3\cdot2\cdot1}}{\frac{45\cdot44\cdot43}{3\cdot2\cdot1}} = \frac{230}{1419}$$

$$P\{X = 1\} = \frac{\binom{20}{1}\binom{25}{2}}{\binom{45}{3}} = \frac{200}{473}$$

$$P\{X = 2\} = \frac{\binom{20}{2}\binom{25}{1}}{\binom{45}{3}} = \frac{475}{1419}$$

$$P\{X = 3\} = \frac{\binom{20}{3}}{\binom{45}{3}} = \frac{38}{473}$$

Дакле, X има расподелу

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{230}{1419} & \frac{200}{473} & \frac{475}{1419} & \frac{38}{473} \end{pmatrix}$$

Сада можемо да израчунамо очекивање и дисперзију.

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \cdot \frac{230}{1419} + 1 \cdot \frac{200}{473} + 2 \cdot \frac{475}{1419} + 3 \cdot \frac{38}{473} = \frac{4}{3} \\ E(X^2) &= 0^2 \cdot \frac{230}{1419} + 1^2 \cdot \frac{200}{473} + 2^2 \cdot \frac{475}{1419} + 3^2 \cdot \frac{38}{473} = \frac{82}{33} \\ D(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{82}{33} - \frac{16}{9} = \frac{70}{99}. \end{aligned}$$

6. (а) Видети у уџбенику.

(б) Означимо $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2}$. Како је

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n\cdot(-1)} \\ &= e^{-1} \\ &= \frac{1}{e} < 1, \end{aligned}$$

то дати ред конвергира на основу Кошијевог критеријума.

7. Видети у уџбенику.

РЕШЕЊА СЕПТЕМБАРСКОГ РОКА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 22.09.2021.

ЗАДАЦИ

1. (8 п) Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{13^n}{(n+1)!-n!}$.

2. (8 п) Одредити асимптоте функције $y = e^{\frac{3}{x}} - 5x$.

3. (8 п) Израчунати $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}} \mathrm{d}x$.

4. (8 п) Наћи опште решење диференцијалне једначине $x + xy + y'(y + xy) = 0$.

5. (8 п) У кутији A налази се 9 листића нумерисаних бројевима од 1 до 9, а у кутији B налази се 6 листића нумерисаних бројевима од 1 до 6. Насумице бирамо кутију и извлачимо један листић из ње.

(4 п) (а) Колика је вероватноћа да је извучен листић са непарним бројем?

(4 п) (б) Ако је број на извученом листићу непаран, колика је вероватноћа да је листић извучен из кутије A?

6. (а) **(5 п)** Дати дефиницију локалних екстремума реалне функције реалне променљиве.

(б) **(5 п)** Наћи и испитати локалне екстремуме функције $y = \frac{x-1}{x^2+1}$.

7. (10 п) Математичко очекивање и дисперзија дискретне случајне променљиве. Биномна расподела.

РЕШЕЊА

1. Означимо са $a_n = \frac{13^n}{(n+1)!-n!}$. Како је

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{13^{n+1}}{(n+2)!-(n+1)!}}{\frac{13^n}{(n+1)!-n!}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{13\cdot\cancel{13^n}}{(n+1)!(n+2-1)}}{\frac{\cancel{13^n}}{n!(n+1-1)}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{13n\cdot n!}{(n+1)(n+1)!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{13n\cdot \cancel{n!}}{(n+1)(n+1)\cancel{n!}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{13n}{(n+1)^2} \\
&= 0 < 1,
\end{aligned}
$$

то дати ред конвергира на основу Даламберовог критеријума.

2. Домен дате функције је $\mathcal{D}_y = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

<u>Вертикалне асимптоте:</u> Кандидат за вертикалну асимптоту је права $x = 0$ (то видимо из домена). Како је

$$\lim_{x\to 0+} \left(e^{\frac{3}{x}} - 5x\right) = +\infty, \quad \lim_{x\to 0-} \left(e^{\frac{3}{x}} - 5x\right) = 0,$$

то права $x = 0$ јесте вертикална асимптота (довољно је да је леви или десни лимес бесконачан, а овде смо добили да то важи за десни).

<u>Хоризонталне асимптоте:</u>

$$\lim_{x\to\infty} \left(e^{\frac{3}{x}} - 5x\right) = \infty,$$

па нема хоризонталних асимптота.

<u>Косе асимптоте:</u>

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{3}{x}} - 5x}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{e^{\frac{3}{x}}}{x} - 5\right) = 0 - 5 = -5,$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(e^{\frac{3}{x}}-5x-(-5)x\right)=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{3}{x}}=1,$$

па је права $y=-5x+1$ коса асимптота дате функције.

3.

$$\begin{aligned}
\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x&=\begin{bmatrix} x=t^6\\ \mathrm{d}x=6t^5\mathrm{d}t\\ x=0\longrightarrow t=0\\ x=1\longrightarrow t=1\end{bmatrix}\\
&=\int_0^1\frac{t^3}{1+t^2}6t^5\mathrm{d}t\\
&=6\int_0^1\frac{t^8-1+1}{1+t^2}\mathrm{d}t\\
&=6\int_0^1\frac{(t^2-1)(t^2+1)(t^4+1)+1}{1+t^2}\mathrm{d}t\\
&=6\int_0^1\left(t^6-t^4+t^2-1+\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t\\
&=\left(\frac{6}{7}t^7-\frac{6}{5}t^5+2t^3-6t+6\mathrm{arctg}t\right)\Bigg|_0^1\\
&=\frac{6}{7}-\frac{6}{5}+2-6+6\mathrm{arctg}1-0\\
&=-\frac{152}{35}+6\frac{\pi}{4}\\
&=\frac{3\pi}{2}-\frac{152}{35}
\end{aligned}$$

4. Дата једначина је диференцијална једначина која раздваја променљиве. Пребацимо све са x на десну, а све са y на леву страну.

$$x(1+y)+y'y(1+x)=0$$

$$y'y(1+x)=-x(1+y)$$

$$\frac{y'y}{1+y}=-\frac{x}{1+x}$$

$$\int\frac{y}{1+y}\mathrm{d}y=-\int\frac{x}{1+x}\mathrm{d}x$$

$$y-\ln|1+y|=-x+\ln|1+x|+c$$

Користили смо да је

$$\int\frac{x}{1+x}\mathrm{d}x=\int\frac{x+1-1}{1+x}\mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x=x-\ln|1+x|+c$$

и слично за $\int\frac{y}{1+y}\mathrm{d}y$.

5.(а) Означимо са A догађај да је извучен листић са непарним бројем. Вероватноћа овог догађаја зависи од тога из које се кутије извлачи листић, па означимо са H_1 хипотезу да је одабрана прва кутија, а са H_2 да је одабрана друга кутија. Јасно је да важи $P(H_1)=P(H_2)=\frac{1}{2}$. Поред тога, имамо

$$P(A|H_1)=\frac{5}{9},\quad P(A|H_2)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},$$

па је

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{19}{36}.$$

(б) Потребно је одредити $P(H_1|A)$.

$$P(H_1|A) = \frac{P(AH_1)}{P(A)} = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9}}{\frac{19}{36}} = \frac{10}{19}.$$

6. (а) Видети у уџбенику.
(б) Домен дате функције је $\mathcal{D}_y = \mathbb{R}$. Одредимо њен први извод.

$$y' = \frac{1 \cdot (x^2+1) - 2x(x-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}.$$

Имамо да је $y' = 0$ када је $-x^2 + 2x + 1 = 0$, тј. када решимо квадратну једначину добијамо да су $x = 1 + \sqrt{2}$ и $x = 1 - \sqrt{2}$ потенцијални локални екстремуми. Како је $(x^2+1)^2$ увек позитивно, то на знак првог извода утиче једино $-x^2 + 2x + 1$, па имамо да је $y' > 0$ за $x \in (1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$, а $y' < 0$ за $x \in (-\infty, 1-\sqrt{2}) \cup (1+\sqrt{2}, +\infty)$. Коначно закључујемо да функција расте на $x \in (1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$, опада на $x \in (-\infty, 1-\sqrt{2}) \cup (1+\sqrt{2}, +\infty)$, $x = 1-\sqrt{2}$ је локални минимум, $x = 1+\sqrt{2}$ је локални максимум.

7. Видети у уџбенику.

РЕШЕЊА ДОДАТНОГ РОКА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 02.10.2020.

ЗАДАЦИ

1. (8 п) Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$.

2. (8 п) Одредити асимптоте функције $y = x\sqrt[3]{\frac{x}{x-14}}$.

3. (8 п) Израчунати $\int\limits_2^3 \ln\left(1+\frac{2}{x^2}\right) \mathrm{d}x$.

4. (8 п) Наћи опште решење диференцијалне једначине $xy'' - y' = e^x x^2$.

5. (8 п) Стрелац гађа мету 4 пута. Вероватноћа да погоди је $\frac{3}{4}$. Ако је X случајна променљива која представља укупан број промашаја, одредити $E(X)$, $D(X)$ и $E(X^3)$.

6. (а) **(5 п)** Дати дефиницију конвексности и конкавности функције.

(б) **(5 п)** Испитати конвексност и наћи превојне тачке функције $y = xe^x$.

7. (10 п) Формуле запремине и површине омотача ротационих тела, пример правилне купе.

РЕШЕЊА

1. Означимо са $a_n = \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$. Како је

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}\ {}^{:n^n}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n{}_{:n^n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{1}{n}}}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2\cdot\frac{1}{n}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{\frac{1}{n}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{e}} \\
&= 1 \neq 0,
\end{aligned}$$

то дати ред дивергира јер није испуњен неопходан услов конвергенције.

2. Домен дате функције је $\mathcal{D}_y = (-\infty, 14) \cup (14, +\infty)$ па је $x = 14$ потенцијална вертикална асимптота.

<u>Вертикалне асимптоте:</u>

$$\lim_{x\to 14-} x\sqrt[3]{\frac{x}{x-14}} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 14-} x\sqrt[3]{\frac{x}{x-14}} = +\infty,$$

па права $x = 14$ јесте вертикална асимптота.

<u>Хоризонталне асимптоте:</u>

$$\lim_{x\to\infty} x\sqrt[3]{\frac{x}{x-14}} = \infty,$$

па функција нема хоризонталних асимптота.

<u>Косе асимптоте:</u>

$$n = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{x}{x-14}} = 1,$$

$$
\begin{aligned}
k &= \lim_{x\to\infty}(f(x)-1\cdot x) = \lim_{x\to\infty}\left(x\sqrt[3]{\frac{x}{x-14}}-x\right)\\
&= \lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt[3]{\frac{x}{x-14}}-1\right)\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{x}{x-14}}-1}{\frac{1}{x}}\\
&\underset{\frac{0}{0}}{\overset{L.P.}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{x}{x-14}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{-14}{(x-14)^2}}{\frac{-1}{x^2}}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{-14}{(x-14)^2}}{\frac{-1}{x^2}}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{14x^2}{3(x-14)^2}\\
&= \frac{14}{3}
\end{aligned}
$$

Тражена коса асимптота је $y = x + \frac{14}{3}$.

3.

$$
\begin{aligned}
\int_2^3 \ln\left(1+\frac{2}{x^2}\right)\mathrm{d}x &= \begin{bmatrix} u=\ln\left(1+\frac{2}{x^2}\right) & \mathrm{d}v=\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}u=\frac{\frac{-4}{x^3}}{1+\frac{2}{x^2}}\mathrm{d}x=\frac{-4}{x^3+2x}\mathrm{d}x & v=x\end{bmatrix}\\
&= x\ln\left(1+\frac{2}{x^2}\right)\Bigg|_2^3 + 4\int_2^3\frac{x}{x^2+2x}\mathrm{d}x\\
&= 3\ln\left(1+\frac{2}{3^2}\right)-2\ln\left(1+\frac{2}{2^2}\right)+4\int_2^3\frac{1}{x^2+2}\mathrm{d}x\\
&= 3\ln\frac{11}{9}-2\ln\frac{3}{2}+\frac{4}{2}\int_2^3\frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\mathrm{d}x\\
&= \begin{bmatrix} t=\frac{x}{\sqrt{2}}\\ \mathrm{d}x=\sqrt{2}\mathrm{d}t\\ x=2\longrightarrow t=\frac{2}{\sqrt{2}}\\ x=3\longrightarrow t=\frac{3}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\\
&= 3\ln\frac{11}{9}-2\ln\frac{3}{2}+2\sqrt{2}\int_{\frac{2}{\sqrt{2}}}^{\frac{3}{\sqrt{2}}}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}\\
&= 3\ln\frac{11}{9}-2\ln\frac{3}{2}+2\sqrt{2}\mathrm{arctg}t\Bigg|_{\frac{2}{\sqrt{2}}}^{\frac{3}{\sqrt{2}}}\\
&= 3\ln\frac{11}{9}-2\ln\frac{3}{2}+2\sqrt{2}\mathrm{arctg}\frac{3}{\sqrt{2}}-2\sqrt{2}\mathrm{arctg}\frac{2}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

4. Уведимо смену $u = y'$, $u' = y''$. Дата једначина постаје линеарна диференцијална једначина

$$xu' - u = e^x x^2$$

$$u' - \frac{1}{x}u = xe^x$$

чије је опште решење

$$
\begin{aligned}
u &= e^{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(c+\int e^{-\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x} x e^x \mathrm{d}x\right)\\
&= e^{\ln x}\left(c+\int e^{-\ln x} x e^x \mathrm{d}x\right)\\
&= x\left(c+\int \frac{1}{x}\cdot x e^x \mathrm{d}x\right)\\
&= x\left(c+e^x\right)\\
&= cx + xe^x
\end{aligned}
$$

Остаје још да одредимо y.

$$
\begin{aligned}
y &= \int u \mathrm{d}x\\
&= \int (cx + xe^x)\mathrm{d}x\\
&= \frac{cx^2}{2} + \int xe^x \mathrm{d}x\\
&= \begin{bmatrix} u = x & \mathrm{d}v = e^x \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x & v = e^x \end{bmatrix}\\
&= \frac{cx^2}{2} + xe^x - \int e^x \mathrm{d}x\\
&= \frac{cx^2}{2} + xe^x - e^x + d
\end{aligned}
$$

5. Приметимо да $X \in \{0,1,2,3,4\}$. Како је вероватноћа поготка $\frac{3}{4}$ при сваком гађању, то је вероватноћа промашаја $\frac{1}{4}$.

$$
\begin{aligned}
P(X=0) &= \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256}\\
P(X=1) &= \binom{4}{1}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}\\
P(X=2) &= \binom{4}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{128}\\
P(X=3) &= \binom{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{64}\\
P(X=4) &= \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256}
\end{aligned}
$$

Одавде је

$$
X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{81}{256} & \frac{27}{64} & \frac{27}{128} & \frac{3}{64} & \frac{1}{256} \end{pmatrix}
$$

Даље имамо

$$
E(X) = 0\cdot\frac{81}{256} + 1\cdot\frac{27}{64} + 2\cdot\frac{27}{128} + 3\cdot\frac{3}{64} + 4\cdot\frac{1}{256} = 1
$$

$$
E(X^2) = 0^2\cdot\frac{81}{256} + 1^2\cdot\frac{27}{64} + 2^2\cdot\frac{27}{128} + 3^2\cdot\frac{3}{64} + 4^2\cdot\frac{1}{256} = \frac{7}{4}
$$

$$
D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{7}{4} - 1 = \frac{3}{4}
$$

$$E(X^3) = 0^3 \cdot \frac{81}{256} + 1^3 \cdot \frac{27}{64} + 2^3 \cdot \frac{27}{128} + 3^3 \cdot \frac{3}{64} + 4^3 \cdot \frac{1}{256} = \frac{29}{8}$$

6. (а) Видети у уџбенику.
(б) Домен дате функције је $\mathcal{D}_y = \mathbb{R}$. Одредимо други извод дате функције.

$$y' = (xe^x)' = e^x + xe^x, \quad y'' = (e^x + xe^x)' = e^x + e^x + xe^x = (x+2)e^x$$

Други извод је једнак нули за $x = -2$, па је то потенцијална превојна тачка. Како је e^x увек позитивно, то знак другог извода зависи само од $x + 2$ па имамо да је $y'' > 0$ за $x \in (-2, +\infty)$, $y'' < 0$ за $x \in (-\infty, -2)$. Дакле, функција је конвексна на $(-2, +\infty)$, конкавна на $(-\infty, -2)$ и $x = -2$ јесте превојна тачка.
7. Видети у уџбенику.