РЕШЕЊА ПРВОГ КОЛОКВИЈУМА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 23.11.2019.

Група 1

1. (5 поена) Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{\sqrt{2+n^2}}{n}}$.
2. (5 поена) Израчунати $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$.
3. (5 поена) Испитати монотоност и наћи екстремне вредности функције $y = x^2e^{\sqrt{x}}$.
4. (5 поена) Одредити асимптоте функције $y = x^2e^{\frac{1}{x}}$.
5. (5 поена) Израчунати $\int \frac{1}{x^2+3x+6}\mathrm{d}x$.

РЕШЕЊА

1. Означимо $a_n = e^{\frac{\sqrt{2+n^2}}{n}}$. Тада је

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\sqrt{2+n^2}}{n}} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2+n^2}}{n}} = e^1 = e \neq 0$$

па ред дивергира јер није испуњен неопходан услов конвергенције.

2.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x}\\ &\overset{\text{L.P.}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x}\\ &\overset{\text{L.P.}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos x + \cos x - x\sin x}\\ &= \frac{0}{2}\\ &= 0\end{aligned}$$

3. Домен функције $y = x^2e^{\sqrt{x}}$ је $\mathcal{D}_y = [0,+\infty)$, а њен први извод је

$$y' = (x^2e^{\sqrt{x}})' = 2xe^{\sqrt{x}} + x^2e^{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}e^{\sqrt{x}}x\left(4+\sqrt{x}\right).$$

Имамо да је $y' = 0$ за $x = 0$, па је то потенцијални екстремум. Како је експоненцијална функција увек позитивна и $4+\sqrt{x}$ је увек позитивно, знак првог извода зависи само од знака x, али домен дате функције је $[0,+\infty)$, па имамо да је $y' > 0$ за $x > 0$. Дакле, закључујемо да y расте на $(0,+\infty)$ и $x = 0$ је локални минимум.
4. Домен дате функције једнак $\mathcal{D}_f = (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, па је $x = 0$ потенцијална вертикална асимптота.
<u>Вертикалне асимптоте:</u>

$$\lim_{x\to -0-} x^2e^{\frac{1}{x}} = 0$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0+} x^2 e^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to 0+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{-2}}\\
&\overset{L.P.}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to 0+} \frac{-x^{-2}e^{\frac{1}{x}}}{-2x^{-3}}\\
&= \lim_{x\to 0+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{2x^{-1}}\\
&\overset{L.P.}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to 0+} \frac{-x^{-2}e^{\frac{1}{x}}}{-2x^{-2}}\\
&= \lim_{x\to 0+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{2}\\
&= +\infty,
\end{aligned}$$

па права $x = 0$ јесте вертикална асимптота функције y.

Хоризонталне асимптоте:

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^2 e^{\frac{1}{x}} = +\infty,$$

па дата функција нема хоризонталних асимптота.

Косе асимптоте:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} x e^{\frac{1}{x}} = \pm\infty,$$

па функција нема косих асимптота.

5.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2+3x+6}\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 6}\mathrm{d}x\\
&= \int \frac{1}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}}\mathrm{d}x\\
&= \int \frac{1}{\frac{15}{4}\left(\frac{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2}{\frac{15}{4}} + 1\right)}\mathrm{d}x\\
&= \frac{4}{15}\int \frac{1}{(\frac{2x+3}{\sqrt{15}})^2 + 1}\mathrm{d}x\\
&= \begin{bmatrix} t = \frac{2x+3}{\sqrt{15}}\\ \mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{15}}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{15}}{2}\mathrm{d}t \end{bmatrix}\\
&= \frac{4}{15}\cdot\frac{\sqrt{15}}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t\\
&= \frac{2\sqrt{15}}{15}\mathrm{arctg} t + c\\
&= \frac{2\sqrt{15}}{15}\mathrm{arctg}\left(\frac{2x+3}{\sqrt{15}}\right) + c.
\end{aligned}$$

Група 2

1. (5 поена) Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-2n}}{n \ln 2}$.

2. (5 поена) Израчунати $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 \cos x}{2 \sin^2 \frac{x}{2}}$.

3. (5 поена) Испитати монотоност и наћи екстремне вредности функције $y = \frac{e^{\sqrt{2x}}}{x}$.

4. (5 поена) Одредити асимптоте функције $y = (x-1) \ln \left(\frac{1}{(x-1)^2} \right)$.

5. (5 поена) Израчунати $\int \frac{1}{x^2+5x+7} \mathrm{d}x$.

РЕШЕЊА

1. Означимо $a_n = \frac{2^{-2n}}{n \ln 2}$. Тада је

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{2^{-2n}}{n \ln 2}} = \lim_{n \to \infty} \frac{2^{-2}}{\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{\ln 2}} = 2^{-2} = \frac{1}{4} < 1,$$

па дати ред конвергира на основу Кошијевог критеријума.

2.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cos x}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} &\overset{\text{L.P.}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{2x \cos x - x^2 \sin x}{4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2}} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{2x \cos x - x^2 \sin x}{\sin x} \\
&\overset{\text{L.P.}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{2 \cos x - 2x \sin x - 2x \sin x - x^2 \sin x}{\cos x} \\
&= 2
\end{aligned}$$

3. Домен функције $y = \frac{e^{\sqrt{2x}}}{x}$ је $\mathcal{D}_y = (0, +\infty)$, а њен први извод је

$$y' = \left(\frac{e^{\sqrt{2x}}}{x} \right)' = \frac{\frac{2}{2\sqrt{2x}} e^{\sqrt{2x}} x - e^{\sqrt{2x}}}{x^2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} e^{\sqrt{2x}} \sqrt{x} - e^{\sqrt{2x}}}{x^2} = \frac{e^{\sqrt{2x}}(\sqrt{x} - \sqrt{2})}{\sqrt{2} x^2}$$

Имамо да је $y' = 0$ за $x = 2$, па је то потенцијални екстремум. Како је експоненцијална функција увек позитивна, као и $x^2\sqrt{2}$, знак првог извода зависи само од знака $\sqrt{x} - \sqrt{2}$, па је $y' > 0$ за $x > 2$ и $y' < 0$ за $0 < x < 2$. Дакле, функција расте на $(2, +\infty)$, опада на $(0, 2)$ и достиже локални минимум у $x = 2$.

4. Домен дате функције једнак $\mathcal{D}_f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, па је $x = 1$ потенцијална вертикална асимптота.

Вертикалне асимптоте:

$$\lim_{x \to -1-} (x-1) \ln \left(\frac{1}{(x-1)^2} \right) = \lim_{x \to -1-} \frac{\ln \left(\frac{1}{(x-1)^2} \right)}{\frac{1}{x-1}} \overset{L.P.}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \ldots = 0,$$

$$\lim_{x\to -1+}(x-1)\ln\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right)=\ldots=0,$$

па права $x=0$ није вертикална асимптота функције y.
Хоризонталне асимптоте:

$$\lim_{x\to\pm\infty}(x-1)\ln\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right)=\pm\infty,$$

па дата функција нема хоризонталних асимптота.
Косе асимптоте:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x-1)\ln\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\ln\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right)=-\infty,$$

па функција нема косих асимптота.

5.

$$\begin{aligned}
\int\frac{1}{x^2+5x+7}\mathrm{d}x &= \int\frac{1}{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}+7}\mathrm{d}x\\
&= \int\frac{1}{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}x\\
&= \int\frac{1}{\frac{3}{4}\left(\frac{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2}{\frac{3}{4}}+1\right)}\mathrm{d}x\\
&= \frac{4}{3}\int\frac{1}{(\frac{2x+5}{\sqrt{3}})^2+1}\mathrm{d}x\\
&= \begin{bmatrix} t=\frac{2x+5}{\sqrt{3}}\\ \mathrm{d}t=\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{d}t\end{bmatrix}\\
&= \frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t\\
&= \frac{2\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}t+c\\
&= \frac{2\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\left(\frac{2x+5}{\sqrt{3}}\right)+c.
\end{aligned}$$

Група 3

1. (5 поена) Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{\sqrt{n+2}}$.

2. (5 поена) Израчунати $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x+3}{x^2} \cdot \sin x$.

3. (5 поена) Испитати монотоност и наћи екстремне вредности функције $y = \ln\left(\frac{x-1}{e^x}\right)$.

4. (5 поена) Одредити асимптоте функције $y = \frac{1}{\sqrt{x}} - \ln\sqrt{x}$.

5. (5 поена) Израчунати $\int \frac{1}{x^2+7x+14} \mathrm{d}x$.

РЕШЕЊА

1. Означимо $a_n = \frac{3^{n-1}}{\sqrt{n+2}}$. Тада је

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^{n-1}}{\sqrt{n+2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{1-\frac{1}{n}}}{\sqrt[2n]{n+2}} = 3 > 1,$$

па дати ред дивергира на основу Кошијевог критеријума.

2.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{x+3}{x^2} \cdot \sin x &= \lim_{x\to 0} \frac{(x+3)\sin x}{x^2} \\ &\overset{L.P.}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x + (x+3)\cos x}{2x} \\ &= \infty\end{aligned}$$

3. Домен функције $y = \ln\left(\frac{x-1}{e^x}\right)$ је $\mathcal{D}_y = (1, +\infty)$ Трансформишимо најпре функцију на следећи начин (ово није неопходно али олакшава даљи рачун):

$$y = \ln\left(\frac{x-1}{e^x}\right) = \ln(x-1) - \ln e^x = \ln(x-1) - x.$$

Први извод функције y је

$$y' = (\ln(x-1) - x)' = \frac{1}{x-1} - 1 = \frac{2-x}{x-1},$$

а како је због домена израз $x-1$ увек позитиван, знак првог извода зависи само од $2-x$ и то је $y' = 0$ за $x = 2$, $y' > 0$ за $x \in (1,2)$ и $y' < 0$ за $x \in (2, +\infty)$, па закључујемо да y расте на $(1,2)$, опада на $2, +\infty$ и достиже локални максимум у тачки $x = 2$.

4. Домен дате функције једнак $\mathcal{D}_f = (0, +\infty)$, па је $x = 0$ потенцијална вертикална асимптота.

<u>Вертикалне асимптоте:</u>

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} - \ln\sqrt{x} = +\infty,$$

па права $x = 0$ јесте вертикална асимптота функције y.

<u>Хоризонталне асимптоте:</u>

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} - \ln\sqrt{x} = -\infty,$$

па дата функција нема хоризонталних асимптота.
<u>Косе асимптоте:</u>

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \ln\sqrt{x}}{x} = 0,$$

$$n = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \ln\sqrt{x} - 0\cdot x \right) = -\infty,$$

па функција нема косих асимптота.

5.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2+7x+14}\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\left(x+\frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + 14}\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{\left(x+\frac{7}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}}\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{\frac{7}{4}\left(\frac{\left(x+\frac{7}{2}\right)^2}{\frac{7}{4}} + 1\right)}\mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{7}\int \frac{1}{(\frac{2x+7}{\sqrt{7}})^2 + 1}\mathrm{d}x \\
&= \begin{bmatrix} t = \frac{2x+7}{\sqrt{7}} \\ \mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{7}}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{7}}{2}\mathrm{d}t \end{bmatrix} \\
&= \frac{4}{7}\cdot\frac{\sqrt{7}}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t \\
&= \frac{2\sqrt{7}}{7}\mathrm{arctg} t + c \\
&= \frac{2\sqrt{7}}{7}\mathrm{arctg}\left(\frac{2x+7}{\sqrt{7}}\right) + c.
\end{aligned}$$

РЕШЕЊА ДРУГОГ КОЛОКВИЈУМА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 28.12.2019.

Група 1

1. (5 поена) Израчунати површину фигуре ограничену кривама

$$y = 2x^2 + 1,\ y = x^2 + 10.$$

2. (5 поена) Наћи партикуларно решење диференцијалне једначине $y'(4x^2+1)+8xy = 4x^2+1$ са почетним условом $y(0) = 1$.

3. (5 поена) Наћи опште решење диференцијалне једначине $y'' = 2\sqrt{y'}\cos x$.

4. (5 поена) У четири истоветне кутије налазе се куглице истих димензија, али различитих боја: у првој су 2 беле и 3 жуте, у другој 3 беле и 2 зелене, у трећој 4 беле, 1 жута и 1 зелена и у четвртој 2 жуте и 2 зелене. На случајан начин се бира кутија и из ње извлаче две куглице одједном. Одредити вероватноћу да је изучена једна жута и једна бела.

5. (5 поена) Нека је дата случајна величина X која зависи од параметра

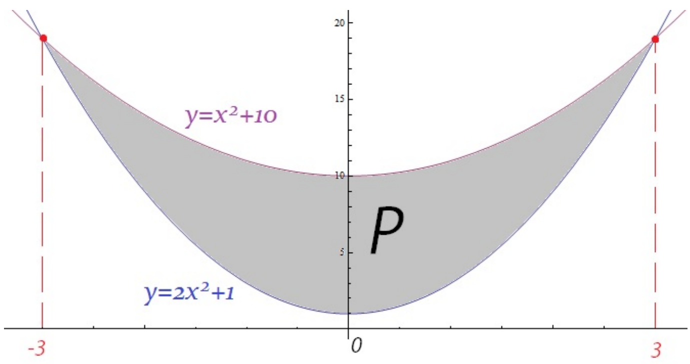
$$X : \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ a^2 - \frac{1}{4} & \frac{1}{4}a & \frac{1}{4}a & 1 - \frac{1}{2}a \end{pmatrix}$$

(а) Одредити параметар a;
(б) Одредити $E(X)$;
(в) Одредити $E(X-1)$.

РЕШЕЊА

1. Пресечне тачке графика функција $y = 2x^2+1$ и $y = x^2+10$ су решења једначине $2x^2+1 = x^2+10$, тј. $x^2-9=0$. Решења ове једначине су $x=-3$ и $x=3$ што ће бити границе интеграла. Треба још видети у датом интервалу који је график "горе", а који "доле", што видимо са слике. Тражена површина је

$$P = \int_{-3}^{3}(x^2+10-(2x^2+1))\mathrm{d}x = \int_{-3}^{3}(-x^2+9)\mathrm{d}x = \frac{-x^3}{3}+9x\Big|_{-3}^{3} = \frac{-3^3}{3}+9\cdot 3-\frac{-(-3)^3}{3}-9\cdot(-3) = 36.$$



2. Дата једначина је линеарна диференцијална једначина првог реда. Поделимо је са $4x^2+1$. Тада једначина постаје

$$y' + \frac{8x}{4x^2+1}y = 1,$$

па је

$$p(x) = \frac{8x}{4x^2+1},\ \ q(x) = 1.$$

Одредимо, најпре,

$$\int p(x)\mathrm{d}x = \int \frac{8x}{4x^2+1}\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} t = 4x^2+1 \\ \mathrm{d}t = 8x\mathrm{d}x \end{bmatrix} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| = \ln|4x^2+1| = \ln(4x^2+1),$$

Јер је $4x^2+1>0$, па је $|4x^2+1| = 4x^2+1$. Опште решење дате линеарне једначине је

$$\begin{aligned} y &= e^{-\ln(4x^2+1)}\left(c + \int 1\cdot e^{\ln(4x^2+1)}\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{4x^2+1}\left(c + \int (4x^2+1)\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{4x^2+1}\left(c + \frac{4x^3}{3} + x\right), \quad c\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Још остаје да нађемо партикуларно решење које задовољава услов $y(0) = 1$. То решавамо убацивањем $x=0$ и $y=1$ у опште решење.

$$1 = \frac{1}{4\cdot 0^2+1}\left(c + \frac{4\cdot 0^3}{3} + 0\right),$$

одакле је $c=1$, па је тражено партикуларно решење

$$y = \frac{1}{4x^2+1}\left(1 + \frac{4x^3}{3} + x\right).$$

3. Приметимо да се у датој једначини не појављује y (већ само изводи y', y'' и променљива x), па можемо увести смену $z = y'$, одакле је $z' = y''$. Увођењем смене добија се диференцијална једначина која раздваја променљиве.

$$\begin{aligned} z' &= 2\sqrt{z}\cos x \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} &= 2\sqrt{z}\cos x \\ \frac{\mathrm{d}z}{2\sqrt{z}} &= \cos x\mathrm{d}x \\ \int \frac{\mathrm{d}z}{2\sqrt{z}} &= \int \cos x\mathrm{d}x \\ \sqrt{z} &= \sin x + c \\ z &= (\sin x + c)^2 \\ z &= \sin^2 x + 2c\sin x + c^2. \end{aligned}$$

Остаје још да вратимо смену $y' = z$, тј. $y = \int z\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned} y &= \int (\sin^2 x + 2c\sin x + c^2)\mathrm{d}x \\ &= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2} + 2c\sin x + c^2\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x - 2c\cos x + c^2x + d, \quad c, d\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

4. Означимо са A догађај да је извучена једна жута и једна бела куглица. Како вероватноћа догађаја A зависи од тога из које се кутије извлаче куглице, означимо са

H_1, H_2, H_3 и H_4 хипотезе да се куглица извуче из прве, друге, треће односно четврте кутије. На основу формуле тоталне вероватноће је

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3) + P(H_4)P(A|H_4).$$

Остаје још да израчунамо вероватноће које се појављују у претходној формули. Како насумице бирамо кутију, то је

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = P(H_4) = \frac{1}{4}.$$

Даље, вероватноћа $P(A|H_1)$ је вероватноћа да извучемо једну белу и једну жуту куглицу из прве кутије, а то је

$$P(A|H_1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{2 \cdot 3}{\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}} = \frac{3}{5}.$$

Слично,

$$P(A|H_3) = \frac{\binom{4}{1}\binom{1}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{4 \cdot 1}{\frac{6\cdot 5}{2}} = \frac{4}{15}.$$

Како је из друге и четврте кутије немогуће извући једну белу и једну жуту куглицу (јер у другој кутији нема жутих, а у четвртој нема белих), то је

$$P(A|H_2) = P(A|H_4) = 0.$$

Коначно,

$$P(A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{15} + \frac{1}{4} \cdot 0 = \frac{13}{60}.$$

5. а) Да би функција расподеле била добро дефинисана, сума вероватноћа мора да буде 1 тј.

$$a^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}a + 1 - \frac{1}{2}a = 1$$

$$a^2 - \frac{1}{4} = 0$$

Решавајући ову једначину, добијамо да је $a = \frac{1}{2}$ или $a = -\frac{1}{2}$, али како вероватноће морају бити бројеви у интервалу $[0, 1]$, то једино може бити $a = \frac{1}{2}$, па наша функција расподеле изгледа овако:

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

б)

$$E(X) = (-1) \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{3}{4} = \frac{21}{8}.$$

в) Приметимо да $X - 1$ има расподелу

$$X - 1 : \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{pmatrix},$$

па је

$$E(X-1) = (-1) \cdot 0 + 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{13}{8}.$$

Могли смо применити и формулу

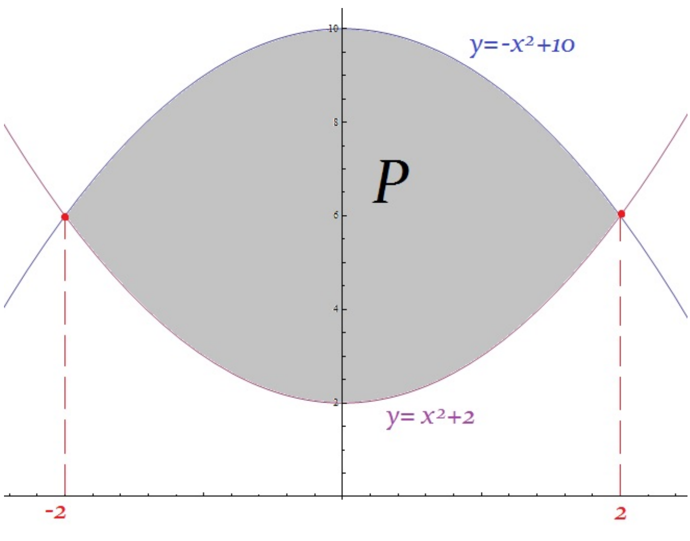
$$E(X-1) = E(X) - E(1) = E(X) - 1 = \frac{21}{8} - 1 = \frac{13}{8}.$$

Група 2

1. (5 поена) Израчунати површину фигуре ограничену кривама
$$y = -x^2 + 10,\ y = x^2 + 2.$$
2. (5 поена) Наћи партикуларно решење диференцијалне једначине $y'(x^2+4) + 2xy = 2x^2 + 8$ са почетним условом $y(0) = 2$.
3. (5 поена) Наћи опште решење диференцијалне једначине $y'' = 2\sqrt{y'}e^{\frac{x}{2}}$.
4. (5 поена) У четири истоветне кутије налазе се куглице истих димензија, али различитих боја: у првој су 2 беле и 3 жуте, у другој 3 беле и 2 зелене, у трећој 4 беле, 1 жута и 1 зелена и у четвртој 2 жуте и 2 зелене. На случајан начин се бира кутија и из ње извлаче две куглице одједном. Одредити вероватноћу да је изучена једна жута и једна зелена.
5. (5 поена) Нека је дата случајна величина X која зависи од параметра
$$X : \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ a^2 & \frac{1}{2} - \frac{a}{3} & \frac{3}{4} - \frac{3}{2}a & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$
(а) Одредити параметар a;
(б) Одредити $E(X)$;
(в) Одредити $E(X-1)$.

РЕШЕЊА

1. Пресечне тачке графика функција $y = -x^2 + 10$ и $y = x^2 + 2$ су решења једначине $-x^2 + 10 = x^2 + 2$, тј. $x^2 - 4 = 0$. Решења ове једначине су $x = -2$ и $x = 2$ што ће бити границе интеграла. Треба још видети у датом интервалу који је график "горе", а који "доле", што видимо са слике. Тражена површина је
$$\begin{aligned} P &= \int_{-2}^{2} (-x^2 + 10 - (x^2+2))\mathrm{d}x \\ &= \int_{-2}^{2} (-2x^2 + 8)\mathrm{d}x \\ &= \frac{-2x^3}{3} + 8x\Big|_{-2}^{2} \\ &= \frac{-2\cdot 2^3}{3} + 8\cdot 2 - \frac{-2\cdot(-2)^3}{3} - 8\cdot(-2) \\ &= \frac{64}{3}. \end{aligned}$$



2. Дата једначина је линеарна диференцијална једначина првог реда. Поделимо је са x^2+4. Тада једначина постаје

$$y' + \frac{2x}{x^2+4}y = 2,$$

па је

$$p(x) = \frac{2x}{x^2+4},\ q(x) = 2.$$

Одредимо, најпре,

$$\int p(x)\mathrm{d}x = \int \frac{2x}{x^2+4}\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} t = x^2+4 \\ \mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x \end{bmatrix} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| = \ln|x^2+4| = \ln(x^2+4),$$

Јер је $x^2+4>0$, па је $|x^2+4| = x^2+4$. Опште решење дате линеарне једначине је

$$\begin{aligned} y &= e^{-\ln(x^2+4)}\left(c + \int 2\cdot e^{\ln(x^2+4)}\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{x^2+4}\left(c + \int 2(x^2+4)\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{x^2+4}\left(c + \frac{2x^3}{3} + 8x\right), \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Још остаје да нађемо партикуларно решење које задовољава услов $y(0) = 2$. То решавамо убацивањем $x = 0$ и $y = 2$ у опште решење.

$$2 = \frac{1}{\cdot 0^2+4}\left(c + \frac{2\cdot 0^3}{3} + 8\cdot 0\right),$$

одакле је $c = 8$, па је тражено партикуларно решење

$$y = \frac{1}{x^2+4}\left(8 + \frac{2x^3}{3} + 8x\right).$$

3. Приметимо да се у датој једначини не појављује y (већ само изводи y', y'' и променљива x), па можемо увести смену $z = y'$, одакле је $z' = y''$. Увођењем смене добија се диференцијална једначина која раздваја променљиве.

$$\begin{aligned} z' &= 2\sqrt{z}e^{\frac{x}{2}} \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} &= 2\sqrt{z}e^{\frac{x}{2}} \\ \frac{\mathrm{d}z}{2\sqrt{z}} &= e^{\frac{x}{2}}\mathrm{d}x \\ \int \frac{\mathrm{d}z}{2\sqrt{z}} &= \int e^{\frac{x}{2}}\mathrm{d}x \\ \sqrt{z} &= 2e^{\frac{x}{2}} + c \\ z &= (2e^{\frac{x}{2}} + c)^2 \\ z &= 4e^x + 4ce^{\frac{x}{2}} + c^2. \end{aligned}$$

Остаје још да вратимо смену $y' = z$, тј. $y = \int z\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned} y &= \int (4e^x + 4ce^{\frac{x}{2}} + c^2)\mathrm{d}x \\ &= 4e^x + 8ce^{\frac{x}{2}} + c^2x + d, \quad c, d \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

4. Означимо са A догађај да је извучена једна жута и једна зелена куглица. Како вероватноћа догађаја A зависи од тога из које се кутије извлаче куглице, означимо са H_1, H_2, H_3 и H_4 хипотезе да се куглица извуче из прве, друге, треће односно четврте кутије. На основу формуле тоталне вероватноће је

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3) + P(H_4)P(A|H_4).$$

Остаје још да израчунамо вероватноће које се појављују у претходној формули. Како насумице бирамо кутију, то је

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = P(H_4) = \frac{1}{4}.$$

Даље, вероватноћа $P(A|H_3)$ је вероватноћа да извучемо једну зелену и једну жуту куглицу из треће кутије, а то је

$$P(A|H_3) = \frac{\binom{1}{1}\binom{1}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{1 \cdot 1}{\frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1}} = \frac{1}{15}.$$

Слично,

$$P(A|H_4) = \frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{2 \cdot 2}{\frac{4 \cdot 3}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Како је из прве и друге кутије немогуће извући једну жуту и једну зелену куглицу (јер у првој кутији нема зелених, а у другој нема жутих), то је

$$P(A|H_1) = P(A|H_2) = 0.$$

Коначно,

$$P(A) = \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{15} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{11}{60}.$$

5. а) Да би функција расподеле била добро дефинисана, сума вероватноћа мора да буде 1 тј.

$$a^2 + \frac{1}{2} - \frac{a}{3} + \frac{3}{4} - \frac{3}{2}a + \frac{1}{4} = 1$$

$$a^2 - \frac{11}{6}a + \frac{1}{2} = 0$$

Решавајући ову једначину, добијамо да је $a = \frac{1}{3}$ или $a = \frac{3}{2}$, али како вероватноће морају бити бројеви у интервалу $[0, 1]$, то једино може бити $a = \frac{1}{3}$, па наша функција расподеле изгледа овако:

$$X : \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ \frac{1}{9} & \frac{7}{18} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

б)

$$E(X) = 2 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{7}{18} + 6 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{4} = \frac{95}{18}.$$

в) Приметимо најпре да $X - 1$ има расподелу

$$X - 1 : \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ \frac{1}{9} & \frac{7}{18} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

па је

$$E(X - 1) = 1 \cdot \frac{1}{9} + 3 \cdot \frac{7}{18} + 5 \cdot \frac{1}{4} + 7 \cdot \frac{1}{4} = \frac{77}{18}.$$

Могли смо применити и формулу

$$E(X - 1) = E(X) - E(1) = E(X) - 1 = \frac{95}{18} - 1 = \frac{77}{18}.$$

Група 3

1. (5 поена) Израчунати површину фигуре ограничену кривама

$$y = (x-2)^2,\ y = x+4.$$

2. (5 поена) Наћи партикуларно решење диференцијалне једначине $y'(2x^2+3)+4xy = 6x^2+9$ са почетним условом $y(0)=3$.
3. (5 поена) Наћи опште решење диференцијалне једначине $y'' = 2\sqrt{y'}\sin x$.
4. (5 поена) У четири истоветне кутије налазе се куглице истих димензија, али различитих боја: у првој су 2 беле и 3 жуте, у другој 3 беле и 2 зелене, у трећој 4 беле, 1 жута и 1 зелена и у четвртој 2 жуте и 2 зелене. На случајан начин се бира кутија и из ње извлаче две куглице одједном. Одредити вероватноћу да је изучена једна бела и једна зелена.
5. (5 поена) Нека је дата случајна величина X која зависи од параметра

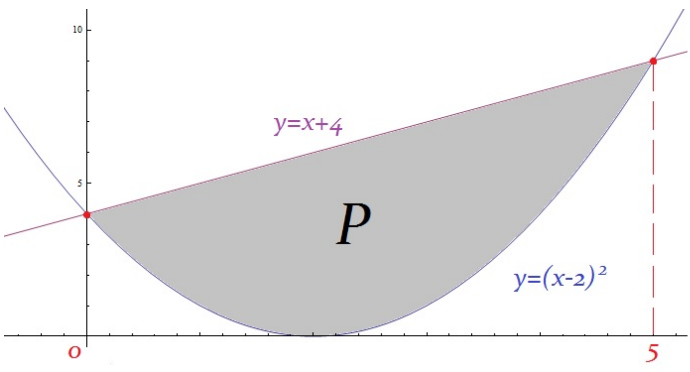
$$X : \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ a^2 - \frac{1}{4}a & \frac{1}{4} & a & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(а) Одредити параметар a;
(б) Одредити $E(X)$;
(в) Одредити $E(X-1)$.

РЕШЕЊА

1. Пресечне тачке графика функција $y=(x-2)^2$ и $y=x+4$ су решења једначине $(x-2)^2 = x+4$, тј. $x^2-5x=0$. Решења ове једначине су $x=0$ и $x=5$ што ће бити границе интеграла. Треба још видети у датом интервалу који је график "горе", а који "доле", што видимо са слике. Тражена површина је

$$P = \int_0^5 (x+4-(x-2)^2)\mathrm{d}x = \int_0^5(-x^2+5x)\mathrm{d}x = \frac{-x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}\bigg|_0^5 = \frac{-5^3}{3}+\frac{5\cdot 5^2}{2} - 0 = \frac{125}{6}.$$



2. Дата једначина је линеарна диференцијална једначина првог реда. Поделимо је са $2x^2+3$. Тада једначина постаје

$$y' + \frac{4x}{2x^2+3}y = 3,$$

па је

$$p(x) = \frac{4x}{2x^2+3},\ q(x) = 3.$$

Одредимо, најпре,

$$\int p(x)\mathrm{d}x = \int \frac{4x}{2x^2+3}\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} t = 2x^2+3 \\ \mathrm{d}t = 4x\mathrm{d}x \end{bmatrix} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| = \ln|2x^2+3| = \ln(2x^2+3),$$

Јер је $2x^2+3>0$, па је $|2x^2+3| = 2x^2+3$. Опште решење дате линеарне једначине је

$$\begin{aligned} y &= e^{-\ln(2x^2+3)}\left(c + \int 3\cdot e^{\ln(2x^2+3)}\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{2x^2+3}\left(c + \int 3(2x^2+3)\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{2x^2+3}\left(c+2x^3+9x\right), \quad c\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Још остаје да нађемо партикуларно решење које задовољава услов $y(0)=1$. То решавамо убацивањем $x=0$ и $y=1$ у опште решење.

$$3 = \frac{1}{2\cdot 0^2+3}\left(c+2\cdot x^3+9\cdot 0\right),$$

одакле је $c=9$, па је тражено партикуларно решење

$$y = \frac{1}{2x^2+3}\left(9+2x^3+9x\right).$$

3. Приметимо да се у датој једначини не појављује y (већ само изводи y', y'' и променљива x), па можемо увести смену $z=y'$, одакле је $z'=y''$. Увођењем смене добија се диференцијална једначина која раздваја променљиве.

$$\begin{aligned} z' &= 2\sqrt{z}\sin x \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} &= 2\sqrt{z}\sin x \\ \frac{\mathrm{d}z}{2\sqrt{z}} &= \sin x\mathrm{d}x \\ \int\frac{\mathrm{d}z}{2\sqrt{z}} &= \int \sin x\mathrm{d}x \\ \sqrt{z} &= -\cos x + c \\ z &= (-\cos x + c)^2 \\ z &= \cos^2 x - 2c\cos x + c^2. \end{aligned}$$

Остаје још да вратимо смену $y'=z$, тј. $y=\int z\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned} y &= \int(\cos^2 x - 2c\cos x + c^2)\mathrm{d}x \\ &= \int\left(\frac{1+\cos 2x}{2} - 2c\cos x + c^2\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x - 2c\sin x + c^2x + d, \quad c,d\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

4. Означимо са A догађај да је извучена једна зелена и једна бела куглица. Како вероватноћа догађаја A зависи од тога из које се кутије извлаче куглице, означимо са H_1, H_2, H_3 и H_4 хипотезе да се куглица извуче из прве, друге, треће односно четврте кутије. На основу формуле тоталне вероватноће је

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3) + P(H_4)P(A|H_4).$$

Остаје још да израчунамо вероватноће које се појављују у претходној формули. Како насумице бирамо кутију, то је

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = P(H_4) = \frac{1}{4}.$$

Даље, вероватноћа $P(A|H_2)$ је вероватноћа да извучемо једну белу и једну зелену куглицу из друге кутије, а то је

$$P(A|H_2) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{3 \cdot 2}{\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}} = \frac{3}{5}.$$

Слично,

$$P(A|H_3) = \frac{\binom{4}{1}\binom{1}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{4 \cdot 1}{\frac{6\cdot 5}{2}} = \frac{4}{15}.$$

Како је из прве и четврте кутије немогуће извући једну белу и једну зелену куглицу (јер у првој кутији нема зелених, а у четвртој нема белих), то је

$$P(A|H_1) = P(A|H_4) = 0.$$

Коначно,

$$P(A) = \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{15} + \frac{1}{4} \cdot 0 = \frac{13}{60}.$$

5. а) Да би функција расподеле била добро дефинисана, сума вероватноћа мора да буде 1 тј.

$$a^2 - \frac{1}{4}a + \frac{1}{4} + a + \frac{1}{2} = 1$$

$$a^2 + \frac{3}{4}a - \frac{1}{4} = 0$$

Решавајући ову једначину, добијамо да је $a = -1$ или $a = \frac{1}{4}$, али како вероватноће морају бити бројеви у интервалу $[0,1]$, то једино може бити $a = \frac{1}{4}$, па наша функција расподеле изгледа овако:

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

б)

$$E(X) = 1 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{1}{4} + 5 \cdot \frac{1}{4} + 7 \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{2}.$$

в) Приметимо да $X - 1$ има расподелу

$$X - 1 : \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

па је

$$E(X-1) = 0 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 6 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{2}.$$

Могли смо применити и формулу

$$E(X-1) = E(X) - E(1) = E(X) - 1 = \frac{11}{2} - 1 = \frac{9}{2}.$$

РЕШЕЊА ЈАНУАРСКОГ РОКА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 20.01.2020.
Група 1

1. (8 п) Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n}$.
2. (8 п) Испитати монотоност и наћи екстремне вредности функције $y = x - 2\mathrm{arctg}\frac{x-1}{x+1}$.
3. (8 п) Израчунати вредност интеграла $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x \cos x}{2\sin^2 x - 5\cos^2 x} \mathrm{d}x$.
4. (8 п) Наћи опште решење диференцијалне једначине $xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y$.
5. (8 п) У измишљеном граду Мордор у току дана може бити кишовито или сунчано време. Ако је дан сунчан, вероватноћа да ће следећег дана падати киша је $0,2$, а ако је дан кишовит, вероватноћа да ће следећег дана бити сунчано је $0,4$. Ако је у петак падала киша, одредити вероватноћу да ће у недељу бити сунчано време.
6. а) (5 п) Дати дефиницију асимптота функције и како се налазе.
б) (5 п) Наћи косе асимптоте функције $y = x - 2\mathrm{arctg}\frac{x-1}{x+1}$.
7. (10 п) Математичко очекивање дискретне и непрекидне случајне променљиве и особине.

РЕШЕЊА

1. Означимо $a_n = n^2 e^{-n} = \frac{n^2}{e^n}$. Како је

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{e^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}}{e} = \frac{1}{e} < 1,$$

то дати ред конвергира по Кошијевом критеријуму.

2. Домен дате функције је $\mathcal{D} = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. Први извод функције је

$$y' = 1 - 2 \cdot \frac{\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}}{1 + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} = 1 - 2 \cdot \frac{2}{x^2 + 2x + 1 + x^2 - 2x + 1} = 1 - \frac{2}{x^2+1} = \frac{x^2-1}{x^2+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2+1}.$$

Како је $x^2 + 1 > 0$ за свако $x \in \mathbb{R}$, то знак првог извода зависи само од $(x-1)(x+1)$,

		-1		1	
$x-1$	$-$		$+$		$+$
$x+1$	$-$		$-$		$+$
y'	$+$		$-$		$+$

па закључујемо да је $y' < 0$ за $x \in (-1, 1)$, $y' > 0$ за $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ и $y' = 0$ за $x = 1$. Дакле, y опада на $(-1, 1)$, расте на $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ и достиже локални минимум у $x = 1$.

3.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x\cos x}{2\sin^2 x - 5\cos^2 x}\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x\cos x}{2 - 2\cos^2 x - 5\cos^2 x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x\cos x}{2 - 7\cos^2 x}\mathrm{d}x \\
&= \begin{bmatrix} t = \cos x \\ \mathrm{d}t = -\sin x\mathrm{d}x \\ \sin x\mathrm{d}x = (-1)\mathrm{d}t \\ x = 0 \longrightarrow t = 1 \\ x = \frac{\pi}{4} \longrightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \\
&= -\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{t}{2-7t^2}\mathrm{d}t \\
&= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{t}{2-7t^2}\mathrm{d}t \\
&= \begin{bmatrix} p = 2 - 7t^2 \\ \mathrm{d}p = -14t\mathrm{d}t \\ t\mathrm{d}t = -\frac{1}{14}\mathrm{d}p \\ t = \frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow p = -\frac{3}{2} \\ t = 1 \longrightarrow p = -5 \end{bmatrix} \\
&= -\frac{1}{14}\int_{-\frac{3}{2}}^{-5} \frac{\mathrm{d}p}{p} \\
&= -\frac{1}{14}\ln|p|\Big|_{-\frac{3}{2}}^{-5} \\
&= -\frac{1}{14}\ln 5 + \frac{1}{14}\ln\frac{3}{2} \\
&= -\frac{1}{14}\ln\frac{10}{3}
\end{aligned}$$

4. Дата једначина $xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y$ је хомогена диференцијална једначина првог реда. Поделимо је са x. Добијамо

$$y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x},$$

па можемо увести смену $z = \frac{y}{x}$, $y = zx$, $y' = z + z'x$ након које дата једначина постаје једначина која раздваја променљиве.

$$\begin{aligned}
z + z'x &= e^z + z \\
z'x &= e^z \\
e^{-z}z' &= \frac{1}{x} \\
e^{-z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{x} \\
e^{-z}\mathrm{d}z &= \frac{1}{x}\mathrm{d}x \\
\int e^{-z}\mathrm{d}z &= \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x \\
-e^{-z} &= \ln|x| + c
\end{aligned}$$

Када вратимо смену, добијамо да је опште решење дате једначине

$$-e^{-\frac{y}{x}} = \ln|x| + c, \ c \in \mathbb{R}.$$

5. Означимо са A догађај да је у недељу сунчано време. Нека су H_1 и H_2 хипотезе да је у суботу било сунчано односно да је падала киша. Тада је тражена вероватноћа $P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2)$. Потребно је још да одредимо ове четири вероватноће. Како је у петак падала киша, то је

$$P(H_1) = 0,4, \quad P(H_2) = 0,6.$$

Слично, имамо и да је

$$P(A|H_1) = 0,8, \quad P(A|H_2) = 0,4.$$

Коначно, тражена вероватноћа је

$$P(A) = 0,4 \cdot 0,8 + 0,6 \cdot 0,4 = 0,56.$$

6. а) Видети у уџбенику.
б) Домен дате функције је $\mathcal{D} = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. Косе асимптоте тражимо помоћу формула

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{x - 2\mathrm{arctg}\frac{x-1}{x+1}}{x} \\ &= \lim_{x\to\infty} \left(1 - 2 \cdot \frac{\mathrm{arctg}\frac{x-1}{x+1}}{x}\right) \\ &= \lim_{x\to\infty} \left(1 - 2 \cdot \frac{\mathrm{arctg}1}{x}\right) \\ &= \lim_{x\to\infty} \left(1 - 2 \cdot \frac{\frac{\pi}{4}}{x}\right) \\ &= 1 - 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) \\ &= \lim_{x\to\infty} \left(x - 2\mathrm{arctg}\frac{x-1}{x+1} - x\right) \\ &= \lim_{x\to\infty} (-2\mathrm{arctg}1) \\ &= -2 \cdot \frac{\pi}{4} \\ &= -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Тражена коса асимптота је права $y = kx + n = x - \frac{\pi}{2}$.
7. Видети у уџбенику.

Група 2

1. (8 п) Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)2^{2n}}{n \cdot 5^{n+2}}$.

2. (8 п) Испитати монотоност и наћи екстремне вредности функције $y = x - 4\text{arctg}\frac{x-2}{x+2}$.

3. (8 п) Израчунати вредност интеграла $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x - 3\cos^2 x} \mathrm{d}x$.

4. (8 п) Наћи опште решење диференцијалне једначине $y' = \frac{3x^2}{2y + \sin y}$.

5. (8 п) У измишљеном граду Мордор у току дана може бити кишовито или сунчано време. Ако је дан сунчан, вероватноћа да ће следећег дана падати киша је $0,3$, а ако је дан кишовит, вероватноћа да ће следећег дана бити сунчано је $0,5$. Ако је у суботу падала киша, одредити вероватноћу да ће у понедељак бити сунчано време.

6. а) (5 п) Дати дефиницију асимптота функције и како се налазе.

б) (5 п) Наћи косе асимптоте функције $y = x - 4\text{arctg}\frac{x-2}{x+2}$.

7. (10 п) Математичко очекивање дискретне и непрекидне случајне променљиве и особине.

РЕШЕЊА

1. Означимо $a_n = \frac{(n+1)2^{2n}}{n \cdot 5^{n+2}}$. Како је

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n+1)2^{2n}}{n \cdot 5^{n+2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n+1} \cdot 2^2}{\sqrt[n]{n} \cdot 5 \cdot \sqrt[n]{5^2}} = \frac{4}{5} < 1,$$

то дати ред конвергира по Кошијевом критеријуму.

2. Домен дате функције је $\mathcal{D} = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$. Први извод функције је

$$y' = 1 - 4 \cdot \frac{\frac{x+2-(x-2)}{(x+2)^2}}{1 + \left(\frac{x-2}{x+2}\right)^2} = 1 - 4 \cdot \frac{4}{x^2 + 4x + 4 + x^2 - 4x + 4} = 1 - \frac{8}{x^2+4} = \frac{x^2-4}{x^2+4} = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2+4}.$$

Како је $x^2 + 4 > 0$ за свако $x \in \mathbb{R}$, то знак првог извода зависи само од $(x-2)(x+2)$,

	-2		2
$x-2$	$-$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	$-$	$+$
y'	$+$	$-$	$+$

па закључујемо да је $y' < 0$ за $x \in (-2, 2)$, $y' > 0$ за $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ и $y' = 0$ за $x = 2$. Дакле, y опада на $(-2, 2)$, расте на $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ и достиже локални минимум у $x = 2$.

3.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x - 3\cos^2 x}\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x \cos x}{1-\cos^2 x - 3\cos^2 x}\mathrm{d}x\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x \cos x}{1-4\cos^2 x}\mathrm{d}x\\
&= \begin{bmatrix} t=\cos x\\ \mathrm{d}t = -\sin x \mathrm{d}x\\ \sin x \mathrm{d}x = (-1)\mathrm{d}t\\ x=0 \longrightarrow t=1\\ x=\frac{\pi}{4} \longrightarrow t=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\\
&= -\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{t}{1-4t^2}\mathrm{d}t\\
&= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{t}{1-4t^2}\mathrm{d}t\\
&= \begin{bmatrix} p=1-4t^2\\ \mathrm{d}p=-8t\mathrm{d}t\\ t\mathrm{d}t = -\frac{1}{8}\mathrm{d}p\\ t=\frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow p=-1\\ t=1 \longrightarrow p=-3\end{bmatrix}\\
&= -\frac{1}{8}\int_{-1}^{-3}\frac{\mathrm{d}p}{p}\\
&= -\frac{1}{8}\ln|p|\Big|_{-1}^{-3}\\
&= -\frac{1}{8}\ln 3 + \frac{1}{8}\ln 1\\
&= -\frac{1}{8}\ln 3
\end{aligned}$$

4. Дата једначина $y' = \frac{3x^2}{2y+\sin y}$ је диференцијална једначина првог реда која раздваја промењљиве.

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{3x^2}{2y+\sin y}\\
(2y+\sin y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 3x^2\\
(2y+\sin y)\mathrm{d}y &= 3x^2\mathrm{d}x\\
\int (2y+\sin y)\mathrm{d}y &= \int 3x^2 \mathrm{d}x\\
y^2 - \cos y &= x^3 + c, \quad c\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

5. Означимо са A догађај да је у понедељак сунчано време. Нека су H_1 и H_2 хипотезе да је у недељу било сунчано односно да је падала киша. Тада је тражена вероватноћа $P(A) = P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)$. Потребно је још да одредимо ове четири вероватноће. Како је у суботу падала киша, то је

$$P(H_1) = 0,5, \quad P(H_2) = 0,5.$$

Слично, имамо и да је

$$P(A|H_1) = 0,7, \quad P(A|H_2) = 0,5.$$

Коначно, тражена вероватноћа је

$$P(A) = 0,5 \cdot 0,7 + 0,5 \cdot 0,5 = 0,6.$$

6. а) Видети у уџбенику.
б) Домен дате функције је $\mathcal{D} = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$. Косе асимптоте тражимо помоћу формула

$$\begin{aligned}
k &= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x - 4\mathrm{arctg}\frac{x-2}{x+2}}{x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \left(1 - 4 \cdot \frac{\mathrm{arctg}\frac{x-2}{x+2}}{x}\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} \left(1 - 4 \cdot \frac{\mathrm{arctg}1}{x}\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} \left(1 - 4 \cdot \frac{\frac{\pi}{4}}{x}\right) \\
&= 1 - 0 \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n &= \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) \\
&= \lim_{x\to\infty} \left(x - 4\mathrm{arctg}\frac{x-2}{x+2} - x\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} (-4\mathrm{arctg}1) \\
&= -4 \cdot \frac{\pi}{4} \\
&= -\pi
\end{aligned}$$

Тражена коса асимптота је права $y = kx + n = x - \pi$.
7. Видети у уџбенику.

Група 3

1. (8 п) Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{3n+1}}{3n\cdot 4^n}$.

2. (8 п) Испитати монотоност и наћи екстремне вредности функције $y = x - 6\mathrm{arctg}\frac{x-3}{x+3}$.

3. (8 п) Израчунати вредност интеграла $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{3\sin x\cos x}{\sin^2 x-2\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

4. (8 п) Наћи опште решење диференцијалне једначине $y(x^2-1)y' = -x(y^2-1)$.

5. (8 п) У измишљеном граду Мордор у току дана може бити кишовито или сунчано време. Ако је дан сунчан, вероватноћа да ће следећег дана падати киша је $0,4$, а ако је дан кишовит, вероватноћа да ће следећег дана бити сунчано је $0,6$. Ако је у недељу падала киша, одредити вероватноћу да ће у уторак бити сунчано време.

6. а) (5 п) Дати дефиницију асимптота функције и како се налазе.

б) (5 п) Наћи косе асимптоте функције $y = x - 6\mathrm{arctg}\frac{x-3}{x+3}$.

7. (10 п) Математичко очекивање дискретне и непрекидне случајне променљиве и особине.

РЕШЕЊА

1. Означимо $a_n = \frac{2^{3n+1}}{3n\cdot 4^n}$. Како је

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^{3n+1}}{3n\cdot 4^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^3\cdot\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{3n}\cdot 4} = \frac{8}{4} = 2 > 1,$$

то дати ред дивергира по Кошијевом критеријуму.

2. Домен дате функције је $\mathcal{D} = (-\infty,-3)\cup(-3,+\infty)$. Први извод функције је

$$y' = 1-6\cdot\frac{\frac{x+3-(x-3)}{(x+3)^2}}{1+\left(\frac{x-3}{x+3}\right)^2} = 1-6\cdot\frac{6}{x^2+6x+9+x^2-6x+9} = 1-\frac{18}{x^2+9} = \frac{x^2-9}{x^2+9} = \frac{(x-3)(x+3)}{x^2+9}.$$

Како је $x^2+9>0$ за свако $x\in\mathbb{R}$, то знак првог извода зависи само од $(x-3)(x+3)$,

	-3	3	
$x-3$	$-$	$+$	$+$
$x+3$	$-$	$-$	$+$
y'	$+$	$-$	$+$

па закључујемо да је $y'<0$ за $x\in(-3,3)$, $y'>0$ за $x\in(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$ и $y'=0$ за $x=3$. Дакле, y опада на $(-3,3)$, расте на $(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$ и достиже локални минимум у $x=3$.

3.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3\sin x\cos x}{\sin^2 x - 2\cos^2 x}\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3\sin x\cos x}{1-\cos^2 x - 2\cos^2 x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3\sin x\cos x}{1 - 3\cos^2 x}\mathrm{d}x \\
&= \begin{bmatrix} t = \cos x \\ \mathrm{d}t = -\sin x\mathrm{d}x \\ \sin x\mathrm{d}x = (-1)\mathrm{d}t \\ x = 0 \longrightarrow t = 1 \\ x = \frac{\pi}{4} \longrightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \\
&= -\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{3t}{1-3t^2}\mathrm{d}t \\
&= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{3t}{1-3t^2}\mathrm{d}t \\
&= \begin{bmatrix} p = 1 - 3t^2 \\ \mathrm{d}p = -6t\mathrm{d}t \\ t\mathrm{d}t = -\frac{1}{6}\mathrm{d}p \\ t = \frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow p = -\frac{1}{2} \\ t = 1 \longrightarrow p = -2 \end{bmatrix} \\
&= -\frac{1}{6}\int_{-\frac{1}{2}}^{-2} \frac{3\mathrm{d}p}{p} \\
&= -\frac{1}{2}\ln|p|\Big|_{-\frac{1}{2}}^{-2} \\
&= -\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} \\
&= -\frac{1}{2}\ln 4 \\
&= -\ln 2
\end{aligned}$$

4. Дата једначина $y(x^2-1)y' = -x(y^2-1)$ је диференцијална једначина првог реда која раздваја променљиве.

$$\begin{aligned}
y(x^2-1)y' &= -x(y^2-1) \\
\frac{y}{y^2-1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{-x}{x^2-1} \\
\frac{y}{y^2-1}\mathrm{d}y &= \frac{-x}{x^2-1}\mathrm{d}x \\
\int \frac{y}{y^2-1}\mathrm{d}y &= \int \frac{-x}{x^2-1}\mathrm{d}x \\
\int \frac{2y}{y^2-1}\mathrm{d}y &= \int \frac{-2x}{x^2-1}\mathrm{d}x \\
\ln|y^2-1| &= -\ln|x^2-1| + c,\ \ c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

5. Означимо са A догађај да је у уторак сунчано време. Нека су H_1 и H_2 хипотезе да је у понедељак било сунчано односно да је падала киша. Тада је тражена вероватноћа $P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2)$. Потребно је још да одредимо ове четири вероватноће. Како је у недељу падала киша, то је

$$P(H_1) = 0,6, \quad P(H_2) = 0,4.$$

Слично, имамо и да је

$$P(A|H_1) = 0,6, \quad P(A|H_2) = 0,6.$$

Коначно, тражена вероватноћа је

$$P(A) = 0,6 \cdot 0,6 + 0,4 \cdot 0,6 = 0,6.$$

6. а) Видети у уџбенику.
б) Домен дате функције је $\mathcal{D} = (-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$. Косе асимптоте тражимо помоћу формула

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{x - 6\mathrm{arctg}\frac{x-3}{x+3}}{x} \\ &= \lim_{x\to\infty} \left(1 - 6 \cdot \frac{\mathrm{arctg}\frac{x-3}{x+3}}{x}\right) \\ &= \lim_{x\to\infty} \left(1 - 6 \cdot \frac{\mathrm{arctg}1}{x}\right) \\ &= \lim_{x\to\infty} \left(1 - 6 \cdot \frac{\frac{\pi}{4}}{x}\right) \\ &= 1 - 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) \\ &= \lim_{x\to\infty} \left(x - 6\mathrm{arctg}\frac{x-3}{x+3} - x\right) \\ &= \lim_{x\to\infty} (-6\mathrm{arctg}1) \\ &= -6 \cdot \frac{\pi}{4} \\ &= -\frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

Тражена коса асимптота је права $y = kx + n = x - \frac{3\pi}{2}$.
7. Видети у уџбенику.

РЕШЕЊА ФЕБРУАРСКОГ РОКА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 05.02.2020.
Група 1

1. (8 п) Израчунати $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{2x}+x\right)^{\frac{1}{x}}$.
2. (8 п) Испитати конвексност и наћи превојне тачке функције $y = x\cdot \operatorname{arctg}(3\sqrt{x})$.
3. (8 п) Израчунати $\int (x^2-3x+2)e^{-x}\mathrm{d}x$.
4. (8 п) Наћи опште решење диференцијалне једначине $y''-6y'+5y = 17e^x\sin x$.
5. (8 п) Из шпила од 52 карте се извлаче две карте одједном. Ако је X случајна величина која представља број извучених црвених карата, одредити расподелу од X, $E(X)$ и $D(X)$.
6. а) (5 п) Како гласи Кошијев критеријум за конвергенцију редова?
б) (5 п) Користећи Кошијев критеријум испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-2}{n}\right)^{n^2}$.
7. (10 п) Дисперзија дискретне и непрекидне случајне променљиве, дефиниција и примери.

РЕШЕЊА

1.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}(e^{2x}+x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to\infty} e^{\ln(e^{2x}+x)^{\frac{1}{x}}}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(e^{2x}+x)}{x}}\\
&\overset{\text{L.P.}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{2e^{2x}+1}{e^{2x}+x}}{1}}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2e^{2x}+1}{e^{2x}+x}}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{e^{2x}}}{1+\frac{x}{e^{2x}}}}\\
&= e^2
\end{aligned}$$

2. Домен функције је $\mathcal{D}=[0,+\infty)$. Израчунајмо први и други извод дате функције.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \operatorname{arctg}(3\sqrt{x}) + x\cdot\frac{\frac{3}{2\sqrt{x}}}{1+9x} = \operatorname{arctg}(3\sqrt{x})+\frac{3\sqrt{x}}{2+18x},\\
f''(x) &= \frac{\frac{3}{2\sqrt{x}}}{1+9x}+\frac{\frac{3}{2\sqrt{x}}\cdot(2+18x)-18\cdot 3\sqrt{x}}{(2+18x)^2}\cdot\frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\\
&= \frac{3}{\sqrt{x}(2+18x)}+\frac{6+54x-108x}{2\sqrt{x}(2+18x)^2}\\
&= \frac{3\cdot 2(2+18x)+6-54x}{8\sqrt{x}(1+9x)^2}\\
&= \frac{18+54x}{8\sqrt{x}(1+9x)^2}\\
&= \frac{9\cdot(1+3x)}{4\sqrt{x}(1+9x)^2}.
\end{aligned}$$

Како је $\frac{9}{4\sqrt{x}(1+9x)^2}>0$ за свако $x\in[0,+\infty)$, то знак другог извода зависи само од израза $(1+3x)$.

	$-\frac{1}{3}$		0
$1+3x$	$-$	$+$	$+$
$f''(x)$	/////////	/////////	$+$

Како је $\mathcal{D} = [0, +\infty)$, то је други извод позитиван на целом домену, тј.

$$f''(x) > 0 \text{ за } x \in [0, +\infty),$$

па закључујемо да је функција конвексна на домену и нема превојних тачака.

3.

$$\begin{aligned}
\int (x^2 - 3x + 2)e^{-x} \mathrm{d}x &= \begin{bmatrix} u = x^2 - 3x + 2 & \mathrm{d}v = e^{-x}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = (2x-3)\mathrm{d}x & v = -e^{-x} \end{bmatrix} \\
&= -(x^2 - 3x + 2)e^{-x} + \int (2x-3)e^{-x}\mathrm{d}x \\
&= \begin{bmatrix} u = 2x - 3 & \mathrm{d}v = e^{-x}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = 2\mathrm{d}x & v = -e^{-x} \end{bmatrix} \\
&= -(x^2 - 3x + 2)e^{-x} - (2x-3)e^{-x} + 2\int e^{-x}\mathrm{d}x \\
&= -(x^2 - 3x + 2)e^{-x} - (2x-3)e^{-x} - 2e^{-x} + c \\
&= -(x^2 - x + 1)e^{-x} + c
\end{aligned}$$

4. Најпре нађимо решење хомогене једначине $y'' - 6y' + 5y = 0$. Нуле карактеристичне једначине $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$ су $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$, па је $y_h = c_1e^x + c_2e^{5x}$.
Партикуларно решење је облика $y_p = e^x(A\cos x + B\sin x)$. Израчунајмо први и други извод партикуларног решења и убацимо га у полазну једначину.

$$y_p' = e^x((A+B)\cos x + (B-A)\sin x),$$

$$y_p'' = e^x(-2A\sin x + 2B\cos x),$$

па је

$$\begin{aligned}
&e^x(-2A\sin x + 2B\cos x) \\
&- 6e^x((A+B)\cos x + (B-A)\sin x) \\
&+ 5e^x(A\cos x + B\sin x) = 17e^{2x}\sin x
\end{aligned}$$

$$((-A-4B)\cos x + (4A-B)\sin x)e^x = 17e^x\sin x$$

односно након сређивања

$$(-A-4B)\cos x + (4A-B)\sin x = 17\sin x$$

па када изједначимо коефицијенте уз $\sin x$ и $\cos x$ са леве и десне стране добијемо систем једначина

$$\begin{aligned}
-A - 4B &= 0 \\
4A - B &= 17
\end{aligned}$$

чије је решење $A = 4$, $B = -1$. Добијамо да је партикуларно решење је

$$y_p = e^x\left(4\cos x - \sin x\right).$$

Коначно, опште решење дате једначине је

$$y = y_h + y_p = c_1 e^x + c_2 e^{5x} + e^x\left(4\cos x - \sin x\right), \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

5. Приметимо да $X \in \{0,1,2\}$. Како је

$$P\{X=0\} = \frac{\binom{26}{2}}{\binom{52}{2}} = \frac{\frac{26\cdot 25}{2\cdot 1}}{\frac{52\cdot 51}{2\cdot 1}} = \frac{25}{102}$$

$$P\{X=1\} = \frac{\binom{26}{1}\cdot\binom{26}{1}}{\binom{52}{2}} = \frac{26\cdot 26}{\frac{52\cdot 51}{2\cdot 1}} = \frac{26}{51}$$

$$P\{X=2\} = \frac{\binom{26}{2}}{\binom{52}{2}} = \frac{\frac{26\cdot 25}{2\cdot 1}}{\frac{52\cdot 51}{2\cdot 1}} = \frac{25}{102}$$

то X има расподелу

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{26}{51} & \frac{26}{51} & \frac{25}{102} \end{pmatrix},$$

а X^2 има расподелу

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ \frac{26}{51} & \frac{26}{51} & \frac{25}{102} \end{pmatrix},$$

па је

$$E(X) = 0\cdot\frac{25}{102} + 1\cdot\frac{26}{51} + 2\cdot\frac{25}{102} = 1,$$

$$E(X^2) = 0\cdot\frac{25}{102} + 1\cdot\frac{26}{51} + 4\cdot\frac{25}{102} = \frac{76}{51},$$

$$D(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{76}{51} - 1^2 = \frac{25}{51}.$$

6. а) Видети у уџбенику.

б) Означимо $a_n = \left(\frac{n-2}{n}\right)^{n^2}$. Тада је

$$\begin{aligned} r &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-2}{n}\right)^{n^2}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-2}{n}\right)^{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{-\frac{n}{2}}\right)^{\left(-\frac{n}{2}\right)\cdot\left(-\frac{2}{n}\right)\cdot n} \\ &= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{-2n}{n}} \\ &= e^{-2} \\ &= \frac{1}{e^2} < 1, \end{aligned}$$

па дати ред конвергира по Кошијевом критеријуму.

7. Видети у уџбенику.

Група 2

1. (8 п) Израчунати $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{3x}+x\right)^{\frac{1}{x}}$.
2. (8 п) Испитати конвексност и наћи превојне тачке функције $y = x\cdot \operatorname{arctg}(2\sqrt{x})$.
3. (8 п) Израчунати $\int(2x^2+1)e^{-x}\mathrm{d}x$.
4. (8 п) Наћи опште решење диференцијалне једначине $y''+2y'-8y = 25xe^x$.
5. (8 п) Из шпила од 52 карте се извлаче две карте одједном. Ако је X случајна величина која представља број извучених херчева, одредити расподелу од X, $E(X)$ и $D(X)$.
6. а) (5 п) Како гласи Кошијев критеријум за конвергенцију редова?
б) (5 п) Користећи Кошијев критеријум испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-2}{n}\right)^{n^2}$.
7. (10 п) Дисперзија дискретне и непрекидне случајне променљиве, дефиниција и примери.

РЕШЕЊА

1.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(e^{3x}+x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to\infty} e^{\ln(e^{3x}+x)^{\frac{1}{x}}}\\ &= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(e^{3x}+x)}{x}}\\ &\overset{\text{L.P.}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{3e^{3x}+1}{e^{3x}+x}}{1}}\\ &= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3e^{3x}+1}{e^{3x}+x}}\\ &= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3+\frac{1}{e^{3x}}}{1+\frac{x}{e^{3x}}}}\\ &= e^3\end{aligned}$$

2. Домен функције је $\mathcal{D} = [0,+\infty)$. Израчунајмо први и други извод дате функције.

$$\begin{aligned}f'(x) &= \operatorname{arctg}(2\sqrt{x}) + x\cdot\frac{\frac{2}{2\sqrt{x}}}{1+4x} = \operatorname{arctg}(2\sqrt{x}) + \frac{\sqrt{x}}{1+4x},\\ f''(x) &= \frac{\frac{2}{2\sqrt{x}}}{1+4x} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot(1+4x) - 4\cdot\sqrt{x}}{(1+4x)^2}\cdot\frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x}(1+4x)} + \frac{1+4x-8x}{2\sqrt{x}(1+4x)^2}\\ &= \frac{2+8x+1-4x}{2\sqrt{x}(1+4x)^2}\\ &= \frac{3+4x}{2\sqrt{x}(1+4x)^2}.\end{aligned}$$

Како је $\frac{1}{2\sqrt{x}(1+4x)^2} > 0$ за свако $x\in[0,+\infty)$, то знак другог извода зависи само од израза $(3+4x)$.

	$-\frac{3}{4}$		0	
$3+4x$	$-$		$+$	$+$
$f''(x)$	/////////		/////////	$+$

Како je $\mathcal{D}=[0,+\infty)$, то је други извод позитиван на целом домену, тј.

$$f''(x)>0 \text{ за } x\in[0,+\infty),$$

па закључујемо да је функција конвексна на домену и нема превојних тачака.

3.

$$\begin{aligned}\int(2x^2+1)e^{-x}\mathrm{d}x &= \begin{bmatrix} u=2x^2+1 & \mathrm{d}v=e^{-x}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u=4x\mathrm{d}x & v=-e^{-x}\end{bmatrix}\\ &= -(2x^2+1)e^{-x}+\int 4xe^{-x}\mathrm{d}x\\ &= \begin{bmatrix} u=4x & \mathrm{d}v=e^{-x}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u=4\mathrm{d}x & v=-e^{-x}\end{bmatrix}\\ &= -(2x^2+1)e^{-x}-4xe^{-x}+4\int e^{-x}\mathrm{d}x\\ &= -(2x^2+1)e^{-x}-4xe^{-x}-4e^{-x}+c\\ &= -(2x^2+4x+5)e^{-x}+c\end{aligned}$$

4. Најпре нађимо решење хомогене једначине $y''+2y'-8y=0$. Нуле карактеристичне једначине $\lambda^2+2\lambda-8=0$ су $\lambda_1=2,\ \lambda_2=-4$, па је $y_h=c_1e^{2x}+c_2e^{-4x}$.
Партикуларно решење је облика $y_p=e^x(Ax+B)$. Израчунајмо први и други извод партикуларног решења и убацимо га у полазну једначину.

$$y_p'=e^x(Ax+A+B),$$

$$y_p''=e^x(Ax+2A+B),$$

па је

$$e^x(Ax+2A+B)+2e^x(Ax+A+B)-8e^x(Ax+B)=25xe^x$$

$$(-5Ax-4A-5B)e^x=25x$$

односно након сређивања

$$-5Ax-4A-5B=25x$$

па када изједначимо коефицијенте уз x и 1 са леве и десне стране добијемо систем једначина

$$\begin{aligned}-5A&=25\\ -4A-5B&=0\end{aligned}$$

чије је решење $A=-5,\ B=4$. Добијамо да је партикуларно решење је

$$y_p=e^x\left(-5x+4\right).$$

Коначно, опште решење дате једначине је

$$y=y_h+y_p=c_1e^x+c_2e^{5x}+e^x\left(-5x+4\right),\ c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

5. Приметимо да $X \in \{0,1,2\}$. Како је

$$\begin{aligned}
P\{X=0\} &= \frac{\binom{39}{2}}{\binom{52}{2}} = \frac{\frac{39\cdot 38}{2\cdot 1}}{\frac{52\cdot 51}{2\cdot 1}} = \frac{19}{34}\\
P\{X=1\} &= \frac{\binom{39}{1}\cdot\binom{13}{1}}{\binom{52}{2}} = \frac{39\cdot 13}{\frac{52\cdot 51}{2\cdot 1}} = \frac{13}{34}\\
P\{X=2\} &= \frac{\binom{13}{2}}{\binom{52}{2}} = \frac{\frac{13\cdot 12}{2\cdot 1}}{\frac{52\cdot 51}{2\cdot 1}} = \frac{1}{17}
\end{aligned}$$

то X има расподелу

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{19}{34} & \frac{13}{34} & \frac{1}{17} \end{pmatrix},$$

а X^2 има расподелу

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ \frac{19}{34} & \frac{13}{34} & \frac{1}{17} \end{pmatrix},$$

па је

$$\begin{aligned}
E(X) &= 0\cdot\frac{19}{34} + 1\cdot\frac{13}{34} + 2\cdot\frac{1}{17} = \frac{1}{2},\\
E(X^2) &= 0\cdot\frac{19}{34} + 1\cdot\frac{13}{34} + 4\cdot\frac{1}{17} = \frac{21}{34},\\
D(X) = E(X^2) - E(X)^2 &= \frac{21}{34} - \frac{1}{4} = \frac{25}{68}.
\end{aligned}$$

6. а) Видети у уџбенику.

б) Означимо $a_n = \left(\frac{n-2}{n}\right)^{n^2}$. Тада је

$$\begin{aligned}
r &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}\\
&= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-2}{n}\right)^{n^2}}\\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-2}{n}\right)^{n}\\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{-\frac{n}{2}}\right)^{\left(-\frac{n}{2}\right)\cdot\left(-\frac{2}{n}\right)\cdot n}\\
&= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{-2n}{n}}\\
&= e^{-2}\\
&= \frac{1}{e^2} < 1,
\end{aligned}$$

па дати ред конвергира по Кошијевом критеријуму.

7. Видети у уџбенику.

Група 3

1. (8 п) Израчунати $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{4x}+x\right)^{\frac{1}{x}}$.
2. (8 п) Испитати конвексност и наћи превојне тачке функције $y = x\cdot \operatorname{arctg}(\sqrt{x})$.
3. (8 п) Израчунати $\int (x^2+x+1)e^{-x}\mathrm{d}x$.
4. (8 п) Наћи опште решење диференцијалне једначине $y'' + 2y' - 3y = 9x + 3$.
5. (8 п) Из шпила од 52 карте се извлаче две карте одједном. Ако је X случајна величина која представља број извучених краљева, одредити расподелу од X, $E(X)$ и $D(X)$.
6. а) (5 п) Како гласи Кошијев критеријум за конвергенцију редова?
б) (5 п) Користећи Кошијев критеријум испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-2}{n}\right)^{n^2}$.
7. (10 п) Дисперзија дискретне и непрекидне случајне промењиве, дефиниција и примери.

РЕШЕЊА

1.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}(e^{4x}+x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to\infty} e^{\ln(e^{4x}+x)^{\frac{1}{x}}}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(e^{4x}+x)}{x}}\\
&\overset{\text{L.P.}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{4e^{4x}+1}{e^{4x}+x}}{1}}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4e^{4x}+1}{e^{4x}+x}}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4+\frac{1}{e^{4x}}}{1+\frac{x}{e^{4x}}}}\\
&= e^4
\end{aligned}$$

2. Домен функције је $\mathcal{D} = [0, +\infty)$. Израчунајмо први и други извод дате функције.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \operatorname{arctg}(\sqrt{x}) + x\cdot\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+x} = \operatorname{arctg}(\sqrt{x}) + \frac{\sqrt{x}}{2(1+x)},\\
f''(x) &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+x} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot 2(1+x) - 2\cdot\sqrt{x}}{4(1+x)^2}\cdot\frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} + \frac{2+2x-4x}{8\sqrt{x}(1+x)^2}\\
&= \frac{4+4x+2-2x}{8\sqrt{x}(1+x)^2}\\
&= \frac{3+x}{4\sqrt{x}(1+x)^2}.
\end{aligned}$$

Како је $\frac{1}{4\sqrt{x}(1+x)^2} > 0$ за свако $x \in [0, +\infty)$, то знак другог извода зависи само од израза $(3+x)$.

	-3	0	
$3+x$	$-$	$+$	$+$
$f''(x)$	/////////	/////////	$+$

Како је $\mathcal{D} = [0, +\infty)$, то је други извод позитиван на целом домену, тј.

$$f''(x) > 0 \text{ за } x \in [0, +\infty),$$

па закључујемо да је функција конвексна на домену и нема превојних тачака.

3.

$$\begin{aligned}
\int (x^2+x+1)e^{-x}\mathrm{d}x &= \begin{bmatrix} u = x^2+x+1 & \mathrm{d}v = e^{-x}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = (2x+1)\mathrm{d}x & v = -e^{-x} \end{bmatrix} \\
&= -(x^2+x+1)e^{-x} + \int (2x+1)e^{-x}\mathrm{d}x \\
&= \begin{bmatrix} u = 2x+1 & \mathrm{d}v = e^{-x}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = 2\mathrm{d}x & v = -e^{-x} \end{bmatrix} \\
&= -(x^2+x+1)e^{-x} - (2x+1)e^{-x} + 2\int e^{-x}\mathrm{d}x \\
&= -(x^2+x+1)e^{-x} - (2x+1)e^{-x} - 2e^{-x} + c \\
&= -(x^2+3x+4)e^{-x} + c
\end{aligned}$$

4. Најпре нађимо решење хомогене једначине $y'' + 2y' - 3y = 0$. Нуле карактеристичне једначине $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$ су $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -3$, па је $y_h = c_1e^x + c_2e^{-3x}$.
Партикуларно решење је облика $y_p = Ax^2 + Bx + C$. Израчунајмо први и други извод партикуларног решења и убацимо га у полазну једначину.

$$y_p' = 2Ax + B,$$

$$y_p'' = 2A,$$

па је

$$2A + 2(2Ax+B) - 3(Ax^2+Bx+C) = 27x^2 + 9x + 3$$

$$-3Ax^2 + (4A-3B)x + 2A + 2B - 3C = 27x^2 + 9x + 3$$

па када изједначимо коефицијенте уз x^2, x и 1 са леве и десне стране добијемо систем једначина

$$\begin{aligned}
-3A &= 27 \\
4A - 3B &= 9 \\
2A + 2B - 3C &= 3
\end{aligned}$$

чије је решење $A = -9,\ B = -15,\ C = -17$. Добијамо да је партикуларно решење је

$$y_p = -9x^2 - 15x - 17.$$

Коначно, опште решење дате једначине је

$$y = y_h + y_p = c_1e^x + c_2e^{5x} - 9x^2 - 15x - 17,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

5. Приметимо да $X \in \{0,1,2\}$. Како је

$$\begin{aligned}
P\{X=0\} &= \frac{\binom{48}{2}}{\binom{52}{2}} = \frac{\frac{48\cdot 47}{2\cdot 1}}{\frac{52\cdot 51}{2\cdot 1}} = \frac{188}{221}\\
P\{X=1\} &= \frac{\binom{48}{1}\cdot\binom{4}{1}}{\binom{52}{2}} = \frac{48\cdot 4}{\frac{52\cdot 51}{2\cdot 1}} = \frac{32}{221}\\
P\{X=2\} &= \frac{\binom{4}{2}}{\binom{52}{2}} = \frac{\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}}{\frac{52\cdot 51}{2\cdot 1}} = \frac{1}{221}
\end{aligned}$$

то X има расподелу

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{188}{221} & \frac{32}{221} & \frac{1}{221} \end{pmatrix},$$

а X^2 има расподелу

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ \frac{188}{221} & \frac{32}{221} & \frac{1}{221} \end{pmatrix},$$

па је

$$\begin{aligned}
E(X) &= 0\cdot\frac{188}{221} + 1\cdot\frac{32}{221} + 2\cdot\frac{1}{221} = \frac{2}{13},\\
E(X^2) &= 0\cdot\frac{188}{221} + 1\cdot\frac{32}{221} + 4\cdot\frac{1}{221} = \frac{36}{221},\\
D(X) = E(X^2) - E(X)^2 &= \frac{36}{221} - \frac{4}{169} = \frac{400}{2873}.
\end{aligned}$$

6. а) Видети у уџбенику.

б) Означимо $a_n = \left(\frac{n-2}{n}\right)^{n^2}$. Тада је

$$\begin{aligned}
r &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}\\
&= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-2}{n}\right)^{n^2}}\\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-2}{n}\right)^{n}\\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{-\frac{n}{2}}\right)^{\left(-\frac{n}{2}\right)\cdot\left(-\frac{2}{n}\right)\cdot n}\\
&= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{-2n}{n}}\\
&= e^{-2}\\
&= \frac{1}{e^2} < 1,
\end{aligned}$$

па дати ред конвергира по Кошијевом критеријуму.

7. Видети у уџбенику.

РЕШЕЊА ЈУНСКОГ РОКА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 28.06.2020.

ЗАДАЦИ

1. (8 п) Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{(n+1)!}$.

2. (8 п) Испитати монотоност и наћи екстремуме функције $y = e^{x^3-9x^2+24x+1}$.

3. (8 п) Израчунати $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

4. (8 п) Наћи партикуларно решење диференцијалне једначине $y'' - 6y' + 8y = 4xe^{2x}$, са почетним условима $y(0) = 0,\ y(1) = 0$.

5. (8 п) На столу су три кутије. У првој кутији су 4 беле и 2 црне куглице, у другој 3 беле и 3 црне, а у трећој 2 беле и 4 црне куглице. Баца се коцкица да би се одабрала кутија. Уколико падне број 1 бира се прва кутија, уколико падне неки од бројева 2 или 3 бира се друга кутија, а уколико падне неки од преосталих бројева, бира се трећа кутија. Из изабране кутије се извлачи једна куглица.

(4 п) а) Одредити вероватноћу да је извучена бела куглица.

(4 п) б) Ако се зна да је извучена бела куглица, одредити вероватноћу да је из треће кутије.

6. (5 п) а) Дати дефиницију конвексности и конкавности функције.

(5 п) б) Испитати конвексност функције $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

7. (10 п) Линеарна диференцијална једначина другог реда са константним коефицијентима.

РЕШЕЊА

1. Означимо са $a_n = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{(n+1)!}$. Како је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{(n+2)!}}{\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{(n+1)!}} = \frac{\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{2}{3}}{(n+2)\cdot(n+1)!}}{\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{3}}{n+2} = 0 < 1,$$

то дати ред конвергира на основу Даламберовог критеријума.

2. Домен функције је $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Израчунајмо први извод дате функције

$$f'(x) = e^{x^3-9x^2+24x+1} \cdot (x^3 - 9x^2 + 24x + 1)' = 3(x^2 - 6x + 8)e^{x^3-9x^2+24x+1}.$$

Како је $e^{x^3-9x^2+24x+1}$ позитивно, знак нам зависи само од x^2-6x+8. Како је $x^2-6x+8 = (x-2)(x-4)$, имамо да је $f'(x) = 0$ за $x = 2$ и $x = 3$ па су то потенцијални екстремуми. Даље, видимо да је $f'(x) > 0$ за $x \in (-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$ и $f'(x) < 0$ за $x \in (2, 4)$, па коначно закључујемо да функција расте на $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$, опада на $(2, 4)$, $x = 2$ је локални максимум и $x = 4$ је локални минимум.

3.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x &= \int \frac{2\sin x\cos x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x \\
&= \begin{bmatrix} t=\cos x \\ \mathrm{d}t = -\sin x \mathrm{d}x \end{bmatrix} \\
&= \int \frac{-2t dt}{1+t^2} \\
&= \begin{bmatrix} p = 1+t^2 \\ \mathrm{d}p = 2t\mathrm{d}t \end{bmatrix} \\
&= \int \frac{-1}{p}\mathrm{d}p \\
&= -\ln|p| + c \\
&= -\ln(1+t^2) + c \\
&= -\ln(1+\cos^2 x) + c
\end{aligned}
$$

4. Најпре нађимо решење хомогене једначине $y'' - 6y' + 8y = 0$. Нуле карактеристичне једначине $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$ су $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 4$, па је $y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{4x}$.
Партикуларно решење је облика $y_p = x(Ax+B)e^{2x} = (Ax^2+Bx)e^{2x}$. Израчунајмо први и други извод партикуларног решења и убацимо га у полазну једначину.

$$y_p' = e^{2x}(2Ax^2 + (2A+2B)x + B), \quad y_p'' = e^{2x}(4Ax^2 + (8A+4B)x + 2A + 4B)$$

па је

$$e^{2x}(4Ax^2 + (8A+4B)x + 2A+4B) - 6e^{2x}(2Ax^2 + (2A+2B)x + B) + 8e^{2x}(Ax^2+Bx) = 4xe^{2x}$$

односно након сређивања

$$-4Ax + 2A - 2B = 4e^{2x},$$

одакле изједначавањем коефицијената уз 1 и x добијамо систем две једначине са две непознате.

$$
\begin{aligned}
-4A &= 4 \\
2A - 2B &= 0
\end{aligned}
$$

Решење овог система је $A = -1,\ B = -1$, па добијамо да је партикуларно решење је $y_p = e^{2x}(-x^2 - x)$.
Коначно, опште решење дате једначине је

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{2x} + c_2 e^{4x} + 8x^2 - e^{2x}(x^2+x),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Остаје још да нађемо партикуларно решење. Убацивањем услова $y(0) = 0$ и $y(1) = 1$ у опште решење добијамо једначине

$$0 = c_1 + c_2,$$

$$0 = c_1 e^2 + c_2 e^4 - 2e^2,$$

одакле коначно добијамо да је $c_1 = \frac{2}{1+e^2}$ и $c_2 = \frac{-2}{1+e^2}$, па је тражено партикуларно решење

$$y = \frac{2}{1+e^2}e^{2x} + \frac{-2}{1+e^2}e^{4x} + 8x^2 - e^{2x}(x^2+x).$$

5. Означимо са H_1, H_2 и H_3 хипотезе да је одабрана прва, друга односно трећа кутија

и нека је догађај A догађај да је извучена бела куглица.
(а) Желимо да одредимо $P(A)$. На основу формуле потпуне вероватноће имамо да је

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A|H_1) + P(H_2)\cdot P(A|H_2) + P(H_3)\cdot P(A|H_3),$$

па одредимо ових шест вероватноћа.

$$P(H_1) = \frac{1}{6},\quad P(H_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},\quad P(H_3) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$

$$P(A|H_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},\quad P(A|H_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},\quad P(A|H_3) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3},$$

па добијамо

$$P(A) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{5}{9}.$$

(б) Желимо да одредимо вероватноћу $P(H_3|A)$ коју рачунамо по формули

$$P(H_3|A) = \frac{P(AH_3)}{P(A)} = \frac{P(H_3)\cdot P(A|H_3)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{3}{5}.$$

6. (а) Видети у уџбенику.
(б) Домен дате функције је $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Одредимо њен први и други извод.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left((x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\right)' \\
&= -\frac{1}{2}\cdot(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x \\
&= \frac{-x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}, \\
f''(x) &= \left(\frac{-x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\right)' \\
&= \frac{-(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + x\cdot\frac{3}{2}\cdot(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x}{(x^2+1)^3}\cdot\frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{-(x^2+1)+3x^2}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}} \\
&= \frac{2x^2-1}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}
\end{aligned}$$

Видимо да је $f''(x) = 0$ за $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ или $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ па су то потенцијалне превојне тачке. Како је $(x^2+1)^{\frac{5}{2}} > 0$ за свако $x \in \mathbb{R}$, то знак другог извода зависи само од $2x^2-1$. Одатле закључујемо да је $f''(x) > 0$ за $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$, $f''(x) < 0$ за $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, па коначно добијамо да је f конвексна на $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$, конкавна на $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ јесу превојне тачке.
7. Видети у уџбенику.

РЕШЕЊА ЈУЛСКОГ РОКА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 15.07.2020.

ЗАДАЦИ

1. (8 п) Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{n(n+2)}$.

2. (8 п) Одредити асимптоте функције $y = x\sqrt{\frac{x}{x-6}}$.

3. (8 п) Израчунати $\int \ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right)\mathrm{d}x$.

4. (8 п) Наћи опште решење диференцијалне једначине $y'' - 4y = 4e^{-2x}$.

5. (8 п) Вероватноћа да ће Пера освојити медаљу за свој тениски клуб је 0.5, а вероватноћа да ће је Мика освојити је 0.7. Наћи вероватноћу да ће бар једна медаља бити освојена ако се такмичари боре независно. Ако је медаља освојена, која је вероватноћа да ју је освојио Пера?

6. (5 п) а)

(5 п) б)

7. (10 п)

РЕШЕЊА

1. Означимо са $a_n = \left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{n(n+2)}$. Како је

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{n(n+2)}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{n+2}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1-1+\frac{n-1}{n+2}\right)^{n+2}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-n-2+n-1}{n+2}\right)^{n+2}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-3}{n+2}\right)^{n+2}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\frac{n+2}{-3}}\right)^{\frac{n+2}{-3}\cdot(-3)}\\
&= e^{-3}\\
&= \frac{1}{e^3} < 1,
\end{aligned}$$

то дати ред конвергира на основу Кошијевог критеријума.

2. Одредимо најпре домен дате функције. Да би x било у домену, мора да важи $\frac{x}{x-6} \geqslant 0$ и $x-6 \neq 0$. Прва неједнакост нам даје услов да мора бити $x \in (-\infty, 0] \cup [6, +\infty)$, а друга да је $x \neq 6$, па када направимо пресек ових услова, добијамо да је домен дате функције $\mathcal{D} = (-\infty, 0] \cup (6, +\infty)$. Тачке $x=0$ и $x=6$ су потенцијалне асимптоте и приметимо да може постојати само леви лимес у тачки 0 и десни лимес у тачки 6 (јер функција није дефинисана десно од 0 и лево од 6). Одредимо ова два лимеса.

<u>Вертикалне асимптоте:</u>

$$\lim_{x\to 0-} x\sqrt{\frac{x}{x-6}} = 0 \neq \infty,$$

па права $x=0$ није вертикална асимптота.

$$\lim_{x\to 6+} x\sqrt{\frac{x}{x-6}} = +\infty,$$

па права $x = 6$ јесте вертикална асимптота и то је једина вертикална асимптота ове функције.
<u>Хоризонталне асимптоте:</u>

$$\lim_{x\to\infty} x\sqrt{\frac{x}{x-6}} = \lim_{x\to\infty} x\sqrt{\frac{1}{1-\frac{6}{x}}} = \lim_{x\to\infty} x = \infty,$$

па нема хоризонталних асимптота.
<u>Косе асимптоте:</u>

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt{\frac{x}{x-6}}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x}{x-6}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{1}{1-\frac{6}{x}}} = 1,$$

$$\begin{aligned}
b &= \lim_{x\to\infty} \left(x\sqrt{\frac{x}{x-6}} - 1\cdot x \right) \\
&= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x-6}} - \frac{x\sqrt{x-6}}{\sqrt{x-6}} \right) \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x(\sqrt{x}-\sqrt{x-6})}{\sqrt{x-6}} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-6}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-6}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x(x-(x-6))}{\sqrt{x-6}(\sqrt{x}+\sqrt{x-6})} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{6x}{\sqrt{x^2-6x}+x-6} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{6}{\sqrt{1-\frac{6}{x}}+1-\frac{6}{x}} \\
&= \frac{6}{2} \\
&= 3.
\end{aligned}$$

Дакле, коса асимптота дате функције је права $y = x + 3$.

3.

$$\begin{aligned}
\int \ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right)\mathrm{d}x &= \begin{bmatrix} u = \ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right) & \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = -\frac{8}{x^3+4x}\mathrm{d}x & v = x \end{bmatrix} \\
&= x\ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right) + \int \frac{8x}{x^3+4x}\mathrm{d}x \\
&= x\ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right) + 8\int \frac{1}{x^2+4}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Одредимо посебно интеграл функције $\frac{1}{x^2+4}$.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+4}\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{4\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2+1\right)}\mathrm{d}x\\ &= \begin{bmatrix} t=\frac{x}{2}\\ \mathrm{d}t=\frac{1}{2}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}x=2\mathrm{d}t\end{bmatrix}\\ &= \int \frac{2}{4(t^2+1)}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{arctg}t+c_1\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{x}{2}+c_1\end{aligned}$$

Вратимо се сада на почетни интеграл.

$$\begin{aligned}\int \ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right)\mathrm{d}x &= x\ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right)+8\int\frac{1}{x^2+4}\mathrm{d}x\\ &= x\ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right)+8\left(\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{x}{2}+c_1\right)\\ &= x\ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right)+4\mathrm{arctg}\frac{x}{2}+c.\end{aligned}$$

4. Најпре нађимо решење хомогене једначине $y''-4y=0$. Нуле карактеристичне једначине $\lambda^2-4=0$ су $\lambda_1=2,\ \lambda_2=-2$, па је $y_h=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}$.
Партикуларно решење је облика $y_p=Axe^{-2x}$. Израчунајмо први и други извод партикуларног решења и убацимо га у полазну једначину.

$$y_p'=Ae^{-2x}-2Axe^{-2x}=(A-2Ax)e^{-2x},\ \ y_p''=-2Ae^{-2x}-2Ae^{-2x}+4Axe^{-2x}=(-4A+4Ax)e^{-2x}$$

па је

$$(-4A+4Ax)e^{-2x}-4Axe^{-2x}=e^{-2x}$$

односно након сређивања

$$-4A=1,$$

одакле је $A=-\frac{1}{4}$ па добијамо да је партикуларно решење је $y_p=-\frac{1}{4}xe^{2x}$.
Коначно, опште решење дате једначине је

$$y=y_h+y_p=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}-\frac{1}{4}xe^{-2x},\ c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

5. Означимо са A догађај да је Пера освојио медаљу, а са B догађај да је Мика освојио медаљу. Дато је да је $P(A)=0,5$ и $P(B)=0,7$. Догађај да је бар једна медаља освојена је $A\cup B$ и његова вероватноћа је

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=0,5+0,7-0,5\cdot 0,7=0,85.$$

Користили смо да је $P(AB)=P(A)P(B)$. Ово генерално не важи увек, али како су догађаји A или B међусобно независни, ова формула ће важити.
Ако је медаља освојена, вероватноћа да ју је освојио Пера је

$$P(A|(A\cup B))=\frac{P(A\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)}{P(A\cup B)}=\frac{0,5}{0,85}\approx 0,588$$

Овде смо користили да је $A \cap (A \cup B) = A$. Заиста ово важи јер догађај A каже да је Пера освојио медаљу, а $A \cup B$ да је било ко освојио медаљу, па пошто тражимо пресек ова два догађаја, ми желимо да ти догађаји буду истовремено остварени, тј. треба да важи и да је Пера освојио медаљу и да је било ко освојио медаљу, а то је управо догађај да је Пера освојио медаљу, тј. догађај A.

6. (а) Видети у уџбенику.
(б)
7. Видети у уџбенику.

РЕШЕЊА АВГУСТОВСКОГ РОКА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 26.08.2020.

ЗАДАЦИ

1. (8 п) Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{n}+3n^5}{2n^6}\right)^n$.

2. (8 п) Испитати конвексност и наћи превојне тачке функције $y=\ln^2 x+x$.

3. (8 п) Израчунати $\int_0^1 x\ln(x^2+1)\mathrm{d}x$.

4. (8 п) Наћи опште решење диференцијалне једначине $y''-4y=4e^{-2x}$.

5. (8 п) У кутији А су 9 листића нумерисаних бројевима од 1 до 9, а у кутији Б се налази 5 листића нумерисаних бројевима од 1 до 5. Бирамо кутију насумице и из ње извлачимо један листић. Ако је број на листићу паран, израчунати колика је вероватноћа да је листић извучен из кутије А.

6. (а) **(5 п)** Дати дефиницију диференцијабилности функције.

(б) **(5 п)** Израчунати извод функције $y=e^{2x^2-4x}\cdot\sin x$.

7. (10 п) Линеарна хомогена диференцијална једначина другог реда са константним коефицијентима.

РЕШЕЊА

1. Означимо са $a_n=\left(\frac{\sqrt[n]{n}+3n^5}{2n^6}\right)^n$. Како је

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{\sqrt[n]{n}+3n^5}{2n^6}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}+3n^5}{2n^6}=0<1,$$

то дати ред конвергира на основу Кошијевог критеријума.

2. Домен дате функције је $\mathcal{D}_y=(0,+\infty)$. Први извод дате функције је

$$y'=(\ln^2 x+x)'=\frac{2\ln x}{x}+1.$$

Други извод дате функције је

$$y''=\left(\frac{2\ln x}{x}+1\right)'=\frac{2\cdot\frac{1}{x}\cdot x-2\ln x}{x^2}=\frac{2-2\ln x}{x^2}.$$

Како је $y''=0$ за $2-2\ln x=0$, тј. за $\ln x=1$, одакле је $x=e$, то је ово потенцијална превојна тачка. Такође, имамо да је $x^2>0$ за свако $x\in\mathcal{D}_y$, па на знак другог извода утиче само $2-2\ln x$ и то је

$$\begin{aligned}2-2\ln x&>0,\ \text{ за } x\in(0,e),\\ 2-2\ln x&<0,\ \text{ за } x\in(e,+\infty),\end{aligned}$$

одакле је

$$\begin{aligned}y''&>0,\ \text{ за } x\in(0,e),\\ y''&<0,\ \text{ за } x\in(e,+\infty),\\ y''&=0,\ \text{ за } x=e.\end{aligned}$$

Коначно, закључујемо

$$\begin{aligned}&y \text{ је конвексна на}(0,e),\\ &y \text{ је конкавна на } (e,+\infty),\\ &x=e \text{ је превојна тачка.}\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x\ln(x^2+1)\mathrm{d}x &= \begin{bmatrix} u=\ln(x^2+1) & \mathrm{d}v = x\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \frac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x & v=\frac{1}{2}x^2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}x^2\ln(x^2+1)\Big|_0^1 - 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\ln 2 - \frac{1}{2}\cdot 0\cdot\ln 1 - \int_0^1 \frac{x(x^2+1-1)}{x^2+1}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\ln 2 - \int_0^1 \left(\frac{x(x^2+1)}{x^2+1} - \frac{x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\ln 2 - \int_0^1 \left(x - \frac{x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x \\
&= \begin{bmatrix} t = x^2+1 \\ \mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x \\ x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}t \\ x=0 \longrightarrow t=1 \\ x=1\longrightarrow t=2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2} + \int_1^2 \frac{\frac{1}{2}}{t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln t\Big|_1^2 \\
&= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 1 \\
&= \ln 2 - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

4. Одредимо најпре решење хомогене једначине $y'' - 4y = 0$. Њена карактеристична једначина је $\lambda^2 - 4\lambda = 0$, одакле је $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$, па је

$$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Партикуларно решење полазне једначине ће бити облика

$$y_p = Axe^{-2x}.$$

Први и други извод партикуларног решења су

$$y_p' = Ae^{-2x} - 2Axe^{-2x} = (A-2Ax)e^{-2x},\quad y_p'' = -2Ae^{-2x} - 2(A-2Ax)e^{-2x} = (-4A+4Ax)e^{-2x}.$$

Када ово убацимо у дату једначину добијамо

$$(-4A+4Ax)e^{-2x} - 4Axe^{-2x} = 4e^{-2x},$$

$$-4A = 4,$$

па је $A=-1$, тј. партикуларно решење је $-xe^{-2x}$.

Коначно, опште решење дате једначине је

$$y = y_h + y_p = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} - xe^{-2x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

5. Означимо са A догађај да је број на извученом листићу паран. Како вероватноћа овог догађаја зависи од тога коју кутију бирамо, означимо са H_1 и H_2 хипотезе да бирамо кутију А, односно Б. Оно што се нама тражи је $P(H_1|A)$, па израчунајмо најпре колико је $P(A)$. На основу формуле тоталне вероватноће је

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2) + P(A|H_2).$$

Имамо да је

$$P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2},$$

$$P(A|H_1) = \frac{4}{9},$$

$$P(A|H_2) = \frac{2}{5},$$

па је

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{19}{45}.$$

Тражена вероватноћа је

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9}}{\frac{19}{45}} = \frac{10}{19}.$$

6. (а) Видети у уџбенику.
(б) Први извод функције y је

$$y' = (e^{2x^2-4x} \cdot \sin x)' = (4x-4)e^{2x^2-4x} \sin x + e^{2x^2-4x} \cos x.$$

7. Видети у уџбенику.

РЕШЕЊА ДОДАТНОГ РОКА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 26.09.2020.

ЗАДАЦИ

1. (8 п) Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{(n+1)!-n!}$.

2. (8 п) Испитати монотоност и одредити локалне тачке екстремума функције $y = \frac{\ln x+1}{\ln x}$.

3. (8 п) Израчунати $\int\limits_{-3}^{3} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\mathrm{d}x$.

4. (8 п) Наћи опште решење диференцијалне једначине $x^2y' + 2xy = \cos^2 x$.

5. (8 п) Кутија B садржи 95 белих и 5 црних куглица, а кутија C 90 црних и 10 белих. На случајан начин бира се једна кутија и из ње се извлачи једна куглица. Ако је извучена куглица бела, наћи вероватноћу да је изабрана кутија B.

6. (а) **(5 п)** Како гласи парцијална интеграција за одређене интеграле?

(б) **(5 п)** Помоћу парцијалне интеграције израчунати следећи интеграл $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \ln(2x)\mathrm{d}x$.

7. (10 п) Очекивање и дисперзија непрекидне случајне променљиве. Дефиниција и особине.

РЕШЕЊА

1. Означимо са $a_n = \frac{7^n}{(n+1)!-n!}$. Како је

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{7^{n+1}}{(n+2)!-(n+1)!}}{\frac{7^n}{(n+1)!-n!}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{7\cdot \cancel{7^n}}{(n+2)(n+1)!-(n+1)!}}{\frac{\cancel{7^n}}{(n+1)n!-n!}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{7}{(n+2-1)(n+1)!}}{\frac{1}{(n+1-1)n!}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{7}{(n+1)(n+1)\cancel{n!}}}{\frac{1}{n\cancel{n!}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{7n}{n^2+2n+1} \\
&= 0 \\
&< 1,
\end{aligned}$$

то дати ред конвергира на основу Даламберовог критеријума.

2. Домен дате функције је $\mathcal{D}_y = (0,1) \cup (1,+\infty)$ јер мора бити $x > 0$ да би $\ln x$ било дефинисано, а мора важити и $\ln x \neq 0$, тј. $x \neq 1$ јер не можемо делити нулом. Први извод дате функције је

$$y' = \frac{\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x}(\ln x + 1)}{\ln^2 x} = \frac{-\frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{-1}{x\ln^2 x}.$$

Примећујемо да први извод никад није 0, па функција нема локалних екстремума. Такође, како је $\ln^2 x$ увек позитивно, знак првог извода зависи само од x, али када погледамо домен видимо да је x увек позитивно, па ће и први извод бити увек негативан (због минуса у бројиоцу), тј. функција опада на целом домену.

3.

$$\int\limits_{-3}^{3}\frac{e^x}{e^{2x}+1}\mathrm{d}x=\begin{bmatrix} t=e^x\\ \mathrm{d}t=e^x\mathrm{d}x\\ x=-3\longrightarrow t=e^{-3}\\ x=3\longrightarrow t=e^3\end{bmatrix}$$
$$=\int_{e^{-3}}^{e^3}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}$$
$$=\mathrm{arctg}t\Big|_{e^{-3}}^{e^3}$$
$$=\mathrm{arctg}\left(e^3\right)-\mathrm{arctg}\left(e^{-3}\right)$$

4. Дата једначина је линеарна диференцијална једначина првог реда. Поделимо је са x^2.

$$y'+\frac{2}{x}y=\frac{\cos^2 x}{x^2}.$$

Одавде је $p(x)=\frac{2}{x}$, па је $\int p(x)\mathrm{d}x=2\ln|x|$, а $q(x)=\frac{\cos^2 x}{x^2}$. Опште решење дате једначине је

$$y=e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left(c+\int e^{\int p(x)\mathrm{d}x}q(x)\mathrm{d}x\right)$$
$$=e^{-2\ln|x|}\left(c+\int e^{2\ln|x|}\frac{\cos^2 x}{x^2}\mathrm{d}x\right)$$
$$=\frac{1}{x^2}\left(c+\int \cancel{x^2}\frac{\cos^2 x}{\cancel{x^2}}\mathrm{d}x\right)$$
$$=\frac{1}{x^2}\left(c+\int\frac{1+\cos 2x}{2}\mathrm{d}x\right)$$
$$=\frac{1}{x^2}\left(c+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x\right).$$

5. Означимо са A догађај да је извучена куглица беле боје. Потребно је да одредимо $P(A)$. Како нам вероватноћа догађаја A зависи од тога да ли је куглица извучена из кутије B или C, означимо са H_1 и H_2 да је одабрана кутија B, односно C. Тада је

$$P(H_1)=P(H_2)=\frac{1}{2},\quad P(A|H_1)=\frac{95}{100}=\frac{19}{20},\quad P(A|H_2)=\frac{10}{100}=\frac{1}{10},$$

па на основу формуле тоталне вероватноће

$$P(A)=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{19}{20}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}=\frac{21}{40}.$$

У задатку се тражи вероватноћа $P(H_1|A)$ и то је

$$P(H_1|A)=\frac{P(H_1P(A|H_1))}{P(A)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{19}{20}}{\frac{21}{40}}=\frac{19}{21}$$

6. (а) Видети у уџбенику.

(б)

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}}^{2} \ln(2x)\mathrm{d}x &= \begin{bmatrix} u = \ln(2x) & \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \frac{2}{x}\mathrm{d}x & v = x \end{bmatrix} \\
&= x\ln(2x)\Big|_{\frac{1}{2}}^{2} - \int_{\frac{1}{2}}^{2} \cancel{x} \cdot \frac{2}{\cancel{x}}\mathrm{d}x \\
&= 2\ln 4 - \frac{1}{2}\ln 1 - \int_{\frac{1}{2}}^{2} 2\mathrm{d}x \\
&= 2\ln 4 - 0 - (2x)\Big|_{\frac{1}{2}}^{2} \\
&= 2\ln 4 - 2\cdot 2 + 2\cdot\frac{1}{2} \\
&= 2\ln 4 - 3
\end{aligned}$$

7. Видети у уџбенику.