РЕШЕЊА ПРВОГ КОЛОКВИЈУМА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 24.11.2018.

Група 1

1. (5 поена) Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+8}{2n+5}\right)^{4n^2}$.

2. (5 поена) Израчунати $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\mathrm{ctg}x}$.

3. (5 поена) Одредити асимптоте функције $\ln\frac{x-1}{x+1}$.

4. (5 поена) Испитати монотоност и наћи екстремне вредности функције $(x-2)e^{\frac{1}{x-1}}$.

5. (5 поена) Израчунати $\int\frac{1}{x^2+6x+11}\mathrm{d}x$.

РЕШЕЊА

1. Означимо $a_n=\left(\frac{2n+8}{2n+5}\right)^{4n^2}$. Тада je

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+8}{2n+5}\right)^{4n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+5+3}{2n+5}\right)^{4n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n+5}{3}}\right)^{\frac{2n+5}{3}\cdot\frac{3}{2n+5}\cdot 4n}\\
&= \lim_{n\to\infty}e^{\frac{12n}{2n+5}}\\
&= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{12n}{2n+5}}\\
&= e^6>1,
\end{aligned}$$

па ред дивергира по Кошијевом критеријуму.

2.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\mathrm{ctg}x} &= \lim_{x\to 0}e^{\ln\left((\cos x)^{\mathrm{ctg}x}\right)}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{ctg}x\ln(\cos x)}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x\ln(\cos x)}{\sin x}}\\
&\overset{LP}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x\ln(\cos x)+\cos x\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)}{\cos x}}\\
&= e^0\\
&= 1.
\end{aligned}$$

3. Домен функције $f(x)=\ln\frac{x-1}{x+1}$ je $\mathcal{D}_f=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

$$\lim_{x\to -1-}=+\infty,\quad \lim_{x\to 1+}=-\infty,$$

па су праве $x=-1$ и $x=1$ вертикалне асимптоте функције f.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \ln\frac{x-1}{x+1} = 0,$$

па је права $y=0$ хоризонтална асимптота. Како функција има хоризонталну асимптоту, не може имати косе асимптоте.

4. Домен функције f једнак $\mathcal{D}_f = (-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x-1}} + (x-2)e^{\frac{1}{x-1}}\frac{-1}{(x-1)^2} = \frac{e^{\frac{1}{x-1}}(x^2-3x+3)}{(x-1)^2}.$$

Имамо да је $f'(x)=0$ за $x^2-3x+3=0$, али ова квадратна једначина има дискриминанту $D=-3<0$, па нема реалних решења па ни први извод нема нула. Такође, квадратна функција x^2-3x+3 је увек позитивна, као и експоненцијална функција и $(x-1)^2$ који се јављају у изводу, па закључујемо да је први извод увек позитиван. Дакле, дата функција расте на целом домену.

5.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2+6x+11}\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{(x+3)^2-9+11}\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{(x+3)^2+2}\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{2\left(\frac{(x+3)^2}{2}+1\right)}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{(\frac{x+3}{\sqrt{2}})^2+1}\mathrm{d}x \\
&= \begin{bmatrix} t = \frac{x+3}{\sqrt{2}} \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}x = \sqrt{2}\mathrm{d}t \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\sqrt{2}\mathrm{d}t \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{arctg} t + c \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{x+3}{\sqrt{2}}\right) + c.
\end{aligned}$$

Група 2

1. **(5 поена)** Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+7}{3n+2}\right)^{12n^2}$.

2. **(5 поена)** Израчунати $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x$.

3. **(5 поена)** Одредити асимптоте функције $\ln\frac{x-2}{x+2}$.

4. **(5 поена)** Испитати монотоност и наћи екстремне вредности функције $(x-1)e^{\frac{1}{x-2}}$.

5. **(5 поена)** Израчунати $\int\frac{1}{x^2+8x+21}\mathrm{d}x$.

РЕШЕЊА

1. Означимо $a_n=\left(\frac{3n+7}{3n+2}\right)^{12n^2}$. Тада је

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+7}{3n+2}\right)^{12n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2+5}{3n+2}\right)^{12n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3n+2}{5}}\right)^{\frac{3n+2}{5}\cdot\frac{5}{3n+2}\cdot 12n}\\
&= \lim_{n\to\infty}e^{\frac{60n}{3n+2}}\\
&= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{60n}{3n+2}}\\
&= e^{20}>1,
\end{aligned}$$

па ред дивергира по Кошијевом критеријуму.

2.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}(\sin x)^x &= \lim_{x\to 0}e^{\ln((\sin x)^x)}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}x\ln(\sin x)}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x}}}\\
&\overset{LP}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x}{-\frac{1}{x^2}}}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x}{\cos x}\cdot\frac{x}{\sin x}}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x}{\cos x}}\\
&= e^0\\
&= 1.
\end{aligned}$$

3. Домен функције $f(x)=\ln\frac{x-1}{x+1}$ је $\mathcal{D}_f=(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.

$$\lim_{x\to-2-}=+\infty,\quad \lim_{x\to 2+}=-\infty,$$

па су праве $x=-2$ и $x=2$ вертикалне асимптоте функције f.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \ln\frac{x-2}{x+2} = 0,$$

па је права $y=0$ хоризонтална асимптота. Како функција има хоризонталну асимптоту, не може имати косе асимптоте.

4. Домен функције f једнак $\mathcal{D}_f = (-\infty, 2)\cup(2,+\infty)$.

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x-2}} + (x-1)e^{\frac{1}{x-2}}\frac{-1}{(x-2)^2} = \frac{e^{\frac{1}{x-2}}(x^2-5x+5)}{(x-2)^2}.$$

Имамо да је $f'(x)=0$ за $x^2-5x+5=0$, тј. за $x=\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$ или $x=\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$, па су ове две тачке стационарне тачке функције f. Како су експоненцијална функција и $(x-2)^2$ увек позитивне, закључујемо да знак f' зависи само од знака x^2-5x+5 па добијамо да је

$$f'(x) > 0 \text{ за } x\in\left(-\infty, \tfrac{5}{2}-\tfrac{\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\tfrac{5}{2}+\tfrac{\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$$
$$f'(x) < 0 \text{ за } x\in\left(\tfrac{5}{2}-\tfrac{\sqrt{5}}{2}, 2\right)\cup\left(2, \tfrac{5}{2}+\tfrac{\sqrt{5}}{2}\right),$$

па закључујемо да

$$f \text{ расте на } \left(-\infty, \tfrac{5}{2}-\tfrac{\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\tfrac{5}{2}+\tfrac{\sqrt{5}}{2}, +\infty\right),$$
$$f \text{ опада на } \left(\tfrac{5}{2}-\tfrac{\sqrt{5}}{2}, 2\right)\cup\left(2, \tfrac{5}{2}+\tfrac{\sqrt{5}}{2}\right),$$
$$x=\tfrac{5}{2}-\tfrac{\sqrt{5}}{2} \text{ је локални максимум,}$$
$$x=\tfrac{5}{2}+\tfrac{\sqrt{5}}{2} \text{ је локални минимум.}$$

5.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2+8x+21}\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{(x+4)^2-16+21}\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{(x+4)^2+5}\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{5\left(\frac{(x+4)^2}{5}+1\right)}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{5}\int \frac{1}{(\frac{x+4}{\sqrt{5}})^2+1}\mathrm{d}x \\
&= \begin{bmatrix} t=\frac{x+4}{\sqrt{5}} \\ \mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}x=\sqrt{5}\mathrm{d}t \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{5}\int\frac{1}{t^2+1}\sqrt{5}\mathrm{d}t \\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\mathrm{arctg}t + c \\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\mathrm{arctg}\left(\frac{x+4}{\sqrt{5}}\right) + c.
\end{aligned}$$

РЕШЕЊА ДРУГОГ КОЛОКВИЈУМА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 12.01.2019.

Група 1

1. (5 поена) Израчунати површину фигуре ограничену кривама
$$y = x^2,\ y = 4x^2,\ x \leq 5.$$
2. (5 поена) Наћи партикуларно решење диференцијалне једначине $y' + 2y\mathrm{tg}x = \cos^2 x$ са почетним условом $y(0) = 1$.
3. (5 поена) Наћи опште решење диференцијалне једначине $y'' + y' - 2y = xe^x$.
4. (5 поена) Бацају се две коцке за игру истовремено. Ако се зна да је збир палих бројева већи од 10 одредити вероватноћу да су пале две шестице.
5. (5 поена) Нека је дата случајна величина X која зависи од параметра

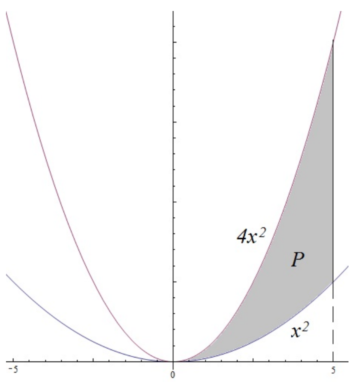
$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ a^2 - a^3 & \frac{a}{2} & \frac{1}{4} & a^3 + \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

(а) Одредити параметар a;
(б) Одредити EX;
(в) Одредити DX.

РЕШЕЊА

1. Пресечна тачка графика функција x^2 и $4x^2$ је решење једначине $x^2 = 4x^2$. Решење ове једначине је $x = 0$ што ће бити доња граница интеграла док ће горња граница бити 5. Тражена површина је

$$P = \int_0^5 (4x^2 - x^2)\mathrm{d}x = \frac{3x^3}{3}\Big|_0^5 = x^3\Big|_0^5 = 125,$$



2. Нађимо најпре опште решење дате једначине. Дата једначина је линеарна диференцијална једначина првог реда чије је решење дато формулом

$$\begin{aligned}
y &= e^{-\int 2\mathrm{tg}x\mathrm{d}x}\left(c+\int e^{\int 2\mathrm{tg}x\mathrm{d}x}\cos^2 x\mathrm{d}x\right)\\
&= e^{2\ln|\cos x|}\left(c+\int e^{-2\ln|\cos x|}\cos^2 x\mathrm{d}x\right)\\
&= \cos^2 x\left(c+\int \frac{1}{\cos^2 x}\cos^2 x\mathrm{d}x\right)\\
&= \cos^2 x\left(c+\int \mathrm{d}x\right)\\
&= \cos^2 x(c+x).
\end{aligned}$$

Користили смо да је

$$\int \mathrm{tg}x\mathrm{d}x = \int\frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} t=\cos x\\ \mathrm{d}t=-\sin x\mathrm{d}x\end{bmatrix} = -\int\frac{\mathrm{d}t}{t} = -\ln|t|+c_1 = -\ln|\cos x|+c_1.$$

Још остаје да нађемо партикуларно решење које задовољава услов $y(0)=1$. То решавамо убацивањем $x=0$ и $y=1$ у опште решење.

$$1=\cos^2 0(c+0),$$

одакле је $c=1$, па је тражено партикуларно решење

$$y=\cos^2 x(1+x).$$

3. Најпре решавамо хомогену једначину

$$y''+y'-2y=0.$$

Њена карактеристична једначина је

$$\lambda^2+\lambda-2=0,$$

па је

$$\lambda_{1/2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2},$$

тј. $\lambda_1=1,\ \lambda_2=-2$ па закључујемо да је решење хомогене једначине

$$y_h=c_1e^x+c_2e^{-2x},\ c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

Сада тражимо партикуларно решење полазне једначине. Оно ће бити облика $y_p = xe^x(Ax+B)=e^x(Ax^2+Bx)$. Нађимо први и други извод и убацимо добијене вредности у полазну једначину.

$$y_p'=e^x(Ax^2+(2A+B)x+B),\ y_p''=e^x(Ax^2+(4A+B)x+2A+2B).$$

Након убацивања, добијамо

$$e^x(Ax^2+(4A+B)x+2A+2B)+e^x(Ax^2+(2A+B)x+B)-2e^x(Ax^2+Bx)=xe^x,$$

одакле након скраћивања са e^x и изједначавањем коефицијената уз 1 и x са обе стране једнакости добијамо систем

$$6A=1,\ 2A+3B=0,$$

па је $A = \frac{1}{6}$ и $B = -\frac{1}{3}$, односно $y_p = e^x\left(\frac{x^2}{6} - \frac{x}{9}\right)$. Коначно, опште решење дате једначине је

$$y = y_h + y_p = c_1e^x + c_2e^{-2x} + e^x\left(\frac{x^2}{6} - \frac{x}{9}\right) \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

4. Означимо са A догађај да су пале две шестице а са B догађај да је збир палих бројева већи од 10. Потребно је одредити $P(A|B)$. На основу формуле условне вероватноће имамо

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}.$$

Одредимо још вероватноће $P(A),\ P(B|A),\ P(B)$.
Повољних исхода за догађај A је само 1, а укупан број могућих исхода је 36, па је $P(A) = \frac{1}{36}$.
Вероватноћа догађаја $P(B|A)$ је вероватноћа да је збир палих бројева већи од 10 уколико знамо да су пале две шестице. Како знамо да су пале две шестице, збир палих бројева је 12 што је увек веће од 10 па је ово заправо сигуран догађај тј. $P(B|A) = 1$.
Повољни исходи за догађај B су $\{56, 66, 65\}$ тј. имамо три повољна исхода од укупно 36, па је $P(B) = \frac{3}{36}$. Коначно,

$$P(A|B) = \frac{1 \cdot \frac{1}{36}}{\frac{3}{36}} = \frac{1}{3}.$$

Други начин: Како знамо да је збор палих бројева већи од 10, знамо да су могући исходи $\{56, 66, 65\}$, тј. имамо укупно три исхода, а повољан је само један, да су пале две шестице, па је тражена вероватноћа $\frac{1}{3}$.
5. а) Да би функција расподеле била добро дефинисана, сума вероватноћа мора да буде 1 тј.

$$a^2 - a^3 + \frac{a}{2} + \frac{1}{4} + a^3 + \frac{1}{4} = 1.$$

Решавајући ову једначину, добијамо да је $a = \frac{1}{2}$ или $a = -1$, али како вероватноће морају бити бројеви у интервалу $[0, 1]$, то могућност да је $a = -1$ отпада. Дакле, $a = \frac{1}{2}$, па наша функција расподеле изгледа овако:

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}.$$

б)

$$EX = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{3}{8} = \frac{15}{8}.$$

в) Приметимо најпре да X^2 има расподелу

$$X^2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{pmatrix},$$

па је

$$EX^2 = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 9 \cdot \frac{3}{8} = \frac{37}{8}.$$

Коначно, тражена дисперзија биће

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{37}{8} - \left(\frac{15}{8}\right)^2 = \frac{71}{64}.$$

Група 2

1. (5 поена) Израчунати површину фигуре ограничену кривама
$$y = 1 + x^2,\ y = 2x^2,\ x \geq 0.$$
2. (5 поена) Наћи партикуларно решење диференцијалне једначине $y' + 2y\text{ctg}x = \frac{1}{\sin^2 x}$ са почетним условом $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.
3. (5 поена) Наћи опште решење диференцијалне једначине $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$.
4. (5 поена) Бацају се две коцке за игру истовремено. Ако се зна да је збир палих бројева мањи од 4 одредити вероватноћу да су пале две јединице.
5. (5 поена) Нека је дата случајна величина X која зависи од параметра

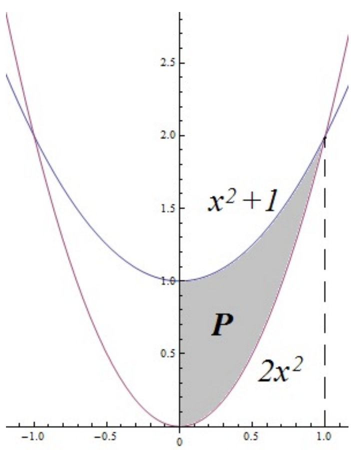
$$X : \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{a^2}{4} + \frac{1}{3} & \frac{a}{6} & \frac{a^2}{4} \end{pmatrix}$$

(а) Одредити параметар a;
(б) Одредити EX;
(в) Одредити DX.

РЕШЕЊА

1. Пресечна тачка графика функција $1 + x^2$ и $2x^2$ је решење једначине $1 + x^2 = 2x^2$. Решења ове једначине су $x_1 = -1,\ x_2 = 1$ па због услова $x \geq 0$ закључујемо да је доња граница интеграла 0, а горња је 1. Тражена површина је

$$P = \int_0^1 (1 + x^2 - 2x^2)\mathrm{d}x = x - \frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 = \frac{2}{3},$$



2. Нађимо најпре опште решење дате једначине. Дата једначина је линеарна диференцијална једначина првог реда чије је решење дато формулом

$$\begin{aligned}
y &= e^{-\int 2\mathrm{ctg}x\mathrm{d}x}\left(c+\int e^{\int 2\mathrm{ctg}x\mathrm{d}x}\frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x\right)\\
&= e^{-2\ln|\sin x|}\left(c+\int e^{2\ln|\sin x|}\frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x\right)\\
&= \frac{1}{\sin^2 x}\left(c+\int \sin^2 x\frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x\right)\\
&= \frac{1}{\sin^2 x}\left(c+\int \mathrm{d}x\right)\\
&= \frac{1}{\sin^2 x}(c+x).
\end{aligned}$$

Користили смо да је

$$\int \mathrm{ctg}x\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} t=\sin x\\ \mathrm{d}t=\cos x\mathrm{d}x\end{bmatrix} = \int\frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t|+c_1 = \ln|\sin x|+c_1.$$

Још остаје да нађемо партикуларно решење које задовољава услов $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$. То решавамо убацивањем $x=\frac{\pi}{2}$ и $y=0$ у опште решење.

$$0=\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2}}\left(c+\frac{\pi}{2}\right),$$

одакле је $c=-\frac{\pi}{2}$, па је тражено партикуларно решење

$$y=\frac{1}{\sin^2 x}\left(-\frac{\pi}{2}+x\right).$$

3. Најпре решавамо хомогену једначину

$$y''-4y'+4y=0.$$

Њена карактеристична једначина је

$$\lambda^2-4\lambda+4=0,$$

па је

$$\lambda_1=\lambda_2=2,$$

па закључујемо да је решење хомогене једначине

$$y_h=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x},\ c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

Сада тражимо партикуларно решење полазне једначине. Оно ће бити облика $y_p = Ax^2e^{2x}$. Нађимо први и други извод и убацимо добијене вредности у полазну једначину.

$$y_p'=e^{2x}(2Ax^2+2Ax),\ y_p''=e^{2x}(4Ax^2+8Ax+2A).$$

Након убацивања, добијамо

$$e^{2x}(4Ax^2+8Ax+2A)-4e^{2x}(2Ax^2+2Ax)+4Ax^2e^{2x}=e^{2x},$$

одакле добијамо $A=\frac{1}{2}$, односно $y_p=\frac{x^2}{2}e^{2x}$. Коначно, опште решење дате једначине је

$$y=y_h+y_p=c_1e^x+c_2xe^x+\frac{x^2}{2}e^{2x}\ c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

4. Означимо са A догађај да су пале две јединице а са B догађај да је збир палих бројева мањи од 4. Потребно је одредити $P(A|B)$. На основу формуле условне вероватноће имамо

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}.$$

Одредимо још вероватноће $P(A)$, $P(B|A)$, $P(B)$.
Повољних исхода за догађај A је само 1, а укупан број могућих исхода је 36, па је $P(A) = \frac{1}{36}$.
Вероватноћа догађаја $P(B|A)$ је вероватноћа да је збир палих бројева мањи од 4 уколико знамо да су пале две јединице. Како знамо да су пале две јединице, збир палих бројева је 2 што је увек мање од 4 па је ово заправо сигуран догађај тј. $P(B|A) = 1$.
Повољни исходи за догађај B су $\{11, 12, 21\}$ тј. имамо три повољна исхода од укупно 36, па је $P(B) = \frac{3}{36}$. Коначно,

$$P(A|B) = \frac{1 \cdot \frac{1}{36}}{\frac{3}{36}} = \frac{1}{3}.$$

Други начин: Како знамо да је збор палих бројева мањи од 4, знамо да су могући исходи $\{11, 12, 21\}$, тј. имамо укупно три исхода, а повољан је само један, да су пале две јединице, па је тражена вероватноћа $\frac{1}{3}$.
5. а) Да би функција расподеле била добро дефинисана, сума вероватноћа мора да буде 1 тј.

$$\frac{1}{3} + \frac{a^2}{4} + \frac{1}{3} + \frac{a}{6} + \frac{a^2}{4} = 1.$$

Решавајући ову једначину, добијамо да је $a = \frac{2}{3}$ или $a = -1$, али како вероватноће морају бити бројеви у интервалу $[0, 1]$, то могућност да је $a = -1$ отпада. Дакле, $a = \frac{2}{3}$, па наша функција расподеле изгледа овако:

$$X : \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

б)

$$EX = (-3) \cdot \frac{1}{3} + (-2) \cdot \frac{4}{9} + 0 \cdot \frac{1}{9} + 1 \cdot \frac{1}{9} = -\frac{16}{9}.$$

в) Приметимо најпре да X^2 има расподелу

$$X^2 : \begin{pmatrix} 9 & 4 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix},$$

па је

$$EX^2 = 9 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{4}{9} + 0 \cdot \frac{1}{9} + 1 \cdot \frac{1}{9} = \frac{44}{9}.$$

Коначно, тражена дисперзија биће

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{44}{9} - \left(-\frac{16}{9}\right)^2 = \frac{140}{81}.$$

РЕШЕЊА ЈАНУАРСКОГ РОКА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 23.01.2019.
Група 1

1. (8 п) Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n-5}\right)^{n^2}$.

2. (8 п) Одредити асимптоте функције $y = e^{\frac{1}{x}} - x$.

3. (8 п) Израчунати вредност интеграла $\int_1^{e^2} x^4 \ln(\sqrt{x})\mathrm{d}x$.

4. (8 п) Наћи опште решење диференцијалне једначине $y''\mathrm{tg}x - y' = 0$.

5. Тест за испитивање коришћења одређеног лека прави грешку. Уколико испитаник користи лек вероватноћа да ће тест показати позитиван резултат је $0,9$, а уколико испитаник не користи лек вероватноћа да ће тест показати позитиван резултат је $0,1$. Од свих људи укупно 5% користи тај лек. Једна особа је радила тест и добила резултат.

а) (4 п) Одредити вероватноћу да је резултат теста позитиван.

б) (4 п) Ако је резултат теста позитиван, одредити вероватноћу да испитаник користи лек.

6. а) (5 п) Дати дефиницију конвексности и конкавности функције.

б) (5 п) Испитати конвексност функције $y = \frac{e^x}{x}$.

7. (10 п) Дефиниција и пример независних променљивих. Формула потпуне вероватноће.

РЕШЕЊА

1. Означимо $a_n = \left(\frac{2n}{2n-5}\right)^{n^2}$. Како је

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{2n-5}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n-5}{5}}\right)^{\frac{2n-5}{5}\frac{5}{2n-5}\cdot n} = e^{\frac{5}{2}} > 1,$$

то дати ред дивергира по Кошијевом критеријуму.

2. Домен дате функције је $\mathcal{D} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, па је потенцијална вертикална асимптота права $x = 0$. Како је

$$\lim_{x\to 0+}\left(e^{\frac{1}{x}} - x\right) = +\infty,$$

то права $x = 0$ јесте вертикална асимптота.
Испитајмо да ли функција има хоризонталних асимптота. Како је

$$\lim_{x\to\infty}\left(e^{\frac{1}{x}} - x\right) = \infty,$$

то дата функција нема хоризонталних асимптота. Остаје још да испитамо да ли има косих асимптота.

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}} - x}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} - 1\right) = -1,$$

$$n = \lim_{x\to\infty}\left(e^{\frac{1}{x}} - x - (-1)\cdot x\right) = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1,$$

па је права $y = -x + 1$ коса асимптота дате функције.

3.

$$\int_1^{e^2} x^4 \ln(\sqrt{x})\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = \ln(\sqrt{x}) & \mathrm{d}v = x^4\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \frac{1}{2x}\mathrm{d}x & v = \frac{x^5}{5} \end{bmatrix}$$

$$= \ln(\sqrt{x}) \cdot \frac{x^5}{5}\Big|_1^{e^2} - \frac{1}{10}\int_1^{e^2} x^4\mathrm{d}x$$

$$= \frac{e^{10}}{5} - \frac{1}{50}x^5\Big|_1^{e^2}$$

$$= \frac{e^{10}}{5} - \frac{e^{10}}{50} + \frac{1}{50}$$

$$= \frac{9e^{10}+1}{50}$$

4. Уведимо смену $u = y'$. Тада је $u' = y''$, па добијамо

$$u'\mathrm{tg}x - u = 0,$$

односно добијамо диференцијалну једначину која раздваја променљиве.

$$\frac{u'}{u} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int \frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x$$

$$\ln|u| = \ln|\sin x| + c_1$$

$$|u| = |\sin x| \cdot e^{c_1}$$

$$u = c\sin x$$

Како је $y' = u$, то је опште решење полазне једначине

$$y = \int u\mathrm{d}x = \int c\sin x\mathrm{d}x = -c\cos x + d,\ \ c, d \in \mathbb{R}.$$

5. Посматрајмо следеће догађаје:

A - резултат теста је позитиван,
H_1 - испитаник користи лек,
H_2 - испитаник не користи лек.

Подаци који су нам дати у задатку су да је

$$P(H_1) = 0.05, \quad P(H_2) = 0.95, \quad P(A|H_1) = 0.9, \quad P(A|H_2) = 0.1$$

а) Потребно је одредити $P(A)$. На основу формуле тоталне вероватноће имамо

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = 0.05 \cdot 0.9 + 0.95 \cdot 0.1 = 0.14.$$

б) Тражена вероватноћа је $P(H_1|A)$ коју добијамо помоћу Бајесове формуле

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{0.05 \cdot 0.9}{0.14} \approx 0.32$$

6. а) Видети у уџбенику.
б) Домен дате функције је $\mathcal{D} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Први и други извод дате функције су

$$y' = \frac{e^x(x-1)}{x^2}, \quad y'' = \frac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3}.$$

Како је $e^x(x^2-2x+2) > 0$ за свако $x \in \mathcal{D}$, то знак другог извода зависи само од x^3 и имамо да је

$$\begin{gathered} y'' > 0 \text{ за } x > 0, \\ y'' < 0 \text{ за } x < 0, \end{gathered}$$

па је дата функција конвексна на $(0, +\infty)$, а конкавна на $(-\infty, 0)$.

7. Видети у уџбенику.

Група 2

1. (8 п) Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+5}\right)^{n^2}$.

2. (8 п) Одредити асимптоте функције $y = e^{\frac{1}{2x}} - x + 2$.

3. (8 п) Израчунати вредност интеграла $\int\limits_{1}^{e^2} x^3 \ln(\sqrt{x})\mathrm{d}x$.

4. (8 п) Наћи опште решење диференцијалне једначине $y''(x^2+5x+6) - y'(2x+5) = 0$.

5. Тест за испитивање да ли испитаник има дијабетес прави грешку. Уколико испитаник има дијабетес вероватноћа да ће тест показати позитиван резултат је $0,8$, а уколико испитаник нема дијабетес вероватноћа да ће тест показати позитиван резултат је $0,3$. Од свих људи укупно 10% има дијабетес. Једна особа је радила тест и добила резултат.

а) (4 п) Одредити вероватноћу да је резултат теста позитиван.

б) (4 п) Ако је резултат теста позитиван, одредити вероватноћу да испитаник има дијабетес.

6. а) (5 п) Дати дефиницију конвексности и конкавности функције.

б) (5 п) Испитати конвексност функције $y = \frac{e^x}{x}$.

7. (10 п) Дефиниција и пример независних променљивих. Формула потпуне вероватноће.

РЕШЕЊА

1. Означимо $a_n = \left(\frac{n}{n+5}\right)^{n^2}$. Како је

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+5}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n+5}{-5}}\right)^{\frac{n+5}{-5}\frac{-5}{n+5}\cdot n} = e^{-5} < 1,$$

то дати ред конвергира по Кошијевом критеријуму.

2. Домен дате функције је $\mathcal{D} = (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, па је потенцијална вертикална асимптота права $x=0$. Како је

$$\lim_{x\to 0+}\left(e^{\frac{1}{2x}} - x + 2\right) = +\infty,$$

то права $x=0$ јесте вертикална асимптота.
Испитајмо да ли функција има хоризонталних асимптота. Како је

$$\lim_{x\to\infty}\left(e^{\frac{1}{2x}} - x + 2\right) = \infty,$$

то дата функција нема хоризонталних асимптота. Остаје још да испитамо да ли има косих асимптота.

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{2x}} - x + 2}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^{\frac{1}{2x}}}{x} - 1 + \frac{2}{x}\right) = -1,$$

$$n = \lim_{x\to\infty}\left(e^{\frac{1}{2x}} - x + 2 - (-1)\cdot x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(e^{\frac{1}{2x}} + 2\right) = 3,$$

па је права $y = -x+3$ коса асимптота дате функције.

3.

$$\int_1^{e^2} x^3 \ln(\sqrt{x})\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = \ln(\sqrt{x}) & \mathrm{d}v = x^3\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \frac{1}{2x}\mathrm{d}x & v = \frac{x^4}{4} \end{bmatrix}$$

$$= \ln(\sqrt{x}) \cdot \frac{x^4}{4}\Big|_1^{e^2} - \frac{1}{8}\int_1^{e^2} x^3\mathrm{d}x$$

$$= \frac{e^8}{4} - \frac{1}{32}x^4\Big|_1^{e^2}$$

$$= \frac{e^8}{4} - \frac{e^8}{32} + \frac{1}{32}$$

$$= \frac{7e^8+1}{32}$$

4. Уведимо смену $u = y'$. Тада је $u' = y''$, па добијамо

$$u'(x^2+5x+6) - u(2x+5) = 0,$$

односно добијамо диференцијалну једначину која раздваја променљиве.

$$\frac{u'}{u} = \frac{2x+5}{x^2+5x+6}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{2x+5}{x^2+5x+6}\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int \frac{2x+5}{x^2+5x+6}\mathrm{d}x$$

$$\ln|u| = \ln|x^2+5x+6| + c_1$$

$$|u| = |x^2+5x+6| \cdot e^{c_1}$$

$$u = c(x^2+5x+6)$$

Како је $y' = u$, то је опште решење полазне једначине

$$y = \int u\mathrm{d}x = \int c(x^2+5x+6)\mathrm{d}x = c\left(\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 6x\right) + d,\ \ c, d \in \mathbb{R}.$$

5. Посматрајмо следеће догађаје:

A - резултат теста је позитиван,
H_1 - испитаник има дијабетес,
H_2 - испитаник нема дијабетес.

Подаци који су нам дати у задатку су да је

$$P(H_1) = 0.1, \quad P(H_2) = 0.9, \quad P(A|H_1) = 0.8, \quad P(A|H_2) = 0.3$$

а) Потребно је одредити $P(A)$. На основу формуле тоталне вероватноће имамо

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = 0.1 \cdot 0.8 + 0.9 \cdot 0.3 = 0.35.$$

б) Тражена вероватноћа је $P(H_1|A)$ коју добијамо помоћу Бајесове формуле

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{0.1 \cdot 0.8}{0.35} \approx 0.23$$

6. **а)** Видети у уџбенику.
б) Домен дате функције је $\mathcal{D} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Први и други извод дате функције су

$$y' = \frac{e^x(x-1)}{x^2}, \quad y'' = \frac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3}.$$

Како је $e^x(x^2-2x+2) > 0$ за свако $x \in \mathcal{D}$, то знак другог извода зависи само од x^3 и имамо да је

$$y'' > 0 \text{ за } x > 0,$$
$$y'' < 0 \text{ за } x < 0,$$

па је дата функција конвексна на $(0, +\infty)$, а конкавна на $(-\infty, 0)$.

7. Видети у уџбенику.

Група 3

1. **(8 п)** Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n-3}\right)^{n^2}$.

2. **(8 п)** Одредити асимптоте функције $y=e^{\frac{1}{5x}}-\frac{x}{5}$.

3. **(8 п)** Израчунати вредност интеграла $\int\limits_1^{e^2} x^2\ln(\sqrt{x})\mathrm{d}x$.

4. **(8 п)** Наћи опште решење диференцијалне једначине $y''(3x^2+1)-6xy'=0$.

5. Тест за испитивање трудноће прави грешку. Уколико је жена трудна вероватноћа да ће тест показати позитиван резултат је $0,9$, а уколико жена није трудна вероватноћа да ће тест показати позитиван резултат је $0,2$. У групи жена које раде тест њих 30% је трудно. Једна од тих жена је радила тест и добила резултат.

а) **(4 п)** Одредити вероватноћу да је резултат теста позитиван.

б) **(4 п)** Ако је резултат теста позитиван, одредити вероватноћу да је жена трудна.

6. **а)** **(5 п)** Дати дефиницију конвексности и конкавности функције.

б) **(5 п)** Испитати конвексност функције $y=\frac{e^x}{x}$.

7. **(10 п)** Дефиниција и пример независних променљивих. Формула потпуне вероватноће.

РЕШЕЊА

1. Означимо $a_n=\left(\frac{2n}{2n-3}\right)^{n^2}$. Како је

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{2n-3}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n-3}{3}}\right)^{\frac{2n-3}{3}\frac{3}{2n-3}\cdot n}=e^{\frac{3}{2}}>1,$$

то дати ред дивергира по Кошијевом критеријуму.

2. Домен дате функције је $\mathcal{D}=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, па је потенцијална вертикална асимптота права $x=0$. Како је

$$\lim_{x\to 0+}\left(e^{\frac{1}{5x}}-\frac{x}{5}\right)=+\infty,$$

то права $x=0$ јесте вертикална асимптота.
Испитајмо да ли функција има хоризонталних асимптота. Како је

$$\lim_{x\to\infty}\left(e^{\frac{1}{5x}}-\frac{x}{5}\right)=\infty,$$

то дата функција нема хоризонталних асимптота. Остаје још да испитамо да ли има косих асимптота.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{5x}}-\frac{x}{5}}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^{\frac{1}{5x}}}{x}-\frac{1}{5}\right)=-\frac{1}{5},$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(e^{\frac{1}{5x}}-\frac{x}{5}-\left(-\frac{1}{5}\right)\cdot x\right)=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{5x}}=1,$$

па је права $y=-\frac{x}{5}+1$ коса асимптота дате функције.

3.

$$\int_1^{e^2} x^2\ln(\sqrt{x})\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u=\ln(\sqrt{x}) & \mathrm{d}v = x^2\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \frac{1}{2x}\mathrm{d}x & v=\frac{x^3}{3}\end{bmatrix}$$

$$= \ln(\sqrt{x})\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_1^{e^2} - \frac{1}{6}\int_1^{e^2} x^2\mathrm{d}x$$

$$= \frac{e^6}{3} - \frac{1}{18}x^3\Big|_1^{e^2}$$

$$= \frac{e^6}{3} - \frac{e^6}{18} + \frac{1}{18}$$

$$= \frac{5e^6+1}{18}$$

4. Уведимо смену $u = y'$. Тада је $u' = y''$, па добијамо

$$u'(3x^2+1) - 6xu = 0,$$

односно добијамо диференцијалну једначину која раздваја променљиве.

$$\frac{u'}{u} = \frac{6x}{3x^2+1}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{6x}{3x^2+1}\mathrm{d}x$$

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{u} = \int\frac{6x}{3x^2+1}\mathrm{d}x$$

$$\ln|u| = \ln|3x^2+1| + c_1$$

$$|u| = |3x^2+1|\cdot e^{c_1}$$

$$u = c(3x^2+1)$$

Како је $y' = u$, то је опште решење полазне једначине

$$y = \int u\mathrm{d}x = \int c(3x^2+1)\mathrm{d}x = c\left(x^3+x\right) + d,\ \ c,d\in\mathbb{R}.$$

5. Посматрајмо следеће догађаје:

A - резултат теста је позитиван,
H_1 - жена је трудна,
H_2 - жена није трудна.

Подаци који су нам дати у задатку су да је

$$P(H_1) = 0.3,\quad P(H_2) = 0.7,\quad P(A|H_1) = 0.9,\quad P(A|H_2) = 0.2$$

а) Потребно је одредити $P(A)$. На основу формуле тоталне вероватноће имамо

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = 0.3\cdot 0.9 + 0.7\cdot 0.2 = 0.41.$$

б) Тражена вероватноћа је $P(H_1|A)$ коју добијамо помоћу Бајесове формуле

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{0.3\cdot 0.9}{0.41} \approx 0.66$$

6. а) Видети у уџбенику.
б) Домен дате функције је $\mathcal{D} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Први и други извод дате функције су

$$y' = \frac{e^x(x-1)}{x^2}, \quad y'' = \frac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3}.$$

Како је $e^x(x^2 - 2x + 2) > 0$ за свако $x \in \mathcal{D}$, то знак другог извода зависи само од x^3 и имамо да је

$$\begin{aligned} y'' > 0 \text{ за } x > 0, \\ y'' < 0 \text{ за } x < 0, \end{aligned}$$

па је дата функција конвексна на $(0, +\infty)$, а конкавна на $(-\infty, 0)$.

7. Видети у уџбенику.

РЕШЕЊА ФЕБРУАРСКОГ РОКА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 13.02.2019.

ЗАДАЦИ

1. (8 п) Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln n+3n^5}{2n^6}\right)^n$.
2. (8 п) Испитати конвексност и наћи превојне тачке функције $y=\ln^2 x+\ln x$.
3. (8 п) Израчунати $\int_0^1 x^2 \mathrm{arctg} x \mathrm{d}x$.
4. (8 п) Наћи опште решење диференцијалне једначине $y''-y'-6y=e^{3x}$.
5. (8 п) Која је вероватноћа да су у групи од пет особа бар две рођене истог дана у недељи?
6. а) (5 п) Дати дефиницију диференцијабилности функције.
б) (5 п) Израчунати извод функције $e^{2x^2-4x+1}\cdot\sin(3x-2)$
7. (10 п) Формуле за површину и запремину обртних тела. Извести формуле за запремину и површину лопте.

РЕШЕЊА

1. Означимо са $a_n=\left(\frac{\ln n+3n^5}{2n^6}\right)^n$. Како је

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n+3n^5}{2n^6}=0<1,$$

то дати ред конвергира на основу Кошијевог критеријума. (Користили смо да је $\ln n << 2n^6$, па је $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{2n^6}=0$.)

2. Домен функције је $\mathcal{D}=(0,+\infty)$. Израчунајмо први други извод дате функције

$$f'(x)=\frac{2\ln x}{x}+\frac{1}{x}=\frac{2\ln x+1}{x},\quad f''(x)=\frac{1-2\ln x}{x^2}.$$

Имамо да је $f''(x)=0$ за $x=\sqrt{e}$ и

$$f''(x)>0 \text{ за } x\in(0,\sqrt{e}),$$
$$f'(x)<0 \text{ за } x\in(\sqrt{e},+\infty),$$

па закључујемо да је

f ковексна на $(0,\sqrt{e})$,
f конкавна на $(\sqrt{e},+\infty)$,
тачка $x=\sqrt{e}$ је превојна тачка.

3.

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 x^2 \mathrm{arctg} x \mathrm{d}x &= \begin{bmatrix} u = \mathrm{arctg} x & \mathrm{d}v = x^2 \\ \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} & v = \frac{x^3}{3} \end{bmatrix} \\
&= \frac{x^3}{3} \mathrm{arctg} x \Big|_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{x^3 + x - x}{x^2+1} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \int_0^1 \left(x - \frac{x}{x^2+1} \right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{12} - \frac{x^2}{6} \Big|_0^1 + \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} \mathrm{d}x \\
&= \begin{bmatrix} t = x^2 + 1 \\ \mathrm{d}t = 2x \mathrm{d}x \\ x = 0 \longrightarrow t = 1 \\ x = 1 \longrightarrow t = 2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{\pi - 2}{12} + \frac{1}{6} \int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&= \frac{\pi - 2}{12} + \frac{1}{6} \ln |t| \Big|_1^2 \\
&= \frac{\pi - 2 + 2 \ln 2}{12}
\end{aligned}
$$

4. Најпре нађимо решење хомогене једначине $y'' - y' + 6y = 0$. Нуле карактеристичне једначине $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$ су $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 3$, па је $y_h = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x}$.
Партикуларно решење је облика $y_p = Axe^{3x}$. Израчунајмо први и други извод партикуларног решења и убацимо га у полазну једначину.

$$
y_p' = (A + 3Ax)e^{3x}, \quad y_p'' = (6A + 9Ax)e^{3x},
$$

па је

$$
(6A + 9Ax)e^{3x} - (A + 3Ax)e^{3x} - 6Axe^{3x} = e^{3x}
$$

односно након сређивања

$$
5A = 1
$$

па је

$$
A = \frac{1}{5}.
$$

Добијамо да је партикуларно решење је $y_p = \frac{1}{5} x e^{3x}$.
Коначно, опште решење дате једначине је

$$
y = y_h + y_p = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x} + \frac{1}{5} x e^{3x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.
$$

5. Нека је A догађај да у групи од пет особа бар две су рођене истог дана. Приметимо да је супротан догађај догађаја A догађај да у групи од пет особа су све рођене различитих дана. Израчунајмо вероватноћу супротног догађаја $\bar{A}$. Број повољних исхода за догађај $\bar{A}$ је $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$, а укупан број исхода је 7^5. Одатле добијамо да је

$$
P(\bar{A}) = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{7^5} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{7^4} = \frac{360}{2401}.
$$

Сада можемо одредити тражену вероватноћу.

$$
P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{360}{2401} = \frac{1681}{2401} \approx 82\%.
$$

6. а) Видети у уџбенику.

б) Означимо $f(x) = e^{2x^2-4x+1} \cdot \sin(3x-2)$. Тражени извод је

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(e^{2x^2-4x-1}\right)' \cdot \sin(3x-2) + e^{2x^2-4x-1} \cdot (\sin(3x-2))' \\
&= e^{2x^2-4x-1} \cdot (2x^2-4x+1)' \cdot \sin(3x-2) + e^{2x^2-4x-1} \cdot \cos(3x-2) \cdot (3x-2)' \\
&= e^{2x^2-4x-1} \cdot (4x-4) \cdot \sin(3x-2) + e^{2x^2-4x-1} \cdot \cos(3x-2) \cdot 3 \\
&= e^{2x^2-4x-1} \left(4(x-1)\sin(3x-2) + 3\cos(3x-2)\right).
\end{aligned}$$

7. Видети у уџбенику.

РЕШЕЊА ЈУНСКОГ РОКА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 19.06.2019.

ЗАДАЦИ

1. (8 п) Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n+1)!-n!}$.
2. (8 п) Испитати монотоност и наћи екстремуме функције $y = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.
3. (8 п) Израчунати $\int \frac{\cos x}{\cos 2x} \mathrm{d}x$.
4. (8 п) Наћи партикуларно решење диференцијалне једначине $y'' - 8y' + 16y = x^2$, са почетним условима $y(0) = 0,\ y(1) = 19$.
5. (8 п) Милена има две полице са књигама од којих је неке прочитала. На првој полици од укупно 30 прочитала је 10 књига, а на другој од укупно 40 прочитала је 30 књига. Милена насумице бира полицу и једну књигу са ње.

(4 п) а) Одредити вероватноћу да је одабрала књигу коју није читала.

(4 п) б) Ако је одабрала књигу коју није читала, одредити вероватноћу да је са прве полице.

6. (5 п) а) Како гласи Кошијев критеријум за конвергенцију редова?

(5 п) б) Користећи Кошијев критеријум испитати за које $x \geqslant 0$ ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+n+1}$ конвергира.
7. (10 п) Линеарна диференцијална једначина првог реда. Опште решење и решење Кошијевог проблема.

РЕШЕЊА

1. Означимо са $a_n = \frac{5^n}{(n+1)!-n!}$. Како је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5^{n+1}}{(n+2)!-(n+1)!}}{\frac{5^n}{(n+1)!-n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5^{n+1}}{(n+1)\cdot(n+1)!}}{\frac{5^n}{n\cdot n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n}{(n+1)^2} = 0 < 1,$$

то дати ред конвергира на основу Даламберовог критеријума.

2. Домен функције је $\mathcal{D} = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$. Израчунајмо први извод дате функције

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{-1}{x^2 + x} = -\frac{1}{x(x+1)}.$$

Како је $f'(x) < 0$ за $x \in \mathcal{D}$, закључујемо да функција f свуда опада и нема екстремума.

3.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos x}{\cos 2x}\mathrm{d}x &= \int \frac{\cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\cos x}{1 - 2\sin^2 x}\mathrm{d}x \\
&= \begin{bmatrix} t = \sin x \\ \mathrm{d}t = \cos x \mathrm{d}x \end{bmatrix} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}t}{1-2t^2} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}t}{(1-t\sqrt{2})(1+t\sqrt{2})} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2}{(1-t\sqrt{2})(1+t\sqrt{2})}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1-t\sqrt{2}+1+t\sqrt{2}}{(1-t\sqrt{2})(1+t\sqrt{2})}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1+t\sqrt{2}} + \frac{1}{1-t\sqrt{2}}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\ln(1+t\sqrt{2}) - \ln(1-t\sqrt{2})\Big) + c \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{1+t\sqrt{2}}{1-t\sqrt{2}}\right) + c \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{1+\sin x\cdot\sqrt{2}}{1-\sin x\cdot\sqrt{2}}\right) + c
\end{aligned}$$

4. Најпре нађимо решење хомогене једначине $y'' - 8y' + 16y = 0$. Нуле карактеристичне једначине $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$ су $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$, па је $y_h = c_1 e^{4x} + c_2 x e^{4x}$.
Партикуларно решење је облика $y_p = Ax^2 + Bx + C$. Израчунајмо први и други извод партикуларног решења и убацимо га у полазну једначину.

$$y_p' = 2Ax + B, \quad y_p'' = 2A$$

па је

$$2A - 8(2Ax + B) + 16(Ax^2 + Bx + C) = 128x^2$$

односно након сређивања

$$16Ax^2 + (-16A + 16B)x + 2A - 8B + 16C = 128x^2$$

одакле изједначавањем коефицијената уз 1, x и x^2 добијамо систем три једначине са три непознате.

$$\begin{aligned}
2A - 8B + 16C &= 0 \\
-16A + 16B &= 0 \\
16A &= 128
\end{aligned}$$

Решење овог система је $A = 8$, $B = 8$, $C = 3$, па добијамо да је партикуларно решење је $y_p = 8x^2 + 8x + 3$.
Коначно, опште решење дате једначине је

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{4x} + c_2 x e^{4x} + 8x^2 + 8x + 3, \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Остаје још да нађемо партикуларно решење. Убацивањем услова $y(0) = 0$ и $y(1) = 19$ у опште решење добијамо једначине

$$0 = c_1 + 3,$$
$$19 = c_1 e^4 + c_2 e^4 + 19,$$

одакле коначно добијамо да је $c_1 = -3$ и $c_2 = 3$, па је тражено партикуларно решење

$$y = -3e^{4x} + 3xe^{4x} + 8x^2 + 8x + 3.$$

5. Означимо са H_1 и H_2 хипотезе да је Милена одабрала књигу са прве односно друге полице и нека је догађај A догађај да је извукла књигу коју није читала.
(а) Желимо да одредимо $P(A)$. На основу формуле потпуне вероватноће имамо да је

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2),$$

па одредимо ове четири вероватноће.

$$P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2},$$

$$P(A|H_1) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}, \quad P(A|H_2) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4},$$

па добијамо

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{11}{24}.$$

(б) Желимо да одредимо вероватноћу $P(H_1|A)$ коју рачунамо по формули

$$P(H_1|A) = \frac{P(AH_1)}{P(A)} = \frac{P(H_1) \cdot P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{11}{24}} = \frac{8}{11}.$$

6. (а) Видети у уџбенику.
(б) Означимо са $a_n = \frac{x^n}{n^2+n+1}$. Тада је

$$r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{x^n}{n^2+n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{\sqrt[n]{n^2+n+1}} = x.$$

Знамо да на основу Кошијевог критеријума дати ред конвергира за $r < 1$, а дивергира за $r > 1$, па ће дати ред конвергирати за $x < 1$, дивергирати за $x > 1$ и још случај $x = 1$ треба посебно испитати. Када је $x = 1$ дати ред постаје

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+1},$$

а овај ред конвергира на основу поредбеног критеријума јер је он еквиконвергентан са редом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ за који знамо да конвергира.

Коначно, добијамо да дати ред конвергира за $x \in [0, 1]$.
7. Видети у уџбенику.

РЕШЕЊА ЈУЛСКОГ РОКА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 10.07.2019.

ЗАДАЦИ

1. (8 п) Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!}$.

2. (8 п) Израчунати $\lim_{x\to 0+} x^{\sin x}$.

3. (8 п) Израчунати површину фигуре у равни ограничене правама $x = 0$, $y = 0$ и параболом $y = (x+1)^2$.

4. (8 п) Наћи опште решење диференцијалне једначине $y'' + y' - 2y = \sin 2x$.

5. (8 п) Виленьак пакује пакетиће. На располагању има 5 чоколада, 3 медведића и 4 слагалице. Из складишта одједном бира три предмета. Одредити расподелу случајне променљиве X која представља број извучених медведића, као и $E(X)$ и $D(X)$.

6. (5 п) а) Нека је $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрекидна на $[a,b]$ и диференцијабилна на (a,b). Који су кандидати за тачке x у којима $f(x)$ има апсолутне екстремуме на $[a,b]$?

(5 п) б) Наћи апсолутне екстремуме функције $f(x) = 2x^3 - x^2 + 1$ на интервалу $[-1,1]$.

7. (10 п) Линеарна хомогена диференцијална једначина другог реда са константним коефицијентима. Опште решење.

РЕШЕЊА

1. Означимо са $a_n = \frac{e^n}{n!}$. Како је

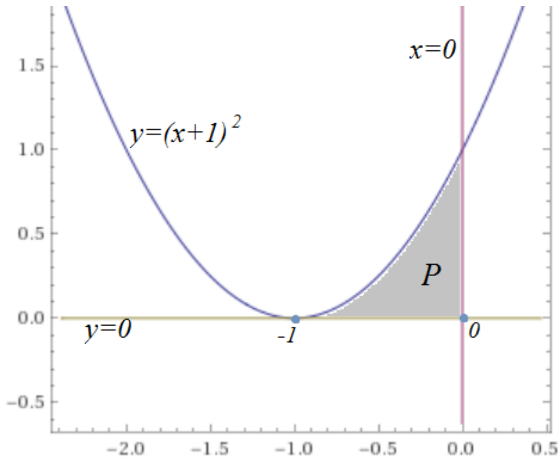
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{e^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{e^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e}{n+1} = 0 < 1,$$

то дати ред конвергира на основу Даламберовог критеријума.

2.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0+} x^{\sin x} &= \lim_{x\to 0+} e^{\ln\left(x^{\sin x}\right)} \\
&= \lim_{x\to 0+} e^{\sin x \cdot \ln x} \\
&= e^{\lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}} \\
&\overset{L.P.}{=} e^{\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}}} \\
&= e^{\lim_{x\to 0+} \frac{\sin^2 x}{-x\cos x}} \\
&= e^{\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{-\cos x}} \\
&= e^{1\cdot \frac{0}{-1}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

3. Са слике



видимо да је тражена површина једнака

$$P = \int_{-1}^{0} (x+1)^2 \mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right) \Big|_{-1}^{0} = \frac{1}{3}.$$

4. Најпре нађимо решење хомогене једначине $y'' + y' - 2y = 0$. Нуле карактеристичне једначине $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ су $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, па је $y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$.
Партикуларно решење је облика $y_p = A \sin 2x + B \cos 2x$. Израчунајмо први и други извод партикуларног решења и убацимо га у полазну једначину.

$$y_p' = 2A \cos 2x - 2B \sin 2x, \quad y_p'' = -4A \sin 2x - 4B \cos 2x$$

па је

$$-4A \sin 2x - 4B \cos 2x + 2A \cos 2x - 2B \sin 2x - 2(A \sin 2x + B \cos 2x) = \sin 2x$$

односно након сређивања

$$\sin 2x(-6A - 2B) + \cos 2x(2A - 6B) = \sin 2x$$

одакле изједначавањем коефицијената уз $\sin 2x$ и $\cos 2x$ добијамо систем две једначине са две непознате.

$$\begin{aligned} -6A - 2B &= 1 \\ 2A - 6B &= 0 \end{aligned}$$

Решење овог система је $A = -\frac{3}{20}$, $B = -\frac{1}{20}$, па добијамо да је партикуларно решење је $y_p = -\frac{3}{20} \sin 2x - \frac{1}{20} \cos 2x$.
Коначно, опште решење дате једначине је

$$y = y_h + y_p = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} - \frac{3}{20} \sin 2x - \frac{1}{20} \cos 2x, \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

5. Приметимо да је $X \in \{0,1,2,3\}$, па је потребно да одредимо наредне четири вероватноће.

$$P(X=0) = \binom{9}{3}\binom{12}{3} = \frac{21}{55}$$

$$P(X=1) = \frac{\binom{9}{2}\cdot\binom{3}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{27}{55}$$

$$P(X=2) = \frac{\binom{9}{1}\cdot\binom{3}{2}}{\binom{12}{3}} = \frac{27}{220}$$

$$P(X=3) = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{1}{220}$$

Заиста, нпр. кад смо рачунали $P(X=2)$ то је вероватноћа да од 3 одабране играчке, две су медведићи, па повољних догађаја имамо $\binom{9}{1}\cdot\binom{3}{2}$ (бирамо од 9 играчака које нису медведићи једну и од три медведића бирамо два) а укупан број могућих догађаја је $\binom{12}{3}$ (од 12 играчака бирамо неке 3).
Дакле, расподела случајне величине X има следећи облик.

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{21}{55} & \frac{27}{55} & \frac{27}{220} & \frac{1}{220} \end{pmatrix}$$

Математичко очекивање ове случајне променљиве је

$$E(X) = 0\cdot\frac{21}{55} + 1\cdot\frac{27}{55} + 2\cdot\frac{27}{220} + 3\cdot\frac{1}{220} = \frac{3}{4}.$$

За дисперзију биће нам потребна расподела случајне величине X^2 која изгледа овако

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ \frac{21}{55} & \frac{27}{55} & \frac{27}{220} & \frac{1}{220} \end{pmatrix},$$

па је

$$E(X^2) = 0\cdot\frac{21}{55} + 1\cdot\frac{27}{55} + 4\cdot\frac{27}{220} + 9\cdot\frac{1}{220} = \frac{45}{44}.$$

Коначно, дисперзија случајне променљиве X је

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{45}{44} - \frac{9}{16} = \frac{81}{176}.$$

6. (а) Кандидати су све нуле првог извода функције $f'(x)$ из интервала (a,b) као и крајеви интервала a и b.
(б) Први извод функције f је

$$f'(x) = 6x^2 - 2x = 2x(3x-1),$$

па видимо да је први извод једнак нули за $x=0$ и за $x=\frac{1}{3}$ па су то потенцијални екстремуми. Како је први извод позитиван на $(-\infty,0)\cup(\frac{1}{3},+\infty)$, а негативан на $(0,\frac{1}{3})$, то функција f расте на $(-\infty,0)\cup(\frac{1}{3},+\infty)$ и опада на $(0,\frac{1}{3})$ па закључујемо да је $x=0$ локални максимум, а $x=\frac{1}{3}$ локални минимум. Када на то додамо крајеве интервала, добијамо да су $\left\{-1,0,\frac{1}{3},1\right\}$ све тачке екстремума ове функције, па треба само да видимо који је највећи а који најмањи.

$$f(-1) = 2\cdot(-1)^3 - (-1)^2 + 1 = -2$$

$$f(0) = 2\cdot 0^3 - 0^2 + 1 = 1$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1 = \frac{26}{27}$$

$$f(1) = 2\cdot 1^3 - 1^2 + 1 = 2$$

Коначно, закључујемо да је $x = -1$ апсолутни минимум, а $x = 1$ апсолутни максимум дате функције.
7. Видети у уџбенику.

РЕШЕЊА АВГУСТОВСКОГ РОКА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 28.08.2019.

ЗАДАЦИ

1. (8 п) Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot 2^{n+1} \cdot \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{2n}$.

2. (8 п) Испитати монотоност и наћи локалне екстремуме функције $y = e^{x^4-2x^2}$

3. (8 п) Израчунати $\int\limits_1^e x\sqrt[4]{x^3}\ln(x^2)\mathrm{d}x$.

4. (8 п) Наћи партикуларно решење диференцијалне једначине $xy''+y' = 8x$ са почетним условима $y(1) = 0$, $y'(1) = 0$.

5. (8 п) Из шпила од 52 карте извлаче се три карте одједном.

(4 п) а) Одредити вероватноћу да ниједна од три карте није у знаку срца.

(4 п) б) Ако знамо да ниједна од три карте није у знаку срца, одредити вероватноћу да су извучене тачно две даме.

6. (а) **(5 п)** Дати дефиницију диференцијабилности функције.

(б) **(5 п)** Израчунати извод функције $y = \frac{\ln(x^2+1)}{\sin\sqrt{x}}$.

7. (10 п) Бернулијева диференцијална једначина. Опште решење и пример решавања.

РЕШЕЊА

1. Означимо са $a_n = n \cdot 2^{n+1} \cdot \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{2n}$. Како је

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n \cdot 2^{n+1} \cdot \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot 2 \cdot \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{2} = 1 \cdot 2 \cdot 1^2 = 2 > 0,$$

то дати ред дивергира на основу Кошијевог критеријума.

2. Домен дате функције је $\mathcal{D}_y = \mathbb{R}$. Први извод дате функције је

$$y' = (4x^3 - 4x)e^{x^4-2x^2} = 4x(x^2-1)e^{x^2-3x^2} = 4x(x-1)(x+1)e^{x^2-3x^2}.$$

Како је експоненцијална функција увек позитивна, то знак првог извода зависи само од $x(x-1)(x+1)$, па закључујемо да је

$$\begin{aligned} y' &> 0, \ \text{ за } x \in (-1,0) \cup (1,+\infty),\\ y' &< 0, \ \text{ за } x \in (-\infty,-1) \cup (0,1),\\ y' &= 0, \ \text{ за } x \in \{-1,0,1\}. \end{aligned}$$

Одавде добијамо да

y расте на $(-1,0) \cup (1,+\infty)$,
y опада на $(-\infty,-1) \cup (0,1)$,
$x = -1$ и $x = 1$ су локални минимуми,
$x = 0$ је локални максимум.

3.

$$\begin{aligned}
\int_1^e x\sqrt[4]{x^3}\ln(x^2)\mathrm{d}x &= \int_1^e x^{\frac{7}{4}}\ln(x^2)\mathrm{d}x \\
&= \begin{bmatrix} u=\ln(x^2) & \mathrm{d}v = x^{\frac{7}{4}}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u=\frac{2}{x}\mathrm{d}x & v=\frac{4}{11}x^{\frac{11}{4}} \end{bmatrix} \\
&= \frac{4}{11}x^{\frac{11}{4}}\ln(x^2)\Big|_1^e - \frac{8}{11}\int_1^e x^{\frac{7}{4}}\mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{11}x^{\frac{11}{4}}\ln(x^2)\Big|_1^e - \frac{32}{121}x^{\frac{11}{4}}\Big|_1^e\mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{11}e^{\frac{11}{4}}\cdot 2 - 0 - \frac{32}{121}e^{\frac{11}{4}} + \frac{32}{121} \\
&= \frac{56e^{\frac{11}{4}}+32}{121}
\end{aligned}$$

4. Уведимо смену $u = y'$. Тада је $u' = y''$ па кад убацимо смену дата једначина се своди на

$$xu' + u = 8x,$$

а када ову једначину поделимо са x, уз претпоставку да је $x \neq 0$, добијамо општи облик линеарне једначине

$$u' + \frac{1}{x}\cdot u = 8,$$

чије је опште решење дато формулом

$$\begin{aligned}
u &= e^{-\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(c + \int e^{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}\cdot 8\right) \\
&= e^{-\ln x}\left(c + \int e^{\ln x}\cdot 8\right) \\
&= \frac{1}{x}\left(c+4x^2\right),\ c\in\mathbb{R},
\end{aligned}$$

где смо претпоставили да је $x > 0$, а случај $x < 0$ се слично решава. Сада можемо да нађемо y.

$$y = \int u\mathrm{d}x = \int\left(\frac{c}{x}+4x\right)\mathrm{d}x = c\ln x + 2x^2 + d,\ c,d\in\mathbb{R}.$$

Остаје још да нађемо партикуларно решење. Убацимо услове $y(1) = 0$ и $y'(1) = 0$ и добијамо

$$c\cdot\ln 1 + 2\cdot 1^2 + d = 0,$$
$$\frac{1}{1}(c + 4\cdot 1^2) = 0,$$

одакле добијамо да је $c = -4$ и $d = -2$ па је тражено партикуларно решење

$$y = -4\ln x + 2x^2 - 2.$$

5. (a) Означимо са A догађај да ниједна извучена карта није у знаку срца. Тражимо $P(A)$. Укупан број исхода при извлачењу три карте одједном из шпила од 52 карте је $\binom{52}{3}$, а број повољних исхода је $\binom{39}{3}$ јер нам одговара да извучемо било које три карте које нису срце, а тих карата има укупно 39. Дакле, по дефиницији тражена вероватноћа је

$$P(A) = \frac{\binom{39}{3}}{\binom{52}{3}} = \frac{\frac{39\cdot 38\cdot 37}{3\cdot 2\cdot 1}}{\frac{52\cdot 51\cdot 50}{3\cdot 2\cdot 1}} = \frac{703}{1700}.$$

(б) Означимо са B догађај да су извучене тачно две даме. У овом делу задатка нама се тражи условна вероватноћа $P(B|A)$ коју рачунамо по формули

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Вероватноћу $P(A)$ смо већ израчунали па остаје само да одредимо вероватноћу $P(AB)$ тј. колика је вероватноћа да се догађаји A и B истовремено испуне, односно да су извучене тачно две даме и да ниједна од карата није у знаку срца. Укупан број исхода при овом извлачењу је поново $\binom{52}{3}$, а број повољних исхода рачунамо као $\binom{3}{2} \cdot \binom{37}{1}$ (од три даме које нису срце бирамо две и то је $\binom{3}{2}$ могућности и то множимо са бројем могућности да од преосталих 37 карата које нису ни те две даме нити срце изаберемо једну, тј. $\binom{37}{1}$). Коначно,

$$P(B|A) = \frac{\frac{\binom{3}{2} \cdot \binom{37}{1}}{\binom{52}{3}}}{\frac{703}{1700}} = \frac{3}{247}.$$

6. (а) Видети у уџбенику.
(б) Први извод функције y је

$$y' = \frac{\frac{2x}{x^2+1} \cdot \sin\sqrt{x} - \cos\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln(x^2+1)}{\sin^2\sqrt{x}}.$$

7. Видети у уџбенику.

РЕШЕЊА СЕПТЕМБАРСКОГ РОКА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 18.09.2019.

ЗАДАЦИ

1. (8 п) Израчунати лимес $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

2. (8 п) Наћи асимптоте функције $y = \operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

3. (8 п) Израчунати $\int \frac{1}{x^2+10x+26}\mathrm{d}x$.

4. (8 п) Наћи партикуларно решење диференцијалне једначине $xy' = y + xe^{-\frac{y}{x}}$ са почетним условом $y(1) = 0$.

5. (8 п) На столу су три новчића од којих су два исправна, а трећи са обе стране има грб. Случајно је изабран један новчић и бачен четири пута.

(4 п) а) Одредити вероватноћу да је сва четири пута пао грб.

(4 п) б) Ако је сва четири пута пао грб, одредити вероватноћу да је изабран исправан новчић.

6. (а) **(5 п)** Дати дефиницију конвексности и конкавности функције.

(б) **(5 п)** Испитати конвексност функције $y = \frac{\ln x}{2x}$.

7. (10 п)

РЕШЕЊА

1.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) &= \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\left(\left(\sqrt{n+1}\right)^2-\left(\sqrt{n}\right)^2\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\,(n+1-n)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\cdot\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

2. Домен дате функције је $\mathcal{D}_y = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Вертикалне асимптоте: Кандидат за вертикалну асимптоту је права $x = 0$. Како је

$$\lim_{x\to0+} f(x) = \frac{\pi}{2},\ \ \lim_{x\to0-} f(x) = -\frac{\pi}{2},$$

то дата функција нема вертикалних асимптота.

Хоризонталне асимптоте: Како је

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{x}\right) = \operatorname{arctg}1 = \frac{\pi}{4},$$

то је права $y = \frac{\pi}{4}$ хоризонтална асимптота у $+\infty$ и $-\infty$.

Косе асимптоте: Како функција има хоризонталну асимптоту у обе бесконачности, то она нема косих асимптота.

3.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+10x+26}\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{x^2+10x+25+1}\mathrm{d}x\\ &= \int \frac{1}{(x+5)^2+1}\mathrm{d}x\\ &= \begin{bmatrix} t=x+5\\ \mathrm{d}t=\mathrm{d}x\end{bmatrix}\\ &= \int \frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t\\ &= \mathrm{arctg} t + c\\ &= \mathrm{arctg}(x+5)+c,\ c\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

4. Дата једначина је хомогена диференцијална једначина првог реда. Поделимо је са x за $x \neq 0$. Добијамо једначину

$$y' = \frac{y}{x} + e^{-\frac{y}{x}}.$$

Када уведемо смену

$$u = \frac{y}{x},\ y = ux,\ y' = u'x + u$$

добијамо

$$\begin{aligned} u'x + u &= u + e^{-u}\\ u'x &= e^{-u}\\ e^u u' &= \frac{1}{x}\\ \int e^u \mathrm{d}u &= \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x\\ e^u &= \ln|x| + c\\ u &= \ln(\ln|x|+c),\ c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Коначно, добијамо да је

$$y = ux = x\ln(\ln|x|+c),\ c\in\mathbb{R}.$$

Остаје још да нађемо партикуларно решење. Када убацимо услов $y(1)=0$ добијамо

$$\begin{aligned} 0 &= 1\cdot\ln(\ln 1 + c)\\ 0 &= \ln c\\ c &= 1,\end{aligned}$$

па је тражено партикуларно решење

$$y = x\ln(\ln|x|+1).$$

5. Озачимо са A догађај да је сва четири пута пао грб, са H_1 хипотезу да смо одабрали исправан новчић, а са H_2 хипотезу да смо одабрали неисправан новчић.
(а) Тражена вероватноћа се добија формулом потпуне вероватноће

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A|H_1) + P(H_2)\cdot P(A|H_2).$$

Како је

$$P(H_1) = \frac{2}{3},\quad P(A|H_1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{16},\ P(H_2) = \frac{1}{3},\ P(A|H_2) = 1,$$

добијамо да је

$$P(A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{3}{8}$$

(б) Тражена вероатноћа је

$$P(H_1|A) = \frac{P(AH_1)}{P(A)} = \frac{P(H_1) \cdot P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{16}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{9}.$$

6. (а) Видети у уџбенику.
(б) Домен дате функције је $\mathcal{D}_y = (0, +\infty)$. Први и други изводи функције y су

$$y' = \frac{2 - 2\ln x}{4x^2},\ y'' = \frac{-8x - 8x(2 - 2\ln x)}{16x^4} = \frac{8x(2\ln x - 3)}{16x^4} = \frac{2\ln x - 3}{2x^3}$$

	0		$e^{\frac{3}{2}}$	
$2\ln x - 3$	///////	$-$		$+$
$2x^3$	///////	$+$		$+$
y''	///////	$-$		$+$

Дакле, имамо да је

$$\begin{aligned} y'' &> 0,\ \text{за } x \in \left(e^{\frac{3}{2}}, +\infty\right), \\ y'' &< 0,\ \text{за } x \in \left(0, e^{\frac{3}{2}}\right), \\ y &= 0,\ \text{за } x = \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

Па закључујемо да је дата функција конвексна на $\left(e^{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$, конкавна на $\left(0, e^{\frac{3}{2}}\right)$ и $x = e^{\frac{3}{2}}$ је превојна тачка.
7. Видети у уџбенику.