МАТЕМАТИКА - решени задаци

Милица Јовановић
milica_jovanovic@matf.bg.ac.rs

Садржај:

Предговор

Ова збирка садржи задатке који прате курс Математика на основним студијама Хемијског факултета. Текст је подељен на две целине - задаци и решења. У првој целини су поставке задатака, а у другом мање више детаљно решени сви задаци. Свака од ове две целине је издељена на области које се раде на часовима вежби. Моја је препорука да се за спремање испита прво добро прораде вежбе, затим задаци из ове збирке што је више могуће самостално па тек на крају гледати решења (наравно нема потребе радити све задатке, процените сами када сте савладали неку област), и на крају обавезно радити раније рокове јер се тако најбоље стиче утисак колико сте савладали градиво. Уколико нађете у тексту неку грешку, молим вас да ми јавите мејлом да бих што пре исправила. Такође, уколико наиђете на неки занимљив задатак који мислите да бих могла да додам, слободно ми пошаљите. Срећан рад!

1 Задаци

1.1 Лимеси низова

1. Израчунати лимесе низова

(а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-2}{2n-1}$; (б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4-1}{n^4+1}$; (в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-2n+1}{n^4+2n^2+7}$;

(г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!-(n+1)!}{(n+3)!}$; (д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$;

(ђ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3}$; (е) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)$;

(ж) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+5n+6}-\sqrt{n^2+n+3}\right)$; (з) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+7}{3n+2}\right)^{9n}$;

(и) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2}$; (ј) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-5n}-\sqrt{n^2+7n-9}\right)$;

(к) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{13^n+17^n+19^n}$; (л) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^n}$;

(љ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2^n-\ln n+3}{3^n+n^3}$; (м) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)}{n^3}$

(н) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-2n+1}{n^2-4n+2}\right)^{n}$.

2. Испитати конвергенцију редова

(а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}$; (б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3+1}{n^5}$; (в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}+1}{n^2+1}$; (г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{3n^3+2n^2+n+1}$;

(д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$; (ђ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{(n^2+1)7^n}$; (е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^n$; (ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^{-n}$;

(з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{n+1}}$; (и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$; (ј) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n2^{n+2}}{5^n}$;

(к) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3n+4}{n}\right)^{3n}$; (л) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$; (љ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n^2}$; (м) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^n}{\ln n}$; (н) $\dfrac{3^n n^3}{n!}$.

1.2 Лимеси функција

3. Израчунати лимесе функција

(а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+1}{x^2-3x+3}$; (б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$; (в) $\lim\limits_{x\to -3}(\sqrt{19+x}-4)$;

(г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\, x}{2x}$; (д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin 3x}$; (ђ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\cos x}{x^2}$; (е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x\cos x}{x}$;

(ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$; (з) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$;

(и) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3-2x+x^2}-\sqrt{x^2-x+1}}{2x-x^2}$; (j) $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt{x}-4}{x-16}$; (к) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$;

(л) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x^2+1}\right)^{3x^2}$; (љ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{5x}-1)\sin x}{x^2}$.

4. Наћи изводе функција

(а) $y=x^2+\ln x+\mathrm{arctg}\, x$; (б) $y=\cos 3x+\sin x+15$; (в) $y=\ln(\sin(\cos(3x+5)))$;

(г) $y=\dfrac{x^2}{\ln x+3}$; (д) $y=e^{e^{e^x}}$; (ђ) $y=\sqrt{\ln x+\sin x}$; (е) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$; (ж) $y=xe^x\ln x$;

(з) $y=\mathrm{arctg}\dfrac{2x-1}{2x+1}$; (и) $y=\mathrm{arctg}\sqrt{x+e+\pi}$; (j) $y=x\arcsin x$.

5. Израчунати лимесе функција користећи Лопиталово правило

(а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$; (б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$; (в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$; (г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{8-x^3}$;

(д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-2^x}{x^2-x}$; (ђ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\mathrm{tg}\, x}{\sin 3x}$; (е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x}{\mathrm{arctg}\, 5x}$; (ж) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}}{x^2-9}$;

(з) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{5x+5}$; (и) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+\ln x}{x^2+7}$; (j) $\lim\limits_{x\to 0}x(\ln x)^2$; (к) $\lim\limits_{x\to 0}\ln x\mathrm{tg}\, x$;

(л) $\lim\limits_{x\to 0}x^{\sin x}$; (љ) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$.

1.3 Испитивање функција

6. Одредити домене функција

$$\text{(а) } f(x)=\frac{\ln x}{x};\quad \text{(б) } f(x)=\frac{1}{2+\ln(x+3)};\quad \text{(в) } f(x)=xe^{\sqrt{x}};\quad \text{(г) } f(x)=3+\frac{\operatorname{tg} x}{x^2+1};$$

$$\text{(д) } f(x)=e^{\frac{1}{x^2+3}};\quad \text{(ђ) } f(x)=\sin\frac{x+1}{x-1};\quad \text{(е) } f(x)=\frac{\ln(x^2-5x+6)}{x+10};\quad \text{(ж) } f(x)=\frac{1-\frac{1}{x}}{x^2-x-6}.$$

7. Испитати парност и непарност функција

$$\text{(а) } f(x)=\frac{x^4+x^2+1}{x^6-1};\quad \text{(б) } f(x)=\ln(x+1);\quad \text{(в) } f(x)=\sin(x^3);\quad \text{(г) } f(x)=\cos(x^3).$$

8. Одредити асимптоте функција

$$\text{(а) } f(x)=\frac{x^3}{x^2-1};\quad \text{(б) } f(x)=\frac{x^2-4}{3-x^2};\quad \text{(в) } f(x)=\frac{x^2}{x-5}.$$

9. Испитати монотоност и наћи екстремуме функција

$$\text{(а) } f(x)=e^{x^2};\quad \text{(б) } f(x)=\ln(x+1);\quad \text{(в) } f(x)=\frac{x+1}{x-1};\quad \text{(г) } f(x)=\frac{e^x}{x^2+1};$$

$$\text{(д) } f(x)=\frac{x+1}{x^2-5x+6};\quad \text{(ђ) } f(x)=e^{-2x}(x^2-4x-8);\quad \text{(е) } f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}.$$

10. Испитати конвексност, конкавност и наћи превојне тачке функција

$$\text{(а) } f(x)=x^2\ln x;\quad \text{(б) } f(x)=x^4-2x^3-36x^2-4x-5;$$

$$\text{(в) } f(x)=\ln\frac{x-1}{x+1};\quad \text{(г) } f(x)=e^x(x^2-3).$$

11. Испитати ток и скицирати график функција

$$\text{(а) } f(x)=xe^{\frac{1}{x-2}};\quad \text{(б) } f(x)=\ln\frac{x-1}{x+1}.$$

1.4 Неодређени интеграли

12. Израчунати интеграле

(а) $\displaystyle\int \left(x^5 - \sqrt[5]{x} + \sqrt{x^3}\right) \mathrm{d}x$; (б) $\displaystyle\int \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}\mathrm{d}x$; (в) $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\mathrm{d}x$;

(г) $\displaystyle\int (\sin x - \cos x)\mathrm{d}x$; (д) $\displaystyle\int \frac{x-7}{x^3}\mathrm{d}x$.

13. Израчунати интеграле

(а) $\displaystyle\int \frac{3}{x+5}\mathrm{d}x$; (б) $\displaystyle\int \left(e^{5x+1} - \sin(5x+1)\right) \mathrm{d}x$; (в) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2+3x+5}\mathrm{d}x$;

(г) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+2)^6}\mathrm{d}x$; (д) $\displaystyle\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$; (ђ) $\displaystyle\int \mathrm{tg} x \mathrm{d}x$;

(е) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$; (ж) $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+5)^7}\mathrm{d}x$; (з) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-2x}}\mathrm{d}x$;

(и) $\displaystyle\int \frac{x^2+4x+6}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x$; (j) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4x+5}\mathrm{d}x$.

14. Израчунати интеграле

(а) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+3}$; (б) $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\mathrm{d}x$; (в) $\displaystyle\int \frac{x^5-3}{x^3+1}\mathrm{d}x$.

15. Израчунати интеграле

(а) $\displaystyle\int x^2 \ln x \mathrm{d}x$; (б) $\displaystyle\int x^2 e^x \mathrm{d}x$; (в) $\displaystyle\int e^{5x} \sin 6x \mathrm{d}x$; (г) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^5}\mathrm{d}x$;

(д) $\displaystyle\int x^3 \ln(5x)\mathrm{d}x$; (ђ) $\displaystyle\int (\ln x)^2 \mathrm{d}x$; (е) $\displaystyle\int e^x \cos x \mathrm{d}x$.

16. Израчунати интеграле

(а) $\displaystyle\int \frac{1}{1-2x}\sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-2x}}\mathrm{d}x$; (б) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+4}}$; (в) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x - \cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^3 x}\mathrm{d}x$;

(г) $\displaystyle\int \sin^3 x \mathrm{d}x$; (д) $\displaystyle\int \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x + 1}\mathrm{d}x$; (ђ) $\displaystyle\int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\mathrm{d}x$.

1.5 Одређени интеграли

17. Израчунати интеграле

$$\text{(а)}\ \int_4^9 \sqrt{x}\mathrm{d}x; \quad \text{(б)}\ \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x; \quad \text{(в)}\ \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x \mathrm{d}x; \quad \text{(г)}\ \int_{-1}^1 e^x \mathrm{d}x.$$

18. Израчунати интеграле

$$\text{(а)}\ \int_3^5 \frac{7}{x-2}\mathrm{d}x; \quad \text{(б)}\ \int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+3x+20}\mathrm{d}x; \quad \text{(в)}\ \int_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{x^2+1}; \quad \text{(г)}\ \int_{-3}^3 \frac{e^x}{e^{2x}+1}\mathrm{d}x.$$

19. Израчунати интеграле

$$\text{(а)}\ \int_0^2 \ln\frac{x+4}{4-x}\mathrm{d}x; \quad \text{(б)}\ \int_0^1 xe^x\mathrm{d}x; \quad \text{(в)}\ \int_4^{25} x\sin x\mathrm{d}x; \quad \text{(г)}\ \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x\mathrm{d}x}{\sin^2 x-\cos^2 x}.$$

20. Наћи површину фигуре ограничене са

(а) $y=-x^2+x+6,\ y=0;$ (б) $y=x^2+x-6,\ y=0,\ x=0,\ x=4;$

(в) $y=e^x,\ y=e^{2x},\ x=5;$ (г) $y=\ln x,\ y=1,\ x=1,\ x=3.$

21. Наћи дужину лука криве

(а) $y=x^{\frac{3}{2}},\ x\in[2,3];$ (б) $y=4\sin t,\ x=4\cos t,\ t\in[0,2\pi].$

1.6 Диференцијалне једначине

Диференцијалне једначине првог реда

22. Решити диференцијалне једначине које раздвајају променљиве

(а) $yy'(1-x^2)=x(1-y^2)$; (б) $x\sin x\,\mathrm{tg} y=y'$;

(в) $x\sqrt{1+y^2}+yy'\sqrt{1+x^2}=0$; (г) $\mathrm{tg} y-xy'\ln x=0,\ y(e)=\dfrac{\pi}{2}$.

23. Решити хомогене диференцијалне једначине

(а) $xy'=x+y$; (б) $y-xy'=y\ln\dfrac{x}{y}$; (в) $x+y+(x-y)y'=0$.

24. Решити линеарне диференцијалне једначине

(а) $y'+\sin x=y+\cos x$; (б) $x^3+y-xy'=0$; (в) $y'+2xy=2xe^{-x^2}$.

25. Решити Бернулијеве диференцијалне једначине

(а) $y'+xy-xy^3=0$; (б) $y'+2xy=2xy^2$; c) $y'-2e^xy=2e^x\sqrt{y}$.

26. Решити диференцијалне једначине

(а) $2x^2y'=x^2+y^2$; (б) $y'+\dfrac{y}{x+1}+y^2=0$; (в) $xy'+2y=x^2$;

(г) $y'\sin x=y\ln y,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=e$; (д) $y'+2xy=2x^2e^{-x^2}$; (ђ) $xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y$;

(е) $y-xy'=2(1+x^2y'),\ y(1)=1$; (ж) $y'+2\dfrac{y}{x}=3x^2\sqrt[3]{y^4}$;

(з) $y'+y\mathrm{tg}x=\dfrac{1}{\cos x}$; (и) $2y'\ln x+\dfrac{y}{x}=\dfrac{\cos x}{y}$; (ј) $\sqrt{1-y^2}=-yy'\sqrt{1-x^2}$;

(к) $y'-y\cos x=\sin x\cos x,\ y(0)=0$; (л) $xy'\cos\dfrac{y}{x}=y\cos\dfrac{y}{x}-x$.

Диференцијалне једначине вишег реда

27. Решити диференцијалне једачине

(а) $xy'' = y' \ln \dfrac{y'}{x}$; (б) $yy'' = (y')^2 - (y')^3$; (в) $y^{(4)} = e^{3x}$; (г) $\dfrac{1}{y''+1} = x$;

(д) $xy'' + y' - x^2 = 0$; (ђ) $y'' + 2yy' = 0$; (е) $y''' = \ln x$; (ж) $y''x \ln x = y'$.

28. Решити диференцијалне једначине

(а) $y'' - y = 0$; (б) $y'' + 4y' + 4 = 0$; (в) $y'' + 6y' + 10y = 0$; (г) $3y'' - 2y' - 8y = 0$;

(д) $y'' - 7y' + 12y = 0$; (ђ) $y'' - 2y' + 2y = 0$.

29. Решити диференцијалне једначине

(а) $y'' - 5y' = 2x$; (б) $y'' - 5y' = -e^{5x}$; (в) $y'' + 2y' + y = -2e^{-x} + 2\cos x - 4\sin x$;

(г) $y'' - 4y' + 3y = e^{3x} + \sin 3x$; (д) $y'' + 4y = e^{2x} + 2x$; (ђ) $y'' - 2y' + y = 2 + e^x \sin x$.

1.7 Вероватноћа

30. Одредити скуп свих елементарних догађаја за експеримент:

(а) бацање једног новчића и једне коцкице;

(б) бацање 3 новчића;

(в) бацање 2 новчића и 2 коцке.

31. Бацају се две коцкице одједном. Одредити вероватноћу да је

(а) збир палих бројева 10;

(б) збир палих бројева мањи од 5;

(в) пала бар једна шестица;

(г) пала тачно једна шестица.

32. Бацају се три новчића одједном. Одредити вероватноћу да је

(а) пало бар једно писмо;

(б) пало тачно једно писмо;

(в) пало три писма;

(г) пало највише две главе.

33. Бацају се новчић и коцкица одједном. Одредити вероватноћу да је

(а) пало писмо и 3 на коцки;

(б) пало писмо;

(в) пао паран број на коцки;

(г) пао непаран број на коцки и глава на новчићу.

34. У кутији је 7 црвених, 8 плавих, 12 белих и 3 црне куглице. Извлаче се четири куглице

(а) одједном;

(б) једна по једна без враћања;

(в) једна по једна са враћањем.

Одредити вероватноће догађаја:
A - извучене су четири плаве куглице;
B - извучене су 3 беле и једна црвена куглица;
C - извучене су куглице различитих боја;
D - извучене су 2 плаве, 1 црвена и једна бела куглица.

35. Одредити вероватноћу да се случајним распоредом слова

(а) А, Е, Х, И, Ј, М, добије реч ХЕМИЈА;

(б) А, А, Б, Ј, К, У, добије реч ЈАБУКА;

(в) М, М, Н, Н, О, добије реч МОНОМ;

(г) И, И, И, И, М, П, С, С, добије реч МИСИСИПИ;

(д) А, Ж, И, К, добије реч ЖИКА;

(ђ) А, И, К, Л, С, добије реч СЛИКА.

36. Пера је поново заборавио део свог текућег рачуна, овог пута последњих 5 цифара. Зна само да су те цифре различите. Која је вероватноћа да Пера погоди број свог рачуна из првог покушаја?

37. Пера из претходног задатка се у међувремену сетио да је последња цифра његовог текућег рачуна 7, али и даље не зна претходне четири, мада је сигуран да су последњих пет различите. Колика је вероватноћа да сада Пера погоди број свог рачуна из првог покушаја?

38. Из шпила се извлаче 4 карте одједном. Одредити вероватноћу да се извуку

(а) 4 краља;

(б) карте 2, 3, 4 и 5;

(в) 2 краља и 2 даме;

(г) четири пика;

(д) каро, херц, пик и треф.

39. У џаку је 600 чарапа: 100 црних, 200 црвених и 300 плавих. Ако се зна да је 30% црних, 15% црвених и 55% плавих поцепано, колика је вероватноћа да насумичним извлачењем једне чарапе из џака извучемо целу чарапу?

40. Израчунати вероватноћу добитка на лотоу. Правила игре су да се од 39 куглица нумерисаних бројевима од 1 до 39 извлачи седам за редом без враћања.

41. Бацају се две коцкице одједном. Ако знамо да је збир палих бројева 10, одредити вероватноћу да су пале две петице.

42. Из шпила се извлачи једна карта. Одредити вероватноћу да је извучен краљ или дама.

43. Из шпила се извлачи једна карта. Одредити вероватноћу да је извучен краљ, дама или жандар.

44. Из шпила се извлачи једна карта. Одредити вероватноћу да је извучен пик или кец.

45. У бубњу се налази 20 куглица нумерисаних бројевима од 1 до 20. На случајан начин се извлаче три куглице једна за другом без враћања. Одредити вероватноћу да су бројеви на све три извучене куглице непарни.

46. Пера и Жика полажу испит. Пера је боље научио и испит полаже са вероватноћом $0,9$, а Жика са вероватноћом $0,3$. Израчунати вероватноћу да

(а) Пера положи, а Жика падне;

(б) обоје положе;

(в) бар један положи;

(г) обоје падну;

(д) Пера падне, а Жика положи;

(ђ) тачно један положи.

47. У круг је уписан квадрат. Одредити вероватноћу да случајно изабрана тачка круга припадне квадрату.

48. Пера и Жика су положили испит и договоре се да се нађу да прославе. Договор је да се нађу између $19h$ и $19{:}30h$. Како нису прецизирали тачно време, договор је да онај који дође први чека $15min$ и оде. Колика је вероватноћа да ће Пера и Жика прославити положен испит?

49. У једној фабрици се половина производа производи на машини M_1, трећина на M_2, а остатак на M_3. Машине M_1, M_2, M_3 праве 10%, 5%, 2% шкарта редом. Сви артикли се стављају у складиште. Колика је вероватноћа да је случајно одабран производ из складишта исправан?

50. Три различита производа се стављају у три различите кутије. Вероватноћа да је први производ исправан је $0,9$, други $0,5$ и трећи $0,7$. Колика је вероватноћа да насумице бирајући кутију изаберемо исправан производ?

51. У продавницу рачунара стигли су рачунари различитих произвођача и то 300 комада марке *Dell*, 150 комада марке *Toshiba*, 170 комада марке *HP* и 180 комада марке *Apple*. Вероватноћа да ће рачунар радити дуже од 10 година је $0,4$ за *Dell*, $0,3$ за *Toshiba*, $0,2$ за *HP* и $0,5$ за *Apple*. Случајно бирамо један рачунар. Одредити вероватноћу да ће одабран рачунар радити дуже од 10 година.

52. У једном бубњу има 20 куглица нумерисаних од 1 до 20, а у другом 10 нумерисаних од 1 до 10. Бира се насумично бубањ и извлачи једна куглица.

(а) Колика је вероватноћа да је извучен број у чијем се запису појављује цифра 7?

(б) Колика је вероватноћа да је извучен паран број?

(в) Ако је број на куглици паран, колика је вероватноћа да је куглица из првог бубња?

(г) Колика је вероватноћа да је извучен број мањи од 6?

(д) Ако је извучен број мањи од 6, колика је вероватноћа да је из другог бубња?

53. Два стрелца гађају независно један од другог у мету испаљујући по један метак. Први погађа мету са вероватноћом $0,8$, а други са вероватноћом $0,4$. Након изведеног гађања констатован је један погодак у мету. Наћи вероватноћу да је погодио први односно други стрелац.

54. Новчић се баца 100 пута. Колика је вероватноћа да је пала глава тачно 17 пута?

55. Коцка се баца 70 пута. Колика је вероватноћа да је пао број већи од 4 тачно 30 пута?

56. Две коцке се бацају одједном 150 пута заредом. Колика је вероватноћа да је пао збир 5 тачно 50 пута?

57. Баца се новчић 4 пута. Одредити расподелу случајне променљиве X која представља број палих писама.

58. Коцка се баца два пута. Одредити расподелу случајне променљиве X која представља збир палих бројева.

59. Стрелац који има 5 метака гађа у мету са вероватноћом поготка $\frac{2}{3}$ док је не погоди или док не потроши све метке. Одредити расподелу случајне променљиве X која представља број утрошених метака.

60. Из кутије у којој су четири цедуље нумерисане бројевима $1,\ 2,\ 3,\ 4$ извлачи се без враћања док се не извуче цедуља са непарним бројем. Нека је случајна величина X збир извучених бројева, а Y број извлачења.

(а) Одредити расподелу од X, математичко очекивање $\mathrm{E}(X)$ и дисперзију $\mathrm{D}(X)$.

(б) Одредити расподелу од Y, математичко очекивање $\mathrm{E}(Y)$ и дисперзију $\mathrm{D}(Y)$.

61. Одредити математичко очекивање и дисперзију случајних променљивих из задатака 57-59.

62. Нека је случајна променљива X дата расподелом

$$X : \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 2 & 4 \\ \frac{2}{5} & \frac{a}{5} & \frac{a^2}{10} & \frac{a}{10} & \frac{a^2}{5} \end{pmatrix}.$$

(а) Наћи вредност параметра a;

(б) Израчунати математичко очекивање $\mathrm{E}(X)$ случајне променљиве X;

(в) Израчунати дисперзију $\mathrm{D}(X)$ случајне променљиве X.

2 Решења задатака

2.1 Лимеси низова

1. Користићемо неке познате лимесе

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0, \text{ за } k > 0, \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0, \text{ за } |q| < 1, \tag{4}$$

као и *Штолцову теорему* која каже да ако су низови $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ такви да је $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ растућ, важи $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ и ако постоји

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n},$$

онда постоји и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

и ова два лимеса су једнака (Штолцова теорема се користи у делу (м)).

Такође, знамо да важи

$$\ln n << n^k << a^n << n! << n^n, \tag{5}$$

где је $k \in \mathbb{N}$, а $a > 1$. Претходни ред нам говори да иако сваки од ових израза тежи бесконачности када n тежи бесконачности, знамо да је $\ln n$ „много мање“ од n^k, да је n^k „много мање“ од a^n итд. Одатле закључујемо да је лимес нечег „мањег“ подељеног „већим“ једнак нули, па је тако, на пример, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n!} = 0$.

Користићемо и *Теорему о два полицајца.* Ова теорема каже да уколико имамо три низа $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ таква да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ и ако је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$, онда је и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$.

Уколико се у задатку користи нека од претходних формула то ће бити назначено бројем у загради изнад знака једнакости где је одговарајући лимес искоришћен.

Пређимо сада на рачунање лимеса.

(а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-2}{2n-1} \cdot \dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3 - \frac{2}{n}}{2 - \frac{1}{n}} \overset{(1)}{=} \dfrac{3}{2}$

(б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^4-1}{n^4+1} \cdot \dfrac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-\frac{1}{n^4}}{1+\frac{1}{n^4}} \overset{(1)}{=} 1$

(в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3-2n+1}{n^4+2n^2+7} \cdot \dfrac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}+\frac{1}{n^4}}{1+\frac{2}{n^2}+\frac{7}{n^4}} \overset{(1)}{=} 0$

(г)
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)!-(n+1)!}{(n+3)!} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2-1)(n+1)!}{(n+3)(n+2)(n+1)!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{(n+2)(n+3)} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} \\
&\overset{(1)}{=} 0
\end{aligned}$$

(д)
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2+1)(n+1)!}{(n+2-1)(n+1)!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n+1} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}} \\
&\overset{(1)}{=} 1
\end{aligned}$$

(ђ)
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+6n^2+11n+6}{n^3} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{6}{n}+\frac{11}{n^2}+\frac{6}{n^3}\right) \\
&\overset{(1)}{=} 1
\end{aligned}$$

(е)
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right) \cdot \frac{\sqrt{n^2+n+1}+n}{\sqrt{n^2+n+1}+n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+n+1}\right)^2-n^2}{\sqrt{n^2+n+1}+n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+1-n^2}{\sqrt{n^2+n+1}+n} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1} \\
&\overset{(1)}{=} \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(ж) $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+5n+6}-\sqrt{n^2+n+3}\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+5n+6}+\sqrt{n^2+n+3}}{\sqrt{n^2+5n+6}+\sqrt{n^2+n+3}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+5n+6}\right)^2-\left(\sqrt{n^2+n+3}\right)^2}{\sqrt{n^2+5n+6}+\sqrt{n^2+n+3}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+5n+6-(n^2+n+3)}{\sqrt{n^2+5n+6}+\sqrt{n^2+n+3}}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}}$$
$$\overset{(1)}{=}2$$

(з) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+7}{3n+2}\right)^{9n}=\left(\frac{3n+2+5}{3n+2}\right)^{9n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{3n+2}\right)^{9n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3n+2}{5}}\right)^{\frac{3n+2}{5}\cdot\frac{5}{3n+2}\cdot 9n}$$
$$\overset{(3)}{=}\lim_{n\to\infty}e^{\frac{45n}{3n+2}}$$
$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{45n}{3n+2}}$$
$$=e^{15}$$

(и) $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right)^2\overset{(2)}{=}1$$

(j) $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-5n}-\sqrt{n^2+7n-9}\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2-5n}+\sqrt{n^2+7n-9}}{\sqrt{n^2-5n}+\sqrt{n^2+7n-9}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-5n-(n^2+7n-9)}{\sqrt{n^2-5n}+\sqrt{n^2+7n-9}}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-12+\frac{9}{n}}{\sqrt{1-\frac{5}{n}}+\sqrt{1+\frac{7}{n}-\frac{9}{n^2}}}$$
$$\overset{(1)}{=}-6$$

(к) $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{13^n+17^n+19^n}=\lim_{n\to\infty}19\sqrt[n]{\left(\frac{13}{19}\right)^n+\left(\frac{17}{19}\right)^n+1}\overset{(4)}{=}19$$

Задатак се може урадити и на други начин коришћењем Теореме о два полицајца. Означимо дати низ са $b_n=\sqrt[n]{13^n+17^n+19^n}$. Приметимо да за свако $n\in\mathbb{N}$ важи

$$a_n=\sqrt[n]{19^n}\leqslant\sqrt[n]{13^n+17^n+19^n}\leqslant\sqrt[n]{19^n+19^n+19^n}=c_n,$$

као и да је

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 19,$$

па на основу теореме закључујемо да је и лимес датог низа једнак 19.

(л) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+2^n} = \lim\limits_{n\to\infty} 2\sqrt[n]{\dfrac{1}{2^n}+1} \overset{(4)}{=} 2$

(љ) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+2^n-\ln n+3}{3^n+n^3} \cdot \dfrac{\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{3^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{n^2}{3^n}+\frac{2^n}{3^n}-\frac{\ln n}{3^n}+\frac{3}{3^n}}{1+\frac{n^3}{3^n}} \overset{(4),(5)}{=} 0$

(м)
$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)}{n^3} \\
&\overset{\text{Штолц}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)+(n+1)(n+2)-\big(1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)\big)}{(n+1)^3-n^3} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n+2}{3n^2+3n+1} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

(н)
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-2n+1}{n^2-4n+2}\right)^n &= \lim_{n\to\infty} \left(1-1+\frac{n^2-2n+1}{n^2-4n+2}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{-(n^2-4n+2)+n^2-2n+1}{n^2-4n+2}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{2n-1}{n^2-4n+2}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{n^2-4n+2}{2n-1}}\right)^{\frac{n^2-4n+2}{2n-1}\cdot\frac{2n-1}{n^2-4n+2}\cdot n} \\
&\overset{(3)}{=} \lim_{n\to\infty} e^{\frac{2n-1}{n^2-4n+2}\cdot n} \\
&= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-n}{n^2-4n+2}} \\
&= e^2
\end{aligned}$$

2. (а) Означимо са s_n парцијалну суму датог реда, тј. $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k!}{k^k}$. Како је

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} (s_{n+1}-s_n) &= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k!}{k^k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{k^k}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1!}{1^1}+\frac{2!}{2^2}+\cdots+\frac{n!}{n^n}+\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}-\frac{1!}{1^1}-\frac{2!}{2^2}-\cdots-\frac{n!}{n^n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

то дати ред конвергира по дефиницији конвергенције редова.

(б) Како је

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^3+1}{n^5}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^3}\right)\overset{(1)}{=}1,$$

то су редови

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{n^5}\ \text{и}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

еквиконвергентни, а знамо да $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ конвергира, па конвергира и дати ред на основу поредбеног критеријума.

(в) Како је

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{n+1}+1}{n^2+1}}{\frac{\sqrt{n}}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}\cdot\frac{\sqrt{n+1}+1}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}\cdot\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\overset{(1)}{=}1\cdot(1+0)=1,$$

то су редови

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}+1}{n^2+1}\ \text{и}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

еквиконвергентни, а како $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ конвергира, то конвергира и дати ред на основу поредбеног критеријума.

(г) Како је

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{3n^3+2n^2+n+1}}{\frac{1}{3n}}=1,$$

то су редови

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3n^3+2n^2+n+1}\ \text{и}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n}$$

еквиконвергентни, а како $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n}$ дивергира, то дивергира и дати ред на основу поредбеног критеријума.

(д) Користићемо Кошијев критеријум. Означимо општи члан датог реда са $a_n=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Како је

$$
\begin{aligned}
r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{-(n+1)}\right)^{-(n+1)\cdot\frac{1}{-(n+1)}\cdot n} \\
&= \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{n+1}\cdot n} \\
&= e^{-1} \\
&= \frac{1}{e} < 1,
\end{aligned}
$$

то дати ред конвергира на основу Кошијевог критеријума.

(ђ) Користићемо Кошијев критеријум. Означимо општи члан датог реда са $a_n = \frac{n^2}{(n^2+1)7^n}$ Како је

$$r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{(n^2+1)7^n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{n^2+1}} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{7} < 1,$$

то дати ред конвергира на основу Кошијевог критеријума.

Други начин: користићемо Даламберов критеријум. Како је

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{((n+1)^2+1)7^{n+1}}}{\frac{n^2}{(n^2+1)7^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2(n^2+1)}{n^2(n^2+2n+2)} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{7} < 1,$$

то дати ред конвергира на основу Даламберовог критеријума.

(е) Како је

$$\lim_{n\to\infty} 3^n = \infty \neq 0,$$

то дати ред дивергира јер није испуњен неопходан услов за конвергенцију редова. Дивергенција датог реда је могла бити показана и коришћењем Кошијевог или Даламберовог критеријума.

(ж) Користићемо Кошијев критеријум. Означимо општи члан датог реда са $a_n = 3^{-n}$. Како је

$$r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^{-n}} = \frac{1}{3} < 1,$$

то дати ред конвергира на основу Кошијевог критеријума.

(з) Како је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = 1,$$

то су редови

$$\sum_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

еквиконвергентни, а како ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ конвергира, то конвергира и дати ред на основу поредбеног критеријума.

(и) Како је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}}{\frac{1}{4n}} = 1,$$

то су редови

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n}$$

еквиконвергентни, а како ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n}$ дивергира, то дивергира и дати ред на основу поредбеног критеријума.

(ј) Користићемо Кошијев критеријум. Означимо општи члан датог реда са $a_n = \frac{n2^{n+2}}{5^n}$. Како је

$$r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n2^{n+2}}{5^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}\cdot 2^2}{5} = \frac{4}{5} < 1,$$

то дати ред конвергира на основу Кошијевог критеријума.

(к) Користићемо Кошијев критеријум. Означимо општи члан датог реда са $a_n = \left(\frac{3n+4}{n}\right)^{3n}$. Како је

$$r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n+4}{n}\right)^{3n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+4}{n}\right)^3 = 3^3 = 27 > 1,$$

то дати ред дивергира на основу Кошијевог критеријума.

(л) Користићемо Даламберов критеријум. Означимо општи члан датог реда са $a_n = \frac{1}{n!}$. Како је

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1,$$

то дати ред конвергира на основу Даламберовог критеријума.

(љ) Како је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^2} = \infty \neq 0,$$

то дати ред дивергира јер није испуњен неопходан услов за конвергенцију редова. Дивергенција датог реда је могла бити показана и коришћењем Кошијевог или Даламберовог критеријума.

(м) Како је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{\ln n} = \infty \neq 0,$$

то дати ред дивергира јер није испуњен неопходан услов за конвергенцију редова.
(н) Користићемо Даламберов критеријум. Означимо општи члан датог реда са $a_n = \frac{3^n n^3}{n!}$. Како је

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}(n+1)^3}{(n+1)!}}{\frac{3^n n^3}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3(n^3+3n^2+3n+1)}{n^3(n+1)} = 0 < 1,$$

то дати ред конвергира на основу Даламберовог критеријума.

2.2 Лимеси функција

3.

(а) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2x^2+1}{x^2-3x+3} = \dfrac{2\cdot(-2)^2+1}{(-2)^2-3(-2)+3} = \dfrac{9}{13}$

(б) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-3)(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+2}{x-3} = \dfrac{4}{-1} = -4$

(в) $\lim\limits_{x\to -3} \left(\sqrt{19+x}-4\right) = \sqrt{19-3}-4 = 4-4 = 0$

(г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{tg}\ x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{2x\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{2\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2\cos x} = \dfrac{1}{2}$

(д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\sin 3x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3} = \dfrac{1}{3}$

(ђ) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\cos x}{x^2} = \dfrac{2}{0} = +\infty$

(е) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x\cos x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x\cos x}{3x}\cdot 3 = \lim\limits_{x\to 0} 3\cos x = 3$

(ж)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)^5-(1+5x)}{x^2+x^5} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1-1-5x}{x^2(1+x^3)}\\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2(x^3+5x^2+10x+10)}{x^2(1+x^3)}\\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^3+5x^2+10x+10}{1+x^3}\\ &= 10\end{aligned}$$

(з) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^5-15x^4+85x^3-225x^2+274x-120}{3125x^5-3125x^4+1250x^3-250x^2+25x-1}$$

$$= \frac{1}{3125}$$

(и) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3-2x+x^2}-\sqrt{x^2-x+1}}{2x-x^2}\cdot\dfrac{\sqrt{3-2x+x^2}+\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{3-2x+x^2}+\sqrt{x^2-x+1}}$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{3-2x+x^2-x^2+x-1}{x(2-x)\left(\sqrt{3-2x+x^2}+\sqrt{x^2-x+1}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{2-x}{x(2-x)\left(\sqrt{3-2x+x^2}+\sqrt{x^2-x+1}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{1}{x\left(\sqrt{3-2x+x^2}+\sqrt{x^2-x+1}\right)}$$

$$= \frac{1}{2(\sqrt{3}+\sqrt{3})}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{3}}$$

(j) $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt{x}-4}{x-16}=\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)}=\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{1}{\sqrt{x}+4}=\dfrac{1}{8}$

(к) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}\cdot\dfrac{2+\sqrt{x-3}}{2+\sqrt{x-3}}=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2^2-(x-3)}{(x+7)(x-7)(2+\sqrt{x-3})}$

$$= \lim_{x\to 7}\frac{7-x}{(x+7)(x-7)(2+\sqrt{x-3})}$$

$$= \lim_{x\to 7}\frac{-1}{(x+7)(2+\sqrt{x-3})}$$

$$= -\frac{1}{56}$$

(л) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x^2+1}\right)^{3x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2+1}\right)^{(x^2+1)\frac{1}{x^2+1}3x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{3x^2}{x^2+1}}=e^3$

(љ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{5x}-1)\sin x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{5x}\cdot\dfrac{\sin x}{x}\cdot 5=5$

4.

(а) $y'=2x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1+x^2}$

(б) $y'=-3\sin 3x+\cos x$

(в) $y'=\dfrac{1}{\sin(\cos(3x+5))}\cdot\cos(\cos(3x+5))\cdot(-\sin(3x+5))\cdot 3$

(г) $y'=\dfrac{2x(\ln x+3)-\frac{1}{x}\cdot x^2}{(\ln x+3)^2}=\dfrac{2x(\ln x+3)-x}{(\ln x+3)^2}$

(д) $y'=e^{e^{e^x}}\cdot e^{e^x}\cdot e^x$

(ђ) $y' = \dfrac{\frac{1}{x} + \cos x}{2\sqrt{\ln x + \sin x}}$

(е) $y' = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1) - \sqrt{x}}{(x+1^2)}$

(ж) $y' = e^x \ln x + x \cdot (x \ln x)' = e^x \ln x + x\left(e^x \ln x + \dfrac{e^x}{x}\right)$

(з) $y' = \dfrac{\frac{2(2x+1)-2(2x-1)}{(2x+1)^2}}{1 + \left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^2} = \dfrac{2}{4x^2+1}$

(и) $y' = \dfrac{1}{1 + (\sqrt{x+e+\pi})^2} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x+e+\pi}} = \dfrac{1}{1+x+e+\pi} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x+e+\pi}}$

(j) $y' = \arcsin x + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

5.

(а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} \overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(\ln x)'}{(\sqrt[3]{x})'} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3}{\sqrt[3]{x}} = 0$

(б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} \overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sin x)'}{x'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{1} = 1$

(в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} \overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\ln(1+x))'}{x'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$

(г) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin(x-2)}{8-x^3} \overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(\sin(x-2))'}{(8-x^3)'} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\cos(x-2)}{-3x^2} = -\dfrac{1}{12}$

(д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^x - 2^x}{x^2 - x} \overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(3^x - 2^x)'}{(x^2-x)'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^x \ln 3 - 2^x \ln 2}{2x-1} = \ln 2 - \ln 3$

(ђ) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\text{tg } x}{\sin 3x} \overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x\text{tg}x)'}{(\sin 3x)'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{tg}x + \frac{x}{\cos^2 x}}{3\cos x} = 0$

(е) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 4x}{\text{arctg } 5x} \overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\arcsin 4x)'}{(\text{arctg } 5x)'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{4}{\sqrt{1-16x^2}}}{\frac{5}{1+25x^2}} = \dfrac{4}{5}$

(ж) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\frac{1}{x} - \frac{1}{3}}{x^2 - 9} \overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3}\right)'}{(x^2-9)'} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{2x} = -\dfrac{1}{54}$

(з) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{5x+5} \overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(e^x)'}{(5x+5)'} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{5} = +\infty$

(и) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3 + \ln x}{x^2+7} \overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(3+\ln x)'}{(x^2+7)'} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{2x} = 0$

(j)
$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} x(\ln x)^2 &= \lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)^2}{\frac{1}{x}}\\
&\overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{((\ln x)^2)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-2\ln x}{\frac{1}{x}}\\
&\overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{(-2\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{2}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\\
&= \lim_{x\to 0} 2x\\
&= 0
\end{aligned}
$$

(к)
$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\ln x\operatorname{tg}x &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\operatorname{tg}x}}\\
&\overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{\operatorname{tg}x}\right)'}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{(\operatorname{tg}x)^2}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot(-\sin x)\\
&= \lim_{x\to 0}(-\sin x)\\
&= 0
\end{aligned}
$$

(л) $$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} x^{\sin x} &= \lim_{x\to 0} e^{\ln\left(x^{\sin x}\right)}\\ &= \lim_{x\to 0} e^{\sin x \ln x}\\ &= e^{\lim\limits_{x\to 0}\sin x\ln x}\\ &= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}}\\ &\overset{\text{Л.П.}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}}}\\ &= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{-\sin x}{\cos x}}\\ &= e^{\lim\limits_{x\to 0}(-\mathrm{tg}x)}\\ &= e^0\\ &= 1\end{aligned}$$

(љ) $$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x &= \lim_{x\to\infty} e^{\ln\left(\left(1+\frac{3}{x}\right)^x\right)}\\ &= \lim_{x\to\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}\\ &= e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}\\ &= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{x}}}\\ &\overset{\text{Л.П.}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}}\\ &= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{-\frac{3}{x^2}}{1+\frac{3}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}}\\ &= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{x+3}}\\ &= e^3\end{aligned}$$

2.3 Испитивање функција

6. При тражењу домена функција, питамо се које све вредности променљива x може да узме да би функција била добро дефинисана, тј. потребно је да све елементарне функције које се појављују у оквиру дате функције имају смисла (нпр. аргумент логаритамске функције мора бити строго позитиван, сваки израз под кореном мора бити већи или једнак нули, именилац било ког разломка не сме бити нула јер не смемо делити нулом итд.). Када направимо пресек свих ових услова, добијамо шта x „може да буде“, тј. добијамо управо домен дате функције.

(а) Услов који треба да је испуњен је да је аргумент логаритамске функције позитиван, тј. да је $x > 0$ и да је $x \neq 0$ (због дељења са x), па кад направимо пресек ова два услова добијамо да је домен $\mathcal{D}_f = (0, +\infty)$

(б) Потребно је да је аргумент логаритамске функције позитиван $x + 3 > 0$, тј. $x > -3$, и да је $2 + \ln(x + 3) \neq 0$, тј. $x \neq e^{-2} - 3$. Остаје још да видимо у ком су поретку -3 и $e^{-2} - 3$ да бисмо тачно одредили домен. Како је $e^{-2} > 0$ (јер је експоненцијална функција увек позитивна), онда је $e^{-2} - 3 > -3$, па закључујемо да је домен $\mathcal{D}_f = (-3, e^{-2} - 3) \cup (e^{-2} - 3, +\infty)$.

(в) Једини услов који имамо је да је аргумент корена ненегативан, тј. $x \geqslant 0$, па је $\mathcal{D}_f = [0, +\infty)$.

(г) Потребно је да именилац разломка не буде 0, али $x^2 + 1 \neq 0$ за све $x \in \mathbb{R}$, па је дата функција дефинисана за свако $x \in \mathbb{R}$, тј. домен је $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

(д) Неопходно је да именилац разломка буде различит од нуле, а $x^2 + 3 \neq 0$ за све $x \in \mathbb{R}$, па је $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

(ђ) Једини услов који имамо је да је именилац разломка различит од нуле $x - 1 \neq 0$, тј. $x \neq 1$, па је домен $\mathcal{D}_f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

(е) Потребно је да су испуњена два услова, да је аргумент логаритамске функције позитиван и да је именилац разломка различит од нуле, тј.

$$x^2 - 5x + 6 > 0 \text{ и } x \neq -10.$$

Решимо прву неједнакост. Она је еквивалентна са неједнакошћу

$$(x - 2)(x - 3) > 0,$$

чије је решење $x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$. Када додамо и услов да је $x \neq -10$, добијамо да је домен $\mathcal{D}_f = (-\infty, -10) \cup (-10, 2) \cup (3, +\infty)$.

(ж) Да би функција била дефинисана потребно је да сви разломци буду дефинисани, тј. да су сви имениоци различити од нуле, односно, у овом случају, $x \neq 0$ и $x^2 - x - 6 \neq 0$. Како је $x^2 - x - 6 = 0$ за $x = -2$ и $x = 3$, те тачке треба избацити из домена, као и $x = 0$, па закључујемо да је домен ове функције $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-2, 0, 3\} = (-\infty, -2)\cup(-2, 0)\cup(0, 3)\cup(3, +\infty)$.

7. При испитивању парности и непарности, најпре је неопходно наћи домен функције и проверити да ли је симетричан у односу на нулу, па затим испитати да ли је $f(-x) = f(x)$ за све $x \in \mathcal{D}_f$ за парне функције, односно $f(-x) = -f(x)$, за све $x \in \mathcal{D}_f$ за непарне функције.

(а) Да би одредили домен, треба видети за које x ће бити $x^6 - 1 = 0$ и онда те вредности избацити из домена. Како је

$$x^6 - 1 = (x^3 - 1)(x^3 + 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1),$$

видимо да ће реална решења ове једнакости бити $x = \pm 1$ (јер квадратне функције $x^2 + x + 1$ и $x^2 - x + 1$ немају реалних нула), па је $\mathcal{D}_f = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ па домен јесте симетричан у односу на нулу. Како важи

$$f(-x) = \frac{(-x)^4 + (-x^2) + 1}{(-x)^6 - 1} = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^6 - 1} = f(x),$$

закључујемо да је функција f парна.

(б) Домен ове функције је $\mathcal{D}_f = (-1, +\infty)$, што није симетрично у односу на нулу, па ова функција не може бити ни парна ни непарна.

(в) Домен ове функције је $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ што јесте симетрично у односу на нулу. Како је

$$f(-x) = \sin\left((-x)^3\right) = \sin(-x^3) = -\sin x^3 = -f(x),$$

закључујемо да је функција непарна.

(г) Домен ове функције је $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ што јесте симетрично у односу на нулу. Како је

$$f(-x) = \cos((-x)^3) = \cos(-x^3) = \cos x^3 = f(x),$$

закључујемо да је функција парна.

8. Када тражимо асимптоте функције, најпре је потребно наћи домен јер су крајеви домена потенцијалне вертикалне асимптоте, а затим косе и хоризонталне тражити коришћењем познатих формула.

(а) Домен ове функције је $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, па су $x=-1$ и $x=1$ потенцијалне вертикалне асимптоте. Како је

$$\lim_{x\to-1-0} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to-1+0} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to1+0} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to1-0} f(x)=-\infty,$$

то $x=-1$ и $x=1$ јесу вертикалне асимптоте. Испитајмо постојање хоризонталних. Како је

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty,$$

то нема хоризонталних асимптота.

Даље,

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2-1}=1,$$

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2-1}=0,$$

па имамо косу асимптоту $y=x$ у $+\infty$ и $-\infty$.

(б) Домен ове функције је $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\setminus\left\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\right\}$. Како је

$$\lim_{x\to-\sqrt{3}\pm0}=\mp\infty,\ \lim_{x\to\sqrt{3}\pm0}=\pm\infty,$$

па $x=-\sqrt{3}$ и $x=\sqrt{3}$ јесу вертикалне асимптоте. Испитајмо постојање хоризонталних. Како је

$$\lim_{x\to\pm\infty}=-1,$$

то функција има хоризонталну асимптоту $y=-1$ у $-\infty$ и $+\infty$. Како има хоризонталну асимптоту у обе бесконачности, не може имати косу.

(в) Домен ове функције је $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{5\}$. Како је

$$\lim_{x\to5\pm0} f(x)=\pm\infty,$$

то $x=5$ јесте вертикална асимптота. Испитајмо постојање хоризонталних. Како је

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty,$$

то функција нема хоризонталних асимптота. Остаје још да истражимо косе.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x-5}=1,$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{5}{x-5} = 0,$$

па је $y = x$ коса асимптота у $+\infty$ и $-\infty$.

9. Као и до сада, и овде је неопходно најпре наћи домен функција, а затим тражимо први извод и њихов знак.

(а) Домен ове функције је $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, а извод $f'(x) = 2xe^{x^2}$. Како је експоненцијална функција e^{x^2} увек позитивна, то знак првог извода зависи само од знака x па је

$$\begin{aligned} f'(x) &> 0 \text{ за } x \in (0,+\infty),\\ f'(x) &< 0 \text{ за } x \in (-\infty,0),\\ f'(x) &= 0 \text{ за } x = 0, \end{aligned}$$

одакле закључујемо да функција расте на $(0,+\infty)$, опада на $(-\infty,0)$ и $x = 0$ је локални минимум.

(б) Домен ове функције је $\mathcal{D}_f = (-1,+\infty)$. Први извод је $f'(x) = \frac{1}{x+1}$.
Како је

$$f'(x) > 0 \text{ за } x \in \mathcal{D}_f,$$

то функција f расте на целом домену и нема локалних екстремума.

(в) Домен ове функције је $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$. Њен први извод је $f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2}$, па је $f'(x) < 0$, за све $x \in \mathcal{D}_f$, тј. f опада на целом домену и нема локалних екстремума.

(г) Домен ове функције је $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Њен први извод је $f'(x) = \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$, па је $f'(x) \geqslant 0$ на целом домену, тј. функција f је растућа на целом домену. Имамо и да је $f'(1) = 0$, па је $x = 1$ потенцијална тачка екстремума, али како f расте и лево и десно од тачке $x = 1$, то ово није екстремум (да би био екстремум потребно је да први извод има различит знак са разних страна од $x = 1$, а овде је у оба случаја позитиван).

(д) Да бисмо одредили домен ове функције, довољно је да се обезбедимо да именилац не може бити нула, тј. да је $x^2 - 5x + 6 \neq 0$. Одатле добијамо да је $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{2,3\}$. Први извод дате функције је $f'(x) = -\frac{x^2+2x-11}{(x^2-5x+6)^2}$, па имамо да је

$$\begin{aligned} f'(x) &> 0 \text{ за } x \in \left(-1-2\sqrt{3},2\right) \cup \left(2,-1+2\sqrt{3}\right),\\ f'(x) &< 0 \text{ за } x \in \left(-\infty,-1-2\sqrt{3}\right) \cup \left(-1+2\sqrt{3},3\right) \cup (3,+\infty),\\ f'(x) &= 0 \text{ за } x \in \left\{-1-2\sqrt{3},-1+2\sqrt{3}\right\}, \end{aligned}$$

па закључујемо да f расте на $\left(-1-2\sqrt{3},2\right)\cup\left(2,-1+2\sqrt{3}\right)$, опада на $\left(-\infty,-1-2\sqrt{3}\right)\cup\left(-1+2\sqrt{3},3\right)\cup(3,+\infty)$, тачка $x=-1-2\sqrt{3}$ је локални минимум, а $x=-1+2\sqrt{3}$ је локални максимум.

(ђ) Домен дате функције је $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$. Први извод је $f'(x)=-2e^{-2x}(x^2-5x-6)$, па имамо да је

$$\begin{aligned}
&f'(x)>0 \text{ за } x\in(-1,6),\\
&f'(x)<0 \text{ за } x\in(-\infty,-1)\cup(6,+\infty),\\
&f'(x)=0 \text{ за } x\in\{-1,6\},
\end{aligned}$$

па закључујемо да f расте на $(-1,6)$, опада на $(-\infty,-1)\cup(6,+\infty)$, $x=-1$ је тачка локалног минимума и $x=6$ је тачка локалног максимума.

(е) Домен дате функције је $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\backslash\{-2,2\}$. Први извод је $f'(x)=\frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$, па је

$$\begin{aligned}
&f'(x)>0 \text{ за } x\in\left(-\infty,-2\sqrt{3}\right)\cup\left(2\sqrt{3},+\infty\right),\\
&f'(x)<0 \text{ за } x\in\left(-2\sqrt{3},0\right)\cup\left(0,2\sqrt{3}\right),\\
&f'(x)=0 \text{ за } x\in\left\{-2\sqrt{3},0,2\sqrt{3}\right\},
\end{aligned}$$

па закључујемо да f расте на $\left(-\infty,-2\sqrt{3}\right)\cup\left(2\sqrt{3},+\infty\right)$, опада на $\left(-2\sqrt{3},0\right)\cup\left(0,2\sqrt{3}\right)$, $x=-2\sqrt{3}$ је тачка локалног максимума, $x=2\sqrt{3}$ је тачка локалног минимума, а $x=0$ није локални екстремум јер са обе стране тачке x, први извод има исти знак.

10. Најпре је потребно одредити домен сваке функције, затим наћи други извод, испитати његов знак и на основу тога закључити где је функција конвексна, где конкавна и да ли има превојних тачака.

(а) Домен дате функције је $\mathcal{D}_f=(0,+\infty)$. Први и други изводи су $f'(x)=x+2x\ln x$ и $f''(x)=2\ln x+3$. Имамо да је

$$\begin{aligned}
&f''(x)>0 \text{ за } x\in\left(e^{-\frac{3}{2}},+\infty\right),\\
&f''(x)<0 \text{ за } x\in\left(0,e^{-\frac{3}{2}}\right),\\
&f''(x)=0 \text{ за } x=e^{-\frac{3}{2}},
\end{aligned}$$

па је f конвексна на $\left(e^{-\frac{3}{2}},+\infty\right)$, конкавна на $\left(0,e^{-\frac{3}{2}}\right)$ и тачка $x=e^{-\frac{3}{2}}$ је превојна тачка.

(б) Домен дате функције је $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Први и други изводи су $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72x - 4$ и $f''(x) = 12x^2 - 12x - 72$. Имамо да је

$$\begin{aligned} &f''(x) > 0 \text{ за } x \in (-\infty, -2) \cup (3, +\infty), \\ &f''(x) < 0 \text{ за } x \in (-2, 3), \\ &f''(x) = 0 \text{ за } x \in \{-2, 3\}, \end{aligned}$$

па је f конвексна на $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$, конкавна на $(-2, 3)$ и $x = -2$ и $x = 3$ су превојне тачке.

(в) Домен дате функције је $\mathcal{D}_f = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Први и други изводи су $f'(x) = \frac{2}{x^2-1}$ и $f''(x) = -\frac{4x}{(x^2-1)^2}$. Имамо да је

$$\begin{aligned} &f''(x) > 0 \text{ за } x \in (-\infty, -1), \\ &f''(x) < 0 \text{ за } x \in (1, +\infty), \\ &f''(x) \neq 0 \text{ за } x \in \mathcal{D}_f, \end{aligned}$$

па је f конвексна на $(-\infty, -1)$, конкавна на $(1, +\infty)$ и нема превојних тачака.

(г) Домен дате функције је $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Први и други изводи су $f'(x) = e^x(x^2 + 2x - 3)$, $f''(x) = e^x(x^2 + 4x - 1)$. Имамо да је

$$\begin{aligned} &f''(x) > 0 \text{ за } x \in \left(-\infty, -2 - \sqrt{5}\right) \cup \left(-2 + \sqrt{5}, +\infty\right), \\ &f''(x) < 0 \text{ за } x \in \left(-2 - \sqrt{5}, -2 + \sqrt{5}\right), \\ &f''(x) = 0 \text{ за } x \in \left\{-2 - \sqrt{5}, -2 + \sqrt{5}\right\}, \end{aligned}$$

па је f конвексна на $\left(-\infty, -2 - \sqrt{5}\right) \cup \left(-2 + \sqrt{5}, +\infty\right)$, конкавна на $\left(-2 - \sqrt{5}, -2 + \sqrt{5}\right)$ и $x = -2 - \sqrt{5}$ и $x = -2 + \sqrt{5}$ су превојне тачке.

11. (а) **Домен:** Домен дате функције је $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \backslash \{2\}$.

Парност, непарност, периодичност: Како домен није симетричан у односу на нулу, дата функција није ни парна ни непарна ни периодична.

Нуле и знак: Како је експоненцијална функција увек позитивна, знак дате функције ће бити

$$\begin{aligned} &f(x) > 0 \text{ за } x \in (0, 2) \cup (2, +\infty), \\ &f(x) < 0 \text{ за } x \in (-\infty, 0), \\ &f(x) = 0 \text{ за } x = 0. \end{aligned}$$

Монотоност и екстремуми: Први извод дате функције је $f'(x) = \frac{x^2-5x+4}{(x-2)^2} \cdot e^{\frac{1}{x-2}}$, па како су експоненцијална функција и именилац увек позитивни, знак зависи само од бројиоца разломка $x^2 - 5x + 4$, тј.

$$f'(x) > 0 \text{ за } x \in (-\infty, 1) \cup (4, +\infty),$$
$$f'(x) < 0 \text{ за } x \in (1, 2) \cup (2, 4),$$
$$f'(x) = 0 \text{ за } x \in \{1, 4\},$$

па f расте на $(-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$, опада на $(1, 2) \cup (2, 4)$, $x = 1$ је локални максимум, $x = 4$ је локални минимум.

Конвексност и превојне тачке: Други извод дате функције је $f''(x) = \frac{5x-8}{(x-2)^4} e^{\frac{1}{x-2}}$, па како су експоненцијална функција и именилац увек позитивни, то знак другог извода зависи само од $5x - 8$, тј.

$$f''(x) > 0 \text{ за } x \in \left(\frac{8}{5}, 2\right) \cup (2, +\infty),$$
$$f''(x) < 0 \text{ за } x \in \left(-\infty, \frac{8}{5}\right),$$
$$f''(x) = 0 \text{ за } x = \frac{8}{5},$$

па је f конвексна на $\left(\frac{8}{5}, 2\right) \cup (2, +\infty)$, конкавна на $\left(-\infty, \frac{8}{5}\right)$ и $x = \frac{8}{5}$ је превојна тачка.

Асимптоте:

Вертикалне асимптоте: Потенцијална вертикална асимптота је $x = 2$. Како је

$$\lim_{x \to 2-0} f(x) = 2, \ \lim_{x \to 2+0} f(x) = +\infty,$$

то $x = 2$ јесте вертикална асимптота.

Хоризонталне асимптоте:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty,$$

па функција нема хоризонталних асимптота.

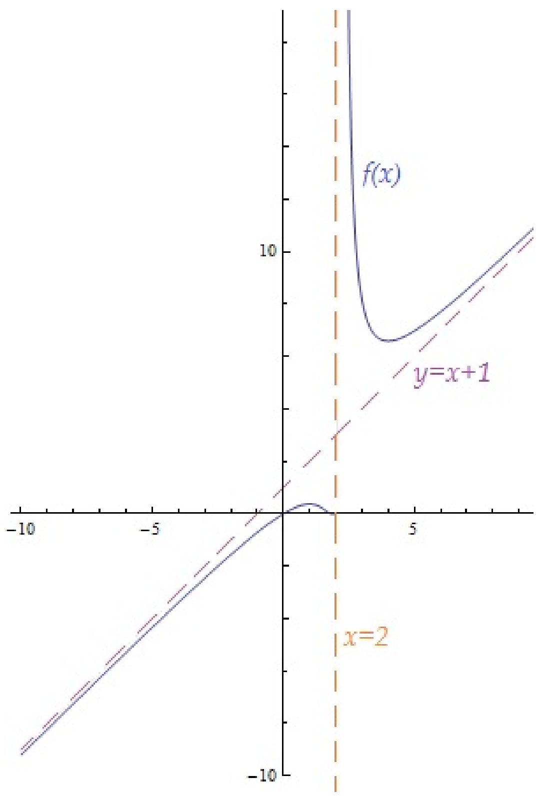
Косе асимптоте:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} e^{\frac{1}{x-2}} = 1,$$

$$\begin{aligned}
n &= \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - kx\big) \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} x\left(e^{\frac{1}{x-2}} - 1\right) \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x-2}} - 1}{\frac{1}{x}} \\
&\overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-\frac{e^{\frac{1}{x-2}}}{(x-2)^2}}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= 1,
\end{aligned}$$

па имамо косу асимптоту $y = x + 1$ у $+\infty$ и $-\infty$.

График функције:



(б) **Домен:** Домен дате функције је $\mathcal{D}_f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Парност, непарност, периодичност: Имамо да је

$$f(-x) = \ln\frac{-x-1}{-x+1} = \ln\frac{x+1}{x-1} = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-1} = -\ln\frac{x-1}{x+1} = -f(x),$$

па закључујемо да је функција f непарна. Како домен није периодичан, не може ни функција бити периодична.

Нуле и знак: Потребно је решити логаритамску неједначину

$$\begin{aligned}\ln\frac{x-1}{x+1} &> 0\\ e^{\ln\frac{x-1}{x+1}} &> e^0\\ \frac{x-1}{x+1} &> 1\\ \frac{x-1}{x+1}-1 &> 0\\ \frac{-2}{x+1} &> 0,\end{aligned}$$

па лако видимо да је

$$\begin{aligned}&f(x)>0 \text{ за } x\in(-\infty,-1),\\ &f(x)<0 \text{ за } x\in(1,+\infty),\\ &f(x)\neq 0 \text{ за } x\in\mathcal{D}_f.\end{aligned}$$

Монотоност и екстремуми: Први извод дате функције је $f'(x)=\frac{2}{x^2-1}$, а ова функција је строго позитивна на домену па је функција растућа на целом домену и нема локалних екстремума.

Конвексност и превојне тачке: Други извод дате функције је $f''(x)=-\frac{4x}{(x^2-1)^2}$, па је

$$\begin{aligned}&f''(x)>0 \text{ за } x\in(-\infty,-1),\\ &f''(x)<0 \text{ за } x\in(1,+\infty),\\ &f''(x)\neq 0 \text{ за } x\in\mathcal{D}_f,\end{aligned}$$

па је f конвексна на $(-\infty,-1)$, конкавна на $(1,+\infty)$ и нема превојних тачака.

Асимптоте:
Вертикалне асимптоте: Потенцијалне вертикалне асимптоте су $x=-1$ и $x=1$. Како је

$$\lim_{x\to-1-0}f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to1+0}f(x)=-\infty,$$

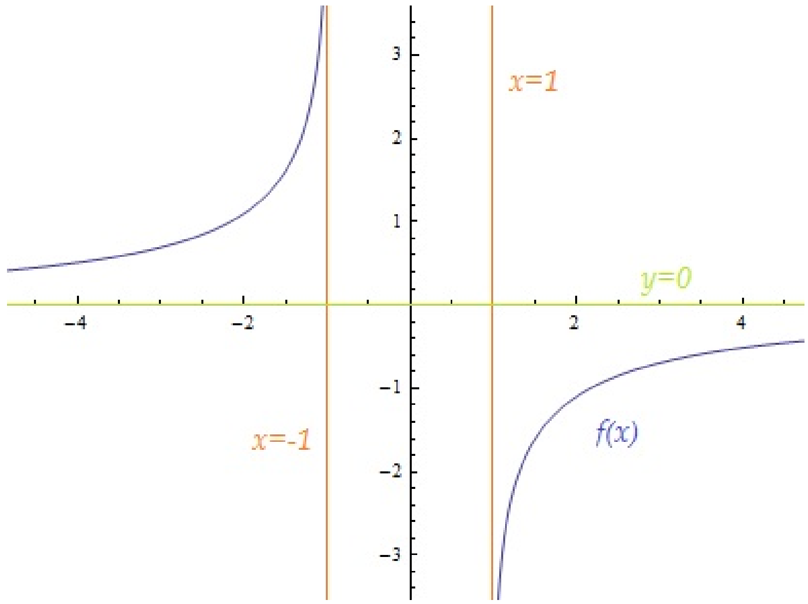
то ово јесу вертикалне асимптоте.
Хоризонталне асимптоте:

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0,$$

па је $y=0$ хоризонтална асимптота у $+\infty$ и у $-\infty$.
Косе асимптоте: Како функција има хоризонталну асимптоту у обе бесконачности, не може

имати косих асимптота.

График функције:



2.4 Неодређени интеграли

12.

(а) $\int (x^5 - \sqrt[5]{x} + \sqrt{x^3})\mathrm{d}x = \int (x^5 - x^{\frac{1}{5}} + x^{\frac{3}{2}})\mathrm{d}x = \frac{x^6}{6} - \frac{5x^{\frac{6}{5}}}{6} + \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + c$

(б) $\int \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}\mathrm{d}x = \int x^{\frac{1}{8}}\mathrm{d}x = \frac{8x^{\frac{9}{8}}}{9} + c$

(в) $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\mathrm{d}x = \int \frac{x^2+1-2}{x^2+1}\mathrm{d}x = \int \left(1 - \frac{2}{x^2+1}\right) = x - 2\mathrm{arctg}\ x + c$

(г) $\int (\sin x - \cos x)\mathrm{d}x = \cos x + \sin x + c$

(д)
$$\begin{aligned}\int \frac{x-7}{x^3}\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{7}{x^3}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int \left(x^{-2} - 7x^{-3}\right)\mathrm{d}x \\ &= -x^{-1} + \frac{7}{2}x^{-2} \\ &= -\frac{1}{x} + \frac{7}{2x^2} \\ &= \frac{7-2x}{2x^2} + c.\end{aligned}$$

13.

(а) $\int \frac{3}{x+5}\mathrm{d}x = 3\ln|x+5| + c$

(б)
$$\begin{aligned}\int \left(e^{5x+1} - \sin(5x+1)\right)\mathrm{d}x &= \begin{bmatrix} t = 5x+1 \\ 5\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{5}\mathrm{d}t \end{bmatrix} = \\ &= \int (e^t - \sin t)\frac{1}{5}\mathrm{d}t \\ &= \frac{e^t + \cos t}{5} + c \\ &= \frac{e^{5x+1} + \cos(5x+1)}{5} + c\end{aligned}$$

(в) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+5}\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} t = x^2+3x+5 \\ \mathrm{d}t = (2x+3)\mathrm{d}x \end{bmatrix} = \int \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \ln|t| + c = \ln|x^2+3x+5| + c$

(г) $\int \frac{1}{(x+2)^6}\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} t = x+2 \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{bmatrix} = \int \frac{1}{t^6}\mathrm{d}t = \int t^{-6}\mathrm{d}t = \frac{t^{-5}}{-5} + c = -\frac{1}{5(x+2)^5} + c$

(д) $\displaystyle\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} t = \arcsin x \\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \end{bmatrix} = \int t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t^2 + c = \frac{1}{2}(\arcsin x)^2 + c$

(ђ) $\displaystyle\int \mathrm{tg}x\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} t = \cos x \\ \mathrm{d}t = -\sin x\mathrm{d}x \\ \sin x\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t \end{bmatrix} = -\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\ln|t| + c = -\ln|\cos x| + c$

(е)
$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{\frac{3}{4}\left(\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{3}{4}}+1\right)}\mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\mathrm{d}x \\
&= \begin{bmatrix} t = \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \\ \mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{d}t \end{bmatrix} \\
&= \frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot \mathrm{arctg}\ t + c \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot \mathrm{arctg}\ \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c
\end{aligned}$$

(ж)
$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{(x^2+5)^7}\mathrm{d}x &= \begin{bmatrix} t = x^2+5 \\ \mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x \\ x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}t \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^7} \\
&= \frac{1}{2}\int t^{-7}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-6}\frac{1}{t^6} + c \\
&= -\frac{1}{12(x^2+5)^6} + c
\end{aligned}$$

(з) $$\int \frac{x}{\sqrt{1-2x}}\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} t = 1-2x \\ x = \frac{1-t}{2} \\ \mathrm{d}t = -2\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\mathrm{d}t \end{bmatrix}$$
$$= -\frac{1}{2}\int \frac{\frac{1-t}{2}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{\sqrt{t}} - \sqrt{t}\right)\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{1}{4}\int \left(t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{1}{4}\left(2\sqrt{t} - \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right) + c$$
$$= -\frac{1}{2}\sqrt{1-2x} + \frac{1}{6}\sqrt{(1-2x)^3} + c$$

(и) $$\int \frac{x^2+4x+6}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x = \int \frac{x^2+2x+4+2x+2}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x$$
$$= \int \left(1 + \frac{2x+2}{x^2+2x+4}\right)\mathrm{d}x$$
$$= x + \int \frac{2x+2}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x$$
$$= \begin{bmatrix} t = x^2+2x+4 \\ \mathrm{d}t = (2x+2)\mathrm{d}x \end{bmatrix}$$
$$= x + \int \frac{\mathrm{d}t}{t}$$
$$= x + \ln|x^2+2x+4| + c$$

(j) $$\int \frac{1}{x^2+4x+5}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^2+4x+4+1}\mathrm{d}x$$
$$= \int \frac{1}{(x+2)^2+1}\mathrm{d}x$$
$$= \begin{bmatrix} t = x+2 \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{bmatrix}$$
$$= \int \frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t$$
$$= \mathrm{arctg}\ t + c$$
$$= \mathrm{arctg}(x+2) + c$$

14.

(а)
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+3} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x-3)}$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{2}{(x-1)(x-3)}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{x-1-(x-3)}{(x-1)(x-3)}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}(\ln|x-3|-\ln|x-1|)+c$$

(б) Желимо разломак унутар интеграла да запишемо у следећем облику
$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{(x-1)^3}.$$
Множењем обе стране једнакости са $x(x-1)^3$ добијамо
$$x^3+1 = Ax^3-3Ax^2+3Ax-A+Bx^3-2Bx^2+Bx+Cx^2-Cx+Dx,$$
$$x^3+1 = x^3(A+B)+x^2(-3A-2B+C)+x(3A+B-C+D)-A,$$
одакле изједначавањем коефицијената уз $x^3,\ x^2,\ x$ и 1 са леве и десне стране добијамо систем једначина
$$\begin{aligned} A+B&=1\\ -3A-2B+C&=0\\ 3A+B-C+D&=0\\ -A&=1 \end{aligned}$$
чијим решавањем добијамо $A=-1,\ B=2,\ C=1,\ D=2$, па је
$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3} = \frac{-1}{x}+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)^3}.$$
Коначно, можемо израчунати дати интеграл.
$$\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\mathrm{d}x = \int \left(\frac{-1}{x}+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)^3}\right)\mathrm{d}x$$
$$= -\ln|x|+2\ln|x-1|+\frac{1}{1-x}-\frac{1}{(x-1)^2}+c$$

(в) Најпре је потребно поделити x^5-3 са x^3+1. После дељења добијамо да је
$$(x^5-3):(x^3+1) = x^2 \text{ са остатком } -x^2-3,\ \text{тј.}$$

$$x^5 - 3 = x^2(x^3+1) - x^2 - 3,$$

па је дати интеграл једнак

$$\int \frac{x^5-3}{x^3+1}\mathrm{d}x = \int \frac{x^2(x^3+1)-x^2-3}{x^3+1}\mathrm{d}x = \int x^2\mathrm{d}x - \underbrace{\int \frac{x^2+3}{x^3+1}\mathrm{d}x}_{I}. \tag{6}$$

Потребно је још израчунати

$$I = \int \frac{x^2+3}{x^3+1}\mathrm{d}x = \int \frac{x^2+3}{(x+1)(x^2-x+1)}\mathrm{d}x.$$

Желимо разломак унутар интеграла да запишемо у следећем облику

$$\frac{x^2+3}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1},$$

множењем са x^3+1 обе стране једнакости добијамо

$$\begin{aligned} x^2+3 &= Ax^2 - Ax + A + Bx^2 + Bx + Cx + C \\ x^2+3 &= x^2(A+B) + x(-A+B+C) + A + C \end{aligned}$$

одакле изједначавањем коефицијената уз x^2, x и 1 са леве и десне стране једнакости добијамо систем једначина

$$\begin{aligned} A+B &= 1 \\ -A+B+C &= 0 \\ A+C &= 3 \end{aligned}$$

чије је решење $A=\frac{4}{3}$, $B=-\frac{1}{3}$, $C=\frac{5}{3}$. Дакле, имамо да је

$$\frac{x^2+3}{x^3+1} = \frac{\frac{4}{3}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}}{x^2-x+1},$$

па је

$$\begin{aligned} I = \int \frac{x^2+3}{x^3+1}\mathrm{d}x &= \frac{4}{3}\int \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\int \frac{x-5}{x^2-x+1}\mathrm{d}x \\ &= \frac{4}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2x-1-9}{x^2-x+1}\mathrm{d}x \\ &= \frac{4}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\underbrace{\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\mathrm{d}x}_{I_1} + \frac{3}{2}\underbrace{\int \frac{1}{x^2-x+1}\mathrm{d}x}_{I_2} \end{aligned} \tag{7}$$

Израчунаћемо посебно I_1 и I_2.

$$
\begin{aligned}
I_1 = \int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\mathrm{d}x &= \begin{bmatrix} t = x^2-x+1 \\ \mathrm{d}t = (2x-1)\mathrm{d}x \end{bmatrix} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&= \ln|t| + c_1 \\
&= \ln|x^2-x+1| + c_1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_2 = \int \frac{1}{x^2-x+1}\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{x^2-x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{\frac{3}{4}\left(\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{3}{4}}+1\right)}\mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\mathrm{d}x \\
&= \begin{bmatrix} t = \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \\ \mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{d}t \end{bmatrix} \\
&= \frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg} t + c_2 \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c_2.
\end{aligned}
$$

Вратимо сада добијене резултате у (7).

$$
\begin{aligned}
I = \int \frac{x^2+3}{x^3+1}\mathrm{d}x &= \frac{4}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}I_1 + \frac{3}{2}I_2 \\
&= \frac{4}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}(\ln|x^2-x+1|+c_1) + \frac{3}{2}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c_2\right)
\end{aligned}
$$

И коначно вратимо ово у (6), па након срећивања добијамо

$$
\int \frac{x^5-3}{x^3+1}\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| - \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c.
$$

15. Интеграли у овом задатку се решавају коришћењем парцијалне интеграције, тј. формуле

$$\int u\mathrm{d}v = u \cdot v - \int v\mathrm{d}u.$$

(а) $$\begin{aligned}\int x^2 \ln x\mathrm{d}x &= \begin{bmatrix} u = \ln x & \mathrm{d}v = x^2\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x} & v = \frac{x^3}{3}\end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x} \cdot x^3\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\int x^2\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + c\end{aligned}$$

(б) $$\begin{aligned}\int x^2 e^x\mathrm{d}x &= \begin{bmatrix} u = x^2 & \mathrm{d}v = e^x\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x & v = e^x\end{bmatrix} \\ &= x^2e^x - 2\int xe^x\mathrm{d}x \\ &= \begin{bmatrix} u = x & \mathrm{d}v = e^x\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x & v = e^x\end{bmatrix} \\ &= x^2e^x - 2xe^x + 2\int e^x\mathrm{d}x \\ &= e^x(x^2 - 2x + 2) + c\end{aligned}$$

(в) $$\begin{aligned}I &= \int e^{5x}\sin 6x\mathrm{d}x \\ &= \begin{bmatrix} u = \sin 6x & \mathrm{d}v = e^{5x}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = 6\cos 6x\mathrm{d}x & v = \frac{1}{5}e^{5x}\end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{5}e^{5x}\sin 6x - \frac{6}{5}\int e^{5x}\cos 6x\mathrm{d}x \\ &= \begin{bmatrix} u = \cos 6x & \mathrm{d}v = e^{5x}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = -6\sin 6x\mathrm{d}x & v = \frac{1}{5}e^{5x}\end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{5}e^{5x}\sin 6x - \frac{6}{5}\left(\frac{1}{5}e^{5x}\cos 6x + \frac{6}{5}\underbrace{\int e^{5x}\sin 6x\mathrm{d}x}_{I}\right) \\ &= \frac{1}{5}e^{5x}\sin 6x - \frac{6}{25}e^{5x}\cos 6x - \frac{36}{25}I\end{aligned}$$

Одавде имамо

$$\frac{61}{25}I = \frac{1}{5}e^{5x}\sin 6x - \frac{6}{25}e^{5x}\cos 6x,$$

па је тражени интеграл једнак

$$I = \frac{5}{61}e^{5x}\sin 6x - \frac{6}{61}e^{5x}\cos 6x + c$$

(г) $$\int \frac{\ln x}{x^5}\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = \ln x & \mathrm{d}v = x^{-5}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x & v = -\frac{1}{4}x^{-4} \end{bmatrix} = -\frac{\ln x}{4x^4} + \frac{1}{4}\int x^{-5}\mathrm{d}x = -\frac{\ln x}{4x^4} - \frac{1}{16x^4} + c$$

(д) $$\int x^3\ln(5x)\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = \ln(5x) & \mathrm{d}v = x^3\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x & v = \frac{1}{4}x^4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}x^4\ln(5x) - \frac{1}{4}\int x^3\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4\ln(5x) - \frac{1}{16}x^4 + c$$

(ђ) $$\int (\ln x)^2\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = (\ln x)^2 & \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \frac{2\ln x}{x}\mathrm{d}x & v = x \end{bmatrix} = x(\ln x)^2 - 2\int \ln x\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = \ln x & \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x & v = x \end{bmatrix} = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2\int \mathrm{d}x = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + c$$

(е) $$I = \int e^x\cos x\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = \cos x & \mathrm{d}v = e^x\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = -\sin x\mathrm{d}x & v = e^x \end{bmatrix} = e^x\cos x + \int e^x\sin x\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = \sin x & \mathrm{d}v = e^x\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \cos x\mathrm{d}x & v = s^x \end{bmatrix} = e^x\cos x + e^x\sin x - \underbrace{\int e^x\cos x\mathrm{d}x}_{I} = e^x\cos x + e^x\sin x - I$$

Одавде је

$$2I = e^x \cos x + e^x \sin x,$$

па је тражени интеграл једнак

$$I = \frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x) + c.$$

16.

(a)
$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1-2x}\sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-2x}}\mathrm{d}x &= \begin{bmatrix} t^3 = \frac{1+2x}{1-2x} \\ x = \frac{t^3-1}{2(t^3+1)} \\ \mathrm{d}x = \frac{3t^2}{(1+t^3)^2}\mathrm{d}t \end{bmatrix} \\
&= \int \frac{1}{1-\frac{t^3-1}{t^3+1}} \cdot t \cdot \frac{3t^2}{(1+t^3)^2}\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{3t^3}{2(1+t^3)}\mathrm{d}t \\
&= \frac{3}{2}\int \frac{t^3+1-1}{t^3+1}\mathrm{d}t \\
&= \frac{3}{2}\int \left(1 - \frac{1}{(t+1)(t^2-t+1)}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{3}{2}t - \frac{3}{2}\int \frac{1}{(t+1)(t^2-t+1)}\mathrm{d}t \\
&= \frac{3}{2}t + \frac{1}{4}\ln|t^2-t+1| - \frac{1}{2}\ln|t+1| - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}} + c \\
&= \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-2x}} + \frac{1}{4}\ln\left|\left(\sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-2x}}\right)^2 - \sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-2x}} + 1\right| \\
&\quad - \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-2x}} + 1\right| - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{arctg}\frac{2\sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-2x}} - 1}{\sqrt{3}} + c
\end{aligned}$$

(б) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+4}} = \begin{bmatrix} \sqrt{x^2+4} = t - x \\ x^2+4 = t^2 - 2tx + x^2 \\ x = \frac{t^2-4}{2t} \\ \mathrm{d}x = \frac{t^2+4}{2t^2}\mathrm{d}t \end{bmatrix}$$
$$= \int \frac{\frac{t^2+4}{2t^2}}{t - \frac{t^2-4}{2t}}\mathrm{d}t$$
$$= \int \frac{t^2+4}{t(t^2+4)}\mathrm{d}t$$
$$= \int \frac{1}{t}\mathrm{d}t$$
$$= \ln|t| + c$$
$$= \ln|\sqrt{x^2+4} + x| + c$$

(в) $$\int \frac{\cos^3 x - \cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^3 x}\mathrm{d}x = \int \frac{(\cos^2 x - \cos^4 x)\cos x}{\sin^2 x + \sin^3 x}\mathrm{d}x$$
$$= \int \frac{(1-\sin^2 x - (1-\sin^2 x)^2)\cos x}{\sin^2 x + \sin^3 x}\mathrm{d}x$$
$$= \begin{bmatrix} t = \sin x \\ \mathrm{d}t = \cos x \mathrm{d}x \end{bmatrix}$$
$$= \int \frac{1 - t^2 - (1-t^2)^2}{t^2+t^3}\mathrm{d}t$$
$$= \int \frac{1 - t^2 - 1 + 2t^2 - t^4}{t^2(1+t)}\mathrm{d}t$$
$$= \int \frac{t^2(1-t)(1+t)}{t^2(1+t)}\mathrm{d}t$$
$$= \int (1-t)\mathrm{d}t$$
$$= t - \frac{1}{2}t^2 + c$$
$$= \sin x - \frac{1}{2}\sin^2 x + c$$

(г) $$\int \sin^3 x \mathrm{d}x = \int \sin x(1-\cos^2 x)\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} t = \cos x \\ \mathrm{d}t = -\sin x \mathrm{d}x \end{bmatrix} = -\int (1-t^2)\mathrm{d}t = -t + \frac{1}{3}t^3 + c = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + c$$

(д) $$\int \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x + 1}\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} t = \cos x \\ \mathrm{d}t = -\sin x \mathrm{d}x \end{bmatrix} = -\int \frac{t}{t^2+1}\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+1}\mathrm{d}t = \begin{bmatrix} p = t^2+1 \\ \mathrm{d}p = 2t\mathrm{d}t \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{p}\mathrm{d}p = -\frac{1}{2}\ln|p| + c = -\frac{1}{2}\ln|t^2+1| + c = -\frac{1}{2}\ln|\cos^2 x + 1| + c$$

(ђ) $$\int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} t = \sin x - \cos x \\ \mathrm{d}t = (\sin x + \cos x)\mathrm{d}x \end{bmatrix} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + c = \ln|\sin x - \cos x| + c$$

2.5 Одређени интеграли

17.

(а) $\displaystyle\int_4^9 \sqrt{x}\mathrm{d}x = \int_4^9 x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_4^9 = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Bigg|_4^9 = \frac{2}{3}\left(\sqrt{9^3}-\sqrt{4^3}\right) = \frac{38}{3}$

(б) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \mathrm{arctg}\ x\Bigg|_0^1 = \mathrm{arctg}\ 1 - \mathrm{arctg}\ 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$

(в) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x\mathrm{d}x = -\cos x\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = -\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

(г) $\displaystyle\int_{-1}^1 e^x\mathrm{d}x = e^x\Bigg|_{-1}^1 = e^1 - e^{-1} = e - \frac{1}{e}$

18.

(а) $\displaystyle\int_3^5 \frac{7}{x-2}\mathrm{d}x = 7\ln|x-2|\Bigg|_3^5 = 7\ln 3 - 7\ln 1 = 7\ln 3$

(б) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+3x+20}\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} t = x^2+3x+20 \\ \mathrm{d}t = (2x+3)\mathrm{d}x \\ x = 0 \longrightarrow t = 20 \\ x = 1 \longrightarrow t = 24 \end{bmatrix} = \int_{20}^{24} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t|\Bigg|_{20}^{24} = \ln 24 - \ln 20 = \ln\frac{6}{5}$

(в) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{x^2+1} = \begin{bmatrix} t = x^2+1 \\ \mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x \\ x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}t \\ x = 0 \longrightarrow t = 1 \\ x = 1 \longrightarrow t = 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln|t|\Bigg|_1^2 = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 1 = \frac{1}{2}\ln 2$

(г) $\displaystyle\int_{-3}^3 \frac{e^x}{e^{2x}+1}\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} t = e^x \\ \mathrm{d}t = e^x\mathrm{d}x \\ x = -3 \longrightarrow t = e^{-3} \\ x = 3 \longrightarrow t = e^3 \end{bmatrix} = \int_{e^{-3}}^{e^3} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \mathrm{arctg}\ t\Bigg|_{e^{-3}}^{e^3} = \mathrm{arctg}\ e^3 - \mathrm{arctg}\frac{1}{e^3}$

19.

(а) $$\int_0^2 \ln\frac{x+4}{4-x}\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u=\ln\frac{x+4}{4-x} & \mathrm{d}v=\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u=-\frac{8}{x^2-16}\mathrm{d}x & v=x \end{bmatrix}$$
$$= x\ln\frac{x+4}{4-x}\Bigg|_0^2 + 8\int_0^2 \frac{x}{x^2-16}\mathrm{d}x$$
$$= \begin{bmatrix} t=x^2-16 \\ \mathrm{d}t=2x\mathrm{d}x \\ x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}t \\ x=0\longrightarrow t=-16 \\ x=2\longrightarrow t=-12 \end{bmatrix}$$
$$= 2\ln 3+\frac{8}{2}\int_{-16}^{-12}\frac{\mathrm{d}t}{t}$$
$$= 2\ln 3+4\ln|t|\,\Bigg|_{-16}^{-12}$$
$$= 2\ln 3+4\ln 12-4\ln 16$$

(б) $$\int_0^1 xe^x\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u=x & \mathrm{d}v=e^x\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}x & v=e^x \end{bmatrix}$$
$$= xe^x\,\Bigg|_0^1 - \int_0^1 e^x\mathrm{d}x$$
$$= (xe^x-e^x)\,\Bigg|_0^1$$
$$= e-e-0+1$$
$$= 1$$

(в) $$\int_4^{25} x\sin x\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u=x & \mathrm{d}v=\sin x\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}x & v=-\cos x \end{bmatrix}$$
$$= -x\cos x\,\Bigg|_4^{25} + \int_4^{25}\cos x\mathrm{d}x$$
$$= (-x\cos x+\sin x)\,\Bigg|_4^{25}$$
$$= -25\cos 25+\sin 25+4\cos 4-\sin 4$$

(г)
$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x \mathrm{d}x}{\sin^2 x - \cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{1-2\cos^2 x}\mathrm{d}x$$
$$= \begin{bmatrix} t = \cos x \\ \mathrm{d}t = -\sin x \mathrm{d}x \\ x = 0 \longrightarrow t = 1 \\ x = \frac{\pi}{6} \longrightarrow t = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$
$$= -\int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1-2t^2}$$
$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \frac{1-t\sqrt{2}+1+t\sqrt{2}}{(1-t\sqrt{2})(1+t\sqrt{2})}\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \left(\frac{1}{1+t\sqrt{2}} + \frac{1}{1-t\sqrt{2}}\right)\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}(\ln|1+t\sqrt{2}| - \ln|1-t\sqrt{2}|)\ \Big|_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\ln(1+\sqrt{2}) - \ln(\sqrt{2}-1) - \ln\left(1+\frac{\sqrt{6}}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{6}}{2}-1\right)\right)$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - \ln\frac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{6}-2}\right)$$

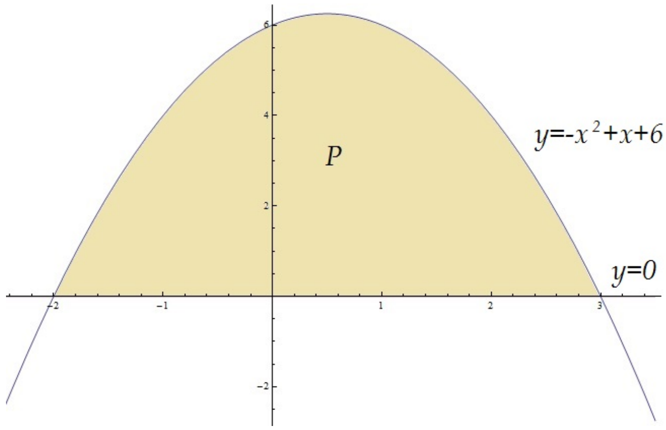
20. (а) Најпре треба наћи пресек ове две криве, тј. решавамо систем једначина

$$y = -x^2 + x + 6,$$
$$y = 0.$$

Убацивањем друге у прву, добијамо

$$-x^2 + x + 6 = 0,$$

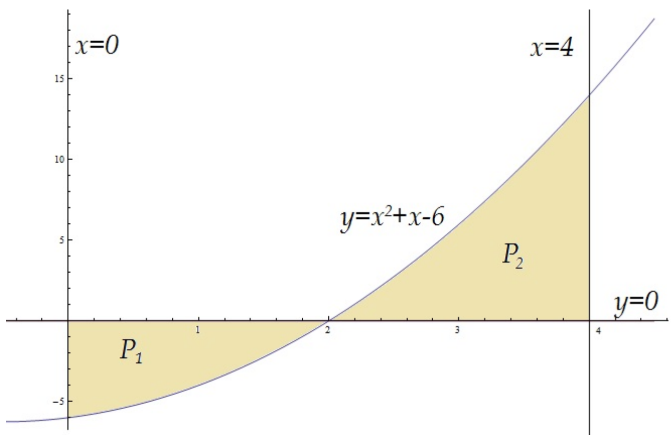
па се ове две криве секу у тачкама $x = -2$ и $x = 3$. На основу међусобног положаја графика ове две криве



видимо да ће дата површина бити

$$P = \int_{-2}^{3}(-x^2+x+6-0)\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+6x\,\Big|_{-2}^{3} = -\frac{27}{3}+\frac{9}{2}+18-\frac{8}{3}-\frac{4}{2}+12 = \frac{125}{6}.$$

(б) Нађимо најпре пресеке кривих x^2+x-6 и $y=0$. Решавањем система ове две једначине добијамо $x=-3$ и $x=2$. На основу међусобног положаја датих кривих



видимо да ће дата површина бити једнака збиру површина P_1 и P_2 са слике.

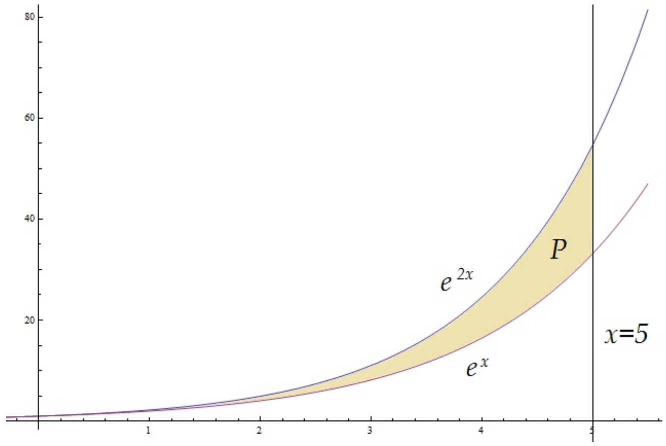
$$P_1 = \left|\int_0^2 (x^2+x-6)\mathrm{d}x\right| = \left|\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x\,\Big|_0^2\right| = \left|\frac{8}{3}+\frac{4}{2}-12\right| = \left|-\frac{22}{3}\right| = \frac{22}{3},$$

$$P_2 = \int_2^4 (x^2+x-6)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x\,\Big|_2^4 = \frac{64}{3}+\frac{16}{2}-24-\frac{8}{3}-\frac{4}{2}+12 = \frac{38}{3}.$$

Коначно, тражена површина једнака је

$$P = P_1+P_2 = \frac{22}{3}+\frac{38}{3} = 20.$$

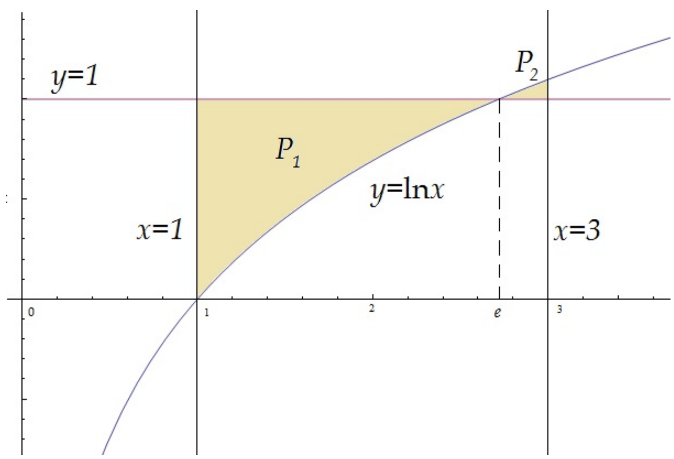
(в) На основу положаја графика



видимо да ће дата површина бити једнака

$$P = \int_0^5 (e^{2x} - e^x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{2x} - e^x \Big|_0^5 = \frac{1}{2}e^{10} - e^5 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1 + e^{10} - 2e^5}{2}.$$

(г) Нађимо најпре пресек кривих $y = \ln x$ и $y = 1$. Пресек тражимо као решења система ове две једначине и добијамо да је решење $x = e$, па дату површину можемо видети као збир површина P_1 и P_2 са слике.



Израчунајмо ове две површине.

$$P_1 = \int_1^e (1 - \ln x)\mathrm{d}x = x\,\Big|_1^e - \int_1^e \ln x \mathrm{d}x = e - 1 - \int_1^e \ln x \mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = \ln x & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x} & v = x \end{bmatrix}$$

$$= e - 1 - (x \ln x)\,\Big|_1^e + \int_1^e \mathrm{d}x = e - 1 - e\ln e + \ln 1 + x\,\Big|_1^e = e - 1 - e + e - 1 = e - 2.$$

$$P_2 = \int_e^3 (\ln x - 1)\mathrm{d}x = \ldots = -6 + e + \ln 27,$$

па је коначно тражена површина једнака

$$P = P_1 + P_2 = e - 2 - 6 + e + \ln 27 = 2e - 8 + \ln 27.$$

21. Дужину лука криве $f(x)$ на интервалу $[a,b]$ рачунамо формулом

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} \mathrm{d}x.$$

Уколико је крива задата параметарски двема једначинама $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ за $t \in [a,b]$, онда њену дужину рачунамо формулом

$$l = \int_a^b \sqrt{(\alpha'(t))^2 + (\beta'(t))^2} \mathrm{d}t.$$

Пређимо сада на конкретне задатке.

(а) Тражену дужину рачунамо формулом

$$l = \int_2^3 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2} \mathrm{d}x = \int_2^3 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} \mathrm{d}x = \begin{bmatrix} t = 1 + \frac{9}{4}x \\ \mathrm{d}t = \frac{9}{4}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}x = \frac{4}{9}\mathrm{d}t \\ x = 2 \longrightarrow t = \frac{11}{2} \\ x = 3 \longrightarrow t = \frac{31}{4} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{4}{9} \int_{\frac{11}{2}}^{\frac{31}{4}} \sqrt{t} \mathrm{d}t = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_{\frac{11}{2}}^{\frac{31}{4}} = \frac{8}{27} \left(\frac{\sqrt{31^3}}{8} - \frac{\sqrt{22^3}}{8} \right) = \frac{31\sqrt{31} - 22\sqrt{22}}{27}.$$

(б) Имамо да је

$$\alpha(t) = 4\cos t, \quad \beta(t) = 4\sin t,$$

па је дужина дате криве једнака

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-4\sin t)^2 + (4\cos t)^2} \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{16(\cos^2 t + \sin^2 t)} \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{2\pi} 4\mathrm{d}t = 4t \Big|_0^{2\pi} = 8\pi.$$

2.6 Диференцијалне једначине

Диференцијалне једначине првог реда

У овом одељку се нећемо фокусирати на детаљан поступак рачунања интеграла већ на поступак решавања диференцијалних једначина, па ће неки интеграли бити решени без поступка, а требало би знати како се ти интеграли решавају.

22.

(а) $y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(1-x^2) = x(1-y^2)$

$$\frac{y\mathrm{d}y}{1-y^2} = \frac{x\mathrm{d}x}{1-x^2}$$

$$\int \frac{y\mathrm{d}y}{1-y^2} = \int \frac{x\mathrm{d}x}{1-x^2}$$

$$-\frac{1}{2}\ln|1-y^2| = -\frac{1}{2}\ln|1-x^2| + c_1$$

$$1-y^2 = c(1-x^2)$$

$$y = \pm\sqrt{1-c+cx^2},\ c \in \mathbb{R}$$

(б) $x\sin x\mathrm{tg}y = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

$$\frac{\cos y}{\sin y}\mathrm{d}y = x\sin x\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\cos y}{\sin y}\mathrm{d}y = \int x\sin x\mathrm{d}x$$

$$\ln|\sin y| = \sin x - x\cos x + c,\ c \in \mathbb{R}$$

(в) $x\sqrt{1+y^2} + y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\sqrt{1+x^2} = 0$

$$\frac{y\mathrm{d}y}{\sqrt{1+y^2}} = -\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\int \frac{y\mathrm{d}y}{\sqrt{1+y^2}} = -\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\sqrt{y^2+1} = -\sqrt{x^2+1} + c,\ c \in \mathbb{R}$$

(г) Диференцијалну једначину са почетним условом решавамо тако што прво нађемо опште решење, а затим убацимо почетни услов да бисмо добили вредност константе $c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{tg} y - x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\ln x &= 0\\
\frac{\cos y}{\sin y}\mathrm{d}y &= \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}\\
\int \frac{\cos y}{\sin y}\mathrm{d}y &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}\\
\ln|\sin y| &= \ln|\ln x| + c,\ \ c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Убацимо сада почетни услов $y(e) = \frac{\pi}{2}$.

$$\ln\left|\sin\frac{\pi}{2}\right| = \ln|\ln e| + c$$

$$0 = 0 + c\ ,\ \text{тј.}\ \ c = 0.$$

Тражено решење је

$$\ln|\sin y| = \ln|\ln x|,$$

односно након сређивања

$$y = \arcsin(\ln x).$$

23. (а) Поделимо целу једначину са x, уз претпоставку да је $x \neq 0$. Добијамо

$$y' = 1 + \frac{y}{x}.$$

Уведимо смену $t = \frac{y}{x}$, па је $y = tx$ одакле је $y' = t'x + t$ (имајмо у виду да је t функција променљиве x, као и y). Након убацивања смене имамо

$$\begin{aligned}
t'x + t &= 1 + t\\
t'x &= 1\\
t' &= \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

одакле интеграљењем добијамо

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}t &= \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x\\
t &= \ln|x| + c,
\end{aligned}$$

па кад вратимо смену добијамо опште решење полазне једначине

$$\frac{y}{x} = \ln|x| + c,$$

односно

$$y = x\ln|x| + cx,\ c \in \mathbb{R}.$$

(б) Поделимо целу једначину са x, уз претпоставку да је $x \neq 0$. Добијамо

$$\frac{y}{x} - y' = \frac{y}{x}\ln\frac{x}{y}.$$

Уведимо смену $t = \frac{y}{x}$, $y' = t'x + t$. Добијамо

$$t - t'x - t = t\ln t,$$
$$\frac{t'}{t\ln t} = \frac{1}{x}.$$

Интегралимо обе стране једнакости

$$\int\frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = \int\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$
$$\ln|\ln t| = \ln|x| + c,$$

где се интеграл са леве стране рачуна увођењем смене $u = \ln t$. Коначно, када убацимо $t = \frac{y}{x}$, имамо

$$\ln\left|\ln\frac{y}{x}\right| = \ln|x| + x,\ c \in \mathbb{R}.$$

(в) Поделимо целу једнакост са x, уз претпоставку да је $x \neq 0$. Добијамо

$$1 + \frac{y}{x} + \left(1 - \frac{y}{x}\right)y' = 0.$$

Уведимо смену $t = \frac{y}{x}$, $y' = t'x + t$. Добијамо

$$1 + t + (1-t)(t'x + t) = 0$$
$$1 + t + t - t^2 + t'x(1-t) = 0$$
$$\frac{t'(t-1)}{1+2t-t^2} = \frac{1}{x}.$$

Интегралимо обе стране

$$\int\frac{(t-1)\mathrm{d}t}{1+2t-t^2} = \int\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$
$$-\frac{1}{2}\ln|-t^2 + 2t + 1| = \ln|x| + c.$$

Коначно, када убацимо $t = \frac{y}{x}$, имамо

$$-\frac{1}{2}\ln\left|-\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\frac{y}{x} + 1\right| = \ln|x| + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

24. (а) Дату једначину можемо записати као

$$y' - y = \cos x - \sin x,$$

па је њено решење дато формулом

$$\begin{aligned}
y' &= e^{-\int(-1)\mathrm{d}x}\left(c + \int e^{\int(-1)\mathrm{d}x}(\cos x - \sin x)\mathrm{d}x\right)\\
&= e^{x}\left(c + \int e^{-x}(\cos x - \sin x)\mathrm{d}x\right)\\
&= e^{x}\left(c + e^{-x}\sin x\right)\\
&= ce^{x} + \sin x,\ c \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

где се последњи интеграл добија парцијалном интеграцијом.
(б) Дату једначину можемо записати као

$$y' - \frac{1}{x}\cdot y = x^2,$$

па је њено решење дато формулом

$$\begin{aligned}
y' &= e^{-\int\left(-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x}\left(c + \int e^{\int\left(-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x}x^2\mathrm{d}x\right)\\
&= e^{\ln x}\left(c + \int e^{-\ln x}x^2\mathrm{d}x\right)\\
&= x\left(c + \int \frac{1}{x}\cdot x^2\mathrm{d}x\right)\\
&= x\left(c + \frac{1}{2}x^2\right),\ c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

(в) Дата једначина је већ у одговарајућем облику па можемо одмах применити формулу за решавање линеарне диференцијалне једначине.

$$\begin{aligned}
y' &= e^{-\int(2x)\mathrm{d}x}\left(c + \int e^{\int(2x)\mathrm{d}x}2xe^{-x^2}\mathrm{d}x\right)\\
&= e^{x^2}\left(c + \int e^{-x^2}2xe^{x^2}\mathrm{d}x\right)\\
&= e^{x^2}\left(c + \int 2x\mathrm{d}x\right)\\
&= e^{x^2}\left(c + x^2\right),\ c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

25. (а) Запишимо једначину у облику

$$y' + xy = xy^3.$$

Уведимо смену $y^{1-3}=u$, тј. $\frac{1}{y^2}=u$, одакле је $u'=-2\frac{y'}{y^3}$ односно $y'=-\frac{1}{2}y^3u'=-\frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}}u'$. Добијамо

$$-\frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}}u'+xu^{-\frac{1}{2}}=xu^{-\frac{3}{2}}.$$

Поделимо целу једначину коефицијентом уз u', тј. са $-\frac{3}{2}u^{-\frac{1}{2}}$ и добијамо линеарну диференцијалну једначину

$$u'-2xu=-2x$$

чије је решење

$$\begin{aligned} u&=e^{-\int(-2x)\mathrm{d}x}\left(c+\int e^{\int(-2x)\mathrm{d}x}(-2x)\mathrm{d}x\right)\\ &=e^{x^2}\left(c-\int e^{-x^2}2x\mathrm{d}x\right)\\ &=e^{x^2}\left(c+e^{-x^2}\right)\\ &=ce^{x^2}+1,\ c\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Враћањем смене $y=u^{-\frac{1}{2}}$ добијамо

$$y=\frac{1}{\sqrt{ce^{x^2}+1}},\ c\in\mathbb{R}.$$

(б) Уведимо смену $y^{1-2}=u$, тј. $\frac{1}{y}=u$, одакле је $u'=-\frac{y'}{y^2}$ односно $y'=-y^2u'=-u^{-2}u'$. Добијамо

$$-u^{-2}u'+2xu^{-1}=2xu^{-2}.$$

Поделимо сада једначину коефицијентом уз u' односно са $-u^{-2}$. Добијамо линеарну диференцијалну једначину

$$u'-2xu=-2x$$

коју смо решили у делу под a) па имамо да је

$$u=ce^{x^2}+1,\ c\in\mathbb{R}.$$

Када вратимо смену, добијамо

$$y=\frac{1}{ce^{x^2}+1},\ c\in\mathbb{R}.$$

(в) Уведимо смену $y^{1-\frac{1}{2}}=u$, тј. $\sqrt{y}=u$, одакле је $u'=\frac{y'}{2\sqrt{y}}$ односно $y'=2\sqrt{y}u'=2uu'$. Добијамо

$$2uu'-2e^xu^2=2e^xu.$$

Поделимо целу једначину коефицијентом уз u' односно са $2u$ и добијамо линеарну диференцијалну једначину

$$u'-e^xu=e^x$$

чије је решење

$$\begin{aligned}u &= e^{-\int(-e^x)\mathrm{d}x}\left(c+\int e^{\int(-2^x)\mathrm{d}x}e^x\mathrm{d}x\right)\\&= e^{e^x}\left(c+\int e^{-e^x}e^x\mathrm{d}x\right)\\&= e^{e^x}\left(c-e^{-e^x}\right)\\&= ce^{e^x}-1,\ c\in\mathbb{R},\end{aligned}$$

где је последњи интеграл добијен увођењем смене $t=-e^x$. Коначно, враћањем смене $y=u^2$, добијамо

$$y=\left(ce^{e^x}-1\right)^2,\ c\in\mathbb{R}.$$

26. (а) Ово је хомогена диференцијална једначина. Поделимо целу једначину са x^2, уз претпоставку да је $x\neq 0$. Добијамо

$$2y'=1+\left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

Уведимо смену $t=\frac{y}{x}$, одакле је $y=tx$, па је $y'=t'x+t$ (јер је t функција промењљиве x). Када убацимо смену имамо

$$\begin{aligned}2(t'x+t)&=1+t^2\\2t'x&=1-2t+t^2\\\frac{2t'}{(1-t)^2}&=\frac{1}{x}.\end{aligned}$$

Интеграљењем последње једначине добијамо

$$\begin{aligned}\int\frac{2\mathrm{d}t}{(1-t)^2}&=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}\\-\frac{2}{t-1}&=\ln|x|+c\end{aligned}$$

где је интеграл са леве стране једнакости добијен увођењем смене $p=1-t$. Коначно, када вратимо $t=\frac{y}{x}$, добијамо

$$-\frac{2}{\frac{y}{x}-1}=\ln|x|+c,\ c\in\mathbb{R}.$$

(б) Ово је Бернулијева диференцијална једначина. Уведимо смену $u=y^{1-2}$, тј. $u=\frac{1}{y}$, одакле је $y'=-\frac{u'}{u^2}$, па дата једначина постаје

$$-\frac{u'}{u^2}+\frac{1}{u(x+1)}+\frac{1}{u^2}=0$$

одакле множењем са $-u^2$ добијамо линеарну диференцијалну једначину

$$u'-\frac{1}{x+1}u=1$$

чије је решење дато формулом

$$\begin{aligned} u &= e^{-\int\left(-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x}\left(c+\int e^{\int\left(-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x}\cdot 1\mathrm{d}x\right)\\ &= e^{\ln|x+1|}\left(c+\int e^{-\ln|x+1|}\mathrm{d}x\right)\\ &= (x+1)\left(c+\int\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x\right)\\ &= (x+1)\big(c+\ln|x+1|\big). \end{aligned}$$

Остаје још да вратимо смену $y=\frac{1}{u}$ па имамо

$$y=\frac{1}{(x+1)\big(c+\ln|x+1|\big)},\ c\in\mathbb{R}.$$

(в) Ово је линеарна диференцијална једначина. Поделимо целу једначину са x, уз претпоставку да је $x\neq 0$,

$$y'+\frac{2}{x}\cdot y=x.$$

Опште решење ове једначине дато је формулом

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\left(c+\int e^{\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}x\mathrm{d}x\right)\\ &= e^{-2\ln|x|}\left(c+\int e^{2\ln|x|}x\mathrm{d}x\right)\\ &= \frac{1}{x^2}\left(c+\int x^3\mathrm{d}x\right)\\ &= \frac{1}{x^2}\left(c+\frac{x^4}{4}\right)\\ &= \frac{c}{x^2}+\frac{x^2}{2},\ c\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

(г) Ово је диференцијална једначина која раздваја променљиве.

$$\begin{aligned} y'\sin x &= y\ln y\\ \frac{y'}{y\ln y} &= \frac{1}{\sin x}\\ \int\frac{\mathrm{d}y}{y\ln y} &= \int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x} \end{aligned}$$

Израчунајмо посебно ова два интеграла.

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y\ln y}=\begin{bmatrix} t=\ln y\\ \mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}y}{y}\end{bmatrix}=\int\frac{\mathrm{d}t}{t}=\ln|t|+c_1=\ln|\ln y|+c_1$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x &= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\mathrm{d}x \\
&= \begin{bmatrix} t=\cos x \\ \mathrm{d}t = -\sin x\mathrm{d}x \end{bmatrix} \\
&= -\int \frac{1}{1-t^2}\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{2}\int \frac{1-t+1+t}{(1-t)(1+t)}\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{2}\big(\ln|1+t|-\ln|1-t|\big)+c_2 \\
&= -\frac{1}{2}\big(\ln|1+\arccos x|-\ln|1-\arccos x|\big)+c_2
\end{aligned}
$$

Коначно, имамо да је опште решење дато са

$$\ln|\ln y| = -\frac{1}{2}\big(\ln|1+\arccos x|-\ln|1-\arccos x|\big)+c,\ \ c\in\mathbb{R}.$$

Како је дат и почетни услов $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=e$, треба одредити партикуларно решење, тј. наћи c. Убацимо $\frac{\pi}{2}$ уместо x и e уместо y.

$$\ln|\ln e| = -\frac{1}{2}\left(\ln\left|1+\arccos\frac{\pi}{2}\right|-\ln\left|1-\arccos\frac{\pi}{2}\right|\right)+c$$

одакле добијамо да мора да важи $c=0$ (јер је $\ln e=1,\ \ln 1=0,\ \arccos\frac{\pi}{2}=0$). Тражено партикуларно решење је

$$\ln|\ln y| = -\frac{1}{2}\big(\ln|1+\arccos x|-\ln|1-\arccos x|\big).$$

(д) Ово је линеарна диференцијална једначина и њено опште решење добијамо формулом

$$
\begin{aligned}
y &= e^{-\int 2x\mathrm{d}x}\left(c+\int e^{\int 2x\mathrm{d}x}2x^2e^{-x^2}\mathrm{d}x\right) \\
&= e^{-x^2}\left(c+\int e^{x^2}2x^2e^{-x^2}\mathrm{d}x\right) \\
&= e^{-x^2}\left(c+2\int x^2\mathrm{d}x\right) \\
&= e^{-x^2}\left(c+\frac{2}{3}x^3\right),\ \ c\in\mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

(ђ) Ово је хомогена диференцијална једначина. Поделимо целу једначину са x, уз претпоставку да је $x \neq 0$.

$$y' = \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}$$

Уведимо смену $t = \frac{y}{x}$, тј. $y = tx$, одакле је $y' = t'x + t$ (јер је t функција променљиве x).

$$\begin{aligned} t'x + t &= \sqrt{1 - t^2} + t \\ \frac{t'}{1 - t^2} &= \frac{1}{x} \\ \int \frac{\mathrm{d}t}{1 - t^2} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \\ \frac{1}{2}(\ln|t + 1| - \ln|1 - t|) &= \ln|x| + c, \end{aligned}$$

одакле враћањем смене $t = \frac{y}{x}$ добијамо

$$\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{y}{x} + 1\right| - \ln\left|1 - \frac{y}{x}\right|\right) = \ln|x| + c, \;\; c \in \mathbb{R}.$$

(е) Ово је диференцијална једначина која раздваја променљиве.

$$\begin{aligned} y - xy' &= 2(1 + x^2 y') \\ y'(2x^2 + x) &= y - 2 \\ \frac{y'}{y - 2} &= \frac{1}{2x^2 + x} \\ \int \frac{\mathrm{y}}{y - 2} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{2x^2 + x} \\ \ln|y - 2| &= \ln|x| - \ln|2x + 1| + c, \;\; c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Потребно је још убацити почетан услов $y(1) = 1$ да бисмо нашли колико је c.

$$\begin{aligned} \ln|1 - 2| &= \ln|1| - \ln|2 + 1| + c \\ 0 &= -\ln 3 + c \end{aligned}$$

одакле је $c = \ln 3$, па је тражено решење

$$\ln|y - 2| = \ln|x| - \ln|2x + 1| + \ln 3.$$

(зh) Ово је Бернулијева диференцијална једначина. Уводимо смену $y^{1-\frac{4}{3}} = u$, тј. $u = \frac{1}{\sqrt[3]{y}}$, па је $y = \frac{1}{u^3}$ одакле је $y' = -\frac{3u'}{u^4}$. Убацимо смену у полазну једначину.

$$-\frac{3u'}{u^4} + \frac{2}{xu^3} = 3x^2 \frac{1}{u^4}$$

Поделимо претходну једначину са коефицијентом уз u', тј. са $-\frac{3}{u^4}$. Добијамо линеарну диференцијалну једначину

$$u' - \frac{6}{x}u = -9x^2$$

чије је решење дато формулом

$$\begin{aligned}
u &= e^{-\int\left(-\frac{6}{x}\right)\mathrm{d}x}\left(c + \int e^{\int\left(-\frac{6}{x}\right)\mathrm{d}x}(-9)x^2\mathrm{d}x\right)\\
&= e^{6\ln|x|}\left(c - 9\int e^{-6\ln|x|}x^2\mathrm{d}x\right)\\
&= x^6\left(c - 9\int\frac{1}{x^4}\mathrm{d}x\right)\\
&= x^6\left(c + \frac{3}{x^3}\right)\\
&= cx^6 + 3x^3.
\end{aligned}$$

Вратимо још смену $y = \frac{1}{u^3}$. Опште решење дате једначине је

$$y = \frac{1}{\left(cx^6 + 3x^3\right)^3},\ c \in \mathbb{R}.$$

(з) Ово је линеарна диференцијална једначина. Њено решење је дато формулом

$$\begin{aligned}
y &= e^{-\int \mathrm{tg}x\mathrm{d}x}\left(c + \int e^{\int \mathrm{tg}x\mathrm{d}x}\frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x\right)\\
&= e^{\ln(\cos x)}\left(c + \int e^{-\ln(\cos x)}\frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x\right)\\
&= \cos x\left(c + \int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}\mathrm{d}x\right)\\
&= \cos x(c + \mathrm{tg}x)\\
&= c\cos x + \sin x,\ c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

(и) Ово Бернулијева диференцијална једначина. Уведимо смену $u = y^{1-(-1)}$, тј. $u = y^2$, одакле је $y = \sqrt{u}$, па је $y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$. Убацимо смену у дату једначину

$$2\frac{u'}{2\sqrt{u}}\ln x + \frac{\sqrt{u}}{x} = \frac{\cos x}{\sqrt{u}}$$

и поделимо целу једнакост коефицијентом уз u', тј. са $\frac{\ln x}{\sqrt{u}}$, уз претпоставку да је $\ln x \neq 0$, тј. $x \neq 1$. Добијамо линеарну диференцијалну једначину

$$u' + \frac{1}{x\ln x}u = \frac{\cos x}{\ln x}$$

чије је решење дато формулом

$$\begin{aligned} u &= e^{-\int \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x}\left(c+\int e^{\int \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x}\frac{\cos x}{\ln x}\mathrm{d}x\right)\\ &= e^{-\ln|\ln x|}\left(c+\int e^{\ln|\ln x|}\frac{\cos x}{\ln x}\mathrm{d}x\right)\\ &= \frac{1}{\ln x}\left(c+\int \ln x\frac{\cos x}{\ln x}\mathrm{d}x\right)\\ &= \frac{1}{\ln x}\left(c+\sin x\right)\\ &= \frac{c+\sin x}{\ln x} \end{aligned}$$

Остаје још да вратимо смену $y=\sqrt{u}$, добијамо

$$y=\sqrt{\frac{c+\sin x}{\ln x}},\ c\in\mathbb{R}.$$

(j) Ово је диференцијална једначина која раздваја променљиве.

$$\begin{aligned} \sqrt{1-y^2} &= -yy'\sqrt{1-x^2}\\ \frac{yy'}{\sqrt{1-y^2}} &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\ -\sqrt{1-y^2} &= -\arcsin x + c,\ c\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

(к) Ово је линеарна диференцијална једначина чије решење добијамо формулом

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int(-\cos x)\mathrm{d}x}\left(c+\int e^{\int(-\cos x)\mathrm{d}x}\sin x\cos x\mathrm{d}x\right)\\ &= e^{\sin x}\left(c+\int e^{-\sin x}\sin x\cos x\mathrm{d}x\right)\\ &= e^{\sin x}\left(c-e^{-\sin x}(\sin x+1)\right)\\ &= ce^{\sin x}-\sin x-1,\ c\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

Остаје још да убацимо почетни услов $y(0)=0$.

$$0=ce^{\sin 0}-\sin 0-1,$$

одакле је $c=1$, па је решење дато са

$$y=e^{\sin x}-\sin x-1.$$

(л) Ово је хомогена диференцијална једначина. Поделимо целу једначину са x, уз претпоставку да је $x\neq 0$. Добијамо

$$y'\cos\frac{y}{x}=\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}-1$$

и уведимо смену $t = \frac{y}{x}$, тј. $y = tx$ одакле је $y' = t'x + t$. Убацимо смену у претходну једначину

$$(t'x + t)\cos t = t\cos t - 1$$
$$t't\cos t = -\frac{1}{x}$$
$$\int t\cos t \mathrm{d}t = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$
$$t\sin t + \cos t = -\ln|x| + c.$$

Остаје још да вратимо смену $t = \frac{y}{x}$.

$$\frac{y}{x}\sin\frac{y}{x} + \cos\frac{y}{x} = -\ln|x| + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

Диференцијалне једначине вишег реда

27. (а) Уведимо смену $u = y'$, $u' = y''$, где је u функција променљиве x. Полазна једначина постаје хомогена диференцијална једначина

$$xu' = u \ln \frac{u}{x},$$

па након дељења са x имамо

$$u' = \frac{u}{x} \ln \frac{u}{x}.$$

Уведимо смену $t = \frac{u}{x}$, одакле је $u = tx$, па је $u' = t'x + t$. Убацимо ову смену у претходну једначину.

$$\begin{aligned}
t'x + t &= t \ln t \\
\frac{t'}{t \ln t - t} &= \frac{1}{x} \\
\int \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t - t} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \\
\ln |\ln t - 1| &= \ln |x| + c_1 \\
\ln t - 1 &= cx \\
t &= e^{cx+1}
\end{aligned}$$

Вратимо најпре смену $u = tx$.

$$u = xe^{cx+1},$$

па сада из $y' = u$ имамо

$$y = \int xe^{cx+1} \mathrm{d}x = \frac{e^{cx+1}(cx-1)}{c^2} + d, \ c, d \in \mathbb{R}.$$

(б) Уведимо смену $u = y'$, где је u функција променљиве y, па је $y'' = u'_y \cdot y'_x = u'u$ (овде u'_y представља извод функције u по променљивој y, а y'_x извод функције y по променљивој x). Након убацивања смене добијамо

$$\begin{aligned}
yu'u &= u^2 - u^3 \\
\frac{u'}{u(1-u)} &= \frac{1}{y} \\
\int \frac{\mathrm{d}u}{u(1-u)} &= \int \frac{\mathrm{d}y}{y} \\
\ln \frac{u}{1-u} &= \ln |y| + c_1 \\
\frac{u}{1-u} &= cy \\
u &= \frac{cy}{cy+1}
\end{aligned}$$

Како је $y' = u$, имамо да је

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{cy}{cy+1} \\
\frac{(cy+1)y'}{cy} &= 1 \\
\int \frac{cy+1}{cy}\mathrm{d}y &= \int \mathrm{d}x \\
\frac{\ln|y|}{c} + y &= x + d,\ \ c, d \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

(в) Потребно је једначину интегралити четири пута да бисмо дошли до решења.

$$\begin{aligned}
y^{(4)} &= e^{3x} \\
\int y^{(4)}\mathrm{d}x &= \int e^{3x}\mathrm{d}x \\
y^{(3)} &= \frac{1}{3}e^{3x} + c \\
\int y^{(3)}\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1}{3}e^{3x} + c\right)\mathrm{d}x \\
y'' &= \frac{1}{9}e^{3x} + cx + d \\
\int y''\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1}{9}e^{3x} + cx + d\right)\mathrm{d}x \\
y' &= \frac{1}{27}e^{3x} + \frac{c}{2}x^2 + dx + e \\
\int y'\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1}{27}e^{3x} + \frac{c}{2}x^2 + dx + e\right)\mathrm{d}x \\
y &= \frac{1}{81}e^{3x} + \frac{c}{6}x^3 + \frac{d}{2}x^2 + ex + f,\ \ c, d, e, f \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

(г) Уведимо смену $u = y'$, $u' = y''$, где је u функција променљиве x.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{u'+1} &= x \\
u' &= \frac{1}{x} - 1 \\
\int \mathrm{d}u &= \int \left(\frac{1}{x} - 1\right)\mathrm{d}x \\
u &= \ln|x| - x + c,
\end{aligned}$$

па како је $y' = u$, имамо

$$y = \int (\ln|x| - x + c)\mathrm{d}x = x\ln x - x - \frac{1}{2}x^2 + cx + d,\ \ c, d \in \mathbb{R}.$$

(д) Уведимо смену $u = y'$, $u' = y''$, где је u функција променљиве x. Добијамо линеарну диференцијалну једначину

$$\begin{aligned} xu' + u &= x^2 \\ u' + \frac{1}{x}u &= x, \end{aligned}$$

чије је решење дато формулом

$$\begin{aligned} u &= e^{-\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(c + \int e^{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x} x\mathrm{d}x\right) \\ &= e^{-\ln x}\left(c + \int e^{\ln x} x\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{x}\left(c + \int x^2\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{x}\left(c + \frac{1}{3}x^3\right) \\ &= \frac{c}{x} + \frac{1}{3}x^2 \end{aligned}$$

Остаје још да вратимо смену $y' = u$.

$$y = \int \left(\frac{c}{x} + \frac{1}{3}x^2\right)\mathrm{d}x = c\ln|x| + \frac{1}{9}x^3 + d,\ c, d \in \mathbb{R}.$$

(ђ) Уведимо смену $u = y'$, где је u функција променљиве y, па је $y'' = u'_y \cdot y'_x = u'u$.

$$\begin{aligned} u'u + 2yu &= 0 \\ u' &= -2y \\ \int \mathrm{d}u &= -2\int y\mathrm{d}y \\ u &= -y^2 + c \end{aligned}$$

Остаје још да вратимо смену $y' = u$.

$$\begin{aligned} y' &= -y^2 + c \\ \frac{y'}{c - y^2} &= 1 \\ \int \frac{\mathrm{d}y}{c - y^2} &= \int \mathrm{d}x \\ \frac{1}{\sqrt{c}}\mathrm{arctg}\frac{y}{\sqrt{c}} &= x + d,\ c, d \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(е) Потребно је интегралити дату једначину три пута.

$$\begin{aligned}
y''' &= \ln x \\
\int y'''\mathrm{d}x &= \int \ln x \mathrm{d}x \\
y'' &= x\ln x - x + c \\
\int y''\mathrm{d}x &= \int (x\ln x - x + c)\mathrm{d}x \\
y' &= -\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2\ln x + cx + d \\
\int y'\mathrm{d}x &= \int \left(-\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2\ln x + cx + d\right)\mathrm{d}x \\
y &= -\frac{11}{36}x^3 + \frac{c}{2}x^2 + dx + \frac{1}{6}x^3\ln x + e,\ c, d, e \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

(ж) Уведимо смену $u = y'$, $u' = y''$, где је u функција променљиве x.

$$\begin{aligned}
u'x\ln x &= u \\
\frac{u'}{u} &= \frac{1}{x\ln x} \\
\int \frac{\mathrm{d}u}{u} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} \\
\ln|u| &= \ln|\ln x| + c_1 \\
u &= c\ln x
\end{aligned}$$

Вратимо смену $y' = u$.

$$y = \int (c\ln x)\mathrm{d}x = cx\ln x - cx + d,\ c, d \in \mathbb{R}.$$

28. (а) Карактеристична једначина дате једначине је

$$\lambda^2 - 1 = 0,$$

чија су решења $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = -1$, па је опште решење дате једначине једнако

$$y = c_1e^x + c_2e^{-x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(б) Карактеристича једначина дате једначине је

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0,$$

чија су решења $\lambda_1 = -2$ и $\lambda_2 = -2$, па је опште решење дате једначине једнако

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(в) Карактеристична једначина дате једначине је

$$\lambda^2 + 6\lambda + 10 = 0,$$

чија су решења $\lambda_1 = -3 + i$ и $\lambda_2 = -3 - i$, па је опште решење дате једначине једнако

$$y = c_1 e^{-3x} \cos x + c_2 e^{-3x} \sin x,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(г) Карактеристична једначина дате једначине је

$$3\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0,$$

чија су решења $\lambda_1 = -\frac{4}{3}$ и $\lambda_2 = 2$, па је опште решење дате једначине једнако

$$y = c_1 e^{-\frac{4}{3}x} + c_2 e^{2x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(д) Карактеристична једначина дате једначине је

$$\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0,$$

чија су решења $\lambda_1 = 3$ и $\lambda_2 = 4$, па је опште решење дате једначине једнако

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{4x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(ђ) Карактеристична једначина дате једначине је

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0,$$

чија су решења $\lambda_1 = 1 + i$ и $\lambda_2 = 1 - i$, па је опште решење дате једначине једнако

$$y = c_1 e^{x} \cos x + c_2 e^{x} \sin x,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

29. (а) Нађимо прво решење хомогене једначине $y'' - 5y' = 0$. Њена карактеристична једначина је $\lambda^2 - 5\lambda = 0$ чија су решења $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 5$, па је

$$y_h = c_1 + c_2 e^{5x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Партикуларно решење једначине је облика

$$y_p = x(ax + b) = ax^2 + bx,$$

па је
$$y_p' = 2ax + b, \quad y_p'' = 2a.$$

Убацимо претходни резултат у полазну једначину.
$$\begin{aligned} y_p'' - 5y_p' &= 0 \\ 2a - 5(2ax + b) &= 2x \\ -10ax + 2a - 5b &= 2x, \end{aligned}$$
одакле је
$$\begin{aligned} -10a &= 2 \\ 2a - 5b &= 0, \end{aligned}$$
па је $a = -\frac{1}{5},\ b = -\frac{2}{25}$ и коначно
$$y_p = -\frac{1}{5}x^2 - \frac{2}{25}x.$$

Опште решење полазне једначине је
$$y = y_h + y_p = c_1 + c_2 e^{5x} - \frac{1}{5}x^2 - \frac{2}{25}x,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(б) Нађимо прво решење хомогене једначине $y'' - 5y' = 0$. Њена карактеристична једначина је $\lambda^2 - 5\lambda = 0$ чија су решења $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 5$, па је
$$y_h = c_1 + c_2 e^{5x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Партикуларно решење једначине је облика
$$y_p = axe^{5x}$$
па је
$$y_p' = e^{5x}(a + 5ax), \quad y_p'' = e^{5x}(10a + 25ax).$$

Убацимо претходни резултат у полазну једначину.
$$\begin{aligned} y_p'' - 5y_p' &= 0 \\ e^{5x}(10a + 25ax) - 5e^{5x}(a + 5ax) &= -e^{5x} \\ 5a &= -1, \end{aligned}$$
па је $a = -\frac{1}{5}$ и коначно
$$y_p = -\frac{1}{5}xe^{5x}.$$

Опште решење полазне једначине је
$$y = y_h + y_p = c_1 + c_2 e^{5x} - \frac{1}{5}xe^{5x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(в) Нађимо прво решење хомогене једначине $y''+2y'+y=0$. Њена карактеристична једначина је $\lambda^2+2\lambda+1=0$ чија су решења $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=-1$, па је

$$y_h = c_1e^{-x}+c_2xe^{-x},\ c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

Потребно је наћи два партикуларна решења једно за једначину

$$y''+2y'+y=-2e^{-x}$$

и једно за једначину

$$y''+2y'+y=2\cos x-4\sin x.$$

Нађимо прво партикуларно решење прве једначине. Партикуларно решење једначине је облика

$$y_{p_1}=ax^2e^{-x}$$

па је

$$y'_{p_1}=e^{-x}(-ax^2+2ax),\quad y''_{p_1}=e^{-x}(ax^2-4ax+2a).$$

Убацимо претходни резултат у полазну једначину.

$$\begin{aligned}y''_{p_1}+2y'_{p_1}+y_{p_1}&=-2e^{-x}\\ e^{-x}(ax^2-4ax+2a)+2e^{-x}(-ax^2+2ax)+e^{-x}ax^2&=-2e^{-x}\\ 2a&=-2,\end{aligned}$$

па је $a=-1$ и коначно

$$y_{p_1}=-x^2e^{-x}.$$

Нађимо сада партикуларно решење друге једначине. Партикуларно решење једначине је облика

$$y_{p_2}=a\cos x+b\sin x$$

па је

$$y'_{p_2}=b\cos x-a\sin x,\quad y''_{p_2}=-a\cos x-b\sin x.$$

Убацимо претходни резултат у полазну једначину.

$$\begin{aligned}y''_{p_2}+2y'_{p_2}+y_{p_2}&=2\cos x-4\sin x\\ -a\cos x-b\sin x+2(b\cos x-a\sin x)+a\cos x+b\sin x&=2\cos x-4\sin x\end{aligned}$$

одакле изједначавањем коефицијената уз $\sin x$ и $\cos x$ са леве и десне стране знака једнакости добијамо систем две једначине

$$\begin{aligned}2b&=2\\ -2a&=-4,\end{aligned}$$

одакле је $a = 2,\ b = 1$ и коначно

$$y_{p_2} = 2\cos x + \sin x.$$

Опште решење полазне једначине је

$$y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} - x^2 e^{-x} + 2\cos x + \sin x,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(г) Нађимо прво решење хомогене једначине $y'' - 4y' + 3y = 0$. Њена карактеристична једначина је $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ чија су решења $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3$, па је

$$y_h = c_1 e^x + c_2 x e^{3x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Потребно је наћи два партикуларна решења једно за једначину

$$y'' + 2y' + y = e^{3x}$$

и једно за једначину

$$y'' + 2y' + y = \sin 3x.$$

Нађимо прво партикуларно решење прве једначине. Партикуларно решење једначине је облика

$$y_{p_1} = axe^{3x}$$

па је

$$y'_{p_1} = e^{3x}(3ax + a),\quad y''_{p_1} = e^{3x}(9ax + 6a).$$

Убацимо претходни резултат у полазну једначину.

$$\begin{aligned} y''_{p_1} + 2y'_{p_1} + y_{p_1} &= -2e^{-x} \\ e^{3x}(9ax + 6a) - 4e^{3x}(3ax + a) + 3e^{3x}ax &= e^{3x} \end{aligned}$$

одакле добијамо да је $2a = 1$, па је $a = \frac{1}{2}$ и коначно

$$y_{p_1} = \frac{1}{2} x e^{3x}.$$

Нађимо сада партикуларно решење друге једначине. Партикуларно решење једначине је облика

$$y_{p_2} = a\cos 3x + b\sin 3x$$

па је

$$y'_{p_2} = 3b\cos 3x - 3a\sin 3x,\quad y''_{p_2} = -9a\cos 3x - 9b\sin 3x.$$

Убацимо претходни резултат у полазну једначину.

$$\begin{aligned} y''_{p_2} + 2y'_{p_2} + y_{p_2} &= \sin 3x \\ -9a\cos 3x - 9b\sin 3x - 4(3b\cos 3x - 3a\sin 3x) + 3(a\cos 3x + b\sin 3x) &= \sin 3x \end{aligned}$$

одакле добијамо систем две једначине

$$-6a - 12b = 0$$
$$-6b + 12a = 1,$$

чије је решење $a = \frac{1}{15},\ b = -\frac{1}{30}$ и коначно

$$y_{p_2} = \frac{1}{15}\cos 3x - \frac{1}{30}\sin 3x.$$

Опште решење полазне једначине је

$$y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} = c_1e^x + c_2xe^{3x} + \frac{1}{2}xe^{3x} + \frac{1}{15}\cos 3x - \frac{1}{30}\sin 3x,\ \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(д) Нађимо прво решење хомогене једначине $y'' + 4y = 0$. Њена карактеристична једначина је $\lambda^2 + 4 = 0$ чија су решења $\lambda_1 = 2i$ и $\lambda_2 = -2i$, па је

$$y_h = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x,\ \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Потребно је наћи два партикуларна решења једно за једначину

$$y'' + 4y = e^{2x}$$

и једно за једначину

$$y'' + 4y = 2x.$$

Нађимо прво партикуларно решење прве једначине. Партикуларно решење једначине је облика

$$y_{p_1} = ae^{2x}$$

па је

$$y'_{p_1} = 2ae^{2x},\ \ y''_{p_1} = 4ae^{2x}.$$

Убацимо претходни резултат у полазну једначину.

$$y''_{p_1} + 4y_{p_1} = e^{2x}$$
$$4ae^{2x} + 4ae^{2x} = e^{2x},$$

одакле је $8a = 1$, па је $a = \frac{1}{8}$ и коначно

$$y_{p_1} = \frac{1}{8}e^{2x}.$$

Нађимо сада партикуларно решење друге једначине. Партикуларно решење једначине је облика

$$y_{p_2} = ax + b$$

па је

$$y'_{p_2} = a, \quad y''_{p_2} = 0.$$

Убацимо претходни резултат у полазну једначину.

$$y''_{p_2} + 4y_{p_2} = 2x$$
$$0 + 4(ax + b) = 2x,$$

одакле изједначавањем коефицијената уз 1 и x са леве и десне стране једнакости добијамо систем две једначине

$$4a = 2$$
$$b = 0$$

чије је решење $a = \frac{1}{2},\ b = 0$, па коначно имамо

$$y_{p_2} = \frac{1}{2}x.$$

Опште решење полазне једначине је

$$y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{8}e^{2x} + \frac{1}{2}x,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(ђ) Нађимо прво решење хомогене једначине $y'' - 2y' + y = 0$. Њена карактеристична једначина је $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ чија су решења $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 1$, па је

$$y_h = c_1 e^x + c_2 x e^x,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Потребно је наћи два партикуларна решења једно за једначину

$$y'' - 2y' + y = 2$$

и једно за једначину

$$y'' - 2y' + y = e^x \sin x.$$

Нађимо прво партикуларно решење прве једначине. Партикуларно решење једначине је облика

$$y_{p_1} = a$$

па је

$$y'_{p_1} = 0, \quad y''_{p_1} = 0.$$

Убацимо претходни резултат у полазну једначину.

$$y''_{p_1} - 2y'_{p_1} + y_{p_1} = 2$$

одакле добијамо да је $a = 2$, па је

$$y_{p_1} = 2.$$

Нађимо сада партикуларно решење друге једначине. Партикуларно решење једначине је облика

$$y_{p_2} = e^x(a\cos x + b\sin x)$$

па је

$$y'_{p_2} = e^x((a+b)\cos x + (b-a)\sin x), \quad y''_{p_2} = e^x(2b\cos x - 2a\sin x).$$

Убацимо претходни резултат у полазну једначину.

$$y''_{p_2} - 2y'_{p_2} + y_{p_2} = e^x\sin x$$
$$e^x(2b\cos x - 2a\sin x) - 2e^x((a+b)\cos x + (b-a)\sin x) + e^x(a\cos x + b\sin x) = e^x\sin x,$$

одакле добијамо систем једначина

$$-a = 0$$
$$-b = 1,$$

па је $a = 0,\ b = -1$ и коначно

$$y_{p_2} = -e^x\sin x.$$

Опште решење полазне једначине је

$$y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} = c_1e^x + c_2xe^x + 2 - e^x\sin x,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2.7 Вероватноћа

30. (а) $\Omega = \{P1, P2, P3, P4, P5, P6, G1, G2, G3, G4, G5, G6\}$, укупно 12 елемената.
(б) $\Omega = \{PPP, PPG, PGP, PGG, GPP, GPG, GGP, GGG\}$, укупно 8 елемената.
(в) $\Omega = \{PP11, PG11, GP11, GG11, PP12, PG12, \dots, PP66, PG66, GP66, GG66\}$, укупно 144 елемената.

31. (а) Постоје две могућности, да је пало 4 и 6 или 5 и 5. Тражена вероватноћа је збир те две.

$$P(A) = \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{12}$$

(б) Постоје четири могућности, да је пало 11, 12,13, 22. Тражена вероватноћа је збир ове четири.

$$P(B) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$$

(в) Постоји 6 могућности: 16, 26, 36, 46, 56, 66. Тражена вероватноћа је збир ових шест.

$$P(C) = \frac{2}{36} + \frac{2}{36} + \frac{2}{36} + \frac{2}{36} + \frac{2}{36} + \frac{2}{36} = \frac{11}{36}$$

(г) Постоји 5 могућности: 16, 26, 36, 46, 56. Тражена вероватноћа је збир ових пет.

$$P(D) = \frac{2}{36} + \frac{2}{36} + \frac{2}{36} + \frac{2}{36} + \frac{2}{36} = \frac{5}{18}$$

32. (а) Повољни догађаји су сви сем догађаја да су пале три главе, а укупно има $2^3 = 8$ могућности, па је тражена вероватноћа $P(A) = \frac{7}{8}$.
(б) Повољни догађаји су ПГГ, ГПГ, ГГП тј. има три повољна догађаја, а укупно осам, па је тражена вероватноћа $P(B) = \frac{3}{8}$.
(в) Повољан је само један догађај, а има их укупно осам, па је тражена вероватноћа $P(C) = \frac{1}{8}$.
(г) Повољни су сви догађаји сем ГГГ, па је тражена вероватноћа $P(D) = \frac{7}{8}$.

33. (а) Имамо један повољан догађај, а укупно $2 \cdot 6 = 12$, па је тражена вероватноћа $P(A) = \frac{1}{12}$.
(б) Није нам битно шта је ка коцки, само да је на новчићу писмо, па је број повољних догађаја 6, те је тражена вероватноћа $P(B) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.
(в) Повољни догађаји су Ђ, П4, П6, Г2, Г4, Г6, тј. има их укупно 6, па је тражена вероватноћа $P(C) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.
(г) Повољни догађаји су Г1, Г3, Г5, тј. има их укупно 3, па је тражена вероватноћа $P(D) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

34. (а) Укупно имамо $7+8+12+3=30$ куглица, па је укупан број могућих исхода једнак $\binom{30}{4}$.
Повољних исхода за догађај A има $\binom{8}{4}$, па је тражена вероватноћа

$$P(A)=\frac{\binom{8}{4}}{\binom{30}{4}}=\frac{2}{783}.$$

Повољних исхода за догађај B је $\binom{12}{3}\binom{7}{1}$, па је тражена вероватноћа

$$P(B)=\frac{\binom{12}{3}\binom{7}{1}}{\binom{30}{4}}=\frac{44}{783}.$$

Повољних исхода за догађај C је $7\cdot 8\cdot 12\cdot 3$, па је тражена вероватноћа

$$P(C)=\frac{7\cdot 8\cdot 12\cdot 3}{\binom{30}{4}}=\frac{32}{435}.$$

Повољних исхода за догађај D је $\binom{8}{2}\cdot 7\cdot 12$, па је тражена вероватноћа

$$P(D)=\frac{\binom{8}{2}\cdot 7\cdot 12}{\binom{30}{4}}=\frac{112}{1305}.$$

(б) Укупно имамо 30 куглица, па је укупан број могућих исхода једнак $30\cdot 29\cdot 28\cdot 27$.
Повољних исхода за догађај A има $8\cdot 7\cdot 6\cdot 5$, па је тражена вероватноћа

$$P(A)=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27}=\frac{2}{783}.$$

Повољних исхода за догађај B је $12\cdot 11\cdot 10\cdot 7\cdot\binom{4}{1}$, па је тражена вероватноћа

$$P(B)=\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 7\cdot\binom{4}{1}}{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27}=\frac{44}{783}.$$

Повољних исхода за догађај C је $7\cdot 8\cdot 12\cdot 3\cdot 4!$, па је тражена вероватноћа

$$P(C)=\frac{7\cdot 8\cdot 12\cdot 3\cdot 4!}{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27}=\frac{32}{435}.$$

Повољних исхода за догађај D је $8\cdot 7\cdot 7\cdot 12\cdot 4\cdot 3$, па је тражена вероватноћа

$$P(D)=\frac{8\cdot 7\cdot 7\cdot 12\cdot 4\cdot 3}{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27}=\frac{112}{1305}.$$

(в) Укупно имамо 30 куглица, па је укупан број могућих исхода једнак 30^4.
Повољних исхода за догађај A има 8^4, па је тражена вероватноћа

$$P(A)=\frac{8^4}{30^4}=\frac{256}{50625}.$$

Повољних исхода за догађај B је $12^3 \cdot 7 \cdot \binom{4}{1}$, па је тражена вероватноћа

$$P(B) = \frac{12^3 \cdot 7 \cdot \binom{4}{1}}{30^4} = \frac{112}{1875}.$$

Повољних исхода за догађај C је $7 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 3 \cdot 4!$, па је тражена вероватноћа

$$P(C) = \frac{7 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 3 \cdot 4!}{30^4} = \frac{112}{1875}.$$

Повољних исхода за догађај D је $8^2 \cdot 7 \cdot 12 \cdot 4 \cdot 3$, па је тражена вероватноћа

$$P(D) = \frac{8^2 \cdot 7 \cdot 12 \cdot 4 \cdot 3}{30^4} = \frac{448}{5625}.$$

35. У свих шест делова задатка имамо по један повољан догађај, да је случајним распоредом слова добијена баш дата реч. Остаје да видимо колико имамо могућих догађаја.
(а) Број могућих догађаја је $6! = 720$, па је $P(A) = \frac{1}{720}$.
(б) Број могућих догађаја је $\frac{6!}{2!} = 360$, па је $P(B) = \frac{1}{360}$.
(в) Број могућих догађаја је $\frac{5!}{2!2!} = 30$, па је $P(C) = \frac{1}{30}$.
(г) Број могућих догађаја је $\frac{8!}{4!2!} = 840$, па је $P(D) = \frac{1}{840}$.
(д) Број могућих догађаја је $4! = 24$, па је $P(E) = \frac{1}{24}$.
(ђ) Број могућих догађаја је $5! = 120$, па је $P(F) = \frac{1}{120}$.

36. Од укупно $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240$ могућности, само је једна тачна, па је тражена вероватноћа $P(A) = \frac{1}{30240}$.

37. Број могућности је $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$, па је тражена вероватноћа $P(A) = \frac{1}{3024}$.

38. У свих пет делова укупан број могућности је $\binom{52}{4} = 270725$.
(а) Број повољних догађаја је 1 па је тражена вероватноћа $P(A) = \frac{1}{270725}$.
(б) Број повољних догађаја је $\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1} = 4^4 = 256$, па је тражена вероватноћа $P(B) = \frac{256}{270725}$.
(в) Број повољних догађаја је $\binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} = 36$, па је тражена вероватноћа $P(C) = \frac{36}{270725}$.
(г) Број повољних догађаја је $\binom{12}{4} = 495$, па је тражена вероватноћа $P(D) = \frac{99}{54145}$.
(д) Број повољних догађаја је $\binom{12}{1}\binom{12}{1}\binom{12}{1}\binom{12}{1} = 12^4 = 20736$, па је тражена вероватноћа $P(E) = \frac{20736}{270725}$.

39. Укупан број поцепаних чарапа је $0,3 \cdot 100 + 0,15 \cdot 200 + 0,55 \cdot 300 = 225$, па у дзаку има $600 - 225 = 375$ целих чарапа. Тражена вероватноћа је $P(A) = \frac{375}{600} = \frac{5}{8}$.

40. Укупан број могућих извлачења је $39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 = 77519922480$, а само је једно добитно, па је тражена вероватноћа $P(A) = \frac{1}{77519922480} = 0,0000000000129 = 0,00000000129\%$.

41. Број могућих догађаја је три $(4+6,\ 5+5,\ 6+4)$, а повољан је само један, па је тражена вероватноћа једнака $\frac{1}{3}$.

42. Означимо са A догађај да је извучен краљ, са B да је извучена дама. Тражена вероватноћа је

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{4}{52} + \frac{4}{52} - 0 = \frac{2}{13}.$$

43. Означимо са A догађај да је извучен краљ, са B да је извучена дама, а са C да је извучен жандар. Тражена вероватноћа је

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) \\ &= \frac{4}{52} + \frac{4}{52} + \frac{4}{52} - 0 - 0 - 0 + 0 \\ &= \frac{3}{13}. \end{aligned}$$

44. Означимо са A догађај да је извучен пик, а са B да је извучен кец. Тражена вероватноћа је

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{4}{13}.$$

45. Укупан број непарних куглица је 10. Број повољних исхода је $10 \cdot 9 \cdot 8$, а укупан број могућих исхода је $20 \cdot 19 \cdot 18$, па је тражена вероватноћа једнака $P(A) = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{2}{19}$.

46. Пера и Жика поново полажу испит. Сада је Пера боље научио и испит полаже са вероватноћом 0,9, а Жика са вероватноћом 0,3. Израчунати вероватноћу да

(а) $P(A) = 0,9 \cdot 0,7 = 0,63$;

(б) $P(B) = 0,9 \cdot 0,3 = 0,27$;

(в) $P(C) = 1 - 0,1 \cdot 0,7 = 0,93$;

(г) $P(D) = 0,1 \cdot 0,7 = 0,07$;

(д) $P(E) = 0,1 \cdot 0,3 = 0,03$;

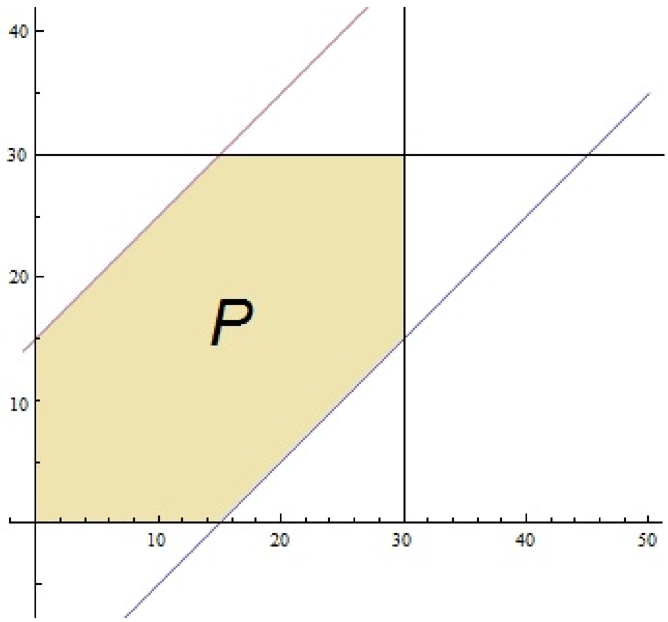
(ђ) $P(F) = 0,9 \cdot 0,7 + 0,1 \cdot 0,3 = 0,66$.

47. Нека је страница квадрата a. Тада је полупречник круга $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Тражена вероватноћа је

$$P(A) = \frac{\text{површина квадрата}}{\text{површина круга}} = \frac{a^2}{\frac{a^2}{2}\pi} = \frac{2}{\pi} \approx 0,637.$$

48. Означимо са $19:x$ време у које долази Пера, а са $19:y$ време у које долази Жика. Мора да важи $x-15 \leqslant y \leqslant x+15$ и притом $0 \leqslant x, y \leqslant 30$. Тражена вероватноћа је количник површина осенченог дела са слике и површине квадрата странице 30.

$$P(A) = \frac{30^2 - 2\cdot\frac{15\cdot15}{2}}{30^2} = \frac{3}{4}.$$



49. Тражена вероватноћа је

$$P(A) = 0,9\cdot\frac{1}{2} + 0,95\cdot\frac{1}{3} + 0,98\cdot\frac{1}{6} = 0,93.$$

50. Означимо са $H_1,\ H_2,\ H_3$ хипотезе да је одабрана прва, друга односно трећа кутија, а са A догађај да је производ исправан. Тражена вероватноћа је

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3) = \frac{1}{3}\cdot 0,9 + \frac{1}{3}\cdot 0,5 + \frac{1}{3}\cdot 0,7 = 0,7.$$

51. Означимо са $H_1,\ H_2,\ H_3,\ H_4$ хипотезе да је одабран рачунар марке *Dell*, *Toshiba*, *HP*, односно *Apple*, а са A догађај да одабран рачунар ради дуже од 10 година. Тражена вероватноћа је

$$\begin{aligned}P(A) &= P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3) + P(H_4)P(A|H_4)\\ &= \frac{300}{800}\cdot 0,4 + \frac{150}{800}\cdot 0,3 + \frac{170}{800}\cdot 0,2 + \frac{180}{800}\cdot 0,5\\ &\approx 0,361.\end{aligned}$$

52. У једном бубњу има 20 куглица нумерисаних од 1 до 20, а у другом 10 нумерисаних од 1 до 10. Бира се насумично бубањ и извлачи једна куглица.
Означимо са H_1 и H_2 хипотезе да је одабран први односно други бубањ. Вероватноће остваривања ових хипотеза су

$$P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}.$$

(а) Означимо са A догађај да је извучен број у чијем се запису појављује цифра 7. Тражена вероватноћа је

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{20} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{10}.$$

(б) Означимо са B догађај да је извучен паран број. Тражена вероватноћа је

$$P(B) = P(H_1)P(B|H_1) + P(H_2)P(B|H_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{20} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

(в) Тражимо вероватноћу $P(H_1|B)$.

$$P(H_1|B) = \frac{P(H_1)P(B|H_1)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{10}{20}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

(г) Означимо са C догађај да је извучен број мањи од 6. Тражена вероватноћа је

$$P(C) = P(H_1)P(C|H_1) + P(H_2)P(C|H_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{20} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{10} = \frac{3}{8}.$$

(д) Тражимо вероватноћу $P(H_2|C)$.

$$P(H_2|C) = \frac{P(H_2)P(C|H_2)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{10}}{\frac{3}{8}} = \frac{2}{3}.$$

53. Означимо са A догађај да је први стрелац погодио мету, а са B да је други погодио. Како знамо да се десио тачно један погодак, вероватноћа да је баш први погодио (а други промашио) је

$$P(A\bar{B}) = P(A)P(\bar{B}) = P(A)(1 - P(B)) = 0,8 \cdot 0,6 = 0,48.$$

Вероватноћа да је други погодио (а први промашио) је

$$P(\bar{A}B) = P(\bar{A})P(B) = (1 - P(A))P(B) = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08.$$

54. Тражена вероватноћа је

$$P(A) = \left(\frac{1}{2}\right)^{17} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{83} \cdot \binom{100}{17} = \frac{\binom{100}{17}}{2^{100}}.$$

55. Тражена вероватноћа је

$$P(A) = \left(\frac{1}{3}\right)^{30} \left(\frac{2}{3}\right)^{40} \binom{70}{30}.$$

56. Када се бацају две коцке одједном, вероватноћа да је збир палих бројева једнак 5 је $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$. Тражена вероватноћа је

$$P(A) = \left(\frac{1}{9}\right)^{50} \left(\frac{8}{9}\right)^{100} \binom{150}{50}.$$

57. Приметимо да $X \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Одредимо вероватноће да случајна промнљива X узима баш ове вредности.

$$\begin{aligned}
P\{X = 0\} &= \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}\\
P\{X = 1\} &= \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \binom{4}{1} = \frac{1}{4}\\
P\{X = 2\} &= \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \binom{4}{2} = \frac{3}{8}\\
P\{X = 3\} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^3} \cdot \binom{4}{3} = \frac{1}{4}\\
P\{X = 4\} &= \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}
\end{aligned}$$

Тражена расподела је

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}.$$

58. Приметимо да $X \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Одредимо вероватноће да случајна променљива X узима баш ове вредности.

$$P\{X=2\}=\frac{1}{36}$$
$$P\{X=3\}=\frac{1}{18}$$
$$P\{X=4\}=\frac{1}{12}$$
$$P\{X=5\}=\frac{1}{9}$$
$$P\{X=6\}=\frac{5}{36}$$
$$P\{X=7\}=\frac{1}{6}$$
$$P\{X=8\}=\frac{5}{36}$$
$$P\{X=9\}=\frac{1}{9}$$
$$P\{X=10\}=\frac{1}{12}$$
$$P\{X=11\}=\frac{1}{18}$$
$$P\{X=12\}=\frac{1}{36}$$

Тражена расподела је

$$X:\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{1}{18} & \frac{1}{12} & \frac{1}{9} & \frac{5}{36} & \frac{1}{6} & \frac{5}{36} & \frac{1}{9} & \frac{1}{12} & \frac{1}{18} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}.$$

59. Приметимо $X\in\{1,2,3,4,5\}$. Одредимо вероватноће да случајна променљива X узима баш ове вредности.

$$P\{X=1\}=\frac{2}{3}$$
$$P\{X=2\}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$$
$$P\{X=3\}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{27}$$
$$P\{X=4\}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{81}$$
$$P\{X=5\}=1-\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+\frac{2}{81}\right)=\frac{1}{81}$$

Тражена расподела је

$$X:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{9} & \frac{2}{27} & \frac{2}{81} & \frac{1}{81} \end{pmatrix}.$$

60. Приметимо $X \in \{1,3,5,7,9\}$, $Y \in \{1,2,3\}$. Одредимо расподеле ових случајних величина.

$$P\{X=1\} = \frac{1}{4}$$
$$P\{X=3\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$
$$P\{X=5\} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$
$$P\{X=7\} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\frac{1}{2}\cdot 2 = \frac{1}{6}$$
$$P\{X=9\} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2 = \frac{1}{12}$$
$$P\{Y=1\} = \frac{1}{2}$$
$$P\{Y=2\} = \frac{1}{4}$$
$$P\{Y=3\} = \frac{1}{4}$$

(а)

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$
$$E(X) = 1\cdot\frac{1}{4} + 3\cdot\frac{1}{3} + 5\cdot\frac{1}{6} + 7\cdot\frac{1}{6} + 9\cdot\frac{1}{12} = 4$$
$$E(X^2) = 1^2\cdot\frac{1}{4} + 3^2\cdot\frac{1}{3} + 5^2\cdot\frac{1}{6} + 7^2\cdot\frac{1}{6} + 9^2\cdot\frac{1}{12} = \frac{67}{3}$$
$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{67}{3} - 16 = \frac{19}{3}$$

(б)

$$Y : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$
$$E(X) = 1\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4} + 3\cdot\frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$
$$E(X^2) = 1^2\cdot\frac{1}{2} + 2^2\cdot\frac{1}{4} + 3^2\cdot\frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$
$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{15}{4} - \frac{49}{16} = \frac{11}{16}$$

61. (57.)

$$E(X) = 0\cdot\frac{1}{16} + 1\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{3}{8} + 3\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{16} = 2$$

$$E(X^2) = 0^2 \cdot \frac{1}{16} + 1^2 \cdot \frac{1}{4} + 2^2 \cdot \frac{3}{8} + 3^2 \cdot \frac{1}{4} + 4^2 \cdot \frac{1}{16} = 5$$
$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 5 - 4 = 1$$

(58.)

$$\begin{aligned} E(X) =& 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{1}{18} + 4 \cdot \frac{1}{12} + 5 \cdot \frac{1}{9} + 6 \cdot \frac{5}{36} + 7 \cdot \frac{1}{6} \\ &+ 8 \cdot \frac{5}{36} + 9 \cdot \frac{1}{9} + 10 \cdot \frac{1}{12} + 11 \cdot \frac{1}{18} + 12 \cdot \frac{1}{36} = 7 \\ E(X^2) =& 2^2 \cdot \frac{1}{36} + 3^2 \cdot \frac{1}{18} + 4^2 \cdot \frac{1}{12} + 5^2 \cdot \frac{1}{9} + 6^2 \cdot \frac{5}{36} + 7^2 \cdot \frac{1}{6} \\ &+ 8^2 \cdot \frac{5}{36} + 9^2 \cdot \frac{1}{9} + 10^2 \cdot \frac{1}{12} + 11^2 \cdot \frac{1}{18} + 12^2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{329}{6} \\ D(X) =& E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{35}{6} \end{aligned}$$

(59.)

$$E(X) = 1 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{2}{9} + 3 \cdot \frac{2}{27} + 4 \cdot \frac{2}{81} + 5 \cdot \frac{1}{81} = \frac{121}{81}$$
$$E(X^2) = 1^2 \cdot \frac{2}{3} + 2^2 \cdot \frac{2}{9} + 3^2 \cdot \frac{2}{27} + 4^2 \cdot \frac{2}{81} + 5^2 \cdot \frac{1}{81} = \frac{79}{27}$$
$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{4556}{6561}$$

62. (а) Мора да важи

$$\frac{2}{5} + \frac{a}{5} + \frac{a^2}{10} + \frac{a}{10} + \frac{a^2}{5} = 1$$

односно

$$3a^2 + 3a - 6 = 0,$$

одакле добијамо $a = -2$ или $a = 1$. Како вероватноће $\frac{a}{5}$, $\frac{a^2}{10}$, $\frac{a}{10}$, $\frac{a^2}{5}$ морају бити позитивни бројеви, закључујемо да мора бити $a = 1$, па случајна промењива X има расподелу

$$X : \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 2 & 4 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

(б)

$$E(X) = -3 \cdot \frac{2}{5} + (-1) \cdot \frac{1}{5} + 0 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{5} = -\frac{2}{5},$$

(в)

$$E(X^2) = (-3)^2 \cdot \frac{2}{5} + (-1)^2 \cdot \frac{1}{5} + 0^2 \cdot \frac{1}{10} + 2^2 \cdot \frac{1}{10} + 4^2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{37}{5},$$
$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{181}{25}.$$