РЕШЕЊА ПРВОГ КОЛОКВИЈУМА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 25.11.2017.

Група 1

1. (5 поена) Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{n+5}\right)^n\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}$.

2. (5 поена) Израчунати $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{1+2\ln(2x)}}$.

3. (5 поена) Одредити асимптоте функције $\frac{x^3+2}{x^2-4}$.

4. (5 поена) Испитати монотоност и наћи екстремне вредности функције $\frac{e^x}{x^2-x+1}$.

5. (5 поена) Израчунати $\int \frac{x}{6x^2+5x+1}\mathrm{d}x$.

РЕШЕЊА

1. Означимо $a_n = \left(\frac{3n}{n+5}\right)^n\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}$. Тада је

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n+5}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n+5}\left(1-\frac{1}{n+3}\right)^{-(n+3)\cdot\frac{n}{-(n+3)}} = 3e^{-1} > 1,$$

па ред дивергира по Кошијевом критеријуму.

2.

$$\lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{1+2\ln(2x)}} = \lim_{x\to 0} e^{\ln\left(x^{\frac{1}{1+2\ln(2x)}}\right)} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1+2\ln(2x)}} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{LP}{=}} e^{\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{2}{x}}} = \sqrt{e}.$$

3. Домен функције $f(x) = \frac{x^3+2}{x^2-4}$ је $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-2,2\}$.

$$\lim_{x\to -2+} = +\infty,\quad \lim_{x\to -2-} = -\infty,\quad \lim_{x\to 2+} = +\infty,\quad \lim_{x\to 2-} = -\infty,$$

па су праве $x=-2$ и $x=2$ вертикалне асимптоте функције f.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty,$$

па f нема хоризонталних асимптота.

$$a = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = 1,\ b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-x) = 0,$$

па је права $y=x$ коса асимптота у $-\infty$ и у $+\infty$.

4. Полином x^2-x+1 нема реалних нула, па је домен функције f једнак $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2-3x+2)}{(x^2-x+1)^2} = \frac{e^x(x-1)(x-2)}{(x^2-x+1)^2}.$$

Имамо да је $f'(x)=0$ за $x=1$ и $x=2$, па су 1 и 2 стационарне тачке. Такође, имамо да је $f(x)>0$ за $x\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$ и $f(x)<0$ за $x\in(1,2)$, па закључујемо:

$$f \text{ расте на } (-\infty, 1) \cup (2, +\infty),$$
$$f \text{ опада на } (1, 2),$$
$$x = 1 \text{ је локални максимум и}$$
$$x = 2 \text{ је локални минимум.}$$

5. Раставимо најпре полином $6x^2 + 5x + 1$. На основу формуле за решавање квадратне једначине имамо

$$x_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{12}, \quad x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = -\frac{1}{3},$$

па имамо да је $6x^2 + 5x + 1 = (2x + 1)(3x + 1)$. На основу теореме о представљању рационалних функција имамо да је

$$\frac{x}{6x^2 + 5x + 1} = \frac{A}{2x + 1} + \frac{B}{3x + 1}$$

одакле рачуном добијамо да је $A = 1$ и $B = -1$, па је

$$\int \frac{x\mathrm{d}x}{6x^2 + 5x + 1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{2x + 1} - \int \frac{\mathrm{d}x}{3x + 1} = \frac{1}{2} \ln|2x + 1| - \frac{1}{3} \ln|3x + 1| + c.$$

Група 2

1. **(5 поена)** Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{4n+6}\right)^n\left(\frac{n-2}{n+2}\right)^{n(n+1)}$.

2. **(5 поена)** Израчунати $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+\sin\frac{x}{2})^{\frac{1}{2x}}$.

3. **(5 поена)** Одредити асимптоте функције $\frac{x^3+3}{x^2-9}$.

4. **(5 поена)** Испитати монотоност и наћи екстремне вредности функције $\frac{e^x}{x^2-3x+3}$.

5. **(5 поена)** Израчунати $\int x^2 \mathrm{arctg} x \mathrm{d}x$.

РЕШЕЊА

1. Означимо $a_n=\left(\frac{n+2}{4n+6}\right)^n\left(\frac{n-2}{n+2}\right)^{n(n+1)}$. Тада је

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{4n+6}\left(\frac{n-2}{n+3}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{4n+6}\left(1-\frac{4}{n+2}\right)^{-\frac{n+2}{4}\cdot\frac{-4n}{n+2}}=\frac{1}{4}e^{-4}<1,$$

па ред конвергира по Кошијевом критеријуму.

2.

$$\lim_{x\to 0}(\cos x+\sin\frac{x}{2})^{\frac{1}{2x}}=\lim_{x\to 0}e^{\ln\left((\cos x+\sin\frac{x}{2})^{\frac{1}{2x}}\right)}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x+\sin\frac{x}{2})}{2x}}\underset{\frac{0}{0}}{\overset{LP}{=}}$$

$$=e^{\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\sin x+\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos x+\sin\frac{x}{2}}}{2}}=e^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{e}.$$

3. Домен функције $f(x)=\frac{x^3+3}{x^2-9}$ је $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\backslash\{-3,3\}$.

$$\lim_{x\to -3+}=+\infty,\quad \lim_{x\to -3-}=-\infty,\quad \lim_{x\to 3+}=+\infty,\quad \lim_{x\to 3-}=-\infty,$$

па су праве $x=-3$ и $x=3$ вертикалне асимптоте функције f.

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm\infty,$$

па f нема хоризонталних асимптота.

$$a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=1,\ b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-x)=0,$$

па је права $y=x$ коса асимптота у $-\infty$ и у $+\infty$.

4. Полином x^2-3x+3 нема реалних нула, па је домен функције f једнак $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$.

$$f'(x)=\frac{e^x(x^2-5x+6)}{(x^2-3x+3)^2}=\frac{e^x(x-2)(x-3)}{(x^2-x+1)^2}.$$

Имамо да је $f'(x)=0$ за $x=2$ и $x=3$, па су 2 и 3 стационарне тачке. Такође, имамо да је $f(x)>0$ за $x\in(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$ и $f(x)<0$ за $x\in(2,3)$, па закључујемо:

$$\begin{gathered}f \text{ расте на } (-\infty, 2) \cup (3, +\infty),\\ f \text{ опада на } (2,3),\\ x = 2 \text{ је локални максимум и}\\ x = 3 \text{ је локални минимум.}\end{gathered}$$

5.

$$\int x^2 \mathrm{arctg} x \mathrm{d}x = \begin{Bmatrix} u = \mathrm{arctg} x & \mathrm{d}v = x^2 \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} & v = \frac{x^3}{3} \end{Bmatrix} = \frac{x^3}{3}\mathrm{arctg} x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{1+x^2}\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x^3}{3}\mathrm{arctg} x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3 + x - x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\mathrm{arctg} x - \frac{1}{3}\int \frac{x(x^2+1) - x}{1+x^2}\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x^3}{3}\mathrm{arctg} x - \frac{1}{3}\int \left(x - \frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\mathrm{arctg} x - \frac{1}{3}(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln|x^2+1|) + c =$$

$$= \frac{x^3}{3}\mathrm{arctg} x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\ln|x^2+1|) + c.$$

Група 3

1. (5 поена) Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n\left(\frac{n+4}{n+6}\right)^{3n^2}$.

2. (5 поена) Израчунати $\lim\limits_{x\to1}\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)^{\frac{1}{1-x}}$.

3. (5 поена) Одредити асимптоте функције $\frac{x^3+4}{x^2-16}$.

4. (5 поена) Испитати монотоност и наћи екстремне вредности функције $\frac{e^x}{x^2-5x+7}$.

5. (5 поена) Израчунати $\int x^{\frac{3}{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{x}\mathrm{d}x$.

РЕШЕЊА

1. Означимо $a_n=\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n\left(\frac{n+4}{n+6}\right)^{3n^2}$. Тада је

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}\left(\frac{n+4}{n+6}\right)^{3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}\left(1-\frac{2}{n+6}\right)^{-\frac{n+6}{2}\cdot\frac{-6n}{n+6}}=\frac{1}{2}e^{-6}<1,$$

па ред конвергира по Кошијевом критеријуму.

2.

$$\lim_{x\to1}\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)^{\frac{1}{1-x}}=\lim_{x\to1}e^{\ln\left(\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)^{\frac{1}{1-x}}\right)}=e^{\lim_{x\to1}\frac{\ln\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)}{1-x}}\overset{LP}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}$$

$$=e^{\lim_{x\to1}\frac{\frac{\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}}{\sin\frac{\pi x}{2}}}{-1}}=e^0=1.$$

3. Домен функције $f(x)=\frac{x^3+4}{x^2-16}$ је $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\backslash\{-4,4\}$.

$$\lim_{x\to-4+}=+\infty,\quad\lim_{x\to-4-}=-\infty,\quad\lim_{x\to4+}=+\infty,\quad\lim_{x\to4-}=-\infty,$$

па су праве $x=-4$ и $x=4$ вертикалне асимптоте функције f.

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm\infty,$$

па f нема хоризонталних асимптота.

$$a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=1,\ b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-x)=0,$$

па је права $y=x$ коса асимптота у $-\infty$ и у $+\infty$.

4. Полином x^2-5x+7 нема реалних нула, па је домен функције f једнак $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$.

$$f'(x)=\frac{e^x(x^2-7x+12)}{(x^2-5x+7)^2}=\frac{e^x(x-3)(x-4)}{(x^2-5x+7)^2}.$$

Имамо да је $f'(x)=0$ за $x=3$ и $x=4$, па су 3 и 4 стационарне тачке. Такође, имамо да је $f(x)>0$ за $x\in(-\infty,3)\cup(4,+\infty)$ и $f(x)<0$ за $x\in(3,4)$, па закључујемо:

$$f \text{ расте на } (-\infty,3)\cup(4,+\infty),$$
$$f \text{ опада на } (3,4),$$
$$x=3 \text{ је локални максимум и}$$
$$x=4 \text{ је локални минимум.}$$

5.

$$\int x^{\frac{3}{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{x}\mathrm{d}x = \left\{\begin{matrix} u=\operatorname{arctg}\sqrt{x} & \mathrm{d}v = x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}(1+x)} & v=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\end{matrix}\right\} = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \frac{1}{5}\int\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \frac{1}{5}\int\frac{x^2-1+1}{1+x}\mathrm{d}x = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \frac{1}{5}\int\frac{(x-1)(x+1)+1}{1+x}\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \frac{1}{5}\int\left(x-1+\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \frac{1}{10}x^2+\frac{1}{5}x-\frac{1}{5}\ln|x+1|+c.$$

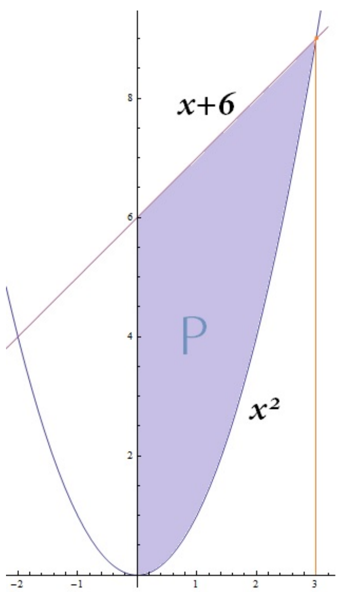
РЕШЕЊА ДРУГОГ КОЛОКВИЈУМА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 13.01.2018.

Група 1

1. (5 поена) Израчунати површину фигуре ограничену кривама
$$y = x^2,\ y = x + 6,\ x \geq 0.$$
2. (5 поена) Наћи опште решење диференцијалне једначине $4x^3y + x^4y' = \sin^2 x \cos x$.
3. (5 поена) Наћи опште решење диференцијалне једначине $y'' + 4y' + 13y = 18e^{-2x}$.
4. (5 поена) Три стрелца гађају у мету. Вероватноћа да први погоди мету је $\frac{1}{6}$, други $\frac{1}{4}$, а трећи $\frac{1}{3}$. Свако испаљује по један хитац.
а) Одредити вероватноћу да буде постигнут тачно један погодак;
б) Одредити вероватноћу да је први стрелац погодио мету, ако се зна да је постигнут тачно један погодак.
5. (5 поена) Нека је дата случајна величина X која зависи од параметра
$$X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 \\ \frac{a}{4} & a^2 & \frac{1}{4} & \frac{a+1}{4} \end{pmatrix}$$
а) Одредити параметар a;
б) Одредити EX;
в) Одредити DX.

РЕШЕЊА

1. Пресечна тачка графика функција x^2 и $x + 6$ је решење једначине $x^2 = x + 6$. Решења ове једначине су $x_1 = -2$ и $x = 3$, али како гледамо део $x \geq 0$, горња граница интеграла биће 3. Тражена површина је
$$P = \int_0^3 (x + 6 - x^2)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^3}{3}\bigg|_0^3 = \frac{27}{2},$$



2. Дељењем полазне једначине са x^4, за $x \neq 0$ добијамо линеарну диференцијалну једначину

$$y' + \frac{4}{x}y = \frac{\sin^2 x \cos x}{x^4}.$$

Решење ове једначине је

$$y = e^{-\int \frac{4}{x}\mathrm{d}x}\left(c + \int \frac{\sin^2 x \cos x}{x^4} e^{\int \frac{4}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{x^4}\left(c + \int \frac{\sin^2 x \cos x}{x^4} x^4 \mathrm{d}x\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} t = \sin x \\ \mathrm{d}t = \cos x \mathrm{d}x \end{bmatrix} = \frac{1}{x^4}\left(c + \int t^2 \mathrm{d}t\right) = \frac{1}{x^4}\left(c + \frac{\sin^3 x}{3}\right).$$

3. Најпре решавамо хомогену једначину

$$y'' + 4y' + 13y = 0.$$

Њена карактеристична једначина је

$$\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0,$$

па је

$$\lambda_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = -2 \pm 3i,$$

па закључујемо да је решење хомогене једначине

$$y_h = e^{-2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x), \;\; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Сада тражимо партикуларно решење полазне једначине. Оно ће бити облика $y_p = Ae^{-2x}$. Нађимо први и други извод и убацимо добијене вредности у полазну једначину.

$$y_p' = -2Ae^{-2x}, \;\; y_p'' = 4Ae^{-2x}.$$

Након убацивања, добијамо

$$4Ae^{-2x} - 8Ae^{-2x} + 13Ae^{-2x} = 18e^{-2x},$$

одакле је $A = 2$, односно $y_p = 2e^{-2x}$. Коначно, опште решење дате једначине је

$$y = y_h + y_p = e^{-2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x) + 2e^{-2x}.$$

4. Нека је A_i догађај да је i-ти стрелац погодио мету, $i \in \{1, 2, 3\}$, а догађај B догађај да је мету погодио тачно један стрелац.

а) Тражимо вероватноћу догађаја B. Приметимо

$$B = A_1\overline{A_2}\;\overline{A_2} \cup \overline{A_1}A_2\overline{A_3} \cup \overline{A_1}\;\overline{A_2}A_3,$$

па је

$$P(B) = P(A_1\overline{A_2}\;\overline{A_2} \cup \overline{A_1}A_2\overline{A_3} \cup \overline{A_1}\;\overline{A_2}A_3) = P(A_1\overline{A_2}\;\overline{A_2}) + P(\overline{A_1}A_2\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}\;\overline{A_2}A_3) =$$

$$= P(A_1)P(\overline{A_2})P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1})P(A_2)P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3) = \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3} + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3} + \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{31}{72}.$$

б) Тражимо вероватноћу догађаја A_1 при услову да је испуњен догађај B тј.

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{31}{72}} = \frac{6}{31}.$$

5. а) Да би функција расподеле била добро дефинисана, сума вероватноћа мора да буде 1 тј.

$$a^2 + \frac{a}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Решавајући ову једначину, добијамо да је $a = \frac{1}{2}$ или $a = -1$, али како вероватноће морају бити бројеви у интервалу $[0, 1]$, то могућност да је $a = -1$ отпада. Дакле, $a = \frac{1}{2}$, па наша функција расподеле изгледа овако:

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}.$$

б)

$$EX = -1 \cdot \frac{1}{8} + 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{3}{8} = \frac{5}{4}.$$

в) Приметимо најпре да X^2 има расподелу

$$X^2 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 9 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{pmatrix},$$

односно кад групишемо исте вредности

$$X^2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 9 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix},$$

па је

$$EX^2 = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 9 \cdot \frac{3}{8} = \frac{30}{8} = \frac{15}{4}.$$

Коначно, тражена дисперзија биће

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{15}{4} - \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{35}{16}.$$

Група 2

1. (5 поена) Израчунати површину фигуре ограничену кривама
$$y = \sin x,\ y = \cos x,\ x \geq 0,\ x \leq \tfrac{\pi}{4}.$$
2. (5 поена) Наћи опште решење диференцијалне једначине $2xy + x^2y' = \sin x \cos^2 x$.
3. (5 поена) Наћи опште решење диференцијалне једначине $y'' + y' + y = 3e^{-2x}$.
4. (5 поена) Три стрелца гађају у мету. Вероватноћа да први погоди мету је $\frac{1}{6}$, други $\frac{1}{4}$, а трећи $\frac{1}{3}$. Свако испаљује по један хитац.
а) Одредити вероватноћу да тачно два стрелца промаше мету;
б) Одредити вероватноћу да је други стрелац погодио мету, ако се зна да су тачно два стрелца промашила мету.
5. (5 поена) Нека је дата случајна величина X која зависи од параметра

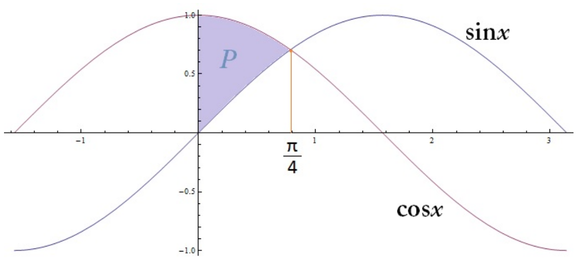
$$X : \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & 1 \\ \frac{a}{3} & \frac{2}{3} & a^2 & \frac{a}{3} \end{pmatrix}$$

а) Одредити параметар a;
б) Одредити EX;
в) Одредити DX.

РЕШЕЊА

1. Са слике видимо да се графици функција $\sin x$ и $\cos x$ секу управо у $x = \frac{\pi}{4}$, па ће тражена површина бити

$$P = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\mathrm{d}x = \sin x + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - 1,$$



2. Дељењем полазне једначине са x^2, за $x \neq 0$ добијамо линеарну диференцијалну једначину
$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{\sin x \cos^2 x}{x^2}.$$
Решење ове једначине је

$$y = e^{-\int \frac{2}{x}\mathrm{d}x}\left(c + \int \frac{\sin x \cos^2 x}{x^2} e^{\int \frac{2}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{x^2}\left(c + \int \frac{\sin x \cos^2 x}{x^2} x^2 \mathrm{d}x\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} t = \cos x \\ \mathrm{d}t = -\sin x \mathrm{d}x \end{bmatrix} = \frac{1}{x^2}\left(c - \int t^2 \mathrm{d}t\right) = \frac{1}{x^2}\left(c - \frac{\cos^3 x}{3}\right).$$

3. Најпре решавамо хомогену једначину

$$y'' + y' + y = 0.$$

Њена карактеристична једначина је

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0,$$

па је

$$\lambda_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i,$$

па закључујемо да је решење хомогене једначине

$$y_h = e^{-\frac{x}{2}} \left(c_1 \cos \frac{x\sqrt{3}}{2} + c_2 \sin \frac{x\sqrt{3}}{2} \right), \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Сада тражимо партикуларно решење полазне једначине. Оно ће бити облика $y_p = Ae^{-2x}$. Нађимо први и други извод и убацимо добијене вредности у полазну једначину.

$$y_p' = -2Ae^{-2x}, \ y_p'' = 4Ae^{-2x}.$$

Након убацивања, добијамо

$$4Ae^{-2x} - 2Ae^{-2x} + Ae^{-2x} = 3e^{-2x},$$

одакле је $A = 1$, односно $y_p = e^{-2x}$. Коначно, опште решење дате једначине је

$$y = y_h + y_p = e^{-\frac{x}{2}} \left(c_1 \cos \frac{x\sqrt{3}}{2} + c_2 \sin \frac{x\sqrt{3}}{2} \right) + e^{-2x}.$$

4. Нека је A_i догађај да је i-ти стрелац погодио мету, $i \in \{1, 2, 3\}$, а догађај B догађај да су мету промашила тачно два стрелца.
а) Тражимо вероватноћу догађаја B. Приметимо

$$B = A_1 \overline{A_2}\ \overline{A_2} \cup \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} \cup \overline{A_1}\ \overline{A_2} A_3,$$

па је

$$P(B) = P(A_1 \overline{A_2}\ \overline{A_2} \cup \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} \cup \overline{A_1}\ \overline{A_2} A_3) = P(A_1 \overline{A_2}\ \overline{A_2}) + P(\overline{A_1} A_2 \overline{A_3}) + P(\overline{A_1}\ \overline{A_2} A_3) =$$

$$= P(A_1)P(\overline{A_2})P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1})P(A_2)P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{31}{72}.$$

б) Тражимо вероватноћу догађаја A_2 при услову да је испуњен догађај B тј.

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2B)}{P(B)} = \frac{\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{31}{72}} = \frac{10}{31}.$$

5. а) Да би функција расподеле била добро дефинисана, сума вероватноћа мора да буде 1 тј.

$$a^2 + \frac{2}{3}a + \frac{2}{3} = 1.$$

Решавајући ову једначину, добијамо да је $a = \frac{1}{3}$ или $a = -1$, али како вероватноће морају бити бројеви у интервалу $[0, 1]$, то могућност да је $a = -1$ отпада. Дакле, $a = \frac{1}{3}$, па наша функција расподеле изгледа овако:

$$X : \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 1 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

б)

$$EX = -3 \cdot \frac{1}{9} + (-2) \cdot \frac{2}{3} + 0 \cdot \frac{1}{9} + 1 \cdot \frac{1}{9} = -\frac{14}{9}.$$

в) Приметимо најпре да X^2 има расподелу

$$X^2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{3} & \frac{1}{9} \end{pmatrix},$$

па је

$$EX^2 = 0 \cdot \frac{1}{9} + 1 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{2}{3} + 9 \cdot \frac{1}{9} = \frac{34}{9}.$$

Коначно, тражена дисперзија биће

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{34}{9} - \left(-\frac{14}{9} \right)^2 = \frac{110}{81}.$$

РЕШЕЊА ЈАНУАРСКОГ РОКА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 24.01.2018.

Група 1, 3, 5

1. (8 п) Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{6^{n^2}}$.

2. (8 п) Испитати монотоност и наћи екстремне вредности функције $\frac{e^{x^2}}{\sqrt{x^2-1}}$.

3. (8 п) Израчунати вредност интеграла $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x \cos 2x \mathrm{d}x$.

4. (8 п) Наћи опште решење диференцијалне једначине $2y' = x(y'' + x^2 e^x)$.

5. (8 п) У кутији се налазе 4 куглице: 2 зелене, 1 бела и 1 црна. Извлачи се једна по једна куглица без враћања све док се не извуче бела. Нека је X случајна величина која представља укупан број извлачења. Одредити закон расподеле за X и EX.

6. (5 п) а) Дати дефиницију асимптоте реалне функције реалне променљиве.

(5 п) б) Наћи све асимптоте функције $y = \frac{2x^2-x-2}{x+1}$.

7. (5 п) а) Навести особине густине расподеле непрекидне случајне променљиве.

(5 п) б) Дефинисати математичко очекивање и дисперзију непрекидне случајне променљиве.

РЕШЕЊА

1. Означимо $a_n = \frac{(n!)^2}{6^{n^2}}$. Како је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{((n+1)!)^2}{6^{(n+1)^2}}}{\frac{(n!)^2}{6^{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{6^{2n+1}} = 0 < 1,$$

то дати ред конвергира по Даламберовом критеријуму.

2. Најпре одредимо домен дате функције. Због корена, мора бити $x^2 - 1 \geq 0$, а због дељења је $x^2 - 1 \neq 0$ па је домен $\mathcal{D} = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Први извод дате функције је

$$f'(x) = \left(\frac{e^{x^2}}{\sqrt{x^2-1}}\right)' = \frac{e^{x^2} x(2x^2-3)}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Имамо да је $f'(x) = 0$ за $x = 0$, $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $x = -\frac{\sqrt{6}}{2}$, али $x = 0$ не припада домену, па су преостале две тачке потенцијални екстремуми. Имамо да је

$$f'(x) < 0 \text{ за } x \in \Big(-\infty, -\tfrac{\sqrt{6}}{2}\Big) \cup \Big(1, \tfrac{\sqrt{6}}{2}\Big),$$
$$f'(x) > 0 \text{ за } x \in \Big(-\tfrac{\sqrt{6}}{2}, 1\Big) \cup \Big(\tfrac{\sqrt{6}}{2}, +\infty\Big),$$

па закључујемо да

$$f \text{ опада за } x \in \Big(-\infty, -\tfrac{\sqrt{6}}{2}\Big) \cup \Big(1, \tfrac{\sqrt{6}}{2}\Big),$$
$$f \text{ расте за } x \in \Big(-\tfrac{\sqrt{6}}{2}, 1\Big) \cup \Big(\tfrac{\sqrt{6}}{2}, +\infty\Big),$$
$$x = -\tfrac{\sqrt{6}}{2} \text{ је локални минимум},$$
$$x = \tfrac{\sqrt{6}}{2} \text{ је локални минимум}.$$

3.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x \cos 2x \mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x(\cos^2 x - \sin^2 x)\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x(2\cos^2 x - 1)\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} t = \cos x \\ \mathrm{d}t = -\sin x \mathrm{d}x \\ x = \frac{\pi}{2} \to t = 0 \\ x = \pi \to t = 1 \end{bmatrix} =$$

$$= -\int_0^{-1} (2t^2 - 1)\mathrm{d}t = -\frac{2t^3}{3} + t\Big|_0^{-1} = \frac{1}{3}.$$

4. Уведимо смену $u = y'$. Тада је $u' = y''$, па добијамо

$$2u = x(u' + x^2 e^x),$$

односно након сређивања добијамо линеарну диференцијалну једначину

$$u' - \frac{2}{x}u = x^2 e^x.$$

Решење ове једначине је

$$u = e^{\int \frac{2}{x}\mathrm{d}x}\left(c + \int x^2 e^x e^{-\int \frac{2}{x}\mathrm{d}x}\right) = x^2\left(c + \int x^2 e^x \frac{1}{x^2}\right) = x^2(c + e^x).$$

Како је $y' = u$, то је

$$y = \int u\mathrm{d}x = \int (cx^2 + x^2 e^x)\mathrm{d}x = \frac{cx^3}{3} + \int x^2 e^x \mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = x^2 & \mathrm{d}v = e^x\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x & v = e^x \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{cx^3}{3} + x^2 e^x - 2\int x e^x \mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = x & \mathrm{d}v = e^x\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x & v = e^x \end{bmatrix} = \frac{cx^3}{3} + x^2 e^x - 2xe^x + 2\int e^x \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{cx^3}{3} + x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + d.$$

5. Приметимо да X може узети вредности из скупа $\{1, 2, 3, 4\}$. Случајна величина X има закон расподеле

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{pmatrix},$$

где је

$$p_1 = P\{X = 1\} = \frac{1}{4},$$

$$p_2 = P\{X = 2\} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4},$$

$$p_3 = P\{X = 3\} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

$$p_4 = P\{X = 4\} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{4},$$

па је

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Тражено математичко очекивање је

$$EX = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 3 + \frac{1}{4} \cdot 4 = \frac{5}{2}.$$

6. а) Ако растојање променљиве тачке графика функције $y = f(x)$ до неке сталне праве тежи нули, када се тачка неограничено удаљава од координатног почетка, онда се ова права назива асимптота графика функције.
Ако је $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = \pm\infty$ или $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = \pm\infty$, онда се права $x = x_0$ назива вертикална асимптота графика функције $y = f(x)$.

б) Најпре нађимо домен дате функције. Једини проблем прави дељење са $x + 1$ па је домен $\mathcal{D} = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

$$\lim_{x \to -1-} \frac{2x^2 - x - 2}{x + 1} = -\infty, \quad \lim_{x \to -1+} \frac{2x^2 - x - 2}{x + 1} = +\infty,$$

па права $x = -1$ јесте вертикална асимптота функције.
Како је

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - x - 2}{x + 1} = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - x - 2}{x + 1} = -\infty,$$

то функција нема хоризонталну асимптоту. Испитајмо да ли функција има косу асимптоту.

$$k = \lim_{x \to \ \pm\infty} \frac{2x^2 - x - 2}{x(x + 1)} = 2,$$

$$n = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{2x^2 - x - 2}{x + 1} - 2x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-3x - 2}{x + 1} = -3,$$

па је права $y = 2x - 3$ коса асимптота у $-\infty$ и у $+\infty$.

7. а) Густина расподеле вероватноћа случајне променљиве X је функција

$$\varphi(x) = F'(x), \ x \in \mathbb{R},$$

где је F функција расподеле случајне променљиве X и F је непрекидна и диференцијабилна.
Густина расподеле је функција са ненегативним вредностима јер како је $F(x)$ растућа функција, то је $\varphi(x) = F'(x) \geq 0$.
Имамо и да важи $P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int\limits_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x$, као и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x = 1$. Може се показати да важи и $\int\limits_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t = F(x)$.
Случајна променљива назива се непрекидном ако је њена функција расподеле $F(x)$ непрекидна, а густина расподеле $\varphi(x) = F'(x)$ постоји и непрекидна је свуда осим у дискретном скупу тачака.

б) Математичко очекивање непрекидне случајне променљиве X, са густином $\varphi(x)$, дато је интегралом

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Дисперзија непрекидне случајне променљиве X, са густином расподеле $\varphi(x)$ и математичким очекивањем m, дато је интегралом

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Група 2, 4, 6

1. (8 п) Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

2. (8 п) Испитати монотоност и наћи екстремне вредности функције $\frac{e^{x^2}}{\sqrt{x^2-4}}$.

3. (8 п) Израчунати вредност интеграла $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos 2x \mathrm{d}x$.

4. (8 п) Наћи опште решење диференцијалне једначине $2y' = x(y'' + x)$

5. (8 п) У кутији се налазе 4 куглице: 2 црвене, 1 плава и 1 бела. Извлачи се једна по једна куглица без враћања све док се не извуче плава. Нека је X случајна величина која представља укупан број извлачења. Одредити закон расподеле за X и EX.

6. (5 п) а) Дати дефиницију асимптоте реалне функције реалне променљиве.

(5 п) б) Наћи све асимптоте функције $y = \frac{2x^2-x-2}{x+1}$.

7. (5 п) а) Навести особине густине расподеле непрекидне случајне променљиве.

(5 п) б) Дефинисати математичко очекивање и дисперзију непрекидне случајне променљиве.

РЕШЕЊА

1. Означимо $a_n = \frac{n!}{n^n}$. Како је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1,$$

то дати ред конвергира по Даламберовом критеријуму.

2. Најпре одредимо домен дате функције. Због корена, мора бити $x^4 - 1 \geq 0$, а због дељења је $x^4 - 1 \neq 0$ па је домен $\mathcal{D} = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$. Први извод дате функције је

$$f'(x) = \left(\frac{e^{x^2}}{\sqrt{x^2-4}}\right)' = \frac{e^{x^2} x(2x^2-9)}{(x^2-4)^{\frac{3}{2}}}.$$

Имамо да је $f'(x) = 0$ за $x = 0$, $x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $x = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$, али $x = 0$ не припада домену, па су преостале две тачке потенцијални екстремуми. Имамо да је

$$f'(x) < 0 \text{ за } x \in \Big(-\infty, -\tfrac{3\sqrt{2}}{2}\Big) \cup \Big(2, \tfrac{3\sqrt{2}}{2}\Big),$$
$$f'(x) > 0 \text{ за } x \in \Big(-\tfrac{3\sqrt{2}}{2}, 2\Big) \cup \Big(\tfrac{3\sqrt{2}}{2}, +\infty\Big),$$

па закључујемо да

$$f \text{ опада за } x \in \Big(-\infty, -\tfrac{3\sqrt{2}}{2}\Big) \cup \Big(2, \tfrac{3\sqrt{2}}{2}\Big),$$
$$f \text{ расте за } x \in \Big(-\tfrac{3\sqrt{2}}{2}, 2\Big) \cup \Big(\tfrac{3\sqrt{2}}{2}, +\infty\Big),$$
$$x = -\tfrac{3\sqrt{2}}{2} \text{ је локални минимум},$$
$$x = \tfrac{3\sqrt{2}}{2} \text{ је локални минимум}.$$

3.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos 2x \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x(\cos^2 x - \sin^2 x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x(1-2\sin^2 x)\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} t = \sin x \\ \mathrm{d}t = \cos x \mathrm{d}x \\ x = 0 \to t = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \to t = 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \int_0^1 (1-2t^2)\mathrm{d}t = t - \frac{2t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

4. Уведимо смену $u = y'$. Тада је $u' = y''$, па добијамо

$$2u = x(u' + x),$$

односно након сређивања добијамо линеарну диференцијалну једначину

$$u' - \frac{2}{x}u = x.$$

Решење ове једначине је

$$u = e^{\int \frac{2}{x}\mathrm{d}x}\left(c + \int xe^{-\int \frac{2}{x}\mathrm{d}x}\right) = x^2\left(c + \int x\frac{1}{x^2}\right) = x^2(c + \ln|x|).$$

Претпоставимо $x > 0$ (случај $x < 0$ се слично решава). Како је $y' = u$, то је

$$y = \int u\mathrm{d}x = \int(cx^2 + x^2\ln x)\mathrm{d}x = \frac{cx^3}{3} + \int x^2 \ln x \mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = \ln x & \mathrm{d}v = x^2\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x & v = \frac{x^3}{3} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{cx^3}{3} + \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2\mathrm{d}x = \frac{cx^3}{3} + \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{9}x^3 + d.$$

5. Приметимо да X може узети вредности из скупа $\{1, 2, 3, 4\}$. Случајна величина X има закон расподеле

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{pmatrix},$$

где је

$$p_1 = P\{X = 1\} = \frac{1}{4},$$

$$p_2 = P\{X = 2\} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4},$$

$$p_3 = P\{X = 3\} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

$$p_4 = P\{X = 4\} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{4},$$

па је

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Тражено математичко очекивање је

$$EX = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 3 + \frac{1}{4} \cdot 4 = \frac{5}{2}.$$

6. а) Ако растојање променљиве тачке графика функције $y = f(x)$ до неке сталне праве

тежи нули, када се тачка неограничено удаљава од координатног почетка, онда се ова права назива асимптота графика функције.
Ако је $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \pm\infty$ или $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \pm\infty$, онда се права $x = x_0$ назива вертикална асимптота графика функције $y = f(x)$.

б) Најпре нађимо домен дате функције. Једини проблем прави дељење са $x+1$ па је домен $\mathcal{D} = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

$$\lim_{x\to -1-} \frac{2x^2 - x - 2}{x+1} = -\infty, \quad \lim_{x\to -1+} \frac{2x^2 - x - 2}{x+1} = +\infty,$$

па права $x = -1$ јесте вертикална асимптота функције.
Како је

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2 - x - 2}{x+1} = +\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2 - x - 2}{x+1} = -\infty,$$

то функција нема хоризонталну асимптоту. Испитајмо да ли функција има косу асимптоту.

$$k = \lim_{x\to\ \pm\infty} \frac{2x^2 - x - 2}{x(x+1)} = 2,$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{2x^2 - x - 2}{x+1} - 2x \right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3x-2}{x+1} = -3,$$

па је права $y = 2x - 3$ коса асимптота у $-\infty$ и у $+\infty$.

7. а) Густина расподеле вероватноћа случајне променљиве X је функција

$$\varphi(x) = F'(x),\ x \in \mathbb{R},$$

где је F функција расподеле случајне променљиве X и F је непрекидна и диференцијабилна.
Густина расподеле је функција са ненегативним вредностима јер како је $F(x)$ растућа функција, то је $\varphi(x) = F'(x) \geq 0$.
Имамо и да важи $P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int\limits_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x$, као и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x = 1$. Може се показати да важи и $\int\limits_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t = F(x)$.
Случајна променљива назива се непрекидном ако је њена функција расподеле $F(x)$ непрекидна, а густина расподеле $\varphi(x) = F'(x)$ постоји и непрекидна је свуда осим у дискретном скупу тачака.

б) Математичко очекивање непрекидне случајне променљиве X, са густином $\varphi(x)$, дато је интегралом

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Дисперзија непрекидне случајне променљиве X, са густином расподеле $\varphi(x)$ и математичким очекивањем m, дато је интегралом

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

РЕШЕЊА ФЕБРУАРСКОГ РОКА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 14.02.2018.

Група 1

1. (8 п) Израчунати $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sqrt{x}}$.

2. (8 п) Испитати конвексност функције $y = e^{1-2x^2}$.

3. (8 п) Израчунати $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$.

4. (8 п) Наћи опште решење диференцијалне једначине $y'' - 5y' + 4y = xe^x$.

5. (8 п) Извлаче се парови за четвртфинале Лиге шампиона. Од 8 тимова 5 су из Енглеске, а 3 из Шпаније. Имена тимова су у куглицама а једна куглица је изгубљена. Извлаче се две куглице одједном.

(2 п) а) Одредити вероватноће да је изгубљена куглица са тимом из Шпаније односно из Енглеске.

(6 п) б) Одредити вероватноћу да се у обе извучене куглице налазе имена тимова из Шпаније.

6. (5 п) а) Како гласи Кошијев критеријум за конвергенцију редова са позитивним члановима?

(5 п) б) Коришћењем Кошијевог критеријума испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

7. (10 п) Линеарна диференцијална једначина првог реда. Опште решење и решење Кошијевог проблема.

РЕШЕЊА

1.

$$\lim_{x\to 0} x^{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\ln\left(x^{\sqrt{x}}\right)} = \lim_{x\to 0} e^{\sqrt{x}\ln x} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}}} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{L.P.}{=}} e^{\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}}} =$$

$$= e^{\lim_{x\to 0} -2\sqrt{x}} = e^0 = 1.$$

2. Домен функције је $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Израчунајмо први други извод дате функције

$$f'(x) = -4xe^{1-2x^2}, \quad f''(x) = 4(4x^2-1)e^{1-2x^2}.$$

Имамо да је $f''(x) = 0$ за $x = \frac{1}{2},\ x = -\frac{1}{2}$ и

$$f''(x) < 0 \text{ за } x \in \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right),$$
$$f'(x) > 0 \text{ за } x \in \left(-\infty, -\tfrac{1}{2}\right) \cup \left(\tfrac{1}{2}, +\infty\right),$$

па закључујемо да је

$$f \text{ конкавна на } \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right),$$
$$f \text{ конвексна на } \left(-\infty, -\tfrac{1}{2}\right) \cup \left(\tfrac{1}{2}, +\infty\right).$$

3.

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} x=t^6 \\ \mathrm{d}x = 6t^5\mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int \frac{t^3}{1+t^2}6t^5\mathrm{d}t = 6\int \frac{t^8-1+1}{1+t^2}\mathrm{d}t =$$

$$= 6\int \frac{(t^2-1)(t^2+1)(t^4+1)+1}{1+t^2}\mathrm{d}t = 6\int \left(t^6-t^4+t^2-1+\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{6}{7}t^7 - \frac{6}{5}t^5 + 2t^3 - 6t + 6\mathrm{arctg}t + c = \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} - \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} + 2\sqrt{x} - 6x^{\frac{1}{6}} + 6\mathrm{arctg}x^{\frac{1}{6}} + c$$

4. Најпре нађимо решење хомогене једначине $y'' - 5y' + 4y = 0$. Нуле карактеристичне једначине $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$ су $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 4$, па је $y_h = c_1e^x + c_2e^{4x}$.
Партикуларно решење је облика $y_p = x(Ax+B)e^x$. Израчунајмо први и други извод партикуларног решења и убацимо га у полазну једначину.

$$y_p' = (Ax^2 + x(2A+B) + B)e^x, \quad y_p'' = (Ax^2 + x(4A+B) + 2A + 2B)e^x,$$

па је

$$(Ax^2 + x(4A+B) + 2A + 2B)e^x - 5(Ax^2 + x(2A+B) + B)e^x + 4x(Ax+B)e^x = xe^x$$

односно након сређивања

$$-6Ax + 2A - 3B = x,$$

па након изједначавања коефицијената уз x и 1 са леве и десне стране једнакости добијамо систем две једначине

$$-6A = 1, \quad 2A - 3B = 0,$$

чије је решење $A = -\frac{1}{6},\ B = -\frac{1}{9}$, па је $y_p = x\big(-\frac{1}{6}x - \frac{1}{9}\big)e^x$.
Коначно, опште решење дате једначине је

$$y = y_h + y_p = c_1e^x + c_2e^{4x} + x\Big(-\frac{1}{6}x - \frac{1}{9}\Big)e^x,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

5. Нека је H_1 хипотеза да је изгубљена куглица са тимом из Шпаније, H_2 хипотеза да је изгубљена куглица са тимом из Енглеске, а догађај A догађај да се у обе извучене куглице налазе имена тимова из Шпаније.
а) Вероватноће тражених догађаја су

$$P(H_1) = \frac{3}{8},\ P(H_2) = \frac{5}{8}.$$

б) Знамо да важи

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2).$$

Израчунајмо непознате вероватноће које се појављују у претходној формули:

$$P(A|H_1) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{1}{21},\ P(A|H_2) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{1}{7},$$

па је

$$P(A) = \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{21} + \frac{5}{8}\cdot\frac{1}{7} = \frac{3}{28}.$$

6. а) Нека је $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ред са позитивним члановима, такав да постоји $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = r$. Тада:

(1) ако је $r < 1$, онда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира;

(2) ако је $r > 1$, онда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира;

(3) ако је $r = 1$, онда у општем случају ништа не можемо рећи о конвергенцији.

б) Означимо $a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$. Тада је

$$r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{-(n+1)}\right)^{-(n+1)\cdot\frac{1}{-(n+1)}\cdot n} = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{n}{n+1}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{n}{n+1}\right)} = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1,$$

па дати ред конвергира по Кошијевом критеријуму.

7. Линеарна диференцијална једначина првог реда је једначина облика

$$y' + p(x)y = q(x),$$

где су $p(x)$ и $q(x)$ непрекидне функције. Опште решење диференцијалне једначине првог реда је фамилија функција

$$y = \varphi(x, C),$$

специјално за линеарну једначину биће

$$y = e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\Big(C + \int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\Big).$$

Решење $\varphi(x, C_0)$ које се добија из општег решења стављањем $C = C_0$ назива се партикуларно решење или решење Кошијевог проблема које задовољава почетни услов $y|_{x=x_0} = y_0$.

Група 2

1. (8 п) Израчунати $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{x})^x$.

2. (8 п) Испитати конвексност функције $y = e^{1-8x^2}$.

3. (8 п) Израчунати $\int \frac{x}{1+\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$.

4. (8 п) Наћи опште решење диференцијалне једначине $y'' - 6y' + 8y = 2e^{2x}$.

5. (8 п) Извлаче се парови за четвртфинале Лиге шампиона. Од 8 тимова 5 су из Енглеске, а 3 из Шпаније. Имена тимова су у куглицама а једна куглица је изгубљена. Извлаче се две куглице одједном.

(2 п) а) Одредити вероватноће да је изгубљена куглица са тимом из Шпаније односно из Енглеске.

(6 п) б) Одредити вероватноћу да се у обе извучене куглице налазе имена тимова из Енглеске.

6. (5 п) а) Како гласи Кошијев критеријум за конвергенцију редова са позитивним члановима?

(5 п) б) Коришћењем Кошијевог критеријума испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

7. (10 п) Линеарна диференцијална једначина првог реда. Опште решење и решење Кошијевог проблема.

РЕШЕЊА

1.

$$\lim_{x\to 0}(\sqrt{x})^x = \lim_{x\to 0} e^{\ln\left((\sqrt{x})^x\right)} = \lim_{x\to 0} e^{x\ln\sqrt{x}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sqrt{x}}{\frac{1}{x}}} \overset{L.P.}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} e^{\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{-\frac{1}{x^2}}} =$$

$$= e^{\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2}x\right)} = e^0 = 1.$$

2. Домен функције је $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Израчунајмо први други извод дате функције

$$f'(x) = -16xe^{1-8x^2}, \quad f''(x) = 16(16x^2-1)e^{1-8x^2}.$$

Имамо да је $f''(x) = 0$ за $x = \frac{1}{4},\ x = -\frac{1}{4}$ и

$$f''(x) < 0 \text{ за } x \in \big(-\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}\big),$$
$$f'(x) > 0 \text{ за } x \in \big(-\infty, -\tfrac{1}{4}\big) \cup \big(\tfrac{1}{4}, +\infty\big),$$

па закључујемо да је

$$f \text{ конкавна на } \big(-\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}\big),$$
$$f \text{ конвексна на } \big(-\infty, -\tfrac{1}{4}\big) \cup \big(\tfrac{1}{4}, +\infty\big).$$

3.

$$\int \frac{x}{1+\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} x = t^3 \\ \mathrm{d}x = 3t^2\mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int \frac{t^3}{1+t}3t^2\mathrm{d}t = 3\int \frac{t^5+1-1}{1+t}\mathrm{d}t =$$

$$= 3\int \frac{(t+1)(t^4-t^3+t^2-t+1)-1}{1+t}\mathrm{d}t = 3\int\left(t^4-t^3+t^2-t+1-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{3}{5}t^5 - \frac{3}{4}t^4 + t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 3t - 3\ln|1+t| + c = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + x - \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + 3\sqrt[3]{x} - 3\ln|1+\sqrt[3]{x}| + c$$

4. Најпре нађимо решење хомогене једначине $y'' - 6y' + 8y = 0$. Нуле карактеристичне једначине $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$ су $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 4$, па је $y_h = c_1e^{2x} + c_2e^{4x}$.
Партикуларно решење је облика $y_p = Axe^{2x}$. Израчунајмо први и други извод партикуларног решења и убацимо га у полазну једначину.

$$y_p' = (2Ax + A)e^{2x}, \quad y_p'' = (4Ax + 4A)e^{2x},$$

па је

$$(4Ax + 4A)e^{2x} - 6(2Ax + A)e^{2x} + 8Axe^{2x} = 2e^{2x},$$

односно након сређивања

$$-2A = 2,$$

па је $A = -1$. Партикуларно решење дате једначине је $y_p = -xe^{2x}$.
Коначно, опште решење дате једначине је

$$y = y_h + y_p = c_1e^{2x} + c_2e^{4x} - xe^{2x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

5. Нека је H_1 хипотеза да је изгубљена куглица са тимом из Шпаније, H_2 хипотеза да је изгубљена куглица са тимом из Енглеске, а догађај A догађај да се у обе извучене куглице налазе имена тимова из Енглеске. а) Вероватноће тражених догађаја су

$$P(H_1) = \frac{3}{8},\ P(H_2) = \frac{5}{8}.$$

б) Знамо да важи

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2).$$

Израчунајмо непознате вероватноће које се појављују у претходној формули:

$$P(A|H_1) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{10}{21},\ P(A|H_2) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{2}{7},$$

па је

$$P(A) = \frac{3}{8}\cdot\frac{10}{21} + \frac{5}{8}\cdot\frac{2}{7} = \frac{5}{14}.$$

6. а) Нека је $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ред са позитивним члановима, такав да постоји $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r$. Тада:
(1) ако је $r < 1$, онда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира;
(2) ако је $r > 1$, онда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира;
(3) ако је $r = 1$, онда у општем случају ништа не можемо рећи о конвергенцији.

б) Означимо $a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$. Тада је

$$r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{-(n+1)}\right)^{-(n+1)\cdot\frac{1}{-(n+1)}\cdot n} = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{n}{n+1}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{n}{n+1}\right)} = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1,$$

па дати ред конвергира по Кошијевом критеријуму.

7. Линеарна диференцијална једначина првог реда је једначина облика

$$y' + p(x)y = q(x),$$

где су $p(x)$ и $q(x)$ непрекидне функције. Опште решење диференцијалне једначине првог реда је фамилија функција

$$y = \varphi(x, C),$$

специјално за линеарну једначину биће

$$y = e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\Big(C + \int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\Big).$$

Решење $\varphi(x, C_0)$ које се добија из општег решења стављањем $C = C_0$ назива се партикуларно решење или решење Кошијевог проблема које задовољава почетни услов $y|_{x=x_0} = y_0$.

РЕШЕЊА ЈУНСКОГ РОКА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 20.06.2018.

1. (8 п) Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\ln^n(n+1)}$.

2. (8 п) Испитати монотоност и конвексност функције $y = \ln^2 x$.

3. (8 п) Израчунати $\int \frac{\sin x}{\sin^4 x - \cos^4 x} \mathrm{d}x$.

4. (8 п) Наћи опште решење диференцијалне једначине $y'' + 16y = e^x \cos x$.

5. (8 п) У првој кутији се налазе две беле и три црне, а у другој осам белих и три црне куглице. Баца се коцка за игру. Уколико падне број 6, из прве кутије се извлачи једна куглица, а иначе се из друге кутије извлачи једна куглица.

(4 п) а) Одредити вероватноћу да је извучена бела куглица.

(4 п) б) Ако је извучена бела куглица, одредити вероватноћу да је из прве кутије.

6. (5 п) а) Како гласи Лопиталово правило?

(5 п) б) Применом Лопиталовог правила израунати $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \mathrm{tg} x \right)$.

7. (10 п) Линеарна хомогена диференцијална једначина другог реда са константним коефицијентима. Опште решење.

РЕШЕЊА

1. Означимо $a_n = \frac{n}{\ln^n(n+1)}$. Како је

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{\ln^n(n+1)}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln(n+1)} = 0 < 1,$$

то дати ред конвергира по Кошијевом критеријуму.

2. Како аргумент логаритамске функције мора бити позитиван, то је домен дате функције $\mathcal{D} = (0, +\infty)$. Први и други извод дате функције су

$$f'(x) = \frac{2 \ln x}{x}, \ f''(x) = \frac{2 - 2 \ln x}{x^2}.$$

Имамо да је

$$f'(x) < 0 \text{ за } x \in (0, 1),$$
$$f'(x) > 0 \text{ за } x \in (1, +\infty),$$
$$f'(x) = 0 \text{ за } x = 1,$$

и да је

$$f''(x) < 0 \text{ за } x \in (e, +\infty),$$
$$f''(x) > 0 \text{ за } x \in (0, e),$$
$$f''(x) = 0 \text{ за } x = e,$$

па закључујемо да

f опада за $x \in (0, 1)$,
f расте за $x \in (1, +\infty)$,
$x = 1$ је локални минимум,
f је конкавна за $x \in (e, +\infty)$,
f је конвексна за $x \in (0, e)$,
$x = e$ је превојна тачка.

3.

$$\int \frac{\sin x}{\sin^4 x - \cos^4 x}\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x)}\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{1 - 2\cos^2 x}\mathrm{d}x =$$

$$= \begin{bmatrix} t = \cos x \\ \mathrm{d}t = -\sin x \mathrm{d}x \end{bmatrix} = -\int \frac{1}{1-2t^2}\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int \frac{1-\sqrt{2}t + 1 + \sqrt{2}t}{(1-\sqrt{2}t)(1+\sqrt{2}t)}\mathrm{d}t =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1+\sqrt{2}t} + \frac{1}{1-\sqrt{2}t}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\ln(1+\sqrt{2}t) - \ln(1-\sqrt{2}t)\Big) + c =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\ln(1+\sqrt{2}\cos x) - \ln(1-\sqrt{2}\cos x)\Big) + c.$$

4. Најпре нађимо решење хомогене једначине $y'' + 16y = 0$. Нуле карактеристичне једначине $\lambda^2 + 16 = 0$ су $\lambda_1 = 4\mathrm{i}$, $\lambda_2 = -4\mathrm{i}$, па је $y_h = c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x$.
Партикуларно решење је облика $y_p = e^x(A\cos x + B\sin x)$. Израчунајмо први и други извод партикуларног решења и убацимо га у полазну једначину.

$$y_p' = ((A+B)\cos x + (B-A)\sin x)e^x,$$

$$y_p'' = ((A+B+B-A)\cos x + (B-A-A-B)\sin x)e^x = (2B\cos x - 2A\sin x)e^x,$$

па је

$$(2B\cos x - 2A\sin x)e^x + 16(A\cos x + B\sin x)e^x = e^x\cos x$$

односно након сређивања

$$(2B + 16A)\cos x + (-2A + 16B)\sin x = \cos x,$$

па након изједначавања коефицијената уз $\cos x$ и $\sin x$ са леве и десне стране једнакости добијамо систем две једначине

$$2B + 16A = 1, \quad -2A + 16B = 0,$$

чије је решење $A = \frac{4}{65}$, $B = \frac{1}{130}$, па је $y_p = e^x\left(\frac{4}{65}\cos x + \frac{1}{130}\sin x\right)$.
Коначно, опште решење дате једначине је

$$y = y_h + y_p = c_1\cos 4x + c_2 \sin 4x + e^x\left(\frac{4}{65}\cos x + \frac{1}{130}\sin x\right), \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

5. Означимо са H_1 и H_2 хипотезе да је одабрана прва односно друга кутија, а са A догађај да је извучена бела куглица. Како се одабир кутије одређује бацањем куглице, имамо да је

$$P(H_1) = \frac{1}{6}, \ P(H_2) = \frac{5}{6}$$

као и

$$P(A|H_1) = \frac{2}{5}, \ P(A|H_2) = \frac{8}{11}.$$

(а) Тражимо $P(A)$.

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) = \frac{2}{5}\frac{1}{6} + \frac{8}{11}\frac{5}{6} = \frac{37}{55}.$$

(б) Тражена вероватноћа је $P(H_1|A)$.

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{37}{55}} = \frac{11}{111}.$$

6. а) Нека су функције $f(x)$ и $g(x)$ диференцијабилне у околини тачке $a \in \mathbb{R}$ и уколико је

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \text{ или } \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty,$$

тада је

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

б) Имамо да је

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \mathrm{tg} x \right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} \right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos x} \overset{L.P.}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-\sin x} = 0.$$

7. Линеарна хомогена диференцијална једначина другог реда са константним коефицијентима је облика

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Одговарајућа карактеристична једначина је облика

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

има два решења λ_1 и λ_2.
1) Ако је $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$, онда је опште решење дато формулом

$$y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2) Ако је $\lambda_1 \neq \lambda_2,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, онда је опште решење дато формулом

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

3) Ако је $\lambda_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta,\ \lambda_2 = \alpha - \mathrm{i}\beta \in \mathbb{C}$, онда је опште решење дато формулом

$$y = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

РЕШЕЊА ЈУЛСКОГ РОКА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 11.07.2018.

1. (8 п) Израчунати $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{tg}x$.

2. (8 п) Испитати конвексност функције $y=\sqrt{x}e^x$.

3. (8 п) Израчунати $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.

4. (8 п) Наћи опште решење диференцијалне једначине $(1+x^2)y''+2xy'=x^3$.

5. (8 п) У кутији се налази 6 белих и 5 плавих куглица. Пера извлачи одједном две куглице. Одредити расподелу случајне променљиве X која представља број извучених плавих куглица, као и $E(X)$ и $D(X)$.

6. (5 п) а) Како гласи Поредбени критеријум за конвергенцију редова са ненегативним члановима?

(5 п) б) Применом Поредбеног критеријума испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+\sin n}{n^3-3n^2+10}$.

7. (10 п) Дисперзија дискретне случајне променљиве. Дефиниција и особине.

РЕШЕЊА

1.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{tg}x &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\frac{\sin x}{\cos x}\\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin x}{\cos x}\\ &\overset{L.P.}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin x+\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos x}{-\sin x}\\ &= 1\end{aligned}$$

2. Домен дате функције $\mathcal{D}=[0,+\infty)$. Први и други извод дате функције су

$$f'(x)=\frac{e^x(2x+1)}{2\sqrt{x}},\ f''(x)=\frac{e^x(4x^2+4x-1)}{4x\sqrt{x}}.$$

Имамо да је

$$\begin{gathered} f''(x)<0 \text{ за } x\in\left[0,\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right),\\ f''(x)>0 \text{ за } x\in\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2},+\infty\right),\\ f''(x)=0 \text{ за } x=\frac{\sqrt{2}-1}{2},\end{gathered}$$

па закључујемо да

$$\begin{gathered} f \text{ је конкавна за } x\in\left[0,\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right),\\ f \text{ је конвексна за } x\in\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2},+\infty\right),\\ x=\frac{\sqrt{2}-1}{2} \text{ је превојна тачка.}\end{gathered}$$

3.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}} &= \begin{bmatrix}1-x=t^2\\ \mathrm{d}=-2t\mathrm{d}t\end{bmatrix}\\ &= \int_0^1 \frac{2t}{(1+t^2)t}\mathrm{d}t\\ &= 2\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t\\ &= 2\mathrm{artctg}t\Big|_0^1\\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

4. Уведимо смену $u = y'$. Тада дата једначина постаје линеарна диференцијална једначина

$$u' + \frac{2x}{1+x^2}u = \frac{x^3}{1+x^2}$$

чије је решење

$$\begin{aligned}u(x) &= e^{-\int \frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x}\left(c + \int e^{\int \frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x}\frac{x^3}{1+x^2}\mathrm{d}x\right)\\ &= e^{-\ln(1+x^2)}\left(c + \int e^{\ln(1+x^2)}\frac{x^3}{1+x^2}\mathrm{d}x\right)\\ &= \frac{1}{1+x^2}\left(c + \int x^3\mathrm{d}x\right)\\ &= \frac{1}{1+x^2}\left(c + \frac{x^4}{4}\right),\ c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Остаје још да нађемо y.

$$\begin{aligned}y(x) &= \int \frac{1}{1+x^2}\left(c+\frac{x^4}{4}\right)\mathrm{d}x\\ &= \int\left(c\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{4}\frac{x^4-1+1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x\\ &= \left(c+\frac{1}{4}\right)\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} + \frac{1}{4}\int(x^2-1)\mathrm{d}x\\ &= \left(c+\frac{1}{4}\right)\mathrm{arctg}x + \frac{x^3}{12} - \frac{x}{4} + d,\ c,d\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

5. Приметимо прво да је $X \in \{0,1,2\}$. Имамо да је

$$P\{X=0\} = \frac{6}{11}\cdot\frac{5}{10} = \frac{3}{11},\ P\{X=1\} = \frac{6}{11}\cdot\frac{5}{10} + \frac{5}{11}\cdot\frac{6}{10} = \frac{6}{11},\quad P\{X=2\} = \frac{5}{11}\cdot\frac{4}{10} = \frac{2}{11},$$

па X има расподелу

$$X : \begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ \frac{3}{11} & \frac{6}{11} & \frac{2}{11}\end{pmatrix}.$$

Остаје још да израчунамо очекивање и дисперзију.

$$E(X) = 0\cdot\frac{3}{11} + 1\cdot\frac{6}{11} + 2\cdot\frac{2}{11} = \frac{10}{11},$$

$$D(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 0^2\cdot\frac{3}{11} + 1^2\cdot\frac{6}{11} + 2^2\cdot\frac{2}{11} - \left(\frac{10}{11}\right)^2 = \frac{54}{121}.$$

6. а) Погледати у уџбенику.

б) Како је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n+\sin n}{n^3-3n^2+10}}{\frac{2}{n^2}} = 1,$$

то су редови

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+\sin n}{n^3-3n^2+10} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$$

еквиконвергенти. Знамо да ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ конвергира, па на основу поредбеног критеријума, конвергира и дати ред.

7. Погледати у уџбенику.

РЕШЕЊА АВГУСТОВСКОГ РОКА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 29.08.2018.

1. (8 п) Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n3^n}$.
2. (8 п) Израчунати $\lim_{x\to\pi} \frac{\sin\frac{x}{2}+\cos x}{1+\sin^2 x+\cos x}$.
3. (8 п) Израчунати $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+5}$.
4. (8 п) Наћи опште решење диференцијалне једначине $y''-5y'+6y=e^x\sin x$.
5. (8 п) Из кутије у којој су три цедуље нумерисане бројевима 1, 2, 3 извлачимо (без враћања) по једну цедуљу до појаве парног броја. Наћи скуп елементарних исхода. Ако је X случајна променљива која представља укупан број извлачења, одредити EX и DX.
6. (а) **(5 п)** Дати дефиниције конвексности, конкавности и превојних тачака.
(б) **(5 п)** Испитати конвексност функције $f(x)=\frac{2x+1}{x^2-1}$.
7. (а) **(5 п)** Дефиниција условне вероватноће.
(б) **(5 п)** Бајесова формула.

РЕШЕЊА

1. Означимо $a_n=\frac{2^n}{n3^n}$. Како је

$$r=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3\sqrt[n]{n}}=\frac{2}{3}<1,$$

то дати ред конвергира на основу Кошијевог критеријума.
2.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi}\frac{\sin\frac{x}{2}+\cos x}{1+\sin^2 x+\cos x} &\overset{L.P.}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to\pi}\frac{\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}-\sin x}{2\sin x\cos x-\sin x}\\ &\overset{L.P.}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to\pi}\frac{-\frac{1}{4}\sin\frac{x}{2}-\cos x}{2\cos^2 x-2\sin^2 x-\cos x}\\ &=\frac{-\frac{1}{4}\cdot 1-(-1)}{2\cdot(-1)^2-2\cdot 0-(-1)}\\ &=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+5}&=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+4}\\ &=\int\frac{\mathrm{d}x}{4\left((\frac{x+1}{2})^2+1\right)}\\ &=\begin{bmatrix} t=\frac{x+1}{2}\\ \mathrm{d}t=\frac{1}{2}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}x=2\mathrm{d}t\end{bmatrix}\\ &=\frac{1}{4}\int\frac{2\mathrm{d}t}{(t^2+1)}\\ &=\frac{1}{2}\mathrm{arctg}t+c\\ &=\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{x+1}{2}+c\end{aligned}$$

4. Прво тражимо решење хомогене једначине $y'' - 5y' + 6y = 0$. Одговарајућа карактеристична једначина је $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, чија су решења $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, па је решење хомогене једначине једнако

$$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}.$$

Партикуларно решење је облика $y_p = e^x(A\cos x + B\sin x)$. Израчунајмо y_p' и y_p'' и убацимо резултат у полазну једначину.

$$y_p' = e^x((A+B)\cos x + (B-A)\sin x)$$

$$y_p'' = 2e^x(B\cos x - A\sin x)$$

$$2e^x(B\cos x - A\sin x) - 5e^x((A+B)\cos x + (B-A)\sin x) + 6e^x(A\cos x + B\sin x) = e^x \sin x$$

Издвајањем коефицијената уз $\sin x$ и $\cos x$ у последњој једнакости добијамо систем

$$A - 3B = 0$$

$$3A + B = 1$$

чије је решење $A = \frac{3}{10}$, $B = \frac{1}{10}$, па је партикуларно решење једнако

$$y_p = e^x \left(\frac{3}{10}\cos x + \frac{1}{10}\sin x \right).$$

Коначно, тражено опште решење је

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + e^x \left(\frac{3}{10}\cos x + \frac{1}{10}\sin x \right).$$

5. Скуп елементарних исхода је

$$\Omega = \{2, 12, 32, 132, 312\}.$$

Примећујемо да је $X \in \{1, 2, 3\}$ (укупан број извлачења може бити 1, 2 или 3). Како је

$$P\{X = 1\} = \frac{1}{3},$$

$$P\{X = 2\} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3},$$

$$P\{X = 3\} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{3},$$

па случајна променљива X има расподелу

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Сада лако можемо израчунати очекивање и дисперзију.

$$EX = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} = 2,$$

$$EX^2 = 1^2 \cdot \frac{1}{3} + 2^2 \cdot \frac{1}{3} + 3^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{14}{3},$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{14}{3} - 4 = \frac{2}{3}.$$

6. Погледати у уџбенику.
7. Погледати у уџбенику.

РЕШЕЊА СЕПТЕМБАРСКОГ РОКА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 19.09.2018.

1. (8 п) Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$.
2. (8 п) Испитати монотоност и наћи екстремне вредности функције $(x-1)\sqrt{10-x}$.
3. (8 п) Израчунати $\int \frac{x^3}{x^2-1}\mathrm{d}x$.
4. (8 п) Наћи опште решење диференцијалне једначине $xy'' + y' = 2x^2$.
5. (8 п) У једној кутији се налазе лоптице нумерисане бројевима од 5 до 15, а у другој лоптице нумерисане бројевима од 16 до 28. Баца се коцкица за игру. Ако падне број 4, извлачи се лоптица из прве кутије, а иначе из друге. Која је вероватноћа да се извуче лоптица која садржи цифру 1?
6. (а) **(5 п)** Како гласи Даламберов критеријум за конвергенцију редова?
(б) **(5 п)** Испитати помоћу Даламберовог критеријума конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n+3^n+n}{5^n}$.
7. (10 п) Површина и запремина ротационог тела.

РЕШЕЊА

1. Означимо са $a_n = \frac{2^n}{(n+1)!}$. Како је

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+2)!}}{\frac{2^n}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} = \frac{2}{n+1} = 0 < 1,$$

па дати ред конвергира на основу Даламберовог критеријума.

2. Домен дате функције $\mathcal{D} = (-\infty, 10]$. Први и други извод дате функције су

$$f'(x) = \sqrt{10-x} - \frac{x-1}{2\sqrt{10-x}} = \frac{2(10-x)-(x-1)}{2\sqrt{10-x}} = \frac{21-3x}{2\sqrt{10-x}}$$

Имамо да је

$$f''(x) < 0 \text{ за } x \in (7, 10],$$
$$f''(x) > 0 \text{ за } x \in (-\infty, 7),$$
$$f''(x) = 0 \text{ за } x = 7,$$

па закључујемо да

$$f \text{ опада на } x \in (7, 10],$$
$$f \text{ расте на } x \in (-\infty, 7),$$
$$x = 7 \text{ је тачка локалног максимума.}$$

3.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3\mathrm{d}x}{x^2-1} &= \int \left(x + \frac{x}{x^2-1}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int \left(x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x-1+x+1}{(x-1)(x+1)}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int x\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x+1} + \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1} \\
&= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x-1) + c
\end{aligned}$$

4. Уведимо смену $u = y'$ и поделимо целу једначину са x. Тада дата једначина постаје линеарна диференцијална једначина

$$u' + \frac{1}{x}u = x,$$

чије је решење

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{-\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(c + \int e^{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x} x\mathrm{d}x\right) \\ &= e^{-\ln|x|}\left(c + \int e^{\ln|x|} x\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{x}\left(c + \int x^2\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{x}\left(c + \frac{x^3}{3}\right),\ c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Остаје још да нађемо y.

$$\begin{aligned} y(x) &= \int \frac{1}{x}\left(c + \frac{x^3}{3}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int \left(\frac{c}{x} + \frac{x^2}{3}\right)\mathrm{d}x \\ &= c\ln x + \frac{x^3}{9} + d,\ c, d \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

5. Означимо са A догађај да је извучена лоптица која садржи цифру 1, са H_1 хипотезу да се куглица извлачи из прве кутије, а H_2 хипотеза да се куглица извлачи из друге кутије. Имамо

$$P(H_1) = \frac{1}{6},\ P(H_2) = \frac{5}{6},$$
$$P(A|H_1) = \frac{6}{11},\ P(A|H_2) = \frac{5}{13},$$

па је коначно тражена вероватноћа једнака

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = \frac{1}{6}\cdot\frac{6}{11} + \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{13} = \frac{353}{858}.$$

6. (а) Видети у уџбенику.
(б) Означимо са

$$a_n = \frac{4^n + 3^n + n}{5^n}.$$

Како је

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4^{n+1}+3^{n+1}+n+1}{5^{n+1}}}{\frac{4^n+3^n+n}{5^n}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}+3^{n+1}+n+1}{5(4^n+3^n+n)}\cdot\frac{\frac{1}{4^n}}{\frac{1}{4^n}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{4+3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{n+1}{4^n}}{5\left(1+\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{n}{4^n}\right)} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{4+3\cdot 0+0}{5(1+0+0)} \\ &= \frac{4}{5} < 1 \end{aligned}$$

па дати ред конвергира по Даламберовом критеријуму.

7. Видети у уџбенику.