УВОД У ТЕОРИЈУ ХОМОТОПИЈЕ

Белешке Милице Јовановић са предавања професора Бранислава Првуловића на курсу *Одабрана поглавља топологије и геометрије* у школској 2018/2019.

Садржај

1 Увод

1.1 Класе хомотопних пресликавања

Нека су X и Y тополошки простори. Дефинишимо

$$[X, Y] \stackrel{def}{=} C(X, Y)/_{\simeq}.$$

$[X, Y]$ ће бити скуп, а понекад и група.

Пример 1.1

1) *Ако је Y контрактибилан, онда је $|[X, Y]| = 1$; тада пишемо $[X, Y] = 0$;*

2) *Ако је X контрактибилан, онда је $|[X, Y]|$ једнак броју компоненти путне повезаности од Y;*

3) *Ако је $m < n$, онда је $|[S^m, S^n]| = 1$ (ово следи из теореме о симплицијалној апроксимацији);*

4) *Ако је $m = n$, онда је $\deg : [S^n, S^n] \to \mathbb{Z}$ бијекција (доказ касније);*

5) *Ако је $m > n$, онда се $[S^m, S^n]$ у општем случају не зна.*
   За $n = 1$ имамо да је $[S^m, S^1] = 0$.

Нека је $g : Y \to Z$ непрекидно пресликавање и X тополошки простор. Тада можемо дефинисати пресликавање $g_* : [X, Y] \to [X, Z]$ са

$$g_*\big([f]\big) = [g \circ f].$$

Приметимо да важи

$$(h \circ g)_* = h_* \circ g_*, \quad (\mathbb{1}_X)_* = \mathbb{1}_{[X,Y]},$$

односно

$$[X, \cdot] : Top \to Set$$

је коваријантан функтор.

Ако су $g, h : Y \to Z$ непрекидна пресликавања таква да је $g \simeq h$, онда је $g_* = h_*$.

Став 1.2 *Ако је $g : Y \to Z$ хомотопска еквиваленција, онда је g_* бијекција.*

Доказ: Како је g хомотопска еквиваленција, имамо да постоји пресликавање $h : Z \to Y$ такво да је

$$g \circ h \simeq \mathbb{1}_Z, \quad h \circ g \simeq \mathbb{1}_Y,$$

па је

$$g_* \circ h_* = (g \circ h)_* = (\mathbb{1}_Z)_* = \mathbb{1}_{[X,Z]}$$

$$h_* \circ g_* = (h \circ g)_* = (\mathbb{1}_Y)_* = \mathbb{1}_{[X,Y]},$$

тј. g_* је бијекција. □

Дефиниција 1.3 Непрекидно пресликавање $p : E \to B$ је *фибрација* ако за произвољан простор X, пресликавање $f : X \to E$ и хомотопију $H : X \times I \to B$, такве да је $p(f(x)) = H(x, 0)$ за све $x \in X$, постоји пресликавање $\widetilde{H} : X \times I \to E$ такво да је $\widetilde{H}(x, 0) = f(x)$ и $p \circ \widetilde{H} = H$.

$$\begin{tikzcd}
X \times \{0\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\
X \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{H}"] & B
\end{tikzcd}$$

За $b_0 \in B$ скуп $F := p^{-1}(b_0)$ називамо *слој (фибра) фибрације* p над тачком b_0.

Знамо да је низ Абелових група и хомоморфизама $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ тачан ако је $\operatorname{im} f = \ker g$. Желимо да проширимо појам тачног низа за скупове са истакнутом тачком. Нека је $c_0 \in C$ истакнута тачка. Кажемо да је низ $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ тачан ако је $\operatorname{im} f = g^{-1}(c_0)$. Приметимо да нам је истакнут елемент потребан само у скупу C. Приметимо још да важи

$$f \text{ је „на“} \leftrightarrow g = c_0,$$

$$g \text{ је „1-1“} \Rightarrow f = const.$$

Ако је Y путно повезан, онда је $[const]$ истакнут елемент у $[X, Y]$.

Теорема 1.4 *Нека је $p : E \to B$ фибрација, B путно повезан, $b_0 \in B$ и $F = p^{-1}(b_0)$ слој над b_0. Тада је за произвољан простор X низ*

$$[X, F] \xrightarrow{i_*} [X, E] \xrightarrow{p_*} [X, B]$$

тачан.

Доказ: Потребно је да докажемо да је $\operatorname{im}\ i_* = p_*^{-1}([c_{b_0}])$, где је $c_{b_0} : X \to B$ константно пресликавање дато са $c_{b_0}(x) = b_0$, за све $x \in X$.
$\subseteq$: Нека је $g : X \to F$. Како је

$$p_*(i_*([g])) = [p \circ i \circ g] = [b_0],$$

то је $\operatorname{im}\ i_* \subseteq p_*^{-1}([b_0])$.
$\supseteq$: Нека је $f : X \to E$ и претпоставимо да је $[f] \in p_*^{-1}([c_{b_0}])$, тј. $p_*([f]) = [p \circ f] = c_{b_0}$. Тада имамо хомотопију

$$H : p \circ f \simeq c_{b_0},$$

па како је p фибрација имамо и њено подизање $\widetilde{H} : X \times I \to E$.

$$\begin{tikzcd}
X \times \{0\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\
X \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{H}"] & B
\end{tikzcd}$$

Дефинишимо $\widetilde{f} : X \to E$ са $\widetilde{f}(x) = \widetilde{H}(x, 1)$. Имамо да важи

$$(p \circ \widetilde{f})(x) = p(\widetilde{H}(x, 1)) = H(x, 1) = b_0, \text{ за све } x \in X,$$

одакле следи да је $\widetilde{f}(x) \in F$ за све $x \in X$, па постоји $g : X \to F$такво да је $\widetilde{f} = i \circ g$.

Још остаје да покажемо да је

$$i_*([g]) = [i \circ g] = [\widetilde{f}] = [f] \ \square$$

Нека је X тополошки простор и $g : Y \to Z$ непрекидно пресликавање. Можемо дефинисати пресликавање $g^* : [Z, X] \to [Y, X]$ са

$$g^*([f]) = [f \circ g].$$

Приметимо да важи

$$(g \circ h)^* = h^* \circ g^*, \quad (\mathbb{1}_Y)^* = \mathbb{1}_{[Y,X]},$$

односно

$$[\cdot, X] : Top \to Set$$

је контраваријантан функтор.

Ако су $g, h : Y \to Z$ непрекидна пресликавања таква да је $g \simeq h$, онда је $g^* = h^*$.

Став 1.5 *Ако је $g : Y \to Z$ хомотопска еквиваленција, онда је g^* бијекција.*

Доказ: Како је g хомотопска еквиваленција, имамо да постоји пресликавање $h : Z \to Y$ такво да је

$$g \circ h \simeq \mathbb{1}_Z, \quad h \circ g \simeq \mathbb{1}_Y,$$

па је

$$g^* \circ h^* = (h \circ g)^* = (\mathbb{1}_Y)^* = \mathbb{1}_{[Y,X]}$$

$$h^* \circ g^* = (g \circ h)^* = (\mathbb{1}_Z)^* = \mathbb{1}_{[Z,X]},$$

тј. g^* је бијекција. □

Дефиниција 1.6 Непрекидно пресликавање $i : A \to X$ је *кофибрација* ако за произвољан простор Y, пресликавање $f : X \to Y$ и хомотопију $H : A \times I \to Y$ таква да је $f(i(a)) = H(a, 0)$ за свако $a \in A$, постоји хомотопија $\widetilde{H} : X \times I \to Y$ таква да је $\widetilde{H}(i(a), t) = H(a, t)$ за свако $(a, t) \in A \times I$ и $\widetilde{H}(x, 0) = f(x)$, за свако $x \in X$.

Став 1.7 *Свака кофибрација је утапање.*

Став 1.8 *Утапање $i : A \to X$ је кофибрација ако и само ако $(X, i(A))$ има својство проширења хомотопије.*

Напомена 1.9 *Нека је $A \subset X$. Пар (X, A) има својство проширења хомотопије, по дефиницији, ако за произвољан тополошки простор Y, пресликавање $f : X \to Y$ и хомотопију $H : A \times I \to Y$ такве да је $H(a, 0) = f(a)$, за све $a \in A$, постоји $\widetilde{H} : X \times I \to Y$ такво да је $\widetilde{H}|_{A \times I} = H$ и $\widetilde{H}(x, 0) = f(x)$, за свако $x \in X$.*

Ако (X, A) има својство проширење хомотопије, онда је $X \times \{0\} \cup A \times I$ ретракт од $X \times I$. Обрнуто важи уз претпоставку да је A затворен у X.

Ако (X, A) има својство проширења хомотопије и A је контрактибилан, онда је природна пројекција $q : X \to X/A$ хомотопска еквиваленција.

Дефиниција 1.10 Ако (X, A) има својство проширења хомотопије, онда је X/A *кофибра кофибрације* $i : A \hookrightarrow X$.

Теорема 1.11 *Нека је $A \subseteq X$, $i : A \hookrightarrow X$ кофибрација и $q : X \to X/A$ природна пројекција. Тада је за произвољан путно повезан простор Y низ*

$$[X/A, Y] \xrightarrow{q^*} [X, Y] \xrightarrow{i^*} [A, Y]$$

тачан.

Доказ: Потребно је показати да је $\operatorname{im} q^* = (i^*)^{-1}(const)$.
$\subseteq$: Нека је $g : X/A \to Y$. Како је

$$i^*(q^*([g])) = [g \circ q \circ i] = [const],$$

то је $\operatorname{im} q^* \subseteq (i^*)^{-1}(const)$.
$\supseteq$: Нека је $f : X \to Y$ такво да је $[f] \in (i^*)^{-1}(const)$ тј. $i^*([f]) = [f \circ i] = [const]$. Тада имамо хомотопију

$$H : f \circ i \simeq const, \quad H : A \times I \to Y,$$

па како је i кофибрација, то постоји $\widetilde{H} : X \times I \to Y$ такво да важи $\widetilde{H}|_{A\times I} = H$ и $\widetilde{H}(x, 0) = f(x)$ за све $x \in X$. Дефинишимо $\widetilde{f} : X \to Y$ са $\widetilde{f}(x) = \widetilde{H}(x, 1)$. Тада је $\widetilde{f}|_A$ константна, па постоји $g : X/A \to Y$ таква да је $\widetilde{f} = g \circ q$, одакле је

$$q^*([g]) = [g \circ q] = [\widetilde{f}] = [f]. \ \square$$

Нека су (X, x_0) и (Y, y_0) тополошки простори са базном тачком. Дефинишимо

$$[X, Y]_0 = [X, x_0; Y, y_0] \stackrel{def}{=} \{f : (X, x_0) \to (Y, y_0)\}/_{\simeq\ (rel\ x_0)}.$$

Нека је $g : (Y, y_0) \to (Z, z_0)$ непрекидно пресликавање. Тада можемо дефинисати пресликавање $g_* : [X, Y]_0 \to [X, Z]_0$ дато са

$$g_*([f]_0) = [g \circ f]_0$$

и $g^* : [Z, X]_0 \to [Y, X]_0$ дато са

$$g^*([f]_0) = [f \circ g]_0.$$

На овај начин добијамо коваријантан функтор

$$[X, \cdot]_0 : Top_0 \to Set_0,$$

као и контраваријантан функтор

$$[\cdot, X]_0 : Top_0 \to Set_0.$$

Теорема 1.12 *Нека је $a_0 \in A \subseteq X$, $j : A \hookrightarrow X$ кофибрација, (Y, y_0) тополошки простор са базном тачком и $q : X \to X/A$ природна пројекција. Тада је низ*

$$[X/A, Y]_0 \xrightarrow{q^*} [X, Y]_0 \xrightarrow{j^*} [A, Y]_0$$

тачан.

Доказ: Слично као доказ теореме 1.11. □

Нека су (X, A) и (Y, B) тополошки парови. Дефинишимо

$$[X, A; Y, B] \stackrel{def}{=} \{f : (X, A) \to (Y, B)\}/_{\simeq \text{ (кроз пресликавања парова)}}$$

Пресликавања $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ су хомотопна кроз пресликавања парова ако постоји непрекидно пресликавање $H : X \times I \to Y$ такво да је

$$H(x, 0) = f(x), \ x \in X,$$

$$H(x, 1) = g(x), \ x \in X,$$

$$H(A \times I) \subseteq B.$$

Напомена 1.13 *Хомотопија кроз пресликавања парова није релативна хомотопија јер слике тачака из* A *не морају бити фиксиране за свако* $t \in I$ *већ је довољно да буду унутар* B.

Напомена 1.14 $\pi_1(X, x_0) = [I, \partial I; X, x_0]$ *као скуп.*

Слично као и до сада, уколико фиксирамо (X, A) имамо коваријантан функтор

$$[X, A; \cdot, \cdot] : Top^2 \to Set,$$

односно ако фиксирамо (Y, B) имамо контраваријантан функтор

$$[\cdot, \cdot; Y, B] : Top^2 \to Set.$$

Понекад ће нам бити потребна и категорија Top^3 па дефинишемо

$$[X, A, B; Y, C, D] \stackrel{def}{=} \{f : (X, A, B) \to (Y, C, D)\}/_{\simeq \text{ (кроз пресликавања тројки)}}$$

Као и раније, можемо дефинисати одговарајући коваријантан односно контраваријантан функтор.

Можемо дефинисати и следеће пресликавање $\Phi : [X, Y]_0 \to [X, Y]$ које „заборавља базну тачку“ са

$$\Phi([f]_0) \stackrel{def}{=} [f].$$

Пресликавање Φ је добро дефинисано. Занимаће нас када је Φ бијекција. Најпре ћемо видети када ће Φ бити „на“, а касније ћемо доказати и у ком случају је Φ бијекција.

Дефиниција 1.15 Тачка $x_0 \in X$ је *недегенерисана тачка простора* X ако пар (X, x_0) има својство проширења хомотопије (тј. ако је $\{x_0\} \hookrightarrow X$ кофибрација).

Углавном ћемо се сретати са просторима којима су све тачке недегенерисане (нпр. то важи за сваки CW-комплекс).

Став 1.16 *Ако су* (X, x_0) *и* (Y, y_0) *тополошки простори са базном тачком,* x_0 *недегенерисана и* Y *путно повезан, онда је* Φ *„на“.*

Доказ: Нека је $[f] \in [X, Y]$. Треба да покажемо да постоји $g : X \to Y$ такво да је $g(x_0) = y_0$ и $\Phi([g]_0) = [f]$, тј. да је $f \simeq g$.

Нека је $u : I \to Y$ пут од $f(x_0)$ до y_0 у Y. Како (X, x_0) има својство проширења хомотопије, то постоји хомотопија $H : X \times I \to Y$ таква да је

$$H(x, 0) = f(x) \text{ и } H(x_0, t) = u(t).$$

Одаберимо $g = H(\cdot, 1)$. Тада је $\Phi([g]_0) = [f]$, па је Φ „на“. $\square$

1.2 Хомотопија дуж пута

Дефиниција 1.17 Нека су X и Y тополошки простори, $x_0 \in X$ базна тачка, $f, g : X \to Y$ непрекидна пресликавања и $u : I \to Y$ пут. Кажемо да је f *(слободно) хомотопно са* g *дуж пута* u ако постоји хомотопија $H : X \times I \to Y$ таква да

$$H(x, 0) = f(x),\ x \in X,$$

$$H(x, 1) = g(x),\ x \in X,$$

$$H(x_0, t) = u(t),\ t \in I.$$

Тада пишемо $f \underset{u}{\simeq} g$ или $H : f \underset{u}{\simeq} g$.

Специјално, приметимо да мора да важи $u(0) = f(x_0)$ и $u(1) = g(x_0)$.

Особине:

1) $f \simeq g$ ако и само ако постоји пут $u : I \to Y$ такав да је $f \underset{u}{\simeq} g$;
2) $f \simeq g$ $(rel\ x_0)$ ако и само ако $f \underset{c_{f(x_0)}}{\simeq} g$, где је $c_{f(x_0)} : I \to Y$ константан пут у $f(x_0) = g(x_0)$;
3) $f \underset{u}{\simeq} g$ ако и само ако је $g \underset{u^{-1}}{\simeq} f$;
4) Ако је $f \underset{u}{\simeq} g$ и $g \underset{v}{\simeq} h$, онда $f \underset{u \cdot v}{\simeq} h$;

5) Нека је $W \xrightarrow{\psi} X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{\varphi} Z$, $u : I \to Y$ пут и нека су $w_0 \in W$ и $x_0 = \psi(w_0) \in X$ базне тачке. Тада важе следеће импликације.

$$f \underset{u}{\simeq} g \implies \varphi \circ f \underset{\varphi \circ u}{\simeq} \varphi \circ g,$$

$$f \underset{u}{\simeq} g \implies f \circ \psi \underset{u}{\simeq} g \circ \psi;$$

6) Ако је x_0 недегенерисана тачка простора X, $f : X \to Y$ непрекидно и $u : I \to Y$ било који пут такав да је $u(0) = f(x_0)$, онда постоји $g : X \to Y$ такво да је $f \underset{u}{\simeq} g$.

Лема 1.18 [2] *Нека пар (X, A) има својство проширења хомотопије. Тада*

а) $(X \times I, A \times I)$ има својство проширења хомотопије;

б) $(X \times I, X \times \partial I \cup A \times I)$ има својство проширења хомотопије.

Став 1.19 *Нека је x_0 недегенерисана базна тачка простора X, $f, g : X \to Y$ непрекидна и $u, v : I \to Y$ путеви. Ако је $f \underset{u}{\simeq} g$ и $u \simeq v$ (rel $\{0,1\}$), онда је $f \underset{v}{\simeq} g$.*

Доказ: На основу леме 1.18 под *б)*, пар $(X \times I, X \times \{0,1\} \cup \{x_0\} \times I)$ има својство проширења хомотопије. Из услова става имамо

$$H_0 : X \times I \to Y, \quad H_0 : f \underset{u}{\simeq} g,$$

$$G : I \times I \to Y, \quad G : u \simeq v \ (rel\ \{0,1\}).$$

Дефинишимо $F : (X \times \{0,1\} \cup \{x_0\} \times I) \times I \to Y$ са

$$F(x_0, s, t) \overset{def}{=} G(s,t),$$

$$F(x, 0, t) \overset{def}{=} f(x),$$

$$F(x, 1, t) \overset{def}{=} g(x).$$

Приметимо да смо F одабрали тако да важи

$$F(x_0, s, 0) = G(s, 0) = u(s) = H_0(x_0, s),$$

$$F(x, 0, 0) = H_0(x, 0) = f(x),$$

$$F(x, 1, 0) = H_0(x, 1) = g(x).$$

Такође, F је добро дефинисано.

Због својства проширења хомотопије постоји $H : (X \times I) \times I \to Y$ такво да је

$$H|_{(X \times \{0,1\} \cup \{x_0\} \times I) \times I} = F,$$

$$H(x,s,0)=H_0(x,s),\ x\in X,\ s\in I.$$

Тражена хомотопија је $H_1 : X\times I$ дефинисана са

$$H_1(x,s)\overset{def}{=}H(x,s,1).$$

Још остаје да проверимо да H_1 задовољава потребне услове.

$$H_1(x,0)=H(x,0,1)=F(x,0,1)=f(x),$$

$$H_1(x,1)=H(x,1,1)=F(x,1,1)=g(x),$$

$$H_1(x_0,s)=H(x_0,s,1)=F(x_0,s,1)=G(s,1)=v(s).$$

Дакле, $H_1 : f \underset{v}{\simeq} g$. $\square$

Нека је X тополошки простор и $x_0\in X$ недегенерисана базна тачка. Нека су још $y_0,y_1\in Y$ и $u : I\to Y$ пут од y_0 до y_1. Дефинишимо $\beta_u : [X,x_0;Y,y_0]\to[X,x_0;Y,y_1]$. Нека је $[f]_0\in[X,Y]_0=[X,x_0;Y,y_0]$. Тада је

$$\beta_u([f]_0)=[g]_1,$$

где је $g : X\to Y$ непрекидно пресликавање такво да је $f\underset{u}{\simeq} g$. Користили смо ознаку $[g]_1$ за класу из $[X,Y]_1\overset{def}{=}[X,x_0;Y,y_1]$.

Приметимо да је β_u добро дефинисано. Заиста, g постоји на основу особине 6) и додатно, ако је $[f]_0=[\widetilde{f}]_0$ и $f\underset{u}{\simeq} g$ и $\widetilde{f}\underset{u}{\simeq}\widetilde{g}$, онда имамо да је $f\simeq\widetilde{f}$ $(rel\ x_0)$, тј. $f\underset{c_{y_0}}{\simeq}\widetilde{f}$, па из

$$g\underset{u^{-1}}{\simeq} f\underset{c_{y_0}}{\simeq}\widetilde{f}\underset{u}{\simeq}\widetilde{g}$$

и из транзитивности имамо да је

$$g\underset{u^{-1}\cdot c_{y_0}\cdot u}{\overbrace{\simeq}}\widetilde{g}$$

Како је

$$u^{-1}\cdot c_{y_0}\cdot u\simeq u^{-1}\cdot u\simeq c_{y_1}\ (rel\ \{0,1\}),$$

на основу става 1.19 је $g\underset{c_{y_1}}{\simeq}\widetilde{g}$, па је $g\simeq\widetilde{g}$ $(rel\ x_0)$, односно $[g]_1=[\widetilde{g}]_1$.

Дакле, ако је $[f]_0=[\widetilde{f}]_0$, добијамо да је $[g]_1=[\widetilde{g}]_1$, тј. пресликавање β_u је добро дефинисано.

Особине:

1) $\beta_{c_{y_0}}=\mathbb{1}_{[X,Y]_0}$;

2) Ако су $u,v : I\to Y$ путеви који се могу надовезати, тј. важи $u(1)=v(0)$, онда је $\beta_v\circ\beta_u=\beta_{u\cdot v}$;

3) За сваки пут $u : I \to Y$ пресликавање β_u је бијекција. Његов инверз је $(\beta_u)^{-1} = \beta_{u^{-1}}$;

4) Ако су $u, v : I \to Y$ путеви такви да је $u \simeq v$ $(rel\ \{0,1\})$, онда је $\beta_u = \beta_v$;

5) Ако је $u : I \to Y$ пут од y_0 до y_1, онда следећи дијаграм комутира.

$$\begin{tikzcd}
{[X,Y]_0} \arrow[dd, tail, two heads, "\beta_u"'] \arrow[dr, "\Phi"] & \\
& {[X,Y]} \\
{[X,Y]_1} \arrow[ur, "\Phi"'] &
\end{tikzcd}$$

Пресликавање β_u ће дефинисати једно дејство. Подсетимо се шта су дејства.

Лево дејство групе G на скуп X је пресликавање $G \times X \dot{\to} X$ такво да важи

$$1 \cdot x = x, \quad x \in X,$$

$$g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 g_2) \cdot x, \quad g_1,\ g_2 \in G,\ x \in X.$$

Лево дејство је заправо хомоморфизам $G \xrightarrow{\varphi} \mathbb{S}_X$.

Десно дејство ће бити антихомоморфизам $G \xrightarrow{-1} G \xrightarrow{\varphi} \mathbb{S}_X$.

Уколико је X тополошки простор, онда дејство групе G на тополошки простор X добијамо кад уместо $\mathbb{S}_X$ узмемо $Homeo(X)$, а уколико је X група, онда дејство групе G на групу X добијамо кад уместо $\mathbb{S}_X$ узмемо $Aut(X)$.

Нека је x_0 недегенерисана базна тачка простора X и (Y, y_0) неки тополошки простор са базном тачком. Дефинишимо пресликавање

$$[X,Y]_0 \times \pi_1(Y, y_0) \dot{\to} [X,Y]_0$$

$$[f]_0 \cdot [u] \stackrel{def}{=} \beta_u([f]_0).$$

Ово пресликавање је добро дефинисано. Заиста, нека је $[u] = [v] \in \pi_1(Y, y_0)$, тј. $u \simeq v$ $(rel\ \{0,1\})$. Тада је $\beta_u = \beta_v$.

Став 1.20 *Пресликавање $\cdot$ је једно десно дејство групе $\pi_1(Y, y_0)$ на скуп $[X,Y]_0$.*

Доказ: Потребно је да докажемо два својства из дефиниције дејства.

$$[f]_0 \cdot [c_{y_0}] = \beta_{c_{y_0}}([f]_0) = \mathbb{1}([f]_0) = [f]_0,$$

$$([f]_0 \cdot [u]) \cdot [v] = \beta_v(\beta_u([f]_0)) = \beta_{u \cdot v}([f]_0) = [f]_0 \cdot [u \cdot v] = [f]_0 \cdot ([u] * [v]).$$

Дакле, $\cdot$ је заиста једно десно дејство. $\square$

Теорема 1.21 *Нека је x_0 недегенерисана базна тачка простора X, $y_0 \in Y$ и Y путно повезан. Тада постоји бијекција*

$$\Psi : [X, Y] \to [X, Y]_0 / \pi_1(Y, y_0)$$

таква да следећи дијаграм комутира.

$$\begin{tikzcd}
{[X,Y]_0} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, two heads, "\pi"'] & {[X,Y]} \arrow[dl, "\Psi"] \\
{[X,Y]_0/\pi_1(Y,y_0)} &
\end{tikzcd}$$

Доказ: Како је Y путно повезан и x_0 недегенерисана тачка, онда је на основу става 1.16 пресликавање Φ „на“.

Нека су $f, g : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ непрекидна пресликавања. Да бисмо показали да постоји бијекција Ψ, довољно је да покажемо да важи еквиваленција

$$\Phi([f]_0) = \Phi([g]_0) \Longleftrightarrow \pi([f]_0) = \pi([g]_0).$$

Уочимо низ еквиваленција.

$$\begin{aligned}
\Phi([f]_0) = \Phi([g]_0) &\Longleftrightarrow [f] = [g] \\
&\Longleftrightarrow f \simeq g \\
&\Longleftrightarrow f \underset{u}{\simeq} g \text{ за неку петљу } u \\
&\Longleftrightarrow \beta_u([f]_0) = [g]_0 \text{ за неку петљу } u \\
&\Longleftrightarrow [f]_0 \cdot [u] = [g]_0 \text{ за неку петљу } u \\
&\Longleftrightarrow \pi([f]_0) = \pi([g]_0).
\end{aligned}$$

Овај низ еквиваленција нам даје да постоји тражена бијекција. □

Последица 1.22 *Уз исте претпоставке из претходне теореме, Φ је бијекција ако и само ако је дејство групе $\pi_1(Y, y_0)$ на $[X, Y]_0$ тривијално.*

Последица 1.23 *Ако је Y просто повезан, онда је Φ бијекција.*

Дефиниција 1.24 Нека је Y тополошки простор, $e \in Y$ и $\mu : Y \times Y \to Y$ непрекидно пресликавање. Означимо

$$\varphi := \mu(e, \cdot) : Y \to Y, \quad \psi := \mu(\cdot, e) : Y \to Y.$$

1) Ако је $\varphi = \mathbb{1}_Y$ и $\psi = \mathbb{1}_Y$, онда (Y, μ, e) називамо *јаки H-простор*.

2) Ако је $\varphi \simeq \mathbb{1}_Y$ $(rel\ e)$ и $\psi \simeq \mathbb{1}_Y$ $(rel\ e)$, онда (Y, μ, e) називамо *H-простор.*

3) Ако је $\varphi \simeq \mathbb{1}_Y$ и $\psi \simeq \mathbb{1}_Y$, онда (Y, μ, e) називамо *слаби H-простор.*

Теорема 1.25 *Нека је x_0 недегенерисана базна тачка простора X, Y путно повезан H-простор и $y_0 \in Y$ произвољна тачка. Тада је дејство групе $\pi_1(Y, y_0)$ на $[X, Y]_0$ тривијално (тј. Φ је бијекција).*

Доказ: 1^o $y_0 = e$: Нека је $f : (X, x_0) \to (Y, e)$ и $[u] \in \pi_1(Y, e)$. Треба показати да је $\beta_u([f]_0) = [f]_0 \cdot [u] = [f]_0$, тј. да је $f \underset{u}{\simeq} f$.

Потребно је да нађемо хомотопију $f \underset{u}{\simeq} f$. Дефинисаћемо најпре H, па ћемо га по потреби модификовати. Узмимо

$$H(x, t) := \mu(f(x), u(t)).$$

Погледајмо између чега је ово хомотопија и дуж ког пута.

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= \mu(f(x), u(0)) = \mu(f(x), e) = \psi(f(x)), \\ H(x, 1) &= \mu(f(x), u(1)) = \mu(f(x), e) = \psi(f(x)), \\ H(x_0, t) &= \mu(f(x_0), u(t)) = \mu(e, u(t)) = \varphi(u(t)), \end{aligned}$$

па је

$$H : \psi \circ f \underset{\varphi \circ u}{\simeq} \psi \circ f.$$

Из $\mathbb{1}_Y \underset{c_e}{\simeq} \psi$ добијамо

$$f \underset{c_e}{\simeq} \psi \circ f \underset{\varphi \circ u}{\simeq} \psi \circ f \underset{c_e}{\simeq} f,$$

па је

$$f \underset{c_e \cdot (\varphi \circ u) \cdot c_e}{\simeq} f.$$

Како је још

$$c_e \cdot (\varphi \circ u) \cdot c_e \simeq \varphi \circ u \simeq u \ (rel\ \{0, 1\}),$$

јер је $\varphi \simeq \mathbb{1}_Y$ $(rel\ e)$, а $u(\{0, 1\}) = \{e\}$, коначно добијамо да је

$$f \underset{u}{\simeq} f.$$

2^o $y_0 \neq e$: Нека је $v : I \to Y$ пут од y_0 до e. Из комутативног дијаграма

$$\begin{tikzcd}
{[X,Y]_0} \arrow[dd, tail, two heads, "\beta_v"'] \arrow[dr, "\Phi"] & \\
& {[X,Y]} \\
{[X,Y]_1} \arrow[ur, tail, two heads, "\Phi"'] &
\end{tikzcd}$$

закључујемо да је $\Phi : [X, Y]_0 \to [X, Y]$ бијекција, тј. дејство је тривијално. $\square$

1.3 Задаци

1. Нека је $p : E \to B$ фибрација и $f : X \to B$ (непрекидно) пресликавање.

   (а) Ако је $\widehat{f} : X \to E$ подизање пресликавања f до на хомотопију ($p \circ \widehat{f} \simeq f$), доказати да постоји право подизање $\widetilde{f} : X \to E$ пресликавања f ($p \circ \widetilde{f} = f$) такво да је $\widetilde{f} \simeq \widehat{f}$.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, "\widehat{f}"] \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd} \qquad p \circ \widehat{f} \simeq f \qquad \begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, dashed, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd} \qquad p \circ \widetilde{f} = f$$

   (б) Ако је $g : X \to B$ и $g \simeq f$, доказати да се g подиже до E ако и само ако се f подиже до E.

2. Нека је $i : A \hookrightarrow X$ кофибрација и $f : A \to Y$ (непрекидно) пресликавање.

   (а) Ако је $\widehat{f} : X \to Y$ проширење пресликавања f до на хомотопију ($\widehat{f} \circ i \simeq f$), доказати да постоји право проширење $\overline{f} : X \to Y$ пресликавања f ($\overline{f} \circ i = f$) такво да је $\overline{f} \simeq \widehat{f}$.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\widehat{f}"'] \\ Y & A \arrow[l, "f"] \arrow[u, hook, "i"'] \end{tikzcd} \qquad \widehat{f} \circ i \simeq f \qquad \begin{tikzcd} & X \arrow[dl, dashed, "\overline{f}"'] \\ Y & A \arrow[l, "f"] \arrow[u, hook, "i"'] \end{tikzcd} \qquad \overline{f} \circ i = f$$

   (б) Ако је $g : A \to Y$ и $g \simeq f$, доказати да се gпроширује на X ако и само ако се f проширује на X.

3. Нека је A затворен потпростор од X такав да пар (X, A) има својство проширења хомотопије (инклузија $j : A \hookrightarrow X$ јесте кофибрација).

   (а) Ако је $j_1 : X \hookrightarrow C_j = X \cup CA$ инклузија (природно утапање) простора X у конус пресликавања j, доказати да је и j_1 кофибрација.

   (б) Доказати да је и инклузија $CA \hookrightarrow X \cup CA$ такође кофибрација.

   (в) Нека је $C_{j_1} = (X \cup CA) \cup CX$ конус пресликавања j_1, $h_2 : (X \cup CA) \cup CX \to SA$ пресликавање из овог конуса у суспензију од A добијено скупљањем конуса CX у тачку и $q_2 : (X \cup CA) \cup CX \to SX$ пресликавање које се добија скупљањем потпростора $X \cup CA$ у тачку. Доказати да је $Sj \circ r \circ h_2 \simeq q_2$, где је $Sj : SA \hookrightarrow SX$ суспензија инклузије j ($Sj[a, t] = [j(a), t] = [a, t]$), а $r : SA \to SA$ рефлексија ($r[a, t] = [a, 1 - t]$).

(г) Ако је Y путно повезан простор, доказати да постоји (*Пупеов*) тачан низ:

$$[SX, Y] \xrightarrow{(Sj)^*} [SA, Y] \longrightarrow [X/A, Y] \xrightarrow{q^*} [X, Y] \xrightarrow{j^*} [A, Y],$$

где је $q : X \to X/A$ природна сурјекција.

(д) Формулисати и доказати својство природности Пупеовог тачног низа.

4. Нека је $f : X \to Y$ непрекидно пресликавање. Означимо са $j : X \hookrightarrow M_f$ природно утапање простора X у цилиндар пресликавања f, $M_f := (X \times I \sqcup Y)/_{(x,0)\sim f(x)}$, $j(x) := [(x, 1)]$, $x \in X$. Нека је $i_Y : Y \hookrightarrow M_f$, $i_Y(y) := [y]$, $y \in Y$, природно утапање простора Y у M_f, а $h_f : M_f \to Y$ њему инверзна хомотопска еквиваленција, $h_f[(x, t)] := f(x)$ за $(x, t) \in X \times I$, $h_f[y] := y$ за $y \in Y$. Означимо још са $i : Y \hookrightarrow C_f$ природно утапање простора Y у конус пресликавања f, $C_f := (X\times I\sqcup Y)/_{\substack{(x,0)\sim f(x)\\ (x_1,1)\sim(x_2,1)}}$, $i(y) := [y]$, $y \in Y$. Као што је и уобичајено, надаље слику датог простора при утапању не разликујемо од самог простора, па је, у том смислу, $X = j(X) \subset M_f$, $Y = i_Y(Y) \subset M_f$ и $Y = i(Y) \subset C_f$. Уочимо природне сурјекције настале скупљањем у тачку одговарајућих потпростора: $q : M_f \to C_f = M_f/X$, $q_Y : C_f \to SX = C_f/Y$, $\pi : C_j = M_f \cup CX \to C_f = (M_f \cup CX)/CX$ и $p : C_j = M_f \cup CX \to SX = (M_f \cup CX)/M_f$.

(а) Доказати да прва два од наредна три дијаграма комутирају, а да трећи комутира до на хомотопију ($q_Y \circ \pi \simeq p$).

$$\begin{tikzcd} & M_f \arrow[d, "h_f"] \\ X \arrow[ur, hook, "j"] \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M_f \arrow[dr, "q"] & \\ Y \arrow[u, hook, "i_Y"] \arrow[r, hook, "i"] & C_f \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M_f \cup CX \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "p"'] & & C_f \arrow[dl, "q_Y"] \\ & SX & \end{tikzcd}$$

(б) Ако је Z путно повезан простор, доказати да је следећи низ тачан.

$$[SY, Z] \xrightarrow{(Sf)^*} [SX, Z] \xrightarrow{q_Y^*} [C_f, Z] \xrightarrow{i^*} [Y, Z] \xrightarrow{f^*} [X, Z],$$

(Овај низ се назива *Пупеовим тачним низом придруженим пресликавању f и простору Z.*)

(в) Формулисати и доказати својство природности овог Пупеовог тачног низа.

5. Ако је $f : X \to Y$ непрекидно, доказати да је $j : X \hookrightarrow M_f$ кофибрација (M_f је ознака за цилиндар пресликавања f).

6. Ако је X слаби H-простор са неутралом $e \in X$, $x_0 \in X$ недегенерисана тачка и $u : I \to X$ пут од x_0 до e, доказати да постоји структура слабог H-простора на X таква да је x_0 неутрал од X, тј. да постоји непрекидно пресликавање $\nu : X \times X \to X$ такво да је (X, ν, x_0) слаби H-простор.

7. Ако је X слаби H-простор и $X \simeq Y$, доказати да је и Y слаби H-простор.

8. Ако је X H-простор с неутралом e и $(X, e) \simeq (Y, y_0)$, доказати да је Y H-простор с неутралом y_0.

9. Нека је (X, μ, e) слаби H-простор и нека су $i_1 : X \hookrightarrow X \times X$ и $i_2 : X \hookrightarrow X \times X$ инклузије дате са $i_1(x) = (x, e)$ и $i_2(x) = (e, x)$.

   (а) Ако су $u, v : I \to X$ путеви такви да је $\mu \circ i_2 \underset{u}{\simeq} \mathbb{1}_X$ и $\mu \circ i_1 \underset{v}{\simeq} \mathbb{1}_X$, доказати да постоји хомотопија $H : I \times I \to X$ таква да је

$$H(s, 0) = (u \cdot v^{-1})(s), \; s \in I,$$

$$H(0, t) = H(1, t) = u(t), \; t \in I.$$

   (б) Ако је $\alpha : I \to X$ петља у e дефинисана са $\alpha(s) = H(s, 1)$, доказати да је $u \cdot v^{-1} \simeq \mu \circ i_2 \circ \alpha$ $(rel\ \{0, 1\})$.

   (в) Доказати да постоји пут $w : I \to X$ такав да је $\mu \circ i_2 \underset{w}{\simeq} \mathbb{1}_X$ и $u \simeq w$ $(rel\ \{0, 1\})$.

   (г) Ако је e недегенерисана тачка таква да је$\{e\}$ затворен скуп у X, доказати да је тада X јаки H-простор при чему се одговарајућа операција $\nu : X \times X \to X$ може одабрати тако да је $\mu \simeq \nu$ и да је e неутрал за ν.

2 Хомотопске групе

2.1 Дефиниција и основне особине

Нека је (X, x_0) тополошки простор са базном тачком и нека је $n \in \mathbb{N}_0$. Уведимо ознаку

$$\pi_n(X, x_0) \stackrel{def}{=} [I^n, \partial(I^n); X, x_0] = \{f : (I^n, \partial(I^n)) \to (X, x_0)\}/_{\simeq\ (rel\ \partial(I^n))}.$$

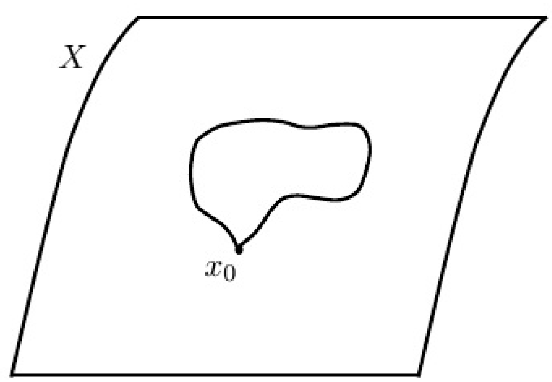
Погледајмо како изгледају елементи овог скупа за првих неколико $n \in \mathbb{N}_0$.

Ако је $n = 0$ имамо да је $I^0 = *$, тј. то је само једна тачка па је $\partial(I^0) = \varnothing$, одакле добијамо да је

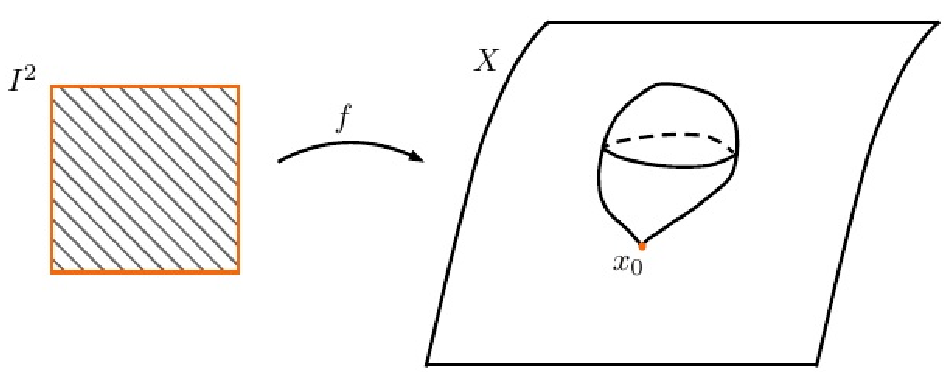
$$\pi_0(X, x_0) = [*, \varnothing; X, x_0] = [*; X] = \{P_x \mid x \in X\},$$

тј. $\pi_0(X, x_0)$ је скуп компоненти путне повезаности. За разлику од случаја $n \geqslant 1$, на овом скупу се не дефинише операција већ је то само скуп са истакнутим елементом $[P_{x_0}]$.

Ако је $n = 1$ имамо $\pi_1(X, x_0) = [I, \partial I; X, x_0]$ скуп класа петљи у x_0 хомотопних релативно $\partial I = \{0, 1\}$.



Ако је $n = 2$ имамо $\pi_2(X, x_0) = [I^2, \partial(I^2); X, x_0]$



Пример 2.1 *Ако је* $X = \{x_0\}$*, онда за свако* $n \in \mathbb{N}_0$ *скуп* $\pi_n(X, x_0)$ *има само један елемент. Ово краће записујемо* $\pi_n(*) = 0$.

За $n \geqslant 1$ дефинишемо операцију $+$ на $\pi_n(X, x_0)$ на следећи начин.

Нека су $f, g : (I^n, \partial(I^n)) \to (X, x_0)$. Тада дефинишемо $f + g : (I^n, \partial(I^n)) \to (X, x_0)$ са

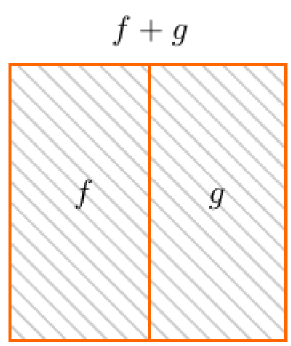
$$(f+g)(t_1, t_2, \dots, t_n) \stackrel{def}{=} \begin{cases} f(2t_1, t_2, \dots, t_n), & 0 \leqslant t_1 \leqslant \frac{1}{2} \\ g(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n), & \frac{1}{2} \leqslant t_1 \leqslant 1 \end{cases}$$

Може се показати да ако је $f \simeq \widetilde{f}$ $(rel\ \partial(I^n))$ и $g \simeq \widetilde{g}$ $(rel\ \partial(I^n))$, онда је $f + g \simeq \widetilde{f} + \widetilde{g}$ $(rel\ \partial(I^n))$ што нам даје да је са

$$[f] + [g] \stackrel{def}{=} [f + g]$$

добро дефинисана операција на $\pi_n(X, x_0)$.

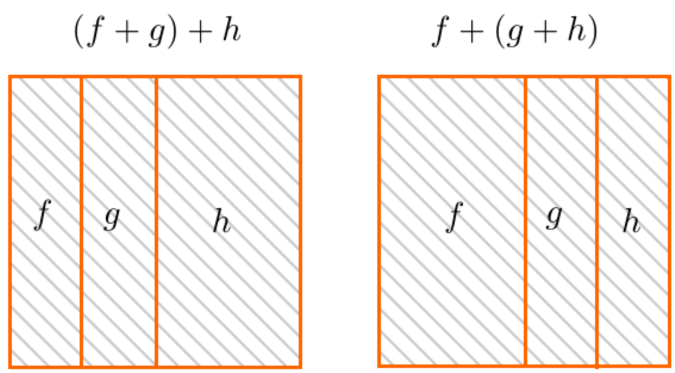
У случају $n = 2$ ову операцију можемо сликовито представити на следећи начин.



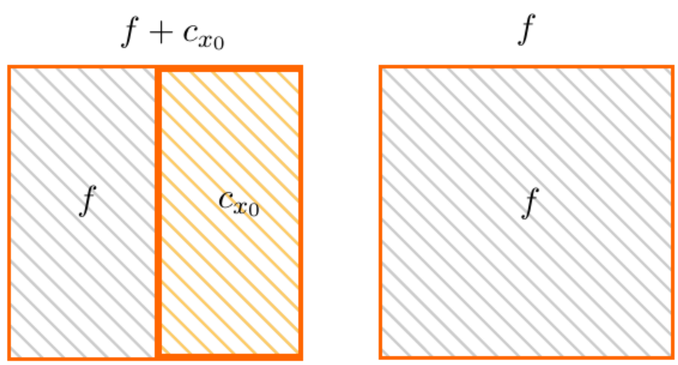
Ова слика представља краћи запис тога да леву половину квадрата I^2 сликамо пресликавањем f, десну пресликавањем g и притом границе оба ова правоугаоника (обојене наранџастом бојом) сликамо у базну тачку x_0 простора X.

Слично као и код фундаменталне групе, показује се да је $+$ асоцијативна, да је $[c_{x_0}]$ неутрал као и да сваки елемент има инверз. Овде то нећемо доказивати али видећемо графички приказ ових особина.

1) Асоцијативност: Са слике се види како правимо хомотопију $(f+g)+h \simeq f+(g+h)$ $(rel\ \partial(I^n))$. Довољно је да само, како t иде од 0 ка 1, непрекидно трансформишемо леву слику до десне.



2) Неутрал: Хомотопију $f + c_{x_0} \simeq f \ (rel\ \partial(I^n))$ остварујемо тако што током времена $t \in [0,1]$ све више сужавамо правоугаоник који се слика у x_0, а а повећавамо правоугаоник који се слика са f све док не добијемо да се цео правоугаоник слика са f.



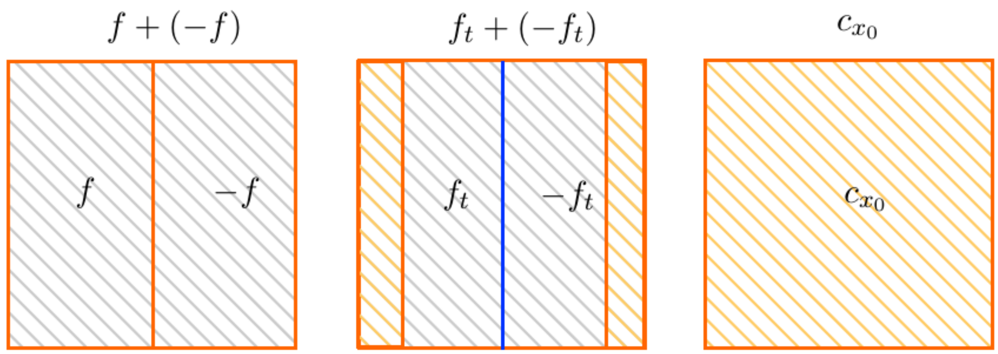
3) Инверз: Инверз елемента $[f]$ биће $[-f]$, где је $-f : I^n \to X$ дефинисано са

$$(-f)(t_1, t_2, \ldots, t_n) \stackrel{def}{=} f(1 - t_1, t_2, \ldots, t_n).$$

Хомотопију $f + (-f) \simeq c_{x_0} \ (rel\ \partial(I^n))$ остварујемо тако што у сваком тренутку $t \in I$ уместо f имамо пресликавање f_t дефинисано са

$$f_t(t_1, t_2, \ldots, t_n) = f((1-t)t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

што можемо представити наредном сликом.

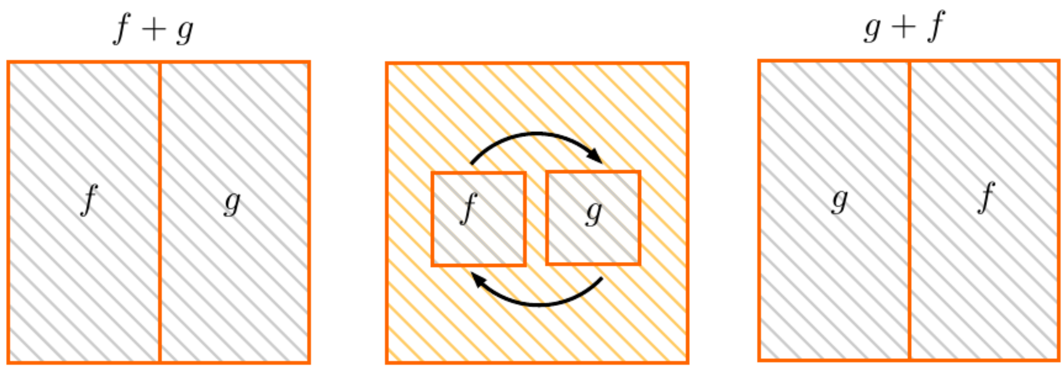


Сви претходни закључци дају нам следећу теорему.

Теорема 2.2 *За $n \geqslant 1$, $\pi_n(X, x_0)$ је група у односу на операцију $+$. За $n \geqslant 2$, $\pi_n(X, x_0)$ је додатно и Абелова.*

Дефиниција 2.3 Групу $\pi_n(X, x_0)$ за $n \in \mathbb{N}$ из претходне теореме зовемо *n-та хомотопска група простора X са базном тачком x_0.*

На наредној слици је приказана хомотопија $f + g \simeq g + f$ $(rel\ \partial(I^n))$, за $n \geqslant 2$.



Уколико је $n = 1$, група $\pi_1(X, x_0)$ не мора бити комутативна и пример за то је $\pi_1(S^1 \vee S^1) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

Нека је $\varphi : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ непрекидно пресликавање и $n \in \mathbb{N}_0$. Можемо дефинисати $\varphi_* : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_0)$ са

$$\varphi_*([f]) \stackrel{def}{=} [\varphi \circ f].$$

Лако се види да је φ_* хомоморфизам. Наиме, имамо

$$\begin{aligned}
\varphi_*([f] + [g]) &= \varphi_*([f + g]) \\
&= [\varphi \circ (f + g)] \\
&= [\varphi \circ f + \varphi \circ g] \\
&= [\varphi \circ f] + [\varphi \circ g] \\
&= \varphi_*([f]) + \varphi_*([g]),
\end{aligned}$$

где смо користили да је $\varphi\circ(f+g) = \varphi\circ f+\varphi\circ g$ што се лако докаже користећи дефиницију операције $+$.

На овај начин заправо добијамо коваријантне функторе

$$\pi_n : Top_0 \to Set_0, \quad n \geqslant 0$$

$$\pi_n : Top_0 \to Gr, \quad n \geqslant 1$$

$$\pi_n : Top_0 \to Ab, \quad n \geqslant 2$$

Ако је $\varphi \simeq \psi\ (rel\ x_0)$, онда је $\varphi_* = \psi_*$.

Ако је φ хомотопска еквиваленција у Top_0, онда је $\varphi_* : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_0)$ изоморфизам, за свако $n \in \mathbb{N}_0$, што се лако покаже користећи функторијалност.

Ако је $\varphi = c_{y_0}$, онда је $\varphi_* = 0$.

Сада ћемо навести други начин како можемо видети хомотопске групе. Посматрајмо наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd}
I^n \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads] \arrow[ddr, bend right, "p"'] & & X \\
& I^n/\partial(I^n) \arrow[ur, dashed] \arrow[d, "\approx"] & \\
& S^n \arrow[uur, dashed, bend right, "\widetilde{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Хомеоморфизам $I^n/\partial(I^n) \xrightarrow{\approx} S^n$ се може дефинисати произвољно али ми га бирамо тако да је $e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in S^n$ базна тачка, тј. тако да је $p(\partial(I^n)) = \{e_1\}$.

На основу дијаграма можемо закључити да сваком пресликавању $f : (I^n, \partial(I^n)) \to (X, x_0)$ можемо придружити пресликавање $\widetilde{f} : (S^n, e_1) \to (X, x_0)$ и обрнуто. При том, хомотопији $H : I^n \times I \to X$ релативно $\partial(I^n)$ одговара хомотопија $\widetilde{H} : S^n \times I \to X$ релативно $\{e_1\}$. Дакле, добијамо следећу бијекцију.

$$\pi_n(X, x_0) = [I^n, \partial(I^n); X, x_0] \longleftrightarrow [S^n, e_1; X, x_0] = [S^n, e_1]_0$$

Дакле,

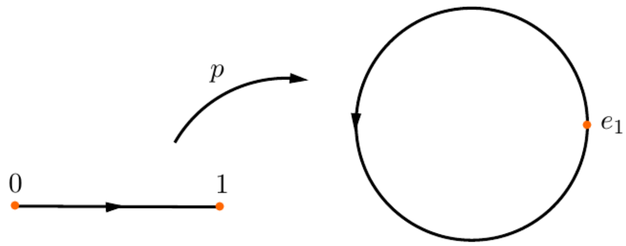
$$\pi_n(X, x_0) = [S^n, e_1]_0$$

јесте алтернативна дефиниција хомотопске групе.

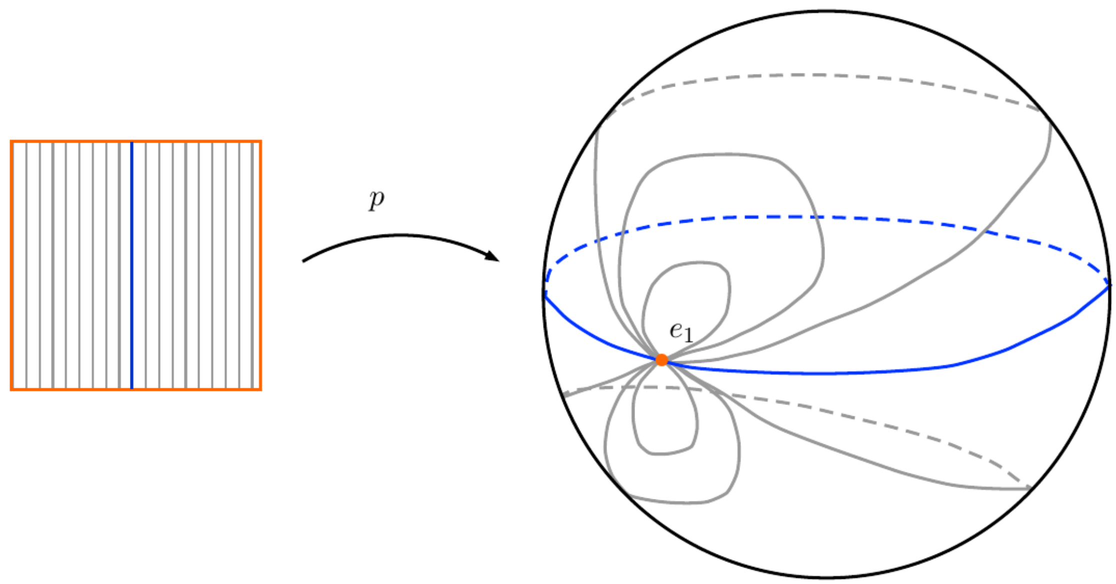
Сада ћемо мало приближније описати пресликавања из претходног дијаграма.

Најпре погледајмо како изгледа пресликавање $p : I^n \to S^n$.

За $n = 1$ имамо да је $p : I \to S^1$ дато са $p(t) = e^{i2\pi t}$, тј. то је намотавање на круг.

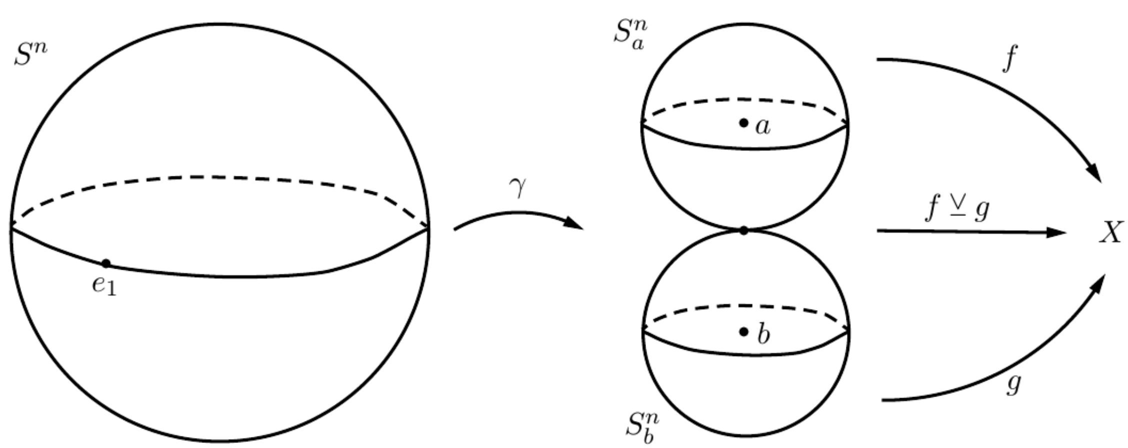


За $n = 2$ се вертикалне дужи квадрата I^2 сликају у кругове на сфери кроз e_1.



Погледајмо сада како изгледа операција +. Ако су $f, g : (S^n, e_1) \to (X, x_0)$, онда дефинишемо операцију са

$$[f]_0 + [g]_0 \overset{def}{=} [(f \veebar g) \circ \gamma]. \tag{1}$$



Сфере S_a^n и S_b^n са слике су дате са

$$S_a^n \overset{def}{=} \left\{ s \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \|s-a\| = \frac{1}{2} \right\},$$

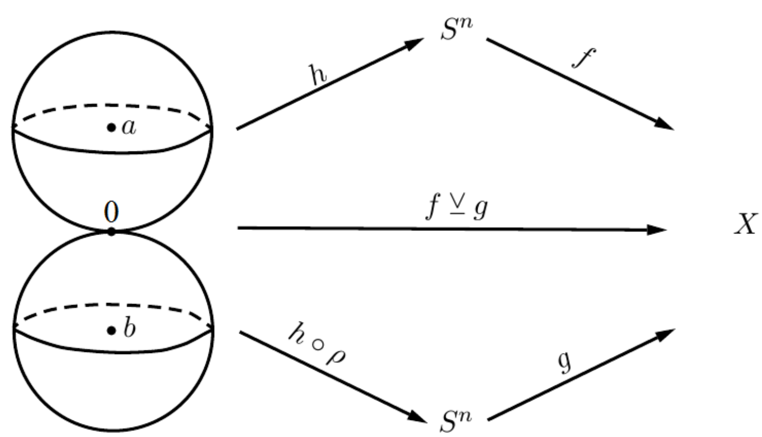
$$S_b^n \overset{def}{=} \left\{ s \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \|s-b\| = \frac{1}{2} \right\},$$

где је $a = \big(0, \ldots, 0, \frac{1}{2}\big)$ и $b = \big(0, \ldots, 0, -\frac{1}{2}\big)$.

Пресликавање γ слика сферу S^n у букет $S_a^n \vee S_b^n$ тако што скупи екватор полазне сфере и притом „чува висину" тј. за сваку тачку $(s_1, s_2, \ldots, s_{n+1}) \in S^n$ важи

$$\gamma(s_1, s_2, \ldots, s_{n+1}) = (\ldots, s_{n+1}).$$

Пресликавање $f \veebar g$ слика букет две сфере тако што слика горњу пресликавањем f, а доњу пресликавањем g. Прецизније, потребно је прво да се обе сфере ротирају и повећају до јединичне сфере S^n.



Пресликавање h је ротација и повећање сфере S_a^n до сфере S^nтакво да је $h(0) = e_1$, док је пресликавање ρ дато са

$$\rho(s_1, s_2, \ldots, s_{n+1}) \overset{def}{=} (-s_1, s_2, \ldots, s_n, -s_{n+1}),$$

тј. то је управо рефлексија у односу на $(n-1)$-димензиону раван одређену једначинама $s_1 = s_{n+1} = 0$.

Коначно, пресликавање $f \veebar g$ можемо записати као

$$(f \veebar g)(s) = \begin{cases} f(h(s)), & s \in S_a^n, \text{ тј. } s_{n+1} \geqslant 0 \\ g(h(\rho(s))), & s \in S_b^n, \text{ тј. } s_{n+1} \leqslant 0 \end{cases}$$

што је лепо дефинисано и на пресеку јер је $S^n_a \cap S^n_b = \{0\}$, а

$$f(h(0)) = g(h(\rho(0))) = x_0.$$

Када $\pi_n(X, x_0)$ посматрамо као $[S^n, e_1]_0$, неутрал је $[c_{x_0}]_0$. За дато $[f]_0 \in [S^n, e_1]_0$, инверз ће бити

$$-[f]_0 = [f \circ r_{n+1}]_0,$$

где је $r_{n+1} : S^n \to S^n$ рефлексија дата са

$$r_{n+1}(s_1, \dots, s_n, s_{n+1}) = (s_1, \dots, s_n, -s_{n+1}).$$

Ако је $\varphi : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ непрекидно пресликавање, лако се види да ако посматрамо $\pi_n(X, x_0)$ као $[S^n, X]_0$, имамо да за $f : (S^n, e_1) \to (X, x_0)$ важи

$$\varphi_*([f]_0) = [\varphi \circ f]_0.$$

У уводном делу смо видели да имамо десно дејство фундаменталне групе $\pi_1(Y, y_0)$ на $[X, Y]_0$, када је $x_0 \in X$ недегенерисана базна тачка. Како је $e_1 \in S^n$ недегенерисана, имамо дејство

$$[S^n, X]_0 \times \pi_1(X, x_0) \to [S^n, X]_0,$$

дато са

$$[f]_0 \cdot [u] = \beta_u([f]_0) = [g]_0,$$

где је $g : S^n \to X$такво да је $f \underset{u}{\simeq} g$.

Пресликавање β_u смо општије дефинисали. Ако је $u : I \to X$ пут у X од x_0 до x_1, онда је

$$\beta_u : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(X, x_1)$$

дато са

$$\beta_u([f]_0) = [g]_1,$$

где је $f : (S^n, e_1) \to (X, x_0)$ произвољно непрекидно пресликавање и $g : (S^n, e_1) \to (X, x_1)$ такво да је $f \underset{u}{\simeq} g$. За овако дефинисано β_u важи следећи став.

Став 2.4 *За $n \geqslant 1$, пресликавање β_u је хомоморфизам.*

Доказ: Нека су $f, g : (S^n, e_1) \to (X, x_0)$. Желимо да покажемо да важи

$$\beta_u([f]_0 + [g]_0) = \beta_u([f]_0) + \beta_u([g]_0).$$

Са једне стране имамо да је

$$[f]_0 + [g]_0 = [(f \veebar g) \circ \gamma]_0.$$

Са друге стране имамо најпре да је

$$\beta_u([f]_0) + \beta_u([g]_0) = [\widetilde{f}]_1 + [\widetilde{g}]_1,$$

где су $\widetilde{f}, \widetilde{g} : (S^n, e_1) \to (X, x_1)$ таква да је $f \underset{u}{\simeq} \widetilde{f}$ и $g \underset{u}{\simeq} \widetilde{g}$, а како је

$$[\widetilde{f}]_1 + [\widetilde{g}]_1 = [(\widetilde{f} \veebar \widetilde{g}) \circ \gamma]_1,$$

коначно добијамо да је

$$\beta_u([f]_0) + \beta_u([g]_0) = [(\widetilde{f} \veebar \widetilde{g}) \circ \gamma]_1.$$

Дакле, довољно је да докажемо да је

$$\beta_u([(f \veebar g) \circ \gamma]_0) = [(\widetilde{f} \veebar \widetilde{g}) \circ \gamma]_1,$$

тј. да је

$$(f \veebar g) \circ \gamma \underset{u}{\simeq} (\widetilde{f} \veebar \widetilde{g}) \circ \gamma.$$

Како је γ пресликавање које чува базну тачку ($\gamma(e_1) = 0$), важи

$$f \veebar g \underset{u}{\simeq} \widetilde{f} \veebar \widetilde{g} \implies (f \veebar g) \circ \gamma \underset{u}{\simeq} \widetilde{f} \veebar \widetilde{g}) \circ \gamma,$$

па ћемо доказ завршити доказом да је

$$f \veebar g \underset{u}{\simeq} \widetilde{f} \veebar \widetilde{g}.$$

Имали смо да је

$$(f \veebar g)(s) = \begin{cases} f(h(s)), & s \in S^n_a \\ g(h(\rho(s))), & s \in S^n_b \end{cases}$$

Означимо $F : f \underset{u}{\simeq} \widetilde{f}$ и $G : g \underset{u}{\simeq} \widetilde{g}$. Дефинишимо $H : (S^n_a \vee S^n_b) \times I \to X$ са

$$H(s,t) = \begin{cases} F(h(s), t), & s \in S^n_a \\ G(h(\rho(s)), t), & s \in S^n_b \end{cases}$$

Пресликавање H је добро дефинисано јер на пресеку сфера S_a^n и S_b^n тј. за $s = 0$ имамо

$$F(h(0), t) = F(e_1, t) = u(t) = G(e_1, t) = G(h(\rho(0)), t).$$

Такође, H ће бити непрекидно на основу теореме о лепљењу па то заиста јесте хомотопија. Погледајмо између чега је хомотопија и дуж ког пута.

Како је $H(0, t) = u(t)$, то ће бити хомотопија дуж пута u. Из

$$H(s, 0) = \begin{cases} f(h(s)), & s \in S_a^n \\ g(h(\rho(s))), & s \in S_b^n \end{cases}$$

$$H(s, 1) = \begin{cases} \widetilde{f}(h(s)), & s \in S_a^n \\ \widetilde{g}(h(\rho(s))), & s \in S_b^n \end{cases}$$

добијамо да је

$$H : f \veebar g \underset{u}{\simeq} \widetilde{f} \veebar \widetilde{g},$$

што је и било потребно доказати. $\square$

У уводном делу смо рекли да је β_u бијекција, па на основу претходног става закључујемо да ће у овом случају бити изоморфизам.

Последица 2.5 *Ако је простор X путно повезан, $x_0, x_1 \in X$ и $n \in \mathbb{N}_0$, онда је*

$$\pi_n(X) \overset{def}{=} \pi_n(X, x_0) \cong \pi_n(X, x_1).$$

За $n = 0$ мислимо на изоморфизам у категорији Set_0 тј. то је бијекција која чува истакнути елемент.

Дефиниција 2.6 Нека је $n \in \mathbb{N}_0$ и X тополошки простор. За X кажемо да је *n-повезан* ако је $\pi_i(X) = 0$, за све $i \leqslant n$.

Дакле, то да је простор 0-повезан значи да је путно повезан, а да је 1-повезан значи да је просто повезан.

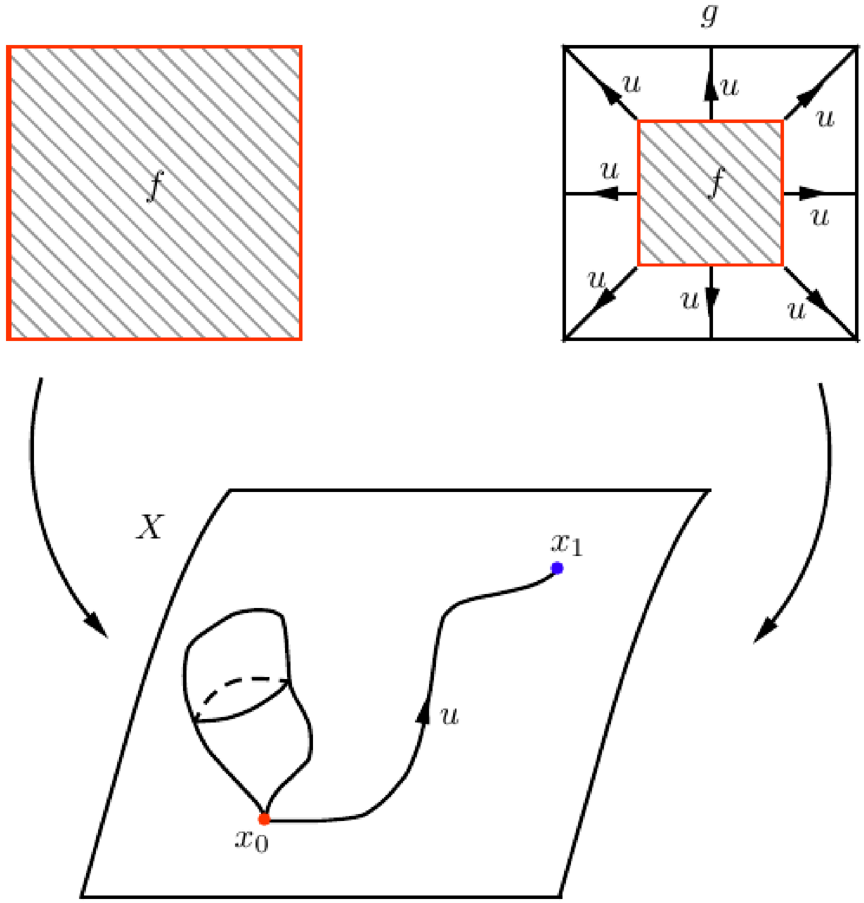
До сада смо имали да фундаментална група дејствује на хомотопске групе као скупове, а сада имамо и више.

Последица 2.7 *За $n \geqslant 1$, дејство $\pi_n(X, x_0) \times \pi_1(X, x_0) \to \pi_n(X, x_0)$ је десно дејство групе $\pi_1(X, x_0)$ на групу $\pi_n(X, x_0)$.*

Одговарајуће лево дејство би било дефинисано са

$$[u] \cdot [f]_0 = \beta_{u^{-1}}([f]_0).$$

Сада ћемо описати како изгледа пресликавање β_u када посматрамо $\pi_n(X, x_0)$ као $[I^n, \partial(I^n); X, x_0]$. Ако је $f : (I^n, \partial(I^n)) \to (X, x_0)$ и ако је $\beta_u([f]) = [g]$, онда се g може представити следећом сликом.



За $n = 1$ имамо да је $\beta_u([f]) = [g]$ где је $g = u^{-1} \cdot f \cdot u$. Како је

$$[v] \cdot [u] = [u^{-1} \cdot v \cdot u] = [u]^{-1} * [v] * [u],$$

имамо да су елементи дејства $\pi_1(X, x_0)$ на себе управо унутрашњи аутоморфизми групе.

Посматрајмо два дејства

$$\pi_n(X, x_0) \times \pi_1(X, x_0) \to \pi_n(X, x_0),$$

$$\pi_n(X, x_1) \times \pi_1(X, x_1) \to \pi_n(X, x_1).$$

Тривијалност дејства код путно повезаних простора еквивалентно је томе да је Φ бијекција, па из наредног дијаграма закључујемо да је прво дејство тривијално ако и само ако је и друго тривијално.

$$\begin{tikzcd}
{[S^n, X]_0} \arrow[dd, tail, two heads, "\beta_u"'] \arrow[dr, "\Phi"] & \\
& {[S^n, X]} \\
{[S^n, X]_1} \arrow[ur, "\Phi"'] &
\end{tikzcd}$$

Ова еквиваленција нам даје да је добро дефинисан наредни појам.

Дефиниција 2.8 Ако је $n \in \mathbb{N}$ и X путно повезан простор, за X кажемо да је *n-прост* ако $\pi_1(X)$ тривијално дејствује на $\pi_n(X)$. За X кажемо да је *прост* ако је n-прост за свако $n \in \mathbb{N}$.

Ако је простор 1-прост, онда имамо да је дејство $\pi_1(X)$ на себе тривијално тј. да за свако $[u], [v] \in \pi_1(X)$ важи
$$[u]^{-1} * [v] * [u] = [v],$$
тј. група $\pi_1(X)$ је Абелова.

Ако је X просто повезан простор онда је његова фундаментална група тривијална па тривијално дејствује на сваку хомотопску групу те је X прост.

Коначно, ако је X путно повезан H-простор, онда је Φ бијекција што је еквивалентно томе да $\pi_1(X)$ дејствује тривијално на сваку хомотопску групу, па је X прост. Специјално, X је и 1-прост што је еквивалентно томе да је фундаментална група $\pi_1(X)$ Абелова. Дакле, ако је X путно повезан H-простор, онда његова фундаментална група мора бити Абелова.

Пример 2.9

1) *Како је $\pi_1(S^1 \vee S^1) = Z * Z$ некомутативна, онда $S^1 \vee S^1$ није H-простор.*

2) *Нека су M_g затворене оријентабилне површи рода $g \in \mathbb{N}_0$ и N_h затворене неоријентабилне површи рода $h \in \mathbb{N}$. Погледајмо које од њих су H-простори.*

   - *$g = 0$: $M_0 = S^2$, па како је $\pi_1(S^2)$ Абелова, не знамо да ли је S^2 H-простор, мада испоставиће се да неће бити;*

   - *$g = 1$: $M_1 = T^2$ је тополошка група па ће бити и H-простор, а примећујемо да је и $\pi_1(T^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ Абелова;*

- $g \geqslant 2$: *фундаментална група* $\pi_1(M_g)$ *није Абелова па* M_g *није* H*-простор;*
- $h = 1$: $N_1 = \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ *има комутативну фундаменталну групу али ће се испоставити да неће бити* H*-простор;*
- $h \geqslant 2$: *фундаментална група* $\pi_1(N_h)$ *није Абелова па* N_h *није* H*-простор.*

Дакле, од свих затворених површи једино је T^2 H*-простор.*

Нека је $f : X \to Y$ непрекидно пресликавање и X и Y путно повезани простори. Нека су $x_0, x_1 \in X$. Из комутативног дијаграма

$$\begin{tikzcd} \pi_n(X,x_0) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, tail, two heads, "\beta_u"'] & \pi_n(Y,f(x_0)) \arrow[d, tail, two heads, "\beta_{f\circ u}"] \\ \pi_n(X,x_1) \arrow[r, "f_*"] & \pi_n(Y,f(x_1)) \end{tikzcd}$$

видимо да има смисла говорити о пресликавању

$$f_* : \pi_n(X) \to \pi_n(Y).$$

За хомолошке групе имали смо да ако је $f \simeq g$, онда $f_* = g_* : H_n(X) \to H_n(Y)$. Ово нећемо имати код хомотопских група, јер смо тамо имали да из $f \simeq g$ $(rel\ x_0)$ следи $f_* = g_* : \pi_n(X,x_0) \to \pi_n(Y,y_0)$, па видимо да нам треба релативна хомотопија. Ипак, ако је $f \simeq g$, постоји веза између f_* и g_* и она је дата наредном лемом.

Лема 2.10 *Ако су* $f, g : X \to Y$ *непрекидна и* $f \simeq g$*, онда за произвољно* $n \in \mathbb{N}_0$ *и* $x_0 \in X$ *важи да је* $\beta_u \circ f_* = g_*$*, тј. комутира наредни дијаграм*

$$\begin{tikzcd} \pi_n(X,x_0) \arrow[r, "f_*"] \arrow[dr, "g_*"'] & \pi_n(Y,f(x_0)) \arrow[d, tail, two heads, "\beta_u"] \\ & \pi_n(Y,g(x_0)) \end{tikzcd}$$

где је $u : I \to Y$ *пут такав да је* $f \underset{u}{\simeq} g$.

Доказ: Нека је $\varphi : (S^n, e_1) \to (X, x_0)$. Тада из $f \underset{u}{\simeq} g$ имамо да је $f \circ \varphi \underset{u}{\simeq} g \circ \varphi$, па је

$$\beta_u(f_*([\varphi]_0)) = \beta_u([f\circ\varphi]_0) = [g\circ\varphi]_0. \quad \square$$

Видели смо да ако је $g : (X,x_0) \to (Y,y_0)$ непрекидно и $g \simeq c_{y_0}$ $(rel\ x_0)$, онда је $g_* = 0$. Слично важи и када имамо слободну хомотопију.

Став 2.11 *Ако је $f : X \to Y$ хомотопски тривијално пресликавање, онда је за свако $n \in \mathbb{N}_0$ и $x_0 \in X$ пресликавање*

$$f_* : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, f(x_0))$$

тривијални хомоморфизам (за $n = 0$ мисли се на морфизам у категорији Set_0 тј. на непрекидно пресликавање које чува истакнути елемент).

Доказ: Како је f хомотопски тривијално, то постоји $y_0 \in Y$ такво да је $f \simeq c_{y_0}$, па на основу леме 2.10 имамо да комутира дијаграм

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(X, x_0) \arrow[r, "f_*"] \arrow[dr, "0"'] & \pi_n(Y, f(x_0)) \arrow[d, tail, two heads, "\beta_u"] \\
& \pi_n(Y, y_0)
\end{tikzcd}$$

одакле је $f_* = 0$. $\square$

Такође смо видели да ако је $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ хомотопска еквиваленција, онда је f_* изоморфизам. Имамо и следеће уопштење.

Став 2.12 *Нека је $f : X \to Y$ хомотопска еквиваленција. Тада је за свако $n \in \mathbb{N}_0$ и свако $x_0 \in X$ пресликавање*

$$f_* : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, f(x_0))$$

изоморфизам.

Доказ: Како је f хомотопска еквиваленција, то постоји $g : Y \to X$ такво да је $g \circ f \simeq \mathbb{1}_X$ и $f \circ g \simeq \mathbb{1}_Y$. Нека је $n \in \mathbb{N}_0$ и $x_0 \in X$. Посматрајмо наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd}
& & & \pi_n(Y, f(x_0)) \\
\pi_n(X, x_0) \arrow[r, "f_*"] \arrow[drr, tail, two heads, "\mathbb{1}_{\pi_n(X, x_0)}"'] & \pi_n(Y, f(x_0)) \arrow[r, "g_*"] \arrow[urr, tail, two heads, "\mathbb{1}_{\pi_n(Y, f(x_0))}"] & \pi_n(X, g(f(x_0))) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, tail, two heads, "\beta_u"] & \pi_n(Y, f(g(f(x_0)))) \arrow[u, tail, two heads, "\beta_v"'] \\
& & \pi_n(X, x_0) &
\end{tikzcd}$$

где је $u : I \to X$ пут такав да је $g \circ f \underset{u}{\simeq} \mathbb{1}_X$ и $v : I \to Y$ пут такав да је $f \circ g \underset{v}{\simeq} \mathbb{1}_Y$.

Из дијаграма закључујемо да је f_* изоморфизам. $\square$

Последица 2.13 *Ако су X и Y путно повезани простори и $X \simeq Y$, тада за свако $n \in \mathbb{N}_0$ важи*

$$\pi_n(X) \cong \pi_n(Y).$$

Специјално, ако је простор X контрактибилан, онда је $\pi_n(X) = 0$, за свако $n \in \mathbb{N}_0$.

Став 2.14 *Нека је $n \in \mathbb{N}_0$ и $f : S^n \to X$ непрекидно. Тада важи следећа еквиваленција.*

$$[f]_0 = 0 \text{ у } \pi_n(X, f(e_1)) \iff [f] = 0 \text{ у } [S^n, X].$$

Доказ: $\Rightarrow$: Овај смер тривијално важи.
$\leftarrow$: Имамо да је

$$[f]_0 = [f \circ \mathbb{1}_{S^n}]_0 = f_*([\mathbb{1}_{S^n}]_0),$$

па како је $f_* = 0$ на основу става 2.11, то је $[f]_0 = 0$. $\square$

Теорема 2.15 *Нека је X тополошки простор и $n \in \mathbb{N}_0$. Следећа два исказа су еквивалентна.*

(1) Свако непрекидно пресликавање $f : S^n \to X$ је хомотопски тривијално;

(2) За свако $x_0 \in X$ је $\pi_n(X, x_0) = 0$.

Доказ: (1) $\Rightarrow$ (2) : Нека је $x_0 \in X$ и $[f]_0 \in \pi_n(X, x_0)$. Тада за $f : (S^n, e_1) \to (X, x_0)$ важи да је $f \simeq const$, па на основу става 2.14 добијамо $[f]_0 = 0$.
(2) $\Rightarrow$ (1) : Нека је $f : S^n \to X$ непрекидно и нека је $x_0 = f(e_1)$. На основу (2) имамо да је $[f]_0 = 0$ у $\pi_n(X, x_0)$, па поново на основу става 2.14 закључујемо да је $[f] = 0$, тј. $f \simeq const$. $\square$

Последица 2.16 *Нека је X тополошки простор и $n \in \mathbb{N}$. Следећа два исказа су еквивалентна.*

(1) За свако $k \leqslant n$ и свако пресликавање $f : S^k \to X$ важи да је f хомотопски тривијално;

(2) Простор X је n-повезан.

Напомена 2.17 *Већ смо видели да је простор 0-повезан ако и само ако је путно повезан, односно 1-повезан ако и само ако је просто повезан. Има смисла говорити и о (-1)-повезаности. Простор ће бити (-1)-повезан ако и само ако је непразан.*

Пример 2.18 *За $k < n$ закључили смо да је $[S^k, S^n] = 0$ што управо значи да је сфера S^n заправо $(n-1)$-повезан простор, где је $n \in \mathbb{N}_0$.*

Теорема 2.19 *Нека је $p : E \to B$ наткривање, $e_0 \in E$ и $b_0 = p(e_0) \in B$. Тада је $p_* : \pi_n(E, e_0) \to \pi_n(B, b_0)$ мономорфизам за $n = 1$, а изоморфизам за $n \geqslant 2$.*

Доказ: Нека је $n \geqslant 1$. Показујемо да је p_* мономорфизам. Узмимо пресликавање $f : (S^n, e_1) \to (E, e_0)$ такво да је $p_*([f]_0) = 0$, тј. $[f]_0 \in \ker p_*$. Потребно је да покажемо да је $[f]_0 = 0$. На основу става 2.14 довољно је показати да је $[f] = 0$.

Како је $p_*([f]_0) = 0$, то је $[p \circ f]_0 = 0$, тј. постоји хомотопија

$$H : p \circ f \simeq const, \quad H : S^n \times I \to B,$$

таква да је

$$H(x, 0) = p(f(x)) \text{ и } H(x, 1) = b \in B,$$

где је $b \in B$ неки елемент.

Како је p фибрација, то постоји $\widetilde{H} : S^n \times I \to E$ такво да следећи дијаграм комутира.

$$\begin{tikzcd}
S^n \times \{0\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\
S^n \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{H}"] & B
\end{tikzcd}$$

Из дијаграма имамо

$$p(\widetilde{H}(S^n \times \{1\})) = H(S^n \times \{1\}) = \{b\},$$

па је $\widetilde{H}(S^n \times \{1\}) \subset p^{-1}(b)$. Како је S^n повезан и $p^{-1}(b)$ дискретан, онда мора бити $\widetilde{H}(S^n \times \{1\}) = \{*\}$, тј. $\widetilde{H}(\cdot, 1) = const$, па је

$$\widetilde{H} : f \simeq const.$$

Нека је сада $n \geqslant 2$. Показаћемо да је у том случају p_* епиморфизам. Нека је $g : (S^n, e_1) \to (B, b_0)$. Како је S^n повезан и локално путно повезан, то постоји $\widetilde{g} : (S^n, e_1) \to (E, e_0)$ такво да следећи дијаграм комутира.

$$\begin{tikzcd}
 & (E, e_0) \arrow[d, "p"] \\
(S^n, e_1) \arrow[r, "g"] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{g}"] & (B, b_0)
\end{tikzcd}$$

Коначно, добијамо

$$[g]_0 = [p \circ \widetilde{g}]_0 = p_*([\widetilde{g}]_0),$$

па закључујемо да је p_* „на“. $\square$

Пример 2.20

1) Како постоји наткривање $\mathbb{R} \to S^1$ и $\mathbb{R}$ је контрактибилан, то је

$$\pi_n(S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 1 \\ 0, & n \geqslant 2 \end{cases}$$

2) Како имамо наткривања $\mathbb{R}^2 \to T^2 \to K$ (где је K Клајнова боца) и $\mathbb{R}^2$ је контрактибилан, то је

$$\pi_n(T^2) = \pi_n(K) = 0, \text{ за } n \geqslant 2.$$

3) Раван $\mathbb{R}^2$ наткрива и површи M_g за $g \geqslant 1$ и N_h за $h \geqslant 2$, па је

$$\pi_n(M_g) = \pi_n(N_h) = 0, \text{ за } n \geqslant 2.$$

4) Имамо и dволисно наткривање $p : S^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$, па је

$$\pi_i(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) \cong \pi_i(S^n), \quad \text{за } i \geqslant 2.$$

Посебно, $\pi_i(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) = 0$ за $2 \leqslant i \leqslant n-1$.

Дефиниција 2.21 Ако је X путно повезан, *универзално наткривање* од X је наткривање $p : \widetilde{X} \to X$ такво да је $\widetilde{X}$ просто повезан простор.

Напомена 2.22 *Нека је X локално путно повезан и $p : \widetilde{X} \to X$ универзално наткривање. Оно се зове универзално јер уколико имамо неко друго наткривање $q : E \to X$, при чему је E повезан, онда је подизање $\widetilde{p} : \widetilde{X} \to E$ такође наткривање.*

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[rr, dashed, "\widetilde{p}"] \arrow[dr, "p"'] & & E \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Ако је X повезан CW-комплекс, онда он има универзално наткривање, стога и за сваку повезану затворену површ постоји универзално наткривање. Такође, и наткривајући простор мора бити површ и то просто повезана површ. Једина компактна просто повезана површ је сфера S^2, а некомпактна раван $\mathbb{R}^2$. Посматрајући Ојлерове карактеристике повезаних затворених површи, примећујемо да сфера не наткрива ниједну од њих, па остаје једино могућност да раван наткрива све површи M_g за $g \geqslant 1$ и N_h за $h \geqslant 2$. Ова наткривања се могу и експлицитно конструисати.

Теорема 2.23 *Нека је* $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *фамилија тополошких простора и нека су* $x_\lambda \in X_\lambda$, $\lambda\in\Lambda$, *базне тачке. Тада је* $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ *тополошки простор са базном тачком* x *таквом да је* $p_\lambda(x) = x_\lambda$, *за свако* $\lambda\in\Lambda$. *Нека је* $n\in\mathbb{N}$. *Тада знамо да постоји јединствен хомоморфизам* Φ *такав да за свако* $\lambda_0\in\Lambda$ *комутира наредни дијаграм.*

$$\begin{tikzcd} \pi_n\Big(\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, x\Big) \arrow[r, dashed, "\Phi"] \arrow[dr, "(p_{\lambda_0})_*"'] & \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} \pi_n(X_\lambda, x_\lambda) \arrow[d, "q_{\lambda_0}"] \\ & \pi_n(X_{\lambda_0}, x_{\lambda_0}) \end{tikzcd}$$

Хомоморфизам Φ *јесте изоморфизам. Ако је* Λ *коначан скуп и* $\pi_n\Big(\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, x\Big)$ *Абелова (што свакако важи за* $n\geqslant 2$*), онда је* $\Phi^{-1} = \mathop{+}\limits_{\lambda\in\Lambda}(i_\lambda)_*$, *где је* $i_\lambda : X_\lambda \hookrightarrow \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ *и*

$$\mathop{+}_{\lambda\in\Lambda}(i_\lambda)_* : \bigoplus_{\lambda\in\Lambda}\pi_n(X_\lambda, x_\lambda) \to \pi_n\Big(\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, x\Big).$$

Доказ: Лако се покаже да је Φ хомоморфизам. Покажимо да је бијекција. Најпре ћемо се уверити да је Φ „на“. Нека је $\alpha\in\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}\pi_n(X_\lambda, x_\lambda)$. Координате од α су $\alpha_\lambda\in\pi_n(X_\lambda, x_\lambda)$, па постоје функције $f_\lambda : (S^n, e_1)\to(X_\lambda, x_\lambda)$ такве да је $\alpha_\lambda = [f_\lambda]_0$. Одаберимо пресликавање $f : (S^n, e_1)\to\big(\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, x\big)$ такво да за свако $\lambda_0\in\Lambda$ комутира наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[dr, "f_{\lambda_0}"'] & \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \arrow[d, "p_{\lambda_0}"] \\ & X_{\lambda_0} \end{tikzcd}$$

Тврдимо да је $\Phi([f]_0) = \alpha$. Довољно је доказати да су им исте све координате. Како је

$$q_{\lambda_0}(\Phi([f]_0)) = (p_{\lambda_0})_*([f]_0) = [f_{\lambda_0}]_0 = \alpha_{\lambda_0},$$

закључујемо да је Φ „на“.

Покажимо сада да је Φ „1-1“. Нека је $[f]_0\in\pi_n\big(\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, x\big)$ и нека је $\Phi([f]_0) = 0$, тј. за свако $\lambda\in\Lambda$ је $(p_\lambda)_*([f]_0) = 0$. Ово управо значи да за свако $\lambda\in\Lambda$ имамо хомотопије

$$H_\lambda : p_\lambda\circ f \simeq const, \quad H_\lambda : S^n\times I\to X_\lambda.$$

Одаберимо $H : S^n \times I \to \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ тако да комутира наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd}
S^n \times I \arrow[r, dashed, "H"] \arrow[dr, "H_{\lambda_0}"'] & \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \arrow[d, "p_{\lambda_0}"] \\
& X_{\lambda_0}
\end{tikzcd}$$

Може се показати да је ово хомотопија

$$H : f \simeq const,$$

што значи да је $[f] = 0$, па је на основу става 2.14 и $[f]_0 = 0$ одакле закључујемо да је Φ „1-1“.

Остаје још да видимо да је $\Phi^{-1} = \mathop{+}\limits_{\lambda\in\Lambda} (i_\lambda)_*$ под наведеним условима. Довољно је показати да је

$$\Phi \circ \left(\mathop{+}\limits_{\lambda\in\Lambda} (i_\lambda)_* \right) = \mathbb{1}_{\bigoplus\limits_{\lambda\in\Lambda} \pi_n(X_\lambda, x_\lambda)},$$

тј. да је

$$\Phi\left(\mathop{+}\limits_{\lambda\in\Lambda} (i_\lambda)_*(\alpha) \right) = \alpha.$$

Нека је $\lambda_0 \in \Lambda$. Тада је

$$(p_{\lambda_0})_* \left(\sum_{\lambda\in\Lambda} (i_\lambda)_*(\alpha_\lambda) \right) = \sum_{\lambda\in\Lambda} (p_{\lambda_0} \circ i_\lambda)_*(\alpha_\lambda) = \alpha_{\lambda_0},$$

јер је

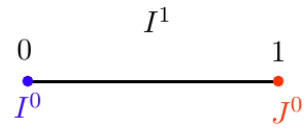
$$p_{\lambda_0} \circ i_\lambda = \begin{cases} \mathbb{1}_{X_{\lambda_0}}, & \lambda = \lambda_0 \\ const, & \lambda \neq \lambda_0 \end{cases}$$

па како $\Phi\left(\mathop{+}\limits_{\lambda\in\Lambda} (i_\lambda)_*(\alpha) \right)$ и α имају исте све координате, закључујемо да тражена једнакост заиста важи. $\square$

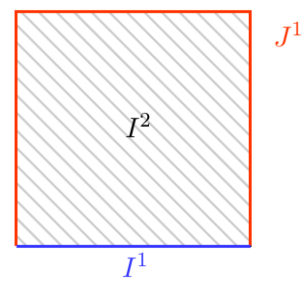
2.2 Релативне хомотопске групе

Нека је $n \in \mathbb{N}_0$ и $a_0 \in A \subseteq X$. Означимо са $I^{n-1} \subset I^n$ скуп $I^{n-1} \overset{def}{=} \{(t_1, t_2, \ldots, t_n) \mid t_n = 0\}$ и нека је $J^{n-1} \overset{def}{=} \overline{\partial(I^n) \backslash I^{n-1}}$.

За $n = 1$ имамо следећу слику.



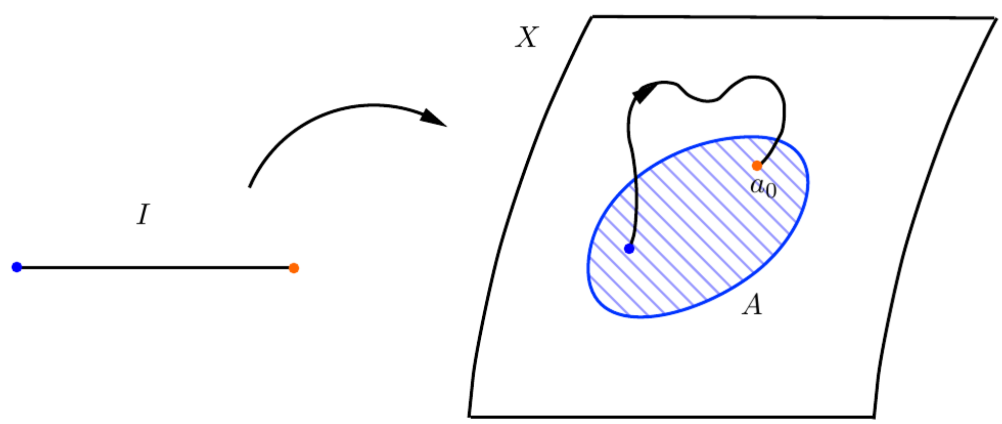
За $n = 2$ имамо следећу слику.



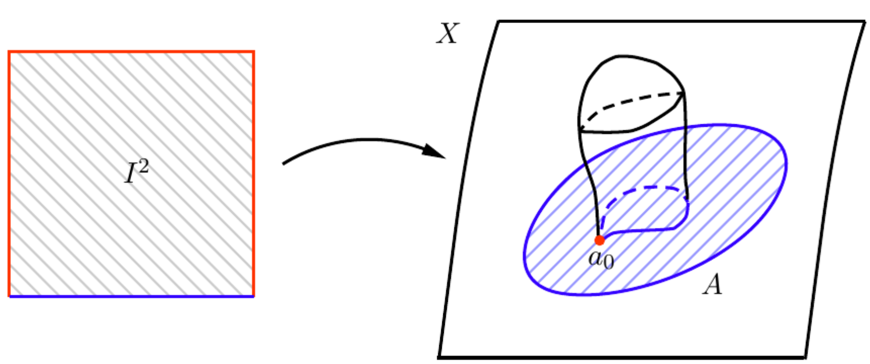
Уведимо ознаку

$$\pi_n(X, A, a_0) \overset{def}{=} [I^n, \partial(I^n), J^{n-1}; X, A, a_0],\ n \geqslant 1.$$

У случају $n = 1$ произвољан елемент овог скупа можемо представити наредном сликом.



У случају $n = 2$ произвољан елемент овог скупа можемо представити наредном сликом.



Сада ћемо за $n \geqslant 2$ дефинисати операцију на овом скупу. Нека је $[f], [g] \in \pi_n(X, A, a_0)$. Тада дефинишемо

$$[f] + [g] \overset{def}{=} [f + g],$$

где је

$$(f+g)(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \ldots, t_n), & 0 \leqslant t_1 \leqslant \frac{1}{2} \\ g(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_n), & \frac{1}{2} \leqslant t_1 \leqslant 1 \end{cases}$$

Став 2.24 *За $n \geqslant 2$, $\pi_n(X, A, a_0)$ је група у односу на операцију $+$. Неутрал је $[c_{a_0}]$, а инверз произвољног елемента $[f] \in \pi_n(X, A, a_0)$ је $-[f] = [-f]$, где је $-f(t_1, t_2, \ldots, t_n) = f(1 - t_1, t_2, \ldots, t_n)$.*
За $n \geqslant 3$, $\pi_n(X, A, a_0)$ је Абелова група.

Дефиниција 2.25 Групу $\pi_n(X, A, a_0)$ за $n \geqslant 2$ из претходне теореме зовемо *n-та релативна хомотопска група пара (X, A) са базном тачком a_0.*

Уколико је $A = \{a_0\}$, имамо да је $\pi_n(X, a_0, a_0) = \pi_n(X, a_0)$, и то као групе, јер су операције на оба места исте. Као и раније, имамо коваријантне функторе.

$$\begin{aligned} \pi_1 &: Top_0^2 \to Set_0, \\ \pi_2 &: Top_0^2 \to Gr, \\ \pi_n &: Top_0^2 \to Ab,\ n \geqslant 3. \end{aligned}$$

Ако је $\varphi : (X, A, a_0) \to (Y, B, b_0)$ морфизам у категорији Top_0^2, пресликавање $\varphi_* : \pi_n(X, A, a_0) \to \pi_n(Y, B, b_0)$ дато је са

$$\varphi_*([f]) \overset{def}{=} [\varphi \circ f].$$

За $n \geqslant 2$ лако се провери да је φ_* хомоморфизам.

Ако је $\varphi \simeq \psi$ у категорији Top_0^2, онда је $\varphi_* = \psi_*$. Ако је φ хомотопска еквиваленција у Top_0^2, онда је φ_* изоморфизам.

Као и хомотопске групе и релативне хомотопске групе се могу видети на други начин. Нека је $[f] \in \pi_n(X, A, a_0)$. Посматрајмо дијаграм.

$$\begin{tikzcd}
I^n \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads] \arrow[ddr, bend right, "p_r"'] & & X \\
& I^n/J^{n-1} \arrow[ur, dashed] \arrow[d, "\approx"] & \\
& D^n \arrow[uur, dashed, bend right, "\widetilde{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Хомеоморфизам између I^n/J^{n-1} и D^n бирамо тако да је

$$p_r(J^{n-1}) = e_1,$$

$$p_r(\partial(I^n)) = S^{n-1}.$$

Одавде видимо да релативне хомотопске групе можемо видети и као

$$\pi_n(X, A, a_0) = [D^n, S^{n-1}, e_1; X, A, a_0].$$

Класе у скупу $[D^n, S^{n-1}, e_1; X, A, a_0]$ ћемо означавати са $[f]_{0r}$. Из претходног дијаграма видимо да важи веза

$$[f] \in \pi_n(X, A, a_0) \;\longleftrightarrow\; [\widetilde{f}]_{0r} \in [D^n, S^{n-1}, e_1; X, A, a_0],$$

где је $f = \widetilde{f} \circ p_r$.

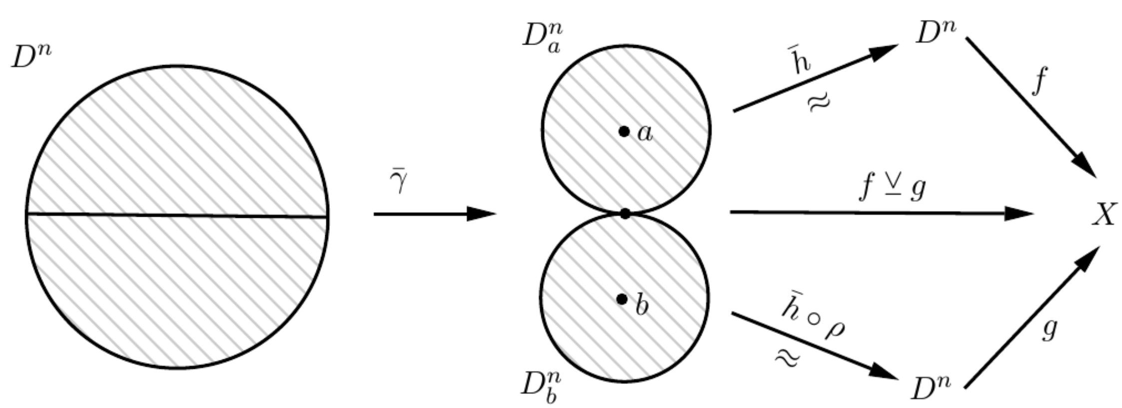
Као и пре, ако је $\varphi : (X, A, a_0) \to (Y, B, b_0)$, добро је дефинисано пресликавање $\varphi_*([\widetilde{f}]_{0r}) = [\varphi \circ \widetilde{f}]_{0r}$.

Сада ћемо видети како изгледа операција када елементе из $\pi_n(X, A, a_0)$ посматрамо као елементе из $[D^n, S^{n-1}, e_1; X, A, a_0]$.

Нека је $n \geqslant 2$ и $f, g : (D^n, S^{n-1}, e_1) \to (X, A, a_0)$. Тада је

$$[f]_{0r} + [g]_{0r} = [(f \veebar g) \circ \bar{\gamma}],$$

где је $\bar{\gamma}$ пресликавање које $D^{n-1} \subset D^n$ скупља у тачку, $\bar{\gamma}|_{S^{n-1}} = \gamma$ из обичних хомотопских група. Слично као раније, имамо слику.



Хомеоморфизам $\bar{h}$ је такав да важи $\bar{h}(0) = e_1$ и $\bar{h}|_{S^{n-1}} = h$ које смо дефинисали код хомотопских група.

Рекли смо да у случају када је $A = \{a_0\}$ важи једнакост $\pi_n(X, a_0, a_0) = \pi_n(X, a_0)$. Уколико ове групе посматрамо преко пресликавања дискова односно сфера, немамо једнакост, али имамо наредну везу.

$$[g]_{0r} \in [D^n, S^{n-1}, e_1; X, a_0, a_0] \longleftrightarrow [f]_0 \in [S^n, e_1; X, a_0], \tag{2}$$

где је $g = f \circ q$, а пресликавање q је количничко пресликавање из D^n у S^n које скупља границу диска у тачку, тако да комутира наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd}
I^n \arrow[rr, "p_r"] \arrow[dr, "p"'] & & D^n \arrow[dl, dashed, "q"] \\
& S^n &
\end{tikzcd}$$

Нека су $a_0,\ a_1 \in A$ и нека је $u : I \to A$ пут од a_0 до a_1. Дефинишимо пресликавање $\beta_u : \pi_n(X, A, a_0) \to \pi_n(X, A, a_1)$ са

$$\beta_u([f]_{0r}) \overset{def}{=} [g]_{1r},$$

где је са $[f]_{0r}$ означен елемент групе $\pi_n(X, A, a_0) = [D^n, S^{n-1}, e_1; X, A, a_0]$, а са $[g]_{1r}$ елемент групе $\pi_n(X, A, a_1) = [D^n, S^{n-1}, e_1; X, A, a_1]$ и притом је $f \underset{u}{\simeq} g$ кроз пресликавања парова $(D^n, S^{n-1}) \to (X, A)$. Може се показати да је овако дефинисано пресликавање β_u добро дефинисано. Такође, ако је $n \geqslant 2$, пресликавање β_u ће бити изоморфизам, и његов инверз је дат формулом

$$\beta_u^{-1} = \beta_{u^{-1}}.$$

Чак и за $n = 1$ ће β_u бити бијекција и за његов инверз ће важити претходна формула.

Став 2.26 *Ако је A путно повезан простор и $a_0, a_1 \in A$, тада*

$$\pi_n(X, A, a_0) \cong \pi_n(X, A, a_1) =: \pi_n(X, A).$$

Као и код хомотопских, и код релативних хомотопских група имамо дејство фундаменталне групе

$$\pi_n(X, A, a_0) \times \pi_1(A, a_0) \overset{\cdot}{\to} \pi_n(X, A, a_0),$$

дато са

$$[f]_{0r} \cdot [u] = \beta_u([f]_{0r}).$$

Овиме је задато једно десно дејство фундаменталне групе $\pi_1(A, a_0)$ на (за $n \geqslant 2$ групу) $\pi_n(X, A, a_0)$.

Нека је $n \geqslant 1$ и $f : (D^n, S^{n-1}, e_1) \to (X, A, a_0)$ непрекидно пресликавање. Тада је $[f]_{0r} = 0$ у $\pi_n(X, A, a_0)$ ако и само ако постоји хомотопија $H : D^n \times I \to X$ таква да је

$$H(y, 0) = f(y),\ y \in D^n,$$

$$H(y, 1) = a_0,\ y \in D^n,$$

$$H(S^{n-1} \times I) \subseteq A,$$

$$H(e_1, t) = a_0,\ t \in I.$$

Дакле, $[f]_{0r} = 0$ ако и само ако је f хомотопно константном пресликавању c_{a_0} кроз пресликавања парова релативно e_1. Овај услов можемо ослабити, тј. важи наредна лема.

Лема 2.27 *Следећа четири исказа су еквивалентна.*

(1) $[f]_{0r} = 0$*;*

(2) Постоји $g : (D^n, S^{n-1}, e_1) \to (X, A, a_0)$ *такво да је* $[f]_{0r} = [g]_{0r}$ *и* $g(D^n) \subseteq A$*;*

(3) Постоји $g : (D^n, S^{n-1}) \to (X, A)$ *такво да је* $f \simeq g$ *кроз пресликавања парова и* $g(D^n) \subseteq A$*;*

(4) Постоји $g : D^n \to X$ *такво да је* $f \simeq g$ $(rel\ S^{n-1})$ *и* $g(D^n) \subseteq A$*.*

Посебно, ако је $f(D^n) \subseteq A$*, онда је* $[f]_{0r} = 0$.

Доказ: $(1) \Rightarrow (2)$: Из услова (1) имамо да је $[f]_{0r} = [c_{a_0}]_{0r}$. Одаберимо $g = c_{a_0}$.
$(2) \Rightarrow (1)$: Нека је g пресликавање из услова (2). Тачка e_1 је јаки деформациони ретракт диска D^n, тј. постоји хомотопија $G : D^n \times I \to D^n$ таква да је

$$G : \mathbb{1}_{D^n} \simeq c_{e_1}\ (rel\ e_1).$$

Та хомотопија је дата формулом

$$G(y, t) = (1 - t)y + te_1,\ y \in D^n,\ t \in I.$$

Посматрајмо наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd}
D^n \times I \arrow[r, "G"] \arrow[ddr, dashed] & D^n \arrow[dd, "g"] \arrow[dr, dashed] & \\
& & A \arrow[dl, hook'] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Имамо да је $g \circ G : g \simeq c_{a_0}$ $(rel\ e_1)$. Како је $g(D^n) \subseteq A$, имамо да је

$$(g \circ G)(S^{n-1} \times I) \subseteq (g \circ G)(D^n \times I) \subseteq A,$$

па је $g \circ G$ хомотопија кроз пресликавања тројки, тј. имамо $[g]_{0r} = [c_{a_0}]_{0r}$. Коначно, добијамо

$$[f]_{0r} = [g]_{0r} = [c_{a_0}]_{0r} = 0.$$

$(2) \Rightarrow (3)$: У услову (2) тражимо да су пресликавања f и g хомотопна кроз пресликавања парова релативно базна тачка, а у (3) имамо само хомотопију кроз пресликавања парова, па је овај смер тривијалан.
$(3) \Rightarrow (4)$: Нека је g пресликавање из услова (3), тј. нека је $F : f \simeq g$ кроз пресликавања парова. Дакле, $F : D^n \times I \to X$ и важи

$$F(y, 0) = f(y),\ y \in D^n,$$

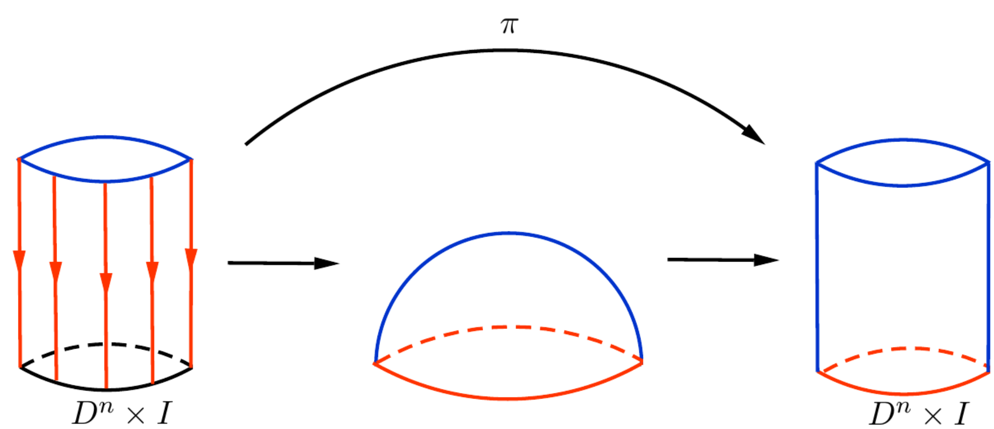
$$F(y, 1) = g(y),\ y \in D^n,$$

$$F(S^{n-1} \times I) \subseteq A.$$

Како је $g(D^n) \subseteq A$, важи

$$F(S^{n-1} \times I \cup D^n \times \{1\}) \subseteq A.$$

Желимо да направимо хомотопију која ће на нултом нивоу бити пресликавање f, која слика $S^{n-1} \times I \cup D^n \times \{1\}$ у A и која не зависи од $t \in I$ на $S^{n-1} \times I$. Дефинишимо најпре пресликавање $\pi : D^n \times I \to D^n \times I$ на следећи начин. Нека π сваку изводницу ваљка скупља у тачку на $S^{n-1} \times \{0\}$ и онда хомеоморфно добијену полулопту преслика поново у ваљак $D^n \times I$. Пресликавање можемо представити сликом.



Дакле, за пресликавање π важи

$$\pi(y, 0) = (y, 0),\ y \in D^n,$$

$$\pi(y,t) = (y,0),\ y \in S^{n-1},$$
$$\pi(D^n \times \{1\}) = S^{n-1} \times I \cup D^n \times \{1\},$$
$$\pi(\mathrm{int}(D^n \times I)) = \mathrm{int}(D^n \times I),$$

при чему су $\pi|_{D^n\times\{1\}}$ и $\pi|_{\mathrm{int}(D^n\times I)}$ хомеоморфизми на своје слике.

Нека је $\widetilde{F} = F \circ \pi$ и дефинишимо пресликавање $\widetilde{g} : (D^n, S^{n-1}, e_1; X, A, a_0)$ са

$$\widetilde{g}(y) \stackrel{def}{=} \widetilde{F}(y,1),\ y \in D^n.$$

Овако дефинисано $\widetilde{g}$ ће бити тражено пресликавање из услова (4). Заиста, како је $\widetilde{F}(y,0) = f(y),\ y \in D^n$, имамо да је $f \simeq \widetilde{g}$. Притом, за $y \in S^{n-1}$ је

$$\widetilde{F}(y,t) = F(\pi(y,t)) = F(y,0) = f(y),$$

што не зависи од $t \in I$, па је $f \simeq \widetilde{g}$ $(rel\ S^{n-1})$. Остаје још да покажемо да је $\widetilde{g}(D^n) \subseteq A$.

$$\widetilde{g}(D^n) = \widetilde{F}(D^n \times \{1\}) = F(S^{n-1} \times I \cup D^n \times \{1\}) \subseteq A.$$

(4) $\Rightarrow$ (2) : Овај смер тривијално важи јер из услова $f \simeq g$ $(rel\ S^{n-1})$ лако следи $g : (D^n, S^{n-1}, e_1) \to (X, A, a_0)$, као и услов $[f]_{0r} = [g]_{0r}$. $\square$

Напомена 2.28 *Погледајмо како еквиваленција* (1) $\leftrightarrow$ (4) *из претходне леме изгледа када* $\pi_n(X, A, a_0)$ *посматрамо као* $[I^n, \partial(I^n), J^{n-1}; X, A, a_0]$. *Ако је* $[f] \in [I^n, \partial(I^n), J^{n-1}; X, A, a_0]$, *онда је* $[f] = 0$ *ако и само ако постоји* $g : I^n \to X$ *такво да је* $f \simeq g$ $(rel\ \partial(I^n))$ *и* $g(I^n) \subseteq A$.

Посебно, ако је $f(I^n) \subseteq A$, *онда је* $[f] = 0$.

Став 2.29 *Нека је* (X, A) *тополошки пар и* $n \in \mathbb{N}$. *Следећа два исказа су еквивалентна.*

(1) За свако $f : (D^n, S^{n-1}) \to (X, A)$ *постоји* $g : (D^n, S^{n-1}) \to (X, A)$ *такво да је* $f \simeq g$ *у* Top^2 *и* $g(D^n) \subseteq A$;

(2) За свако $a_0 \in A$ *је* $\pi_n(X, A, a_0) = 0$.

Доказ: (1) $\Rightarrow$ (2) : Нека је $a_0 \in A$ и $f : (D^n, S^{n-1}, a_0) \to (X, A, a_0)$ и нека је $g : (D^n, S^{n-1}) \to (X, A)$ из услова (1). Из претходне леме (импликације (3) $\Rightarrow$ (1)) добијамо да је $[f]_{0r} = 0$.
(2) $\Rightarrow$ (1) : Нека је $f : (D^n, S^{n-1}) \to (X, A)$ и $a_0 = f(e_1)$. Тада је $\pi_n(X, A, a_0) = 0$, па је $[f]_{0r} = 0$ и из претходне леме закључујемо да постоји тражено g. $\square$

Услов (1) има смисла и за $n = 0$. Ако је $f : (D^0, S^{-1}) = (*, \varnothing) \to (X, A)$, услов (1) значи да постоји $g : (*, \varnothing) \to (X, A)$ такво да је $g(*) \in A$, тј. ово управо значи да за сваку тачку из X постоји пут до неке тачке у A. Дакле, услов (1) за случај $n = 0$ значи да A сече све компоненте путне повезаности од X.

Дефиниција 2.30 Ако је (X, A) тополошки пар и $m \in \mathbb{N}_0$, кажемо да је пар (X, A) *m-повезан* ако важи услов (1) из става 2.29 за све $n \in \{0, 1, \dots, m\}$.

Ако је A путно повезан, пар (X, A) је m-повезан ако и само ако је X путно повезан и $\pi_n(X, A) = 0$ за све $n \in \{1, 2, \dots, m\}$.

2.3 Дуги тачни низ хомотопских група

Нека је $a_0 \in A \subseteq X$. Посматрајмо низ

$$\cdots \to \pi_n(A, a_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, a_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, a_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, a_0) \to \pi_{n-1}(X, a_0) \to \cdots$$

$$\cdots \to \pi_1(X, A, a_0) \to \pi_0(A, a_0) \to \pi_0(X, a_0). \tag{3}$$

Пресликавање i_* је индуковано инклузијом $i : (A, a_0) \hookrightarrow (X, a_0)$, а j_* индуковано инклузијом $j : (X, a_0, a_0) \hookrightarrow (X, A, a_0)$. Циљ нам је да дефинишемо пресликавање ∂ тако да претходни низ буде тачан.

Нека је $f : (I^n, \partial(I^n), J^{n-1}) \to (X, A, a_0)$. Дефинишимо пресликавање $\partial : \pi_n(X, A, a_0) \to \pi_{n-1}(A, a_0)$ са

$$\partial([f]) \stackrel{def}{=} \left[f|_{I^{n-1}}\right],$$

где је $f|_{I^{n-1}} : (I^{n-1}, \partial(I^{n-1})) \to (A, a_0)$, а $I^{n-1} = I^{n-1} \times \{0\} \subseteq \partial(I^n)$. Приметимо да је $\partial(I^{n-1}) = I^{n-1} \cap J^{n-1}$.

Проверимо да је овако дефинисано пресликавање добро дефинисано. Нека је $[f] = [g]$. Тада постоји хомотопија $H : I^n \times I \to X$ кроз пресликавања тројки $(I^n, \partial(I^n), J^{n-1}) \to (X, A, a_0)$ између пресликавања f и g. Тада је

$$H|_{I^{n-1} \times I} : f|_{I^{n-1}} \simeq g|_{I^{n-1}}$$

хомотопија кроз пресликавања парова $(I^{n-1}, \partial(I^{n-1})) \to (A, a_0)$, па је

$$\left[f|_{I^{n-1}}\right] = \left[g|_{I^{n-1}}\right],$$

тј. пресликавање ∂ је добро дефинисано.

За $n \geqslant 2$ ће ∂ бити и хомоморфизам. Заиста, нека су $[f], [g] \in \pi_n(X, A, a_0)$. Тада је

$$\partial([f] + [g]) = \left[(f + g)|_{I^{n-1}}\right],$$

$$\partial([f]) + \partial([g]) = \left[f|_{I^{n-1}} + g|_{I^{n-1}}\right],$$

а како је

$$(f + g)|_{I^{n-1}}(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, 0), & 0 \leqslant t_1 \leqslant \frac{1}{2} \\ g(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_{n-1}, 0), & \frac{1}{2} \leqslant t_1 \leqslant 1 \end{cases}$$

$$\left(f|_{I^{n-1}} + g|_{I^{n-1}}\right)(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, 0), & 0 \leqslant t_1 \leqslant \frac{1}{2} \\ g(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_{n-1}, 0), & \frac{1}{2} \leqslant t_1 \leqslant 1 \end{cases}$$

па је

$$\partial([f] + [g]) = \partial([f]) + \partial([g]),$$

тј. ∂ је хомоморфизам.

Низ (3) ће бити тачан низ скупова са истакнутим елементом, ако избацимо последња три члана онда ће то бити дуги тачни низ група, а ако избацимо последњих шест чланова, добићемо дуги тачни низ Абелових група. О томе говори наредна теорема.

Теорема 2.31 *Низ (3) је тачан.*

Доказ: Тачност на месту $\pi_n(X, x_0)$, $n \geqslant 1$: потребно је доказати да је $\operatorname{im} i_* = \ker j_*$.
$\subseteq$: Нека је $g : (I^n, \partial(I^n)) \to (A, a_0)$. Тада је

$$j_*(i_*([g])) = j_*([i \circ g]) = [j \circ i \circ g].$$

Желимо да покажемо да је претходна класа једнака нули. Посматрајмо следећи дијаграм.

$$\begin{tikzcd}
(I^n, \partial(I^n), J^{n-1}) \arrow[r, "g"] \arrow[ddr, dashed] & (A, a_0, a_0) \arrow[d, hook, "i"] \\
& (X, a_0, a_0) \arrow[d, hook, "j"] \\
& (X, A, a_0)
\end{tikzcd}$$

Јасно је да је $(j \circ i \circ g)(I^n) \subseteq A$, па на основу напомене 2.28 закључујемо да је $[j \circ i \circ g] = 0$.
$\supseteq$: Нека је $f : (I^n, \partial(I^n)) \to (X, a_0)$ и $j_*([f]) = 0$, тј. $[j \circ f] = 0$. Поново на основу напомене 2.28 имамо да постоји пресликавање $g : I^n \to X$ такво да је $f \simeq g$ $(rel\ \partial(I^n))$ и $g(I^n) \subseteq A$. Одатле закључујемо да је $[f] = [g]$. Како је $g(I^n) \subseteq A$, имамо $\widetilde{g} : I^n \to A$ такво да комутира наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd}
I^n \arrow[rr, dashed, "\widetilde{g}"] \arrow[dr, "g"'] & & A \arrow[dl, hook, "i"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Коначно добијамо

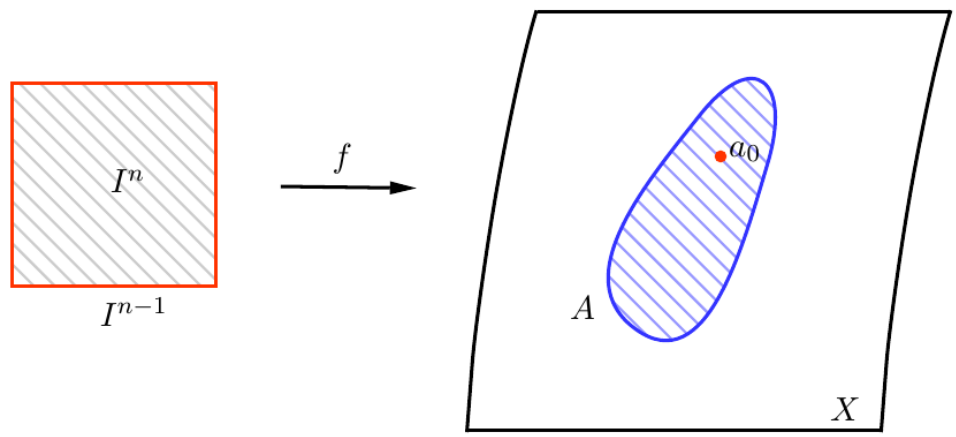
$$[f] = [g] = [i \circ \widetilde{g}] = i_*([\widetilde{g}]),$$

па је $[f] \in \operatorname{im} i_*$.

Тачност на месту $\pi_n(X, A, a_0)$, $n \geqslant 1$: потребно је доказати да је $\operatorname{im} j_* = \ker \partial$.
$\subseteq$: Нека је $f : (I^n, \partial(I^n)) \to (X, a_0)$. Тада је

$$\partial(j_*([f])) = \partial([j \circ f]) = \left[(j \circ f)|_{I^{n-1}}\right].$$

Желимо да покажемо да је претходна класа једнака нули. Пресликавање f можемо представити наредном сликом.



Видимо да се цела граница $\partial(I^n)$ са f слика у a_0, па је специјално $(j \circ f)|_{I^{n-1}} = c_{a_0}$, одакле добијамо

$$\partial(j_*([f])) = [c_{a_0}] = 0.$$

$\supseteq$: Нека је $f : (I^n, \partial(I^n), J^{n-1}) \to (X, A, a_0)$ и нека је $\partial([f]) = 0$, тј. $[f|_{I^{n-1}}] = 0$. Ово управо значи да постоји хомотопија $H : I^{n-1} \times I \to A$, таква да је

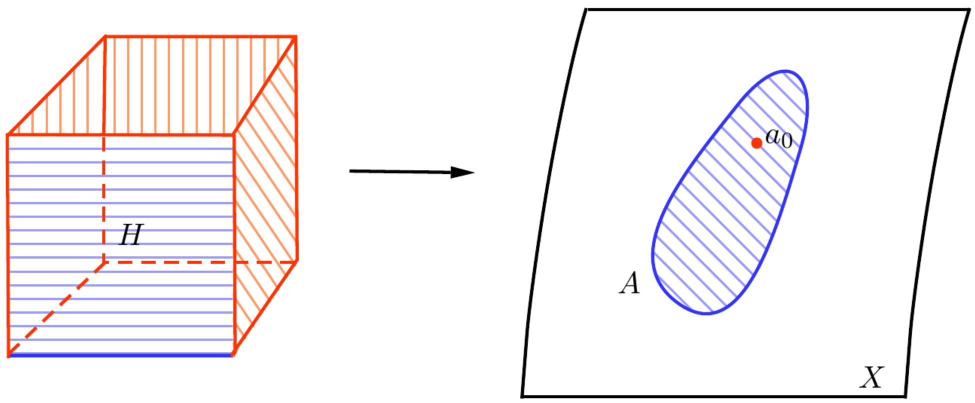
$$H : f|_{I^{n-1}} \simeq c_{a_0} \ (rel\ \partial(I^{n-1})).$$

Желимо да добијемо пресликавање $g : (I^n, \partial(I^n), J^{n-1}) \to (X, A, a_0)$ такво да је $f \simeq g$ кроз пресликавања тројки и такво да је $g(\partial(I^n)) = \{a_0\}$. Дакле, биће нам потребна хомотопија $\bar{H} : I^n \times I \to X$ између f и g.

Погледајмо како изгледа H. Хомотопија H је дефинисана на $I^{n-1} \times I$ што можемо посматрати као предњу страну коцке $I^{n+1} = I^n \times I$. Такође имамо пресликавање f које слика $I^n \to X$, па можемо проширити H и на $I^n \times \{0\}$ на следећи начин.

$$H(y, 0) \stackrel{def}{=} f(y), \ y \in I^n.$$

Такође, H можемо проширити и на $J^{n-1} \times I$ тако што узмемо да је H на овом скупу константно, тј. $H(J^{n-1} \times I) = \{a_0\}$. Ова проширења су добро дефинисана јер и почетна хомотопија H и пресликавање f су једнаки константном пресликавању c_{a_0} на границама својих домена. Овако проширено H можемо представити наредном сликом.



Како $(I^n, \partial(I^n))$ има својство проширења хомотопије, постоји $\bar{H} : I^n \times I \to X$ такво да је

$$\bar{H}|_{I^n\times\{0\}\cup\partial(I^n)\times I} = H.$$

Дефинишимо

$$g(y) \stackrel{def}{=} \bar{H}(y,1),\ y \in I^n.$$

За овако дефинисано пресликавање важи да је $\bar{H} : f \simeq g$ кроз пресликавања тројки $(I^n, \partial(I^n), J^{n-1}) \to (X, A, a_0)$, тј. $[f] = [g]$. При том, како је $g(\partial(I^n)) = \{a_0\}$, имамо да постоји пресликавање $\widetilde{g}$ такво да комутира наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd}
(I^n, \partial(I^n), J^{n-1}) \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, dashed, "\widetilde{g}"'] & & (X, A, a_0) \\
& (X, a_0, a_0) \arrow[ur, hook, "j"'] &
\end{tikzcd}$$

Коначно добијамо

$$[f] = [g] = [j \circ \widetilde{g}] = j_*([\widetilde{g}]),$$

па је $[f] \in \operatorname{im} j_*$.

Тачност на месту $\pi_n(A, a_0),\ n \geqslant 1$: потребно је доказати да је $\operatorname{im}\partial = \ker i_*$.
$\subseteq$: Нека је $f : (I^n, \partial(I^n), J^{n-1}) \to (X, A, a_0)$. Тада је

$$i_*(\partial([f])) = i_*([f|_{I^{n-1}}]) = [(i \circ f)|_{I^{n-1}}].$$

Желимо да покажемо да је претходна класа једнака нули. Пресликавање $f : I^n \to X$ можемо видети као хомотопију $f : I^{n-1} \times I \to X$. Како је $f|_{I^{n-1}\times\{0\}} = f$ и $f|_{I^{n-1}\times\{1\}} = c_{a_0}$, то је

$$f : f|_{I^{n-1}} \simeq c_{a_0}\ (rel\ \partial(I^{n-1})),$$

па добијамо
$$i_*(\partial([f])) = [c_{a_0}] = 0.$$
$\supseteq$: Нека је $g : (I^{n-1}, \partial(I^{n-1})) \to (A, a_0)$ и нека је $i_*([g]) = 0$. Тада је $[i \circ g] = [c_{a_0}]$ па постоји хомотопија $f : I^{n-1} \times I \to X$ таква да је
$$f : i \circ g \simeq c_{a_0} \ (rel\ \partial(I^{n-1})).$$
Одавде закључујемо да је $[f] \in \pi_n(X, A, a_0)$ и
$$\partial([f]) = [f|_{I^{n-1}}] = [g],$$
па је $[g] \in \operatorname{im} \partial$. $\square$

Сада ћемо навести својство природности за дуги тачни низ хомотопских група. Ако је $\varphi : (X, A, a_0) \to (Y, B, b_0)$ морфизам у категорији Top_0^2, тада комутира наредни дијаграм.
$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \pi_n(A, a_0) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\varphi_*"] & \pi_n(X, a_0) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "\varphi_*"] & \pi_n(X, A, a_0) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\varphi_*"] & \pi_{n-1}(A, a_0) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \pi_n(B, b_0) \arrow[r, "i'_*"] & \pi_n(Y, b_0) \arrow[r, "j'_*"] & \pi_n(Y, B, b_0) \arrow[r, "\partial"] & \pi_{n-1}(B, b_0) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Уколико је A путно повезан, дуги тачни низ (3) можемо писати на следећи начин.
$$\cdots \to \pi_n(A) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A) \to \cdots$$

Дефиниција 2.32 Непрекидно пресликавање $f : X \to Y$ је *слаба хомотопска еквиваленција* ако је за свако $x \in X$ и свако $n \in \mathbb{N}_0$ пресликавање $f_* : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, f(x))$ изоморфизам.
Ако је $m \in \mathbb{N}_0$, пресликавање f је *m-еквиваленција* ако је за свако $x \in X$ пресликавање $f_* : \pi_n(X, x) \to \pi_n(Y, f(x))$ изоморфизам за $n < m$ и епиморфизам за $n = m$.

Приметимо да ако је f хомотопска еквиваленција, онда је и слаба хомотопска еквиваленција. Такође, f је слаба хомотопска еквиваленција ако и само ако је m-еквиваленција за свако $m \in \mathbb{N}_0$. Специјално за $m = 0$ имамо да је f 0-еквиваленција ако и само ако $\operatorname{im} f$ сече све компоненте путне повезаности од Y.

Став 2.33 *Нека је (X, A) тополошки пар, $i : A \hookrightarrow X$ и $m \in \mathbb{N}_0$. Инклузија i је m-еквиваленција ако и само ако је (X, A) m-повезан.*

Доказ: Тврђење се лако показује коришћењем дугог тачног низа хомотопских група и дефиниције m-повезаног простора. $\square$

Теорема 2.34 *Ако је тополошки пар (X, A) m-повезан, онда је $H_k(X, A) = 0$, за $k \leqslant m$.*

Последица 2.35 *Ако је $f : X \to Y$ m-еквиваленција, онда је $f_* : H_k(X) \to H_k(Y)$ изоморфизам за $k < m$, а епиморфизам за $k = m$.*

Доказ: Нека је $f : X \to Y$ непрекидно пресликавање. Тада постоји хомотопска еквиваленција h_f таква да комутира наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd}
 & M_f \arrow[d, "h_f"] \\
X \arrow[ur, hook, "j"] \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Како је $(h_f)_* \circ j_* = f_*$ и $(h_f)_*$ је изоморфизам, то закључујемо да је f m-еквиваленција ако и само ако је j m-еквиваленција, а одатле и на основу става 2.33 имамо да је пар (M_f, X) m-повезан. Сада на основу теореме 2.34 имамо да је $H_k(M_f, X) = 0$ за $k \leqslant m$, па је $j_* : H_k(X) \to H_k(M_f)$ изоморфизам за $k < m$ и епиморфизам за $k = m$. $\square$

Последица 2.36 *Ако је f слаба хомотопска еквиваленција, онда је $f_* : H_k(X) \to H_k(Y)$ изоморфизам за све $k \in \mathbb{N}_0$.*

2.4 Задаци

1. Нека је X путно повезан простор и $n \in \mathbb{N}$. Доказати да је X n-прост ако и само ако за сваке две тачке $x_0, x_1 \in X$ и свака два пута $u, v : I \to X$ таква да је $u(0) = v(0) = x_0$ и $u(1) = v(1) = x_1$ важи $\beta_u = \beta_v : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(X, x_1)$.

2. Нека је X тополошки простор, $A \subseteq X$ и $i : A \hookrightarrow X$ инклузија.

   (a) Ако је $u : I \to A$ пут у потпростору A, $a_0 = u(0)$ и $a_1 = u(1)$, доказати да комутира наредни дијаграм (водоравни низови су дуги тачни низови хомотопских група за пар (X, A)).

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \pi_n(A, a_0) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, tail, two heads, "\beta_u"'] & \pi_n(X, a_0) \arrow[r] \arrow[d, tail, two heads, "\beta_{i\circ u}"'] & \pi_n(X, A, a_0) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, tail, two heads, "\beta_u"'] & \pi_{n-1}(A, a_0) \arrow[r] \arrow[d, tail, two heads, "\beta_u"'] & \cdots \arrow[r] & \pi_1(A, a_0) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, tail, two heads, "\beta_u"'] & \pi_1(X, a_0) \arrow[d, tail, two heads, "\beta_{i\circ u}"'] \\
\cdots \arrow[r] & \pi_n(A, a_1) \arrow[r, "i_*"] & \pi_n(X, a_1) \arrow[r] & \pi_n(X, A, a_1) \arrow[r, "\partial"] & \pi_{n-1}(A, a_1) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \pi_1(A, a_1) \arrow[r, "i_*"] & \pi_1(X, a_1)
\end{tikzcd}$$

(б) Нека је $a_0 \in A$. Знамо да фундаментална група $\pi_1(A, a_0)$ дејствује на групе $\pi_n(A, a_0)$, $n \geqslant 1$, и $\pi_n(X, A, a_0)$, $n \geqslant 2$, али она дејствује и на групе $\pi_n(X, a_0)$, $n \geqslant 1$ (то дејство је композиција $\pi_1(A, a_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X, a_0) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\pi_n(X, a_0))$, где је друга стрелица познато дејство фундаменталне групе $\pi_1(X, a_0)$ на $\pi_n(X, a_0)$). Доказати да су сви хомоморфизми у дугом тачном низу хомотопских група за пар (X, A)

$$\cdots \to \pi_n(A, a_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, a_0) \to \pi_n(X, A, a_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, a_0) \to \cdots \to \pi_1(A, a_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X, a_0)$$

$\pi_1(A, a_0)$-еквиваријантна пресликавања.

3. Нека је (X, μ, e) H-простор. Ако су $p_1, p_2 : X \times X \to X$ пројекције на прву односно другу координату и са $+$ означена операција у $\pi_n(X)$, доказати да за свако $n \in \mathbb{N}$ комутира наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(X \times X) \arrow[r, "\mu_*"] \arrow[d, "((p_1)_*, (p_2)_*)"', "\cong"] & \pi_n(X) \\
\pi_n(X) \oplus \pi_n(X) \arrow[ur, "+"'] &
\end{tikzcd}$$

4. Нека је X H-простор, $\mu : X \times X \to X$ одговарајућа операција, а e неутрал.

(а) Ако су дата непрекидна пресликавања $\varphi, \psi : (S^n, e_1) \to (X, e)$ $(n \in \mathbb{N})$, доказати да у групи $\pi_n(X, e)$ важи: $[\varphi]_0 + [\psi]_0 = [\mu \circ (\varphi, \psi)]_0$.

(б) Ако је $m \in \mathbb{N}$, наћи пресликавање $f : (X, e) \to (X, e)$ такво да за све $n \in \mathbb{N}$ важи да је хомоморфизам $f_* : \pi_n(X, e) \to \pi_n(X, e)$ множење са m.

5. Доказати да простори $S^2 \times \mathbb{R}\mathrm{P}^3$ и $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \times S^3$ имају изоморфне све хомотопске групе али нису хомотопски еквивалентни.

6. Нека су (X, x_0) и (Y, y_0) тополошки простори са базним тачкама и уочимо утапање $j : X \vee Y \hookrightarrow X \times Y$. Доказати да за свако $n \geqslant 2$ важи

$$\pi_n(X \vee Y) \cong \pi_n(X) \oplus \pi_n(Y) \oplus \pi_{n+1}(X \times Y, X \vee Y).$$

7. Ако су $f : X \to Z$ и $g : Y \to W$ слабе хомотопске еквиваленције, доказати да је и $f \times g : X \times Y \to Z \times W$ такође слаба хомотопска еквиваленција.

3 Проширење и подизање пресликавања

3.1 CW-комплекси

Дефиниција 3.1 CW-*комплекс* (или ћелијски комплекс) чине Хауздорфов простор X, фамилија $E = \{e_\alpha^n \mid n \in \mathbb{N}_0,\ \alpha \in \mathcal{A}_n\}$ његових дисјунктних потпростора таквих да је $X = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}_0}\bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{A}_n} e_\alpha^n$ и фамилија непрекидних пресликавања $\{\phi_\alpha^n : D^n \to X \mid n \in \mathbb{N}_0,\ \alpha \in \mathcal{A}_n\}$ таквих да важе следећа два својства.

(C) За свако $n \in \mathbb{N}_0$ и за свако $\alpha \in \mathcal{A}_n$ је $\overset{\circ}{D^n} \overset{\phi_\alpha^n}{\approx} e_\alpha^n$ и постоји коначан скуп $\{e_{\alpha_1}^{n_1}, e_{\alpha_2}^{n_2}, \dots, e_{\alpha_k}^{n_k}\} \subseteq E$ такав да је $\phi_\alpha^n(\partial D^n) \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{k} e_{\alpha_i}^{n_i}$ и $n_i < n$ за $i = \overline{1,k}$.

(W) Ако је $A \subseteq X$ онда је $A \in \mathcal{F}_X$ ако и само ако за свако $n \in \mathbb{N}_0$ и за свако $\alpha \in \mathcal{A}_n$ је $A \cap \overline{e_\alpha^n} \in \mathcal{F}_{\overline{e_\alpha^n}}$.

Потпростор e_α^n зовемо *ћелија димензије* n (или n-*ћелија*), а пресликавање ϕ_α^n *карактеристична функција ћелије* e_α^n.
Простор $X^n \overset{def}{=} \bigcup\limits_{i=0}^{n}\bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{A}_i} e_\alpha^i$ зовемо n-*скелет* ћелијског комплекса X.

Приметимо да је $\operatorname{im}\phi_\alpha^n \subseteq X^n$, па често карактеристичну функцију гледамо као $\phi_\alpha^n : D^n \to X^n$, а понекад и као $\phi_\alpha^n : (D^n, S^{n-1}) \to (X^n, X^{n-1})$. Рестрикцију $\varphi_\alpha^n \overset{def}{=} \phi_\alpha^n|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \to X^{n-1}$ зовемо *функција лепљења.*

Димензија CW-комплекса X је $\dim X \overset{def}{=} \min\{n \in \mathbb{N}_0 \mid X = X^n\}$, уколико постоји $n \in \mathbb{N}_0$ такав да је $X = X^n$.

Дефиниција 3.2 Ако је $A \subseteq X$, кажемо да је A *поткомплекс* CW-комплекса X ако је A унија неких ћелија од X таквих да за све $n \in \mathbb{N}_0$ и $\alpha \in \mathcal{A}_n$ важи

$$e_\alpha^n \subseteq A \implies \overline{e_\alpha^n} \subseteq A.$$

Специјално, за свако $n \in \mathbb{N}_0$ X^n је поткомплекс од X. И празан скуп сматрамо поткомплексом. Ако је A поткомплекс од X, онда пар (X, A) називамо CW-*паром.*

3.2 Својства CW-комплекса

Нека је X CW-комплекс. Тада важе следећа својства.

1) X^0 је дискретан потпростор од X.

2) За свако $n \in \mathbb{N}_0$ и $\alpha \in \mathcal{A}_n$ је $\phi_\alpha^n(D^n) = \overline{e_\alpha^n}$.

3) Нека је Y произвољан тополошки простор и $f : X \to Y$. Наредна четири исказа су еквивалентна.

   (1) Пресликавање f је непрекидно;

   (2) За свако $n \in \mathbb{N}_0$ пресликавање $f|_{X^n} : X^n \to Y$ је непрекидно;

   (3) За свако $n \in \mathbb{N}_0,\ \alpha \in \mathcal{A}_n$ пресликавање $f|_{\overline{e^n_\alpha}} : \overline{e^n_\alpha} \to Y$ је непрекидно;

   (4) За свако $n \in \mathbb{N}_0,\ \alpha \in \mathcal{A}_n$ пресликавање $f \circ \phi^n_\alpha : D^n \to Y$ је непрекидно.

   Доказ: Импликације (1) $\Rightarrow$ (2) и (2) $\Rightarrow$ (3) тривијално важе јер је рестрикција непрекидног пресликавања непрекидно.
   (3) $\Rightarrow$ (1): Нека је $B \in \mathcal{F}_Y$. Тада на основу (3) за свако $n \in \mathbb{N}_0,\ \alpha \in \mathcal{A}_n$ важи

$$(f|_{\overline{e^n_\alpha}})^{-1}(B) = f^{-1}(B) \cap \overline{e^n_\alpha} \in \mathcal{F}_{\overline{e^n_\alpha}},$$

   па на основу услова (W) из дефиниције добијамо $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_X$, тј. пресликавање f је непрекидно.
   (3) $\leftrightarrow$ (4) Посматрајмо наредни комутативни дијаграм.

$$\begin{tikzcd}
D^n \arrow[rr, "f\circ\phi^n_\alpha"] \arrow[dr, two heads, "\phi^n_\alpha"'] & & Y \\
& \overline{e^n_\alpha} \arrow[ur, "f|_{\overline{e^n_\alpha}}"'] &
\end{tikzcd}$$

   Пресликавање ϕ^n_α је непрекидно, „на“ и како слика компакт у T_2 простор, онда је и затворено па је количничко. Одатле закључујемо да је $f|_{\overline{e^n_\alpha}}$ непрекидно ако и само ако је $f \circ \phi^n_\alpha$ непрекидно. $\square$

4) X је локално путно повезан. Зато се компоненте повезаности поклапају с компонентама путне повезаности, па важи и: X је повезан ако и само ако је путно повезан.

5) Ако је $K \in \mathcal{K}_X$, онда K сече највише коначно много ћелија од X.
   Доказ: Нека је A подскуп од K који се састоји од по једне тачке из сваке ћелије која сече K. Желимо да покажемо да је A коначан.

   Знамо да је $A \cap \overline{e^n_\alpha}$ коначан (својство 2) и особина (C)), па је затворен у X, самим тим и у $\overline{e^n_\alpha}$, па на основу услова (W) из дефиниције добијамо да је $A \in \mathcal{F}_X$. Слично, ако је $B \subseteq A$ произвољан подксуп, онда је $B \cap \overline{e^n_\alpha}$ коначан па је B затворен. Како је сваки подскуп од A затворен, закључујемо да је A дискретан. Даље, како је A затворени подскуп од K, то он мора бити затворен у K, а како је K компактан, то је и A компактан. Коначно, A је компактан и дискретан па мора бити коначан. $\square$

Посебно, X је компактан ако и само ако има коначно много ћелија.

6) Нека је Y CW-комплекс и важи бар један од наредна два услова.

   (1) Бар један од простора X и Y је локално компактан;

   (2) CW-комплекси X и Y имају највише пребројиво много ћелија.

   Тада је и $X \times Y$ CW-комплекс, при чему су ћелије од $X \times Y$ облика $e^n_\alpha \times \hat{e}^m_\beta$, где је e^n_α n-ћелија у X, а $\hat{e}^m_\beta$ m-ћелија у Y. Карактеристичне функције су композиције $(\phi^n_\alpha \times \phi^m_\beta) \circ h$, где је $h : D^{m+n} \to D^n \times D^m$ неки фиксирани хомеоморфизам, тј. комутира наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd} D^{m+n} \arrow[rr, "\phi^{n+m}_{\alpha,\beta}"] \arrow[dr, "h"'] & & X \times Y \\ & D^n \times D^m \arrow[ur, "\phi^n_\alpha \times \phi^m_\beta"'] & \end{tikzcd}$$

   Ако су X и Y коначне димензије, онда је

$$\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y.$$

   Посебно, $X \times I$ је CW-комплекс са ћелијама $e^n_\alpha \times \{0\}$, $e^n_\alpha \times \{1\}$, $e^n_\alpha \times (0,1)$, $n \in \mathbb{N}_0$, $\alpha \in \mathcal{A}_n$.

7) Нека је $H : X \times I \to Y$, где је Y произвољан тополошки простор. Следећа четири исказа су еквивалентна.

   (1) Пресликавање H је непрекидно;

   (2) За свако $n \in \mathbb{N}_0$, пресликавање $H|_{X^n \times I} : X^n \times I \to Y$ је непрекидно;

   (3) За свако $n \in \mathbb{N}_0$ и $\alpha \in \mathcal{A}_n$, пресликавање $H|_{\overline{e^n_\alpha} \times I} : \overline{e^n_\alpha} \times I \to Y$ је непрекидно;

   (4) За свако $n \in \mathbb{N}_0$ и $\alpha \in \mathcal{A}_n$, пресликавање $H \circ (\phi^n_\alpha \times \mathbb{1}_I) : D^n \times I \to Y$ је непрекидно.

8) Ако је A поткомплекс од X онда је $A \in \mathcal{F}_X$ и A је CW-комплекс. Ако су A и B поткомплекси од X, онда су и $A \cap B$ и $A \cup B$ поткомплекси од X.

9) Сваки CW-пар има својство проширења хомотопије.

10) За свако $x \in X$ постоји CW-декомпозиција од X таква да је x 0-ћелија у тој декомпозицији.

11) Свака тачка $x \in X$ је недегенерисана.

12) Свака компонента повезаности (односно путне повезаности) од X садржи 0-ћелију.
Доказ: Нека је C компонента од X. Тада је C унија неких ћелија и нека је e^n_α ћелија у C најмање димензије. Желимо да покажемо да је $n = 0$. Имамо да важи

$$\phi^n_\alpha(D^n) = \overline{e^n_\alpha} \subseteq C,$$

јер је $\overline{e^n_\alpha}$ повезан, па је

$$\phi^n_\alpha(\partial D^n) \subseteq X^{n-1} \cap C.$$

Ако је $n > 0$ онда је $\partial D^n \neq \varnothing$, па је $X^{n-1} \cap C \neq \varnothing$ што је немогуће јер је e^n_α минималне димензије. Дакле, мора бити $n = 0$. $\square$

13) Ако је (X, A) CW-пар, онда је X/A CW-комплекс.

14) Конус CX, суспензија SX и редукована суспензије ΣX су CW-комплекси, где је редукована суспензија дефинисана са

$$\Sigma X \overset{def}{=} X \times Y/_{X \times \{0,1\} \cup \{x_0\} \times I},$$

за базну тачку $x_0 \in X$. Пошто је тачка x_0 недегенерисана (својство 11)), важи да је $SX \simeq \Sigma X$.

$$\dim(CX) = \dim(SX) = 1 + \dim X,$$

$$\dim \Sigma X = \begin{cases} 1 + \dim X, & |X| \geqslant 2 \\ 0, & |X| = 1 \end{cases}$$

Дефиниција 3.3 Нека су X и Y CW-комплекси. Непрекидно пресликавање $f : X \to Y$ је *ћелијско* ако је $f(X^n) \subseteq Y^n$ за све $n \in \mathbb{N}_0$.

Теорема 3.4 (о ћелијској апроксимацији) *Нека су X и Y CW-комплекси и $f : X \to Y$ непрекидно. Тада постоји ћелијско пресликавање $g : X \to Y$ такво да је $f \simeq g$. Штавише, ако је A поткомплекс од X и $f|_A$ ћелијско, онда постоји ћелијско пресликавање $g : X \to Y$ такво да је $f \simeq g$ $(rel\ A)$.*

Скица доказа: Први део теореме је специјалан случај другог дела за $A = \varnothing$, па ћемо само описати како се изводи доказ другог дела.

Идеја је да се конструише низ непрекидних функција $f_0, f_1, f_2, \ldots : X \to Y$ таквих да је

$$f \simeq f_0\ (rel\ A),\quad f_{n-1} \simeq f_n\ (rel\ A \cup X^{n-1}),\ n \in \mathbb{N}$$

и $f_n|_{A\cup X^n}$ ћелијско, $n \in \mathbb{N}_0$. Када се конструишу та пресликавања потребно је некако надовезати овај бесконачни низ хомотопија.

Пресликавање f_0 добићемо помоћу хомотопије $H_0 : X \times I \to Y$, коју, пак, добијамо користећи својство проширења хомотопије за CW-пар $(X, A \cup X^0)$.

$$H_0(x,0) \overset{def}{=} f(x),\ x \in X,$$

$$H_0(a,t) \overset{def}{=} f(a),\ (a,t) \in A \times I,$$

$$H_0(e_\alpha^0, t) \overset{def}{=} u_\alpha(t),\ t \in I,$$

где је e_α^0 0-ћелија у $X\backslash A$, а $u_\alpha : I \to Y$ пут од тачке $f(e_\alpha^0)$ до неке 0-ћелије $u_\alpha(1)$ CW-комплекса Y (овакав пут постоји јер Y^0 сече све компоненте (путне) повезаности од Y). Ако дефинишемо $f_0(x) \overset{def}{=} H_0(x,1),\ x \in X$, онда се лако види да је

$$H_0 : f \simeq f_0\ (rel\ A)$$

и да је $f_0|_{A\cup X^0}$ ћелијско.

Нека је сад $n \in \mathbb{N}$ и претпоставимо да имамо пресликавања $f_0, f_1, \dots f_{n-1} : X \to Y$ с потребним особинама. Следећи члан низа, пресликавање f_n, добићемо помоћу својства проширења хомотопије за CW-пар $(X, A \cup X^n)$. Пресликавање $f_{n-1} : X \to Y$ јесте ћелијско на $A \cup X^{n-1}$. Идеја је да га на свакој n-ћелији $e_\alpha^n \subseteq X\backslash A$, тј. њеном затворењу $\overline{e_\alpha^n}$, модификујемо одговарајућом хомотопијом тако да слика од $\overline{e_\alpha^n}$ буде садржана у Y^n. Све те хомотопије ће, на основу еквиваленције $(1) \leftrightarrow (3)$ из својства 7), дати хомотопију $H_n : (A \cup X^n) \times I \to Y$, односно, након примене својства проширења хомотопије, $H_n : X \times I \to Y$, такву да је $H_n : f_{n-1} \simeq f_n\ (rel\ A \cup X^{n-1})$ и $f_n|_{A\cup X^n}$ ћелијско.

Нека је зато $e_\alpha^n \subseteq X\backslash A$ фиксирана n-ћелија и $\phi_\alpha^n : D^n \to \overline{e_\alpha^n}$ њена карактеристична функција. Знамо да је $(f_{n-1} \circ \phi_\alpha^n)(S^{n-1}) \subseteq Y^{n-1}$. Скуп $(f_{n-1} \circ \phi_\alpha^n)(D^n) = f_{n-1}(\overline{e_\alpha^n})$ јесте компактан, па сече највише коначно много ћелија у Y. Зато постоји минималан $m \in \mathbb{N}$ такав да је $f_{n-1}(\overline{e_\alpha^n}) \subseteq Y^m$. Ако је $m \leqslant n$, онда је овде све у реду - $f_{n-1}|_{\overline{e_\alpha^n}}$ је већ ћелијско. Ако је $m > n$, онда модификујемо $f_{n-1}|_{\overline{e_\alpha^n}}$ (одговарајућим хомотопијама), па најпре постигнемо да слика буде садржана у Y^{m-1}, па у Y^{m-2} и тако даље, док не дођемо до Y^n. Један корак у тој модификацији (са Y^m на Y^{m-1}) изгледа овако. Иако је $m > n$ слика пресликавање $f_{n-1}|_{\overline{e_\alpha^n}}$, односно $f_{n-1} \circ \phi_\alpha^n$, може покрити и целу m-ћелију од Y (знамо за Пеанову криву!). Најтежи и технички најзахтевнији део доказа теореме о ћелијској апроксимацији представља доказ чињенице да се $f_{n-1} \circ \phi_\alpha^n$ може модификовати хомотопијом релативно S^{n-1} тако да у свакој m-ћелији од Y промаши бар једну тачку. Другим речима, постоји скуп $S \subset Y^m$ који се састоји од по једне тачке из (унутрашњости) сваке m-ћелије у Y, као и пресликавање $g_\alpha^n : \overline{e_\alpha^n} \to Y^m\backslash S$, тако да троугао $(*)$ на наредном дијаграму комутира до на хомотопију релативно $\overline{e_\alpha^n}\backslash e_\alpha^n$.

Јака деформациона ретракција $D^m \backslash \{z\} \to S^{m-1}$, где је $z \in \overset{\circ}{D^m}$, даје јаку деформациону ретракцију $r : Y^m \backslash S \to Y^{m-1}$.

Зато је

$$i \circ r \circ g^n_\alpha \simeq g^n_\alpha \ (rel \ \overline{e^n_\alpha} \backslash e^n_\alpha),$$

$$\text{тј. } i \circ r \circ g^n_\alpha \circ \phi^n_\alpha \simeq g^n_\alpha \circ \phi^n_\alpha \ (rel \ S^{n-1})$$

.

$$\begin{tikzcd}
D^n \arrow[dr, "\phi^n_\alpha"'] \arrow[drrrr, "f_{n-1}\circ\phi^n_\alpha"] & & & & \\
& \overline{e^n_\alpha} \arrow[rrr] \arrow[drr, dashed] \arrow[ddr, dashed, "g^n_\alpha"] \arrow[dddd, dashed, "r\circ g^n_\alpha"'] & & & Y \\
& & (*) & Y^m \arrow[ur, hook] & \\
& & Y^m\backslash S \arrow[ur, hook] \arrow[ddl, bend left, "r"] & & \\
& & & & \\
& Y^{m-1} \arrow[uur, hook, "\simeq"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Дакле, $f_{n-1}|_{\overline{e^n_\alpha}} \simeq r \circ g^n_\alpha \ (rel \ \overline{e^n_\alpha} \backslash e^n_\alpha)$, а слика од $r \circ g^n_\alpha$ јесте садржана у Y^{m-1}.

Кад се ово уради за све n-ћелије у $X \backslash A$, слагањем добијених хомотопија и применом својства проширења хомотопије за пар $(X, A \cup X^n)$, добијамо $H_n : X \times I \to Y$, па ако дефинишемо $f_n(x) \overset{def}{=} H_n(x, 1)$ $x \in X$, добијамо индуктивни корак у конструкцији најављеног низа.

Коначно, тражено $g : X \to Y$ дефинишемо на следећи начин:

$$g(x) \overset{def}{=} f_n(x), \ x \in X$$

где је $n \in \mathbb{N}_0$ такво да $x \in A \cup X^n$. Лако се проверава да је g добро дефинисано ћелијско пресликавање, а на исти начин као што ће то бити урађено у доказу става 3.14, сад се хомотопије $H_0, H_1, \ldots$ надовежу тако да дају хомотопију $H : f \simeq g \ (rel \ A)$. $\square$

Последица 3.5 *Ако тополошки простор X има* CW*-декомпозицију такву да је $X^{n-1} = *$ за неко $n \in \mathbb{N}$, онда је X $(n-1)$-повезан.*

Доказ: Нека је $0 \leqslant k \leqslant n-1$ и $f : S^k \to X$ непрекидно. Тада је $f \simeq i \circ g$, где је $g : S^k \to X^k = *$ ћелијско. Одавде добијамо да је $f \simeq const$, па је X $(n-1)$-повезан. $\square$

Пример 3.6

1) *Сфера S^n је $(n-1)$-повезан простор јер има* CW*-декомпозицију која се састоји од једне 0-ћелије и једне n-ћелије па је $X^{n-1} = *$;*

2) $\pi_2(S^1 \vee S^3) = 0$. *Заиста, нека је $f : S^2 \to S^1 \vee S^3$ произвољно пресликавање. Тада постоји ћелијско пресликавање $g : S^2 \to S^1$ (јер је* 2*-скелет од $S^1 \vee S^3$ управо кружница S^1) такво да наредни дијаграм комутира до на хомотопију.*

$$\begin{tikzcd}
S^2 \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "g"'] & S^1 \vee S^3 \\
& S^1 \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

Како је $\pi_2(S^1) = 0$, то је $g \simeq const$, па је и $f \simeq const$ одакле закључујемо да је $\pi_2(S^1 \vee S^3) = 0$.

Теорема 3.7 *Нека је X* CW*-комплекс, $n \in \mathbb{N}_0$ и X^n n-скелет од X. Тада је пар (X, X^n) n-повезан (тј. инклузија $j : X^n \hookrightarrow X$ је n-еквиваленција).*

Доказ: Нека је $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ и $f : (D^n, S^{n-1}) \to (X, X^n)$ произвољно. Желимо да покажемо да постоји пресликавање $g : (D^k, S^{k-1}) \to (X, X^n)$ такво да је $f \simeq g$ у категорији Top^2 и $g(D^k) \subseteq X^n$.

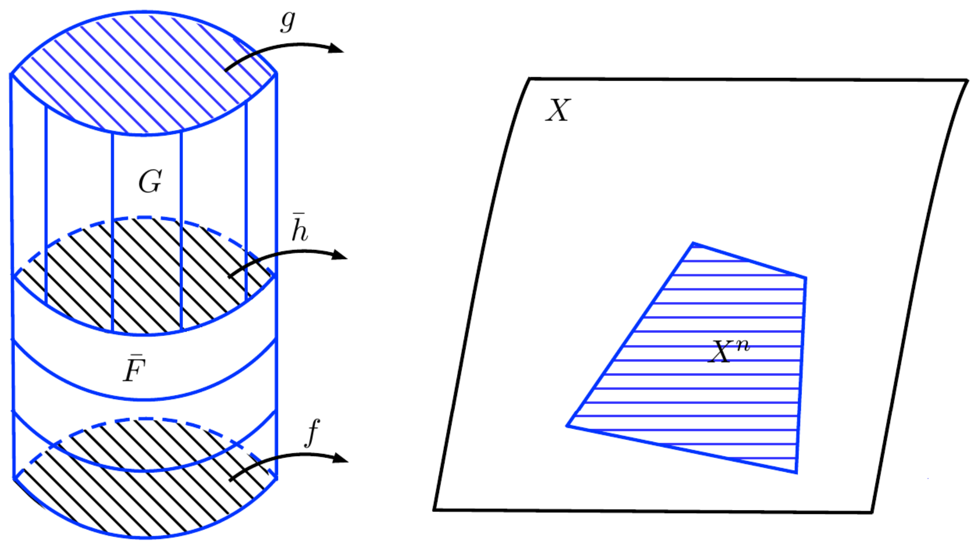
Ако је $k = 0$, горњи услов је еквивалентан томе да X^n сече све компоненте путне повезаности од X, а знамо да X^0 сече све компоненте путне повезаности од X, па ће то важити и за X^n.

Нека је сада $1 \leqslant k \leqslant n$ и $f : (D^k, S^{k-1}) \to (X, X^n)$ непрекидно. Како рестрикција $f|_{S^{k-1}}$ слика S^{k-1} у X^n, то постоји ћелијско пресликавање $h : S^{k-1} \to X^n$ и хомотопија $F : S^{k-1} \times I \to X^n$ таква да је $F : f|_{S^{k-1}} \simeq h$. Како пар (D^k, S^{k-1}) има својство проширења хомотопије, постоји $\bar{F} : D^k \times I \to X$ такво да је

$$\bar{F}(y, 0) = f(y),\ y \in D^k,$$

$$\bar{F}|_{S^{k-1} \times I} = F.$$

Узмимо $\bar{h} \overset{def}{=} \bar{F}(\cdot, 1)$, $\bar{h} : D^k \to X$ и $\bar{h}|_{S^{k-1}} = h$ је ћелијско па постоји $g : D^k \to X$ ћелијско такво да је $\bar{h} \simeq g$ $(rel\ S^{k-1})$. Тада је $g(D^k) \subseteq X^k \subseteq X^n$. Ако је $G : D^k \times I \to X$ хомотопија између $\bar{h}$ и g релативно S^{k-1}, надовежимо хомотопије $\bar{F}$ и G и добијамо жељену хомотопију коју можемо представити сликом.



Дакле, имамо да је

$$\bar{F} \cdot G : f \simeq g$$

у категорији Top^2. □

Последица 3.8 *Ако је X CW-комплекс и $n \in \mathbb{N}$, онда је $\pi_{n-1}(X) \cong \pi_{n-1}(X^n)$.*

Специјално, X је повезан ако и само ако је X^1 повезан. Такође, $\pi_1(X) \cong \pi_1(X^2)$. Од пре знамо и да је $H_i(X) \cong H_i(X^{i+1})$ за свако $i \in \mathbb{N}_0$.

3.3 Проблем проширења пресликавања

Нека је $A \subseteq X$ и $f : A \to Y$ непрекидно. Желимо да видимо када постоји непрекидно пресликавање $\bar{f} : X \to Y$ такво да је $\bar{f}|_A = f$.

Лема 3.9 *Нека је (X, A) CW-пар, Y произвољан тополошки простор, $n \in \mathbb{N}$ и нека је $f : A \cup X^{n-1} \to Y$ непрекидно (дозвољен је и случај $A = \varnothing$).*

Пресликавање f се може проширити на $A \cup X^n$ ако и само ако за сваку n-ћелију $e^n_\alpha \subseteq X \backslash A$ и њену функцију лепљења $\varphi^n_\alpha : S^{n-1} \to X^{n-1}$ важи да је композиција

$$S^{n-1} \xrightarrow{\varphi^n_\alpha} X^{n-1} \hookrightarrow A \cup X^{n-1} \xrightarrow{f} Y$$

хомотопски тривијална, тј. да се може проширити на диск D^n. Штавише, избором проширења $g_{n,\alpha} : D^n \to Y$ добијамо јединствено проширење $\bar{f} : A \cup X^n \to Y$ пресликавања f такво да за сваку n-ћелију $e^n_\alpha \subseteq X \backslash A$ комутира наредни дијаграм (где је ϕ^n_α карактеристична функција ћелије e^n_α).

$$\begin{tikzcd} D^n \arrow[rr, "g_{n,\alpha}"] \arrow[dr, "\phi^n_\alpha"'] & & Y \\ & A \cup X^n \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd} \tag{1}$$

И обрнуто, избором проширења $\bar{f}$ добијамо проширење $g_{n,\alpha} \overset{def}{=} \bar{f} \circ \phi^n_\alpha$. Дакле, имамо да постоји пресликавање $\bar{f} : A \cup X^n \to Y$ такво да комутира дијаграм

$$\begin{tikzcd} A \cup X^n \arrow[dr, dashed, "\bar{f}"] & \\ A \cup X^{n-1} \arrow[u, hook] \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd} \tag{2}$$

ако и само ако за сваку n-ћелију $e^n_\alpha \subseteq X \backslash A$ постоји пресликавање $g_{n,\alpha} : D^n \to Y$ такво да комутира наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd} D^n \arrow[rrrd, dashed, "g_{n,\alpha}"] & & & \\ S^{n-1} \arrow[u, hook] \arrow[r, "\varphi^n_\alpha"'] & X^{n-1} \arrow[r, hook] & A \cup X^{n-1} \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd} \tag{3}$$

Доказ: $\Rightarrow$: Нека је $e^n_\alpha \subseteq X \backslash A$. Узмимо $g_{n,\alpha} \overset{def}{=} \bar{f} \circ \phi^n_\alpha$. Нека је $z \in S^{n-1}$. Тада је

$$g_{n,\alpha}(z) = \bar{f}(\phi^n_\alpha(z)) = \bar{f}(\varphi^n_\alpha(z)) = f(\varphi^n_\alpha(z))$$

па комутира дијаграм (3).
$\Leftarrow$: Нека је $e^n_\alpha \subseteq X \backslash A$. Посматрајмо наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd} D^n \arrow[rr, "g_{n,\alpha}"] \arrow[dr, two heads, "\phi^n_\alpha"'] & & Y \\ & \overline{e^n_\alpha} \arrow[ur, dashed, "\bar{f}_\alpha"'] & \end{tikzcd} \tag{4}$$

Како је ϕ^n_α количничко, да би постојало пресликавање $\bar{f}_\alpha$ такво да претходни дијаграм комутира довољно је да покажемо да ако је $\phi^n_\alpha(z_1) = \phi^n_\alpha(z_2)$, за произвољне $z_1, z_2 \in D^n$, онда је $g_{n,\alpha}(z_1) = g_{n,\alpha}(z_2)$.

Нека је $z_1, z_2 \in D^n$ и $z_1 \neq z_2$. Како је $\phi^n_\alpha(z_1) = \phi^n_\alpha(z_2)$, онда је $z_1, z_2 \in S^{n-1}$, па је $\varphi^n_\alpha(z_1) = \varphi^n_\alpha(z_2)$. Из дијаграма (3) имамо

$$g_{n,\alpha}(z_1) = f(\varphi^n_\alpha(z_1)) = f(\varphi^n_\alpha(z_2)) = g_{n,\alpha}(z_2),$$

па постоји јединствено пресликавање $\bar{f}_\alpha$.

Остаје још да дефинишемо пресликавање $\bar{f} : A \cup X^n \to X$. Нека је $x \in A \cup X^n = (A \cup X^{n-1}) \sqcup \bigsqcup\limits_{e^n_\alpha \subseteq X \setminus A} e^n_\alpha$. Дефинишимо $\bar{f}$ на следећи начин.

$$\bar{f}(x) \overset{def}{=} \begin{cases} f(x), & x \in A \cup X^{n-1} \\ \bar{f}_\alpha(x), & x \in e^n_\alpha \subseteq X \setminus A \end{cases}$$

Пресликавање $\bar{f}$ је добро дефинисано. Да бисмо доказали да је непрекидно, а пошто је домен CW-комплекс, довољно је да докажемо да је непрекидно на затворењу сваке ћелије.

Ако је $e^k_\alpha \subseteq A \cup X^{n-1}$, онда је $\overline{e^k_\alpha} \subseteq A \cup X^{n-1}$, па је

$$\bar{f}|_{\overline{e^k_\alpha}} = f$$

непрекидно.

Ако је $e^n_\alpha \subseteq X \setminus A$, довољно је показати да је $\bar{f}|_{\overline{e^n_\alpha}} = \bar{f}_\alpha$ јер је $\bar{f}_\alpha$ непрекидно. За $x \in e^n_\alpha$ јесте $\bar{f}(x) = \bar{f}_\alpha(x)$. За $x \in \overline{e^n_\alpha} \setminus e^n_\alpha$ имамо $\bar{f}(x) = f(x)$. Како је $x \in \overline{e^n_\alpha} \setminus e^n_\alpha$, то постоји $z \in S^{n-1}$ такво да је $\phi^n_\alpha(z) = \varphi^n_\alpha(z) = x$, па је

$$\bar{f}(x) = f(x) = f(\varphi^n_\alpha(z)) \overset{(3)}{=} g_{n,\alpha}(z) \overset{(4)}{=} \bar{f}_\alpha(\phi^n_\alpha(z)) = \bar{f}_\alpha(x).$$

Дакле, $\bar{f}$ је непрекидно.

Још остаје да се уверимо да дијаграм (1) комутира, али то следи из комутативности наредног дијаграма.

$$\begin{tikzcd}
D^n \arrow[rr, "g_{n,\alpha}"] \arrow[dr, "\phi^n_\alpha"] \arrow[ddr, "\phi^n_\alpha"'] & & Y \\
& \overline{e^n_\alpha} \arrow[ur, "\bar{f}_\alpha"] \arrow[d, hook] & \\
& A \cup X^n \arrow[uur, "\bar{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

□

Напомена 3.10 *Дакле, питање да ли постоји проширење пресликавања f еквивалентно је томе да је за сваку n-ћелију $e^n_\alpha \subseteq X \setminus A$ класа $[f \circ \varphi^n_\alpha]_0 \in \pi_{n-1}(Y, y_0)$ тривијална, где је $y_0 = f(\varphi^n_\alpha(e_1))$. Те класе се зову опструкције.*

Теорема 3.11 (лема о проширењу) *Нека је* (X, A) CW-*пар,* Y *тополошки простор такав да за свако* $n \in \mathbb{N}$ *са својством да постоји* n-*ћелија у* $X \backslash A$ *важи да је* $\pi_{n-1}(Y, y_0) = 0$ *за све* $y_0 \in Y$*. Тада се свако пресликавање* $f : A \to Y$ *може проширити до* X*, тј. имамо наредни комутативни дијаграм.*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "\bar{f}"] & \\
A \arrow[u, hook] \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Доказ: Дефинисаћемо пресликавања $f_n : A \cup X^n \to Y$ за $n \in \mathbb{N}_0$ таква да је

$$f_0|_A = f \text{ и } f_n|_{A \cup X^{n-1}} = f_{n-1},\ n \in \mathbb{N}.$$

Нека је $n = 0$. Ако нема 0-ћелија у $X \backslash A$, онда узмимо $f_0 \overset{def}{=} f$. Ако је $e^0_\alpha \subseteq X \backslash A$ 0-ћелија, онда дефинишимо

$$f_0|_A \overset{def}{=} f, \quad f_0(e^0_\alpha) = y_\alpha,$$

где је $y_\alpha \in Y$ произвољна тачка.

Остала пресликавања дефинишемо индуктивно. Нека је $n \in \mathbb{N}$ и претпоставимо да постоји $f_{n-1} : A \cup X^{n-1} \to Y$ са потребним својствима. Ако нема n-ћелија у $X \backslash A$, онда узмимо $f_n \overset{def}{=} f_{n-1}$. Ако постоји n-ћелија $e^n_\alpha \in X \backslash A$, онда је $\pi_{n-1}(Y, y_0) = 0$, за свако $y_0 \in Y$, па је свако пресликавање $S^{n-1} \to Y$ хомотопски тривијално и из леме 3.9 следи да постоји проширење $f_n : A \cup X^n \to Y$ такво да је $f_n|_{A \cup X^{n-1}} = f_{n-1}$.

Остаје још да дефинишемо $\bar{f} : X \to Y$. Нека је $x \in X$ и $n \in \mathbb{N}_0$ такво да $x \in A \cup X^n$. Дефинишимо

$$\bar{f}(x) \overset{def}{=} f_n(x).$$

Ово $n \in \mathbb{N}_0$ није јединствено, али пошто је $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ низ проширења, пресликавање $\bar{f}$ ће бити добро дефинисано. Јасно, важи да је $\bar{f}|_A = f$. Остаје још да проверимо да ли је $\bar{f}$ непрекидно. Довољно је да је за свако $n \in \mathbb{N}_0$ рестрикција $\bar{f}|_{X^n}$ непрекидна, али како је $\bar{f}|_{X^n} = f_n|_{X^n}$, то свакако важи. Дакле, f је непрекидно. $\square$

Последица 3.12 *Нека је* X CW-*комплекс,* $n \in \mathbb{N}$*,* Y *путно повезан простор такав да је* $\pi_i(Y) = 0$ *за* $i > n$*. Тада се свако пресликавање* $f : X^{n+1} \to Y$ *проширује на* X*.*

3.4 Проблем подизања пресликавања

Нека су X, Y и E тополошки простори и $f : X \to Y$ и $p : E \to Y$ непрекидна пресликавања. Желимо да видимо када постоји подизање пресликавања f до $\widetilde{f} : X \to E$, тј. такво пресликавање да наредни дијаграм комутира до на хомотопију.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, dashed, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Уколико је p хомотопска еквиваленција, онда постоји $q : Y \to E$ такво да је $p \circ q \simeq \mathbb{1}_Y$ и $q \circ p \simeq \mathbb{1}_E$, па подизање $\widetilde{f}$ постоји и дато је са $\widetilde{f} \overset{def}{=} q \circ f$. Заиста, имамо да важи

$$p \circ \widetilde{f} = p \circ q \circ f \simeq \mathbb{1}_Y \circ f \simeq f.$$

Лема 3.13 *Нека је (X, A) CW-пар, (Y, B) тополошки пар, $n \in \mathbb{N}$ и нека је $f : (X, A \cup X^{n-1}) \to (Y, B)$. Тада постоји $g : X \to Y$ такво да је $f \simeq g$ $(rel\ A \cup X^{n-1})$ и $g(A \cup X^n) \subseteq B$ ако и само ако за сваку n-ћелију $e^n_\alpha \subseteq X \backslash A$ и њену карактеристичну функцију $\phi^n_\alpha : (D^n, S^{n-1}) \to (X^n, X^{n-1})$ важи да је $[f \circ \phi^n_\alpha]_{0r} = 0$ у $\pi_n(Y, B, b_0)$, где је $b_0 = f(\phi^n_\alpha(e_1))$.*

$$\begin{tikzcd} A \cup X^{n-1} \arrow[r, "f|_{A \cup X^{n-1}}"] \arrow[d, hook] & B \arrow[dd, hook] \\ A \cup X^n \arrow[d, hook] & \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} A \cup X^{n-1} \arrow[r, "g|_{A \cup X^{n-1}} = f|_{A \cup X^{n-1}}"] \arrow[d, hook] & B \arrow[dd, hook] \\ A \cup X^n \arrow[d, hook] \arrow[ur, dashed] & \\ X \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

Доказ: $\Rightarrow$: Нека је $e^n_\alpha \subseteq X \backslash A$. Користићемо лему 2.27, импликацију (4) $\Rightarrow$ (1). Показаћемо да важи исказ (4) одакле ће следити да важи (1) што нам је и потребно. Посматрајмо пресликавање $g \circ \phi^n_\alpha : D^n \to Y$. Тада је

$$f \circ \phi^n_\alpha \simeq g \circ \phi^n_\alpha\ (rel\ S^{n-1}),$$

$$g(\phi^n_\alpha(D^n)) \subseteq g(X^n) \subseteq B,$$

па је $g \circ \phi^n_\alpha$ тражено пресликавање из услова (4).
$\Leftarrow$: Сада ћемо конструисати пресликавање $g : X \to Y$ ћелију по ћелију. Нека је $e^n_\alpha \subseteq X \backslash A$. Како је $[f \circ \phi^n_\alpha]_{0r} = 0$. На основу импликације (1) $\Rightarrow$ (4) леме 2.27 имамо да постоји $g_{n,\alpha} : D^n \to Y$ такво да је $G_\alpha : f \circ \phi^n_\alpha \simeq g_{n,\alpha}$ $(rel\ S^{n-1})$ и $g_{n,\alpha}(D^n) \subseteq B$. Посматрајмо наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd} D^n \times I \arrow[rr, "G_\alpha"] \arrow[dr, two heads, "\phi^n_\alpha \times \mathbb{1}_I"'] & & Y \\ & \overline{e^n_\alpha} \times I \arrow[ur, dashed, "H_\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

Како је пресликавање $\phi_\alpha^n \times \mathbb{1}_I$ количничко, да би постојало пресликавање H_α такво да дијаграм комутира, довољно је да елементи из $D^n \times I$ који имају исте слике при пресликавању $\phi_\alpha^n \times \mathbb{1}_I$, имају исте слике и при пресликавању G_α. Нека су $(z_1, t_1), (z_2, t_2) \in D^n \times I$ различити елементи, тј. $z_1 \neq z_2$, такви да је

$$(\phi_\alpha^n \times \mathbb{1}_I)(z_1, t_1) = (\phi_\alpha^n \times \mathbb{1}_I)(z_2, t_2),$$

тј. $t_1 = t_2$ и $\phi_\alpha^n(z_1) = \phi_\alpha^n(z_2)$. Како је $z_1 \neq z_2$ и $\phi_\alpha^n(z_1) = \phi_\alpha^n(z_2)$, то мора бити $z_1, z_2 \in S^{n-1}$, а како је G_α хомотопија релативно S^{n-1}, онда имамо да је

$$G_\alpha(z_1, t) = G_\alpha(z_1, 0) = f(\phi_\alpha^n(z_1))),$$

$$G_\alpha(z_2, t) = G_\alpha(z_2, 0) = f(\phi_\alpha^n(z_2))).$$

Коначно, добијамо

$$g_{n,\alpha}(z_1) = f(\phi_\alpha^n(z_1)) = f(\phi_\alpha^n(z_2)) = g_{n,\alpha}(z_2),$$

па постоји $H_\alpha : \overline{e_\alpha^n} \times I \to Y$.

Сада дефинишемо хомотопију $\widetilde{H} : (A \cup X^n) \times I \to Y$ са

$$\widetilde{H}(x,t) \stackrel{def}{=} \begin{cases} f(x), & x \in A \cup X^{n-1} \\ H_\alpha(x,t), & x \in e_\alpha^n \subseteq X \backslash A \end{cases}$$

Како је $A \cup X^n = (A \cup X^{n-1}) \sqcup \bigsqcup\limits_{e_\alpha^n \subseteq X \backslash A} e_\alpha^n$, то је $\widetilde{H}$ добро дефинисано. Да бисмо показали да је непрекидно, довољно је да је непрекидно на затворењу сваке ћелије.

Ако је $e_\alpha^k \subseteq A \cup X^{n-1}$, онда је $\widetilde{H}|_{\overline{e_\alpha^k} \times I} = f \circ p_1$ непрекидно.

Ако је $e_\alpha^n \subseteq X \backslash A$, онда ћемо показати да је $\widetilde{H}|_{\overline{e_\alpha^n} \times I} = H_\alpha$. Ако је $x \in e_\alpha^n$, онда претходна једнакост свакако важи. Ако је $x \in \overline{e_\alpha^n} \backslash e_\alpha^n$, онда је $\widetilde{H}(x,t) = f(x)$. Како је $x \in \operatorname{im} \phi_\alpha^n$ и $x \in \overline{e_\alpha^n} \backslash e_\alpha^n$, то постоји $z \in S^{n-1}$ такво да је $x = \phi_\alpha^n(z)$, па је

$$\widetilde{H}(x,t) = f(x) = f(\phi_\alpha^n(z)) = G_\alpha(z,0) = G_\alpha(z,t) = H_\alpha(\phi_\alpha^n(z), t) = H_\alpha(x,t).$$

Дакле имамо да је и $\widetilde{H}|_{\overline{e_\alpha^n} \times I} = H_\alpha$ што је непрекидно, па коначно закључујемо да је $\widetilde{H}$ непрекидно пресликавање. Погледајмо чему је једнако ово пресликавање на нивоима $t = 0$ и $t = 1$.

$$\widetilde{H}(x,0) = \begin{cases} f(x), & x \in A \cup X^{n-1} \\ H_\alpha(x,0), & x \in e_\alpha^n \subseteq X \backslash A \end{cases}$$

Како је $H_\alpha(x,0) = H_\alpha(\phi_\alpha^n(z),0) = G_\alpha(z,0) = f(\phi_\alpha^n(z)) = f(x)$, закључујемо да је $\widetilde{H}(x,0) = f(x)$, за $x \in X$. Са друге стране је

$$\widetilde{H}(x,1) = \begin{cases} f(x), & x \in A \cup X^{n-1} \\ H_\alpha(x,1), & x \in e_\alpha^n \subseteq X \backslash A \end{cases}$$

Како је $H_\alpha(x,1) = G_\alpha(z,1) = g_{n,\alpha}(z) \in B$, то је $\widetilde{H}(x,1) \in B$, за свако $x \in A \cup X^n$.

Како пар $(X, A \cup X^n)$ има својство проширења хомотопије, то постоји хомотопија $H : X \times I \to Y$ такво да је

$$H(x,0) = f(x), \quad x \in X, \text{ и } H|_{(A\cup X^n)\times I} = \widetilde{H}.$$

Нека је $g : X \to Y$ дефинисано са $g(x) \overset{def}{=} H(x,1)$. Имамо да за овако дефинисано пресликавање важи

$$H : f \simeq g \ (rel \ A \cup X^{n-1}) \text{ и } g(A \cup X^n) \subseteq B. \ \square$$

Став 3.14 *Нека је* (X,A) CW-*пар, а* (Y,B) *тополошки пар такав да за свако* $n \in \mathbb{N}_0$ *са својством да постоји* n*-ћелија у* $X\backslash A$ *важи да је* $\pi_n(Y,B,b_0) = 0$ *за све* $b_0 \in B$*. Тада за свако пресликавање* $f : (X,A) \to (Y,B)$ *постоји* $g : X \to Y$ *такво да је* $f \simeq g$ $(rel\ A)$ *и* $g(X) \subseteq B$*, тј. такво да у наредном дијаграм горњи троугао комутира, а доњи комутира до на хомотопију.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, hook] & B \arrow[d, hook] \\ X \arrow[ur, dashed, "g"] \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Напомена 3.15 *За* $n = 0$ *услов „*$\pi_n(Y,B,b_0) = 0$ *за све* $b_0 \in B$*“ значи „*B *сече све компоненте путне повезаности од* Y*“.*

Доказ: Конструисаћемо низ функција $g_0, g_1, g_2, \ldots : X \to Y$ таквих да је

$$f \simeq g_0 \ (rel\ A),$$

$$g_{n-1} \simeq g_n \ (rel\ A \cup X^{n-1}), \ n \in \mathbb{N},$$

$$g_n(A \cup X^n) \subseteq B, \ n \in \mathbb{N}.$$

Најпре дефинишимо $g_0 : X \to Y$. Ако нема 0-ћелија у $X\backslash A$, онда узмимо $g_0 \overset{def}{=} f$. Ако је $e_\alpha^0 \subseteq X\backslash A$ нека 0-ћелија, желимо да је $g_0(e_\alpha^0) \in B$. Како B сече све компоненте путне повезаности од Y, то постоји пут $u_\alpha : I \to Y$ такав да је $u_\alpha(0) = f(e_\alpha^0)$ и $u_\alpha(1) = b_\alpha \in B$. Дефинишимо пресликавање $\widetilde{H}_0 : (A \cup X^0) \times I \to Y$ са

$$\widetilde{H}_0(x,t) \overset{def}{=} \begin{cases} f(x), & x \in A \\ u_\alpha(t), & x = e_\alpha^0 \in X \backslash A \end{cases}$$

Како $(X, A \cup X^0)$ има својство проширења хомотопије, то постоји $H_0 : X \times I \to Y$ такво да је

$$H_0|_{(A \cup X^0) \times I} = \widetilde{H}_0 \text{ и } H_0(x,0) = f(x),\ x \in X.$$

Дефинишимо $g_0 : X \to Y$ са $g_0(x) \overset{def}{=} H_0(x,1),\ x \in X$. Имамо да је

$$H_0 : f \simeq g_0\ (rel\ A) \text{ и } g(A \cup X^0) \subseteq B.$$

Нека је сада $n \in \mathbb{N}$ и претпоставимо да имамо $g_0, g_1, \ldots, g_{n-1} : X \to Y$ са потребним својствима. Пресликавање g_{n-1} можемо да видимо као пресликавање парова $g_{n-1} : (X, A \cup X^{n-1}) \to (Y, B)$. Уколико нема n-ћелија у $X \backslash A$, узмимо $g_n \overset{def}{=} g_{n-1}$. Уколико је $e_\alpha^n \subseteq X \backslash A$ нека n-ћелија, онда је $\pi_n(Y, B, b_0) = 0$, за све $b_0 \in B$, па по леми 3.13 имамо да постоји пресликавање $g_n : X \to Y$ такво да је

$$H_n : g_n \simeq g_{n-1}\ (rel\ A \cup X^{n-1}),$$

$$g_n(A \cup X^n) \subseteq B.$$

Остаје још да помоћу низа пресликавања $g_0, g_1, \ldots$ дефинишемо тражено пресликавање $g : X \to Y$. Нека је $g(x) \overset{def}{=} g_n(x)$, где је $n \in \mathbb{N}_0$ такво да је $x \in A \cup X^n$. Овако дефинисано пресликавање је добро дефинисано јер су све хомотопије међу пресликавањима $g_n,\ n \in \mathbb{N}_0$, релативне. Да бисмо се уверили да је пресликавање g непрекидно, довољно је да проверимо да су непрекидне рестрикције на скелете. Ако је $n \in \mathbb{N}_0$, онда је

$$g|_{X^n} = g_n|_{X^n}$$

што јесте непрекидно. Такође, очигледно важи $g(X) \subseteq B$. Остаје још да покажемо да је

$$f \simeq g\ (rel\ A).$$

Дефинишимо хомотопију $H : X \times I \to Y$ са

$$H(x,t) \overset{def}{=} H_n(x, 2^{n+1}(t-1)+2),\quad t \in \left[1 - \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right],\ n \in \mathbb{N}_0;$$

$$H(x,1) \overset{def}{=} g(x).$$

Пресликавање H ће бити непрекидно, а да бисмо то утврдили довољно је да рестрикција $H|_{X^n \times I}$ буде непрекидна, за свако $n \in \mathbb{N}_0$.

Нека је $x \in X^n$. Тада је

$$H(x,t) = H_i(x, 2^{i+1}(t-1)+2), \quad t \in \left[1 - \frac{1}{2^i}, 1 - \frac{1}{2^{i+1}}\right], \quad 0 \leqslant i \leqslant n.$$

Такође је

$$H(x,t) = g_n(x) = g_{n+1}(x) = \ldots = g(x), \quad t \in \left[1 - \frac{1}{2^{n+1}}, 1\right],$$

па је по теореми о лепљењу $H|_{X^n \times I}$ непрекидно за свако $n \in \mathbb{N}_0$. Коначно, добијамо

$$H : f \simeq g \ (rel\ A). \quad \square$$

Теорема 3.16 *Нека је (X, A) CW-пар и нека је $p : E \to Y$ непрекидно такво да за све $n \in \mathbb{N}_0$ са својством да постоји n-ћелија у $X \backslash A$ важи $\pi_n(Y, E, e_0) = 0$ за све $e_0 \in E$ (где је $\pi_n(Y, E, e_0) \stackrel{def}{=} \pi_n(M_p, E, e_0)$). Тада за свако пресликавање $f : X \to Y$ и $h : A \to E$ такво да је $p \circ h = f|_A$ постоји $g : X \to E$ такво да је $g|_A = h$ и $p \circ g \simeq f$.*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "h"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[r, "f"] \arrow[ur, dashed, "g"] & Y
\end{tikzcd}$$

Доказ: Претворимо пресликавање p у инклузију на следећи начин.

$$\begin{tikzcd}
 & M_p \arrow[d, "h_p"] \\
E \arrow[r, "p"] \arrow[ur, hook, "j"] & Y
\end{tikzcd}$$

где је $h_p : M_p \to Y$ хомотопска еквиваленција и $j : E \to M_p$ инклузија. Посматрајмо следећи дијаграм.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "h"] \arrow[dd, hook] & E \arrow[d, hook, "j"] \\
 & M_p \arrow[d, "h_p"] \\
X \arrow[r, "f"] \arrow[ur, dashed, "i \circ f"] & Y
\end{tikzcd}$$

Означимо са $i : Y \to M_p$ инклузију која је хомотопски инверз од h_p. Тада је $h_p \circ i \simeq \mathbb{1}_Y$ и $i \circ h_p \simeq \mathbb{1}_{M_p}$, па $i \circ f$ јесте подизање до на хомотопију од f јер

$$h_p \circ i \circ f \simeq \mathbb{1}_Y \circ f = f.$$

Даље имамо

$$j \circ h \simeq \mathbb{1}_{M_p} \circ j \circ h \simeq i \circ h_p \circ j \circ h = i \circ f|_A.$$

Како је $i \circ f$ проширење од $j \circ h$ до на хомотопију и $A \hookrightarrow X$ кофибрација (јер је A поткомплекс од X), то на основу задатка 2. у одељку 1.3 постоји $\widetilde{f} : X \to M_p$ такво да је

$$\widetilde{f}|_A = j \circ h \text{ и } \widetilde{f} \simeq i \circ f.$$

На основу става 3.14 постоји $g : X \to E$ такво да је $g|_A = h$ и $j \circ g \simeq \widetilde{f}$. $\square$

Последица 3.17

а) Нека је $p : E \to Y$ n-еквиваленција, X CW-комплекс такав да је $\dim X \leqslant n$. Тада за свако пресликавање $f : X \to Y$ постоји подизање $g : X \to E$ до на хомотопију.

б) Нека је $p : E \to Y$ слаба хомотопска еквиваленција и X CW-комплекс. Тада за свако пресликавање $f : X \to Y$ постоји подизање $g : X \to E$ до на хомотопију.

Доказ: Посматрајмо поново следећи дијаграм.

$$\begin{tikzcd} & M_p \arrow[d, "h_p"] \\ E \arrow[ur, hook, "j"] \arrow[r, "p"] & Y \end{tikzcd}$$

Како је h_p хомотопска еквиваленција, закључујемо да је p n-еквиваленција (слаба хомотопска еквиваленција) ако и само ако је j n-еквиваленција (слаба хомотопска еквиваленција), тј. ако и само ако је $\pi_i(Y, E, e_0) = 0$ за све $e_0 \in E$ и све $i \leqslant n$ (све $i \in \mathbb{N}_0$). Сад се тврђење последице лако добија из теореме 3.16 за $A = \varnothing$. $\square$

3.5 Задаци

1. Ако је $1 \leqslant m < n$ доказати да скуп $[\mathbb{R}\mathrm{P}^m, \mathbb{R}\mathrm{P}^n]$ има тачно два елемента и то $[const]$ и $[i_{m,n}]$, где је $i_{m,n}$ инклузија таква да наредни дијаграм комутира

$$\begin{tikzcd} S^m \arrow[r, hook, "j_{m,n}"] \arrow[d, "p"] & S^n \arrow[d, "p"] \\ \mathbb{R}\mathrm{P}^m \arrow[r, hook, "i_{m,n}"] & \mathbb{R}\mathrm{P}^n \end{tikzcd}$$

где је $j_{m,n} : S^m \to S^n$ инклузија дата са $j_{m,n}(x) = (x, 0) \in S^n$, а $p : S^m \to \mathbb{R}\mathrm{P}^m$ и $p : S^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ дволисна наткривања.

2. Нека је $n \in \mathbb{N}_0$. Доказати да је свако непрекидно пресликавање из n-димензионог CW-комплекса у n-повезан тополошки простор хомотопски тривијално.

3. Нека је $p : E \to B$ m-еквиваленција, а X n-димензион CW-комплекс ($m, n \in \mathbb{N}_0$).

   (а) Ако је $m > n$, доказати да за свака два непрекидна пресликавања $f, g : X \to E$ важи следећа еквиваленција: $f \simeq g \iff p \circ f \simeq p \circ g$.

   (б) Ако је $m > n$, доказати да је $p_* : [X, E] \to [X, B]$ бијекција.

   (в) Ако је $m = n$, доказати да је $p_* : [X, E] \to [X, B]$ сурјекција.

4 Теореме Вајтхеда, Фројдентала и Хуревића

4.1 Вајтхедова теорема

Став 4.1 *Ако је $f : X \to Y$ слаба хомотопска еквиваленција онда за сваки* CW-*комплекс Z пресликавање $f_* : [Z, X] \to [Z, Y]$ је бијекција.*

Доказ: Покажимо најпре да је f_* „на“. Нека је $g : Z \to Y$ непрекидно. Тражимо пресликавање $h : Z \to X$ такво да је $f_*([h]) = [g]$, тј. $f \circ h \simeq g$. Како је f слаба хомотопска еквиваленција и Z CW-комплекс, то на основу дела *б)* последице 3.17 постоји тражено пресликавање h.

Сада покажимо да је f_* „1-1“. Нека су $g, h : Z \to X$ таква да је

$$f_*([g]) = f_*([h]),$$

тј. $f \circ g \simeq f \circ h$. Желимо да покажемо да је $g \simeq h$. Питање да ли су f и g хомотопна пресликавања је заправо питање постојања следећег проширења.

$$\begin{tikzcd}
Z \times \{0,1\} \arrow[r, "F"] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, "f"] \\
Z \times I \arrow[r, "G"] \arrow[ur, dashed, "H"] & Y
\end{tikzcd}$$

Где је $F(z, 0) = g(z)$ и $F(z, 1) = h(z)$.

Овај дијаграм комутира и f је слаба хомотопска еквиваленција па на основу теореме 3.16 постоји пресликавање $H : Z \times I \to X$ такво да горњи троугао комутира, а доњи комутира до на хомотопију. $\square$

Дефиниција 4.2 Тополошки простор W има *хомотопски тип* CW-*комплекса* (краће, има CW-*тип*) ако постоји CW-комплекс Z такав да је $Z \simeq W$.

Последица 4.3 *Ако је $f : X \to Y$ слаба хомотопска еквиваленција и ако W има* CW-*тип, онда је $f_* : [W, X] \to [W, Y]$ бијекција.*

Доказ: Нека је Z CW-комплекс и $\varphi : Z \to W$ хомотопска еквиваленција. Посматрајмо наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd}
{[W, X]} \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, tail, two heads, "\varphi^*"'] & {[W, Y]} \arrow[d, tail, two heads, "\varphi^*"] \\
{[Z, X]} \arrow[r, tail, two heads, "f_*"] & {[Z, Y]}
\end{tikzcd}$$

Како је φ хомотопска еквиваленција, то су пресликавања φ^* из дијаграма бијекције. Такође, на основу претходног става је и $f_* : [Z, X] \to [Z, Y]$ бијекција. Дијаграм комутира јер

$$\varphi^*(f_*[g]) = \varphi^*[f \circ g] = [f \circ g \circ \varphi] = f_*[g \circ \varphi] = f_*(\varphi^*[g]),$$

па закључујемо да је и $f_* : [W, X] \to [W, Y]$ бијекција. $\square$

У категорији Top_0 важи слично тврђење. Ако је $f : X \to Y$ слаба хомотопска еквиваленција, (Z, z_0) CW-комплекс и $x_0 \in X$ и $f(x_0) \in Y$ базне тачке, онда је

$$f_* : [Z, X]_0 \to [Z, Y]_0$$

бијекција.

Теорема 4.4 (Вајтхед) *Нека су X и Y CW-типа и $f : X \to Y$. Пресликавање f је хомотопска еквиваленција ако и само ако је слаба хомотопска еквиваленција.*

Доказ: $\Rightarrow$: Лако следи из дефиниције слабе хомотопске еквиваленције и става 2.12.
$\Leftarrow$: Тражимо пресликавање $g : Y \to X$ такво да је $f \circ g \simeq \mathbb{1}_Y$ и $g \circ f \simeq \mathbb{1}_X$. Претходна последица нам даје да је $f_* : [Y, X] \to [Y, Y]$ бијекција. Специјално, f_* је „на“ па постоји $g : Y \to X$ такво да је $f_*([g]) = [\mathbb{1}_Y]$, тј. $f \circ g \simeq \mathbb{1}_Y$. Даље имамо

$$f \circ g \circ f \simeq \mathbb{1}_Y \circ f = f \circ \mathbb{1}_X,$$

тј.

$$f_*([g \circ f]) = f_*([\mathbb{1}_X]).$$

Како је и $f_* : [X, X] \to [X, Y]$ бијекција, то је специјално и „1-1“, па је $[g \circ f] = [\mathbb{1}_X]$, односно $g \circ f \simeq \mathbb{1}_X$. $\square$

Напомена 4.5 *Ако за свако $n \in \mathbb{N}_0$ важи да је $\pi_n(X) \cong \pi_n(Y)$, не мора бити $X \simeq Y$. Претходна теорема нам каже да неопходан и довољан услов да простори CW-типа X и Y буду хомотопски еквивалентни јесте да су изоморфизми између њихових хомотопских група индуковани неким непрекидним пресликавањем $f : X \to Y$.*

Последица 4.6 *Ако X има CW-тип и $\pi_n(X) = 0$ за свако $n \in \mathbb{N}_0$, онда је $X \simeq *$.*

Доказ: Нека је $f : X \to *$. Тада је $f_* : \pi_n(X) \to \pi_n(*)$ изоморфизам за свако $n \in \mathbb{N}_0$ јер су све хомотопске групе тривијалне. Дакле f је слаба хомотопска еквиваленција, па на основу теореме Вајтхеда је и хомотопска еквиваленција. $\square$

Напомена 4.7 *Аналогно тврђење неће важити за хомолошке групе. Наиме, ако X има CW-тип и $\widetilde{H}_n(X) = 0$ за свако $n \in \mathbb{N}_0$, онда не мора бити $X \simeq *$.*

Напомена 4.8 *Последица 4.6 не важи уколико изоставимо претпоставку да је X CW-типа. Пример за такав простор је Варшавски круг. Он није CW-типа и све хомотопске групе су му тривијалне, али није контрактибилан.*
Пример тополошког простора који није CW-комплекс али јесте CW-типа је тополошки чешаљ. Он није CW-комплекс јер није локално путно повезан, али је контрактибилан па јесте CW-типа.

Теорема 4.9 (о CW-апроксимацији) *За сваки тополошки простор X постоји CW-комплекс Z и слаба хомотопска еквиваленција $f : Z \to X$. Штавише, ако је X $(n-1)$-повезан за неко $n \in \mathbb{N}$, онда се Z може одабрати тако да је $Z^{n-1} = \{z_0\}$ и да важи услов:*

(БТ) За сваку m-ћелију од Z, $m \in \mathbb{N}$, и њену функцију лепљења $\varphi : S^{m-1} \to Z^{m-1}$ важи да је $\varphi(e_1) = z_0$.

Доказ: 1^o Нека је X путно повезан простор. Конструишемо скелет по скелет простора Z. Нека је $Z^0 \overset{def}{=} \{z_0\}$ и $f_0 : Z^0 \to X$ дефинисано са $f_0(z_0) = x_0$, где је $x_0 \in X$ било која (надаље фиксирана) тачка. Како је X путно повезан, то је $(f_0)_* : \pi_0(Z^0, z_0) \to \pi_0(X, x_0)$ епиморфизам.

Нека је сада $m \geqslant 1$ и претпоставимо да смо конструисали Z^{m-1} и $f_{m-1} : Z^{m-1} \to X$ такво да за свако $k < m-1$ важи $f_{m-1}|_{Z^k} = f_k$ и

$$(f_{m-1})_* : \pi_i(Z^{m-1}, z_0) \to \pi_i(X, x_0)$$

је изоморфизам за $i < m-1$ и епиморфизам за $i = m-1$.

Желимо да констуришемо Z^m тако да комутира дијаграм

$$\begin{tikzcd}
Z^m \arrow[dr, dashed, "f_m"] & \\
Z^{m-1} \arrow[u, hook, "l"] \arrow[r, "f_{m-1}"] & X
\end{tikzcd} \tag{1}$$

и да је $(f_m)_* : \pi_i(Z^m, z_0) \to \pi_i(X, x_0)$ изоморфизам за $i < m$ и епиморфизам за $i = m$.

Ако је $(f_{m-1})_*$ изоморфизам за $i = m-1$ и епиморфизам за $i = m$, онда дефинишемо $Z^m \overset{def}{=} Z^{m-1}$ и $f_m \overset{def}{=} f_{m-1}$. Иначе, поступамо на следећи начин.

Додајемо две групе m-ћелија. Једну да бисмо обезбедили да $(f_m)_*$ буде „1-1“ у димензији $i = m-1$, а другу да би $(f_m)_*$ било „на“ у димензији $i = m$. Означимо са $\mathcal{A}$ скуп

$$\mathcal{A} \overset{def}{=} \ker\left(\pi_{m-1}(Z^{m-1}, z_0) \xrightarrow{(f_{m-1})_*} \pi_{m-1}(X, x_0)\right).$$

За $\alpha \in \mathcal{A}$ постоји $\varphi_\alpha^m : (S^{m-1}, e_1) \to (Z^{m-1}, z_0)$ такво да је $\alpha = [\varphi_\alpha^m]_0$.

Означимо са $\mathcal{B}$ неки скуп генератора групе $\pi_m(X, x_0)$. За $\beta \in \mathcal{B}$ дефинишимо $\varphi_\beta^m : S^{m-1} \to Z^{m-1}$ са $\varphi_\beta^m \overset{def}{=} c_{z_0}$.

Коначно, дефинишимо m-скелет на следећи начин.

$$Z^m \overset{def}{=} \left(\bigsqcup_{\alpha\in\mathcal{A}} D^m_{(\alpha)} \sqcup \bigsqcup_{\beta\in\mathcal{B}} D^m_{(\beta)} \right) \cup_{\bigsqcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \varphi_\alpha^m \sqcup \bigsqcup_{\beta\in\mathcal{B}} \varphi_\beta^m} Z^{m-1} \approx \bigvee_{\beta\in\mathcal{B}} S^m_{(\beta)} \vee \left(\bigsqcup_{\alpha\in\mathcal{A}} D^m_{(\alpha)} \cup_{\bigsqcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \varphi_\alpha^m} Z^{m-1} \right)$$

Сада желимо да f_{m-1} проширимо до f_m. Нека је $\alpha \in \mathcal{A}$ и $\varphi_\alpha^m : (S^{m-1}, e_1) \to (Z^{m-1}, z_0)$ такво да је $\alpha = [\varphi_\alpha^m]_0$. Тада је $f_{m-1} \circ \varphi_\alpha^m \simeq const$ јер је

$$[f_{m-1} \circ \varphi_\alpha^m]_0 = (f_{m-1})_*(\alpha) = 0,$$

па постоји проширење овог пресликавања на D^m такво да наредни дијаграм комутира.

$$\begin{tikzcd}
D^m \arrow[rrd, dashed] & & \\
S^{m-1} \arrow[u, hook] \arrow[r, "\varphi_\alpha^m"] & Z^{m-1} \arrow[r, "f_{m-1}"] & X
\end{tikzcd}$$

Нека је $\beta \in \mathcal{B}$ и $\psi_\beta : (S^m, e_1) \to (X, x_0)$ такво да је $\beta = [\psi_\beta]_0$. Тада комутира и следећи дијаграм (обе композиције су једнаке константном пресликавању c_{x_0}).

$$\begin{tikzcd}
D^m \arrow[rd, "q"] & & \\
 & S^m \arrow[rd, "\psi_\beta"] & \\
S^{m-1} \arrow[uu, hook] \arrow[r, "\varphi_\beta^m"] & Z^{m-1} \arrow[r, "f_{m-1}"] & X
\end{tikzcd}$$

На основу леме 3.9 постоји пресликавање $f_m : Z^m \to X$ такво да је $f_m|_{Z^{m-1}} = f_{m-1}$ и да за свако $\beta \in \mathcal{B}$ комутира наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd}
D^m \arrow[r, "q"] \arrow[rd, "\phi_\beta^m"'] & S^m \arrow[r, "\psi_\beta"] & X \\
 & Z^m \arrow[ru, "f_m"'] &
\end{tikzcd}$$

Још остаје да покажемо да је $(f_m)_*$ изоморфизам односно епиморфизам у потребним димензијама. Из комутативности дијаграма (1) добијамо да комутира и следећи дијаграм.

$$\begin{tikzcd} \pi_i(Z^m, z_0) \arrow[drr, "(f_m)_*"] & & \\ \pi_i(Z^{m-1}, z_0) \arrow[u, "l_*"] \arrow[rr, "(f_{m-1})_*"] & & \pi_i(X, x_0) \end{tikzcd} \tag{2}$$

Ако је $i < m-1$, имамо да је l $(m-1)$-еквиваленција па је l_* изоморфизам, а $(f_{m-1})_*$ је изоморфизам по индуктивној хипотези па из комутативности дијаграма (2) добијамо да је и $(f_m)_*$ изоморфизам.

Ако је $i = m-1$, тада је $(f_m)_*$ „на“ јер је $(f_{m-1})_*$ „на“ и комутира дијаграм (2). Са друге стране, $(f_m)_*$ је и „1-1“. Заиста, нека је $\gamma \in \ker(f_m)_* \leqslant \pi_{m-1}(Z^m, z_0)$. У овој димензији l_* је епиморфизам па постоји $\alpha \in \pi_{m-1}(Z^m, z_0)$ такво да је $l_*(\alpha) = \gamma$. Додатно, важи и $(f_{m-1})_*(\alpha) = (f_m)_*(l_*(\alpha)) = 0$, па је $\alpha \in \mathcal{A}$. Ако је још $\varphi_\alpha^m : (S^{m-1}, e_1) \to (Z^{m-1}, z_0)$ такво да је $\alpha = [\varphi_\alpha^m]$, онда имамо

$$\gamma = l_*(\alpha) = l_*([\varphi_\alpha^m]) = [l \circ \varphi_\alpha^m]_0.$$

Карактеристична функција $\phi_\alpha^m : D^m \to Z^m$ јесте једно проширење пресликавања $l \circ \varphi_\alpha^m$ на диск D^m

$$\begin{tikzcd} D^m \arrow[drr, dashed, "\phi_\alpha^m"] & & \\ S^{m-1} \arrow[u, hook] \arrow[r, "\varphi_\alpha^m"] & Z^{m-1} \arrow[r, hook, "l"] & Z^m \end{tikzcd}$$

па је $l \circ \varphi_\alpha^m \simeq const$, тј. $\gamma = 0$, одакле коначно закључујемо да је $(f_m)_*$ „1-1“.

Ако је $i = m$, желимо да покажемо да је $(f_m)_*$ „на“. Нека је $\beta \in \mathcal{B} \subseteq \pi_m(X, x_0)$. Посматрајмо наредни комутативни дијаграм.

$$\begin{tikzcd} D^m \arrow[r, two heads, "q"] \arrow[dr, "\phi_\beta^m"'] & S^m \arrow[r, "\psi_\beta"] \arrow[d, hook, "i_\beta"] & X \\ & Z^m \arrow[ur, "f_m"'] & \end{tikzcd}$$

где је $q : D^m \to S^m$ пресликавање које границу диска D^m скупља у тачку e_1, а $i_\beta : S^m \hookrightarrow Z^m$ природно утапање сфере S^m у букет $\bigvee\limits_{\beta \in \mathcal{B}} S^m_{(\beta)} \subseteq Z^m$. Имамо да је

$$(f_m)_*([i_\beta]_0) = [f_m \circ i_\beta]_0 = [\psi_\beta]_0 = \beta,$$

па закључујемо да је $(f_m)_*$ „на“.

Остаје још да конструишемо пресликавање $f : Z \to X$. Одаберимо f такво да је $f|_{Z^m} \stackrel{def}{=} f_m$. Овако дефинисано пресликавање је добро дефинисано јер за $n > m$ је $f_n|_{Z^m} = f_m$, а такође је и непрекидно јер је $f|_{Z^m}$ непрекидно за свако $m \in \mathbb{N}_0$. Још да се уверимо да је f слаба хомотопска еквиваленција. Нека је $i \in \mathbb{N}_0$. Одаберимо природан број $m > i$. Посматрајмо дијаграм

$$\begin{tikzcd}
\pi_i(Z, z_0) \arrow[rr, "f_*"] & & \pi_i(X, x_0) \\
& \pi_i(Z^m, z_0) \arrow[ul, tail, two heads, "k_*"] \arrow[ur, tail, two heads, "(f_m)_*"'] &
\end{tikzcd}$$

где је $k : Z^m \hookrightarrow Z$ инклузија, тј. комутира дијаграм

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[rr, "f"] & & X \\
& Z^m \arrow[ul, hook, "k"] \arrow[ur, "f_m"'] &
\end{tikzcd}$$

До сада смо показали да је f_* изоморфизам за базну тачку z_0, а потребно је показати да ће бити изоморфизам за сваку базну $z \in Z$ тачку, али како је Z путно повезан, то следи из дијаграма

$$\begin{tikzcd}
\pi_i(Z, z) \arrow[r, "f_*"] & \pi_i(X, f(z)) \\
\pi_i(Z, z_0) \arrow[u, tail, two heads, "\beta_u"] \arrow[r, "f_*"] & \pi_i(X, x_0) \arrow[u, tail, two heads, "\beta_{f \circ u}"']
\end{tikzcd}$$

где је $u : I \to Z$ пут од z_0 до z.

2^o Нека је сада X произвољан тополошки простор и $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ његове компоненте путне повезаности. На основу случаја 1^o за свако $\lambda \in \Lambda$ имамо слабу хомотопску еквиваленцију $f_\lambda : Z_\lambda \to X_\lambda$, где је Z_λ CW-комплекс. Узмимо $Z \stackrel{def}{=} \bigsqcup\limits_{\lambda \in \Lambda} Z_\lambda$ и $f : Z \to X$ дефинишимо са

$$f|_{Z_\lambda} = j_\lambda \circ f_\lambda, \ \lambda \in \Lambda,$$

где је $j_\lambda : X_\lambda \hookrightarrow X$ инклузија.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "f"] & X \\
Z_\lambda \arrow[u, hook] \arrow[r, "f_\lambda"] & X_\lambda \arrow[u, hook, "j_\lambda"']
\end{tikzcd}$$

Још да утврдимо да је f хомотопска еквиваленција. У димензији 0 је јасно $f_* : \pi_0(Z) \to \pi_0(X)$ бијекција. Нека је $i \geqslant 1$ и $z \in Z$ базна тачка. Тада постоји јединствено $\lambda \in \Lambda$ такво да је $z \in Z_\lambda$. Посматрајмо наредни комутативни дијаграм.

$$\begin{tikzcd}
\pi_i(Z, z) \arrow[r, "f_*"] & \pi_i(X, f(z)) \\
\pi_i(Z_\lambda, z) \arrow[u, tail, two heads] \arrow[r, tail, two heads, "(f_\lambda)_*"] & \pi_i(X_\lambda, f_\lambda(z)) \arrow[u, tail, two heads, "(j_\lambda)_*"']
\end{tikzcd}$$

Како је f_λ слаба хомотопска еквиваленција, то је $(f_\lambda)_*$ изоморфизам. Такође, вертикале су изоморфизми јер сва пресликавања чије су класе у $\pi_i(Z, z)$ су управо у компоненти Z_λ јер $z \in Z_\lambda$, па коначно закључујемо да је f_* изоморфизам. $\square$

Дефиниција 4.10 Нека је X тополошки простор. Пар (Z, f), где је Z CW-комплекс, а $f : Z \to X$ слаба хомотопска еквиваленција, називамо CW-*апроксимацијом* за X.

Последица 4.11 *Ако је $n \in \mathbb{N}$ и X $(n-1)$-повезан простор који има* CW-*тип, онда постоји* CW-*комплекс Z такав да је $Z \simeq X$, $Z^{n-1} = \{z_0\}$ и за који важи услов (БТ) теореме 4.9.*

Доказ: На основу теореме о CW-апроксимацији 4.9 знамо да постоји CW-комплекс Z и слаба хомотопска еквиваленција $f : Z \to X$, а на основу Вајтхедове теореме 4.4 f ће бити и хомотопска еквиваленција. $\square$

4.2 Теорема Фројдентала о суспензији

Познато је да ако је $(X; A, B)$ исецајућа тројка онда $j : (A, A \cap B) \hookrightarrow (X, B)$ индукује изоморфизам
$$j_* : H_i(A, A \cap B) \to H_i(X, B), \ i \in \mathbb{N}_0.$$

Такође важе и наредна два тврђења.

Став 4.12 *Ако је (X, A)* CW-*пар и ако је $q : (X, A) \to (X/A, A/A)$ природна пројекција, онда је $q_* : H_i(X, A) \to H_i(X/A, *) \cong \widetilde{H}_i(X/A)$ изоморфизам за $i \in \mathbb{N}_0$.*

Став 4.13 *За свако $i \in \mathbb{N}_0$ је $\widetilde{H}_{i+1}(SX) \cong H_i(X)$, где је SX суспензија простора X.*

Показаћемо да слична тврђења важе и за хомотопске групе, с тим што за разлику од хомолошких неће важити у свим димензијама.

Наводимо најпре без доказа једну од основних теорема.

Теорема 4.14 *Нека је X CW-комплекс, A, B поткомплекси који покривају X и $A \cap B$ је непразан и (путно) повезан. Нека је $j : (A, A \cap B) \hookrightarrow (X, B)$ инклузија. Ако је $(A, A \cap B)$ m-повезан, а $(B, A \cap B)$ n-повезан, за неке $m, n \in \mathbb{N}_0$, онда је $j_* : \pi_i(A, A \cap B) \to \pi_i(X, B)$ изоморфизам за $i \leqslant m + n - 1$, а епиморфизам за $i = m + n$.*

Последица 4.15 *Ако је (X, A) r-повезан CW-пар, A s-повезан за неке $r, s \in \mathbb{N}_0$ и ако је $q : (X, A) \to (X/A, A/A)$ природна пројекција, онда је $q_* : \pi_i(X, A) \to \pi_i(X/A)$ изоморфизам за $i \leqslant r + s$, а епиморфизам за $i = r + s + 1$.*

Доказ: Нека је $j : A \hookrightarrow X$ и посматрајмо $C_j = CA \cup_j X = X \cup CA$. Нека је $a_0 \in A$ и посматрајмо наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd}
(X, A) \arrow[rr, "q"] \arrow[d, hook, "k"'] & & (X/A, A/A) \arrow[d, "\approx"] \\
(X \cup CA, CA) \arrow[rr] & & ((X \cup CA)/CA, CA/CA) \\
& (X \cup CA, a_0) \arrow[ul, hook] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Како $(X \cup CA, CA)$ има својство проширења хомотопије и како је конус CA контрактибилан, то је пресликавање $X \cup CA \twoheadrightarrow (X \cup CA)/CA$ хомотопска еквиваленција па индукује изоморфизам у хомотопији. На основу претходне теореме, како је (X, A) r-повезан и (CA, A) $(s+1)$-повезан (што добијамо из дугог тачног низа пара (CA, A)), то је $k_* : \pi_i(X, A) \to \pi_i(X \cup CA, CA)$ изоморфизам за $i \leqslant r + s$ и епиморфизам за $i = r + s + 1$.

Из претходног дијаграма добијамо следећи комутативни дијаграм.

$$\begin{tikzcd}
\pi_i(X, A) \arrow[rr, "q_*"] \arrow[d, "k_*"'] & & \pi_i(X/A, A/A) \arrow[d, tail, two heads] \\
\pi_i(X \cup CA, CA) \arrow[rr] & & \pi_i((X \cup CA)/CA, CA/CA) \\
& \pi_i(X \cup CA, a_0) \arrow[ul] \arrow[ur, tail, two heads] &
\end{tikzcd}$$

Из дугог тачног низа пара $(X \cup CA, CA)$ добијамо да је $\pi_i(X \cup CA, a_0) \to \pi_i(X \cup CA, CA)$ изоморфизам, па из комутативности троугла са дијаграма имамо и да је $\pi_i(X \cup$

$CA, CA) \to \pi_i((X \cup CA)/CA, CA/CA)$ изоморфизам. Коначно из комутативности квадрата са дијаграма, добијамо да је q_* изоморфизам ако и само ако је k_* изоморфизам, тј. q_* је изоморфизам за $i \leqslant r+s$, а епиморфизам за $i = r+s+1$. $\square$

Нека је X тополошки простор. Желимо да дефинишемо пресликавање $E : \pi_n(X) \to \pi_{n+1}(SX)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Нека је $x_0 \in X$ базна тачка и нека је $f : (S^n, e_1) \to (X, x_0)$. Потребно је одабрати базну тачку суспензије SX тако да пресликавање $Sf : S(S^n) \to SX$ дато са $Sf([y,t]) \stackrel{def}{=} [f(y), t]$ чува базну тачку. Свака тачка облика $[x_0, t]$ ће испуњавати овај услов, а ми бирамо баш $[x_0, 0]$ за базну тачку простора SX. Нека је $h : S^{n+1} \to S(S^n)$ неки хомеоморфизам такав да комутира наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd}
D^{n+1} \arrow[r, "h_{n+1}", "\approx"'] \arrow[d, two heads, "q"'] & C(S^n) \arrow[d, two heads, "q"] \\
S^{n+1} \arrow[r, dashed, "h", "\approx"'] & S(S^n)
\end{tikzcd}$$

Овде је h_{n+1} хомеоморфизам дат са

$$h_{n+1}(z) \stackrel{def}{=} \begin{cases} \left[\frac{z}{\|z\|}, 1 - \|z\|\right], & z \neq 0 \\ [e_1, 1], & z = 0 \end{cases}$$

$(h_{n+1}^{-1}[y,t] = (1-t)y)$, десно q је количничко пресликавање $C(S^n) \to C(S^n)/S^n = S(S^n)$, док је лево q пресликавање које скупља границу диска D^{n+1} у тачку.

Лако се види да мора да важи $h(e_1) = [e_1, 0]$, па из тог разлога за базну тачку суспензије бирамо управо $[x_0, 0]$. Сада можемо дефинисати пресликавање E.

$$E([f]_0) \stackrel{def}{=} [Sf \circ h]_0,$$

где $Sf \circ h : (S^{n+1}, e_1) \to (SX, [x_0, 0])$. Проверимо да ли је E добро дефинисано. Нека је $g : (S^n, e_1) \to (X, x_0)$ и $f \simeq g$ $(rel\ e_1)$. Тада је $Sf \simeq Sg$ $(rel\ [e_1, 0])$, па је $Sf \circ h \simeq Sg \circ h$ $(rel\ e_1)$. Дакле, E је добро дефинисано.

Лема 4.16 *Нека је $i \in \mathbb{N}_0$, X тополошки простор и посматрајмо пресликавање $q : (CX, X) \to (CX/X, X/X) = (SX, [x_0, 0])$, где је $x_0 \in X$ базна тачка. Тада следећи дијаграм комутира.*

$$\begin{tikzcd}
\pi_{i+1}(CX, X) \arrow[r, "q_*"] \arrow[d, "\partial"'] & \pi_{i+1}(SX) \\
\pi_i(X) \arrow[ur, "E"'] &
\end{tikzcd}$$

Доказ: Како је $CX \simeq *$, то из дугог тачног низа пара (CX, X) добијамо да је $\partial : \pi_{i+1}(CX, X) \to \pi_i(X)$ изоморфизам. Показаћемо да је $q_*\partial^{-1} = E$. Нека је $f : (S^i, e_1) \to (X, x_0)$. Тражимо $g : (D^{i+1}, S^i, e_1) \to (CX, X, x_0)$ такво да је $\partial[g]_{0r} = [f]_0$. Знамо да је $\partial[g]_{0r} = [g|_{S^i}]_0$.

За g ћемо одабрати композицију

$$\begin{tikzcd} D^{i+1} \arrow[r, "h_{i+1}", "\approx"'] \arrow[rr, bend right, dashed, "g"'] & C(S^i) \arrow[r, "Cf"] & CX. \end{tikzcd}$$

Дакле,

$$g(z) \overset{def}{=} \begin{cases} \left[f\left(\frac{z}{\|z\|}\right), 1 - \|z\|\right], & z \neq 0 \\ [x_0, 1], & z = 0 \end{cases}$$

Посматрајмо сада следећи дијаграм.

$$\begin{tikzcd} D^{i+1} \arrow[r, "\approx"] \arrow[rr, bend left, "g"] \arrow[d, two heads, "q"'] & C(S^i) \arrow[r, "Cf"] \arrow[d, two heads, "q"'] & CX \arrow[d, two heads, "q"] \\ S^{i+1} \arrow[r, "h", "\approx"'] & S(S^i) \arrow[r, "Sf"] & SX \end{tikzcd}$$

Лако се види да је $g : (D^{i+1}, S^i, e_1) \to (CX, X, x_0)$ и да је $g|_{S^i} = f$. Како је

$$q_*\partial^{-1}[f]_0 = q_*[g]_{0r} = [q \circ g]_{0r} \text{ и } E[f]_0 = [Sf \circ h]_0 = [Sf \circ h \circ q]_{0r},$$

где смо користили везу (2) из одељка 2.2, а из дијаграма имамо $[Sf \circ h \circ q]_{0r} = [q \circ g]_{0r}$, то коначно добијамо

$$q_*\partial^{-1} = E. \quad \square$$

Последица 4.17 *За $i \geqslant 1$ пресликавање $E : \pi_i(X) \to \pi_{i+1}(SX)$ јесте хомоморфизам.*

Став 4.18 *Пресликавање E има својство природности. Прецизније, за свако непрекидно пресликавање $f : X \to Y$ комутира наредни дијаграм.*

$$\begin{tikzcd} \pi_i(X) \arrow[r, "E"] \arrow[d, "f_*"'] & \pi_{i+1}(SX) \arrow[d, "(Sf)_*"] \\ \pi_i(Y) \arrow[r, "E"] & \pi_{i+1}(SY) \end{tikzcd}$$

Доказ: Нека су $x_0 \in X$ и $f(x_0) \in Y$ базне тачке и одаберимо базне тачке у SX и SY у складу са ранијим разматрањима. Нека је додатно $[\varphi]_0 \in \pi_i(X, x_0)$. Тада је

$$\begin{aligned}(Sf)_*(E([\varphi]_0)) &= (Sf)_*([S\varphi \circ h]_0) \\ &= [Sf \circ S\varphi \circ h]_0 \\ &= [S(f \circ \varphi) \circ h]_0 \\ &= E([f \circ \varphi]_0) \\ &= E(f_*([\varphi]_0)),\end{aligned}$$

па дијаграм комутира. □

Теорема 4.19 (Фројдентала о суспензији) *Ако је X $(n-1)$-повезан простор* CW-*типа и $n \in \mathbb{N}$, онда је $E : \pi_i(X) \to \pi_{i+1}(SX)$ изоморфизам за $i \leqslant 2n-2$, а епиморфизам за $i = 2n-1$.*

Доказ: 1^o Нека је X CW-комплекс. На основу леме 4.16 имамо да комутира наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd} \pi_{i+1}(CX, X) \arrow[r, "q_*"] \arrow[d, tail, two heads, "\partial"'] & \pi_{i+1}(SX) \\ \pi_i(X) \arrow[ur, "E"'] & \end{tikzcd}$$

Како је (CX, X) n-повезан и X $(n-1)$-повезан, то на основу последице 4.15 имамо да је q_* изоморфизам за $i \leqslant 2n-2$, а епиморфизам за $i = 2n-1$ што ће, због комутативности дијаграма, важити и за E.
2^o Ако је X CW-типа, тј. постоји хомотопска еквиваленција $f : X \to Y$, где је Y CW-комплекс, онда је и Sf хомотопска еквиваленција па на основу дела 1^o и става 4.18 имамо дијаграм

$$\begin{tikzcd} \pi_i(X) \arrow[r, "E"] \arrow[d, tail, two heads, "f_*"'] & \pi_{i+1}(SX) \arrow[d, tail, two heads, "(Sf)_*"] \\ \pi_i(Y) \arrow[r, "E"] & \pi_{i+1}(SY) \end{tikzcd}$$

одакле закључујемо да је $E : \pi_i(X) \to \pi_{i+1}(SX)$ изоморфизам за $i \leqslant 2n-2$, а епиморфизам за $i = 2n-1$. □

Напомена 4.20 *Ако је $x_0 \in X$ недегенерисана тачка онда је $p : SX \to \Sigma X$ хомотопска* *еквиваленција што индукује изоморфизам у наредном дијаграму.*

$$\begin{tikzcd}
\pi_i(X) \arrow[r, "E"] \arrow[dr, dashed, "\Sigma"'] & \pi_{i+1}(SX) \arrow[d, tail, two heads, "p_*"] \\
& \pi_{i+1}(\Sigma X)
\end{tikzcd}$$

Из дијаграма видимо да Фројденталова теорема важи и за редуковану суспензију ΣX.

Теорема 4.21 *За свако* $n \in \mathbb{N}$ *важи* $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$. *Један генератор групе* $\pi_n(S^n, e_1)$ *јесте* $[\mathbb{1}_{S^n}]_0$, *а пресликавање* $\deg : \pi_n(S^n) \to \mathbb{Z}$ *јесте изоморфизам.*

Пре доказа ћемо прецизирати како је тачно дефинисано пресликавање deg.

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(S^n, e_1) \arrow[dd, tail, two heads, "\beta_u"'] \arrow[dr, tail, two heads, "\Phi"'] \arrow[drr, dashed, "\deg"] & & \\
& {[S^n, S^n]} \arrow[r, tail, two heads, "\deg"] & \mathbb{Z} \\
\pi_n(S^n, y_0) \arrow[ur, tail, two heads, "\Phi"] \arrow[urr, dashed, "\deg"'] & &
\end{tikzcd} \tag{3}$$

Пресликавање Φ је бијекција јер $\pi_1(S^n)$ дејствује тривијално на $\pi_n(S^n)$ (за $n = 1$, група $\pi_1(S^n)$ је Абелова, а за $n \geqslant 2$ је тривијална). Из дијаграма видимо да није битно шта бирамо за базну тачку простора S^n. Поред тога, за $f : S^n \to S^n$ са $Sf : S^{n+1} \to S^{n+1}$ означаваћемо и пресликавање такво да комутира

$$\begin{tikzcd}
S(S^n) \arrow[r, "Sf"] & S(S^n) \\
S^{n+1} \arrow[u, "h", "\approx"'] \arrow[r, dashed, "Sf"] & S^{n+1} \arrow[u, "\approx", "h"']
\end{tikzcd}$$

Такође, са E означавамо и следећи хомоморфизам.

$$\begin{tikzcd}
\pi_i(S^n) \arrow[r, "E"] \arrow[dr, dashed, "E"'] & \pi_{i+1}(S(S^n)) \\
& \pi_{i+1}(S^{n+1}) \arrow[u, tail, two heads, "\approx", "h"']
\end{tikzcd}$$

Тада је $E([f]_0) = [Sf]_0$. Сада пређимо на доказ теореме.

Доказ: Нека је $n = 1$. Тада је $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ и знамо да је $[\mathbb{1}_{S^1}]_0$ један генератор. Пресликавање deg је хомоморфизам и сурјекција која слика $\mathbb{Z}$ у $\mathbb{Z}$, па мора бити изоморфизам.

Нека је $n = 2$. Посматрајмо дијаграм.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1) \arrow[r, two heads, "E"] \arrow[d, tail, two heads, "\deg"'] & \pi_2(S^2) \arrow[dl, "\deg"] \\ \mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

По Фројденталовој теореми пресликавање E је епиморфизам, па из дијаграма закључујемо да је $\pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$ и да ће сва пресликавања на дијаграму бити изоморфизми.

Имамо низ изоморфизама

$$\pi_2(S^2) \overset{E}{\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow} \pi_3(S^3) \overset{E}{\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow} \pi_4(S^4) \overset{E}{\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow} \pi_5(S^5) \overset{E}{\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow} \cdots$$

па је $\pi_n(S^n) \cong Z$, а из дијаграма

$$\begin{tikzcd} \pi_{n-1}(S^{n-1}) \arrow[r, tail, two heads, "E"] \arrow[d, tail, two heads, "\deg"'] & \pi_n(S^n) \arrow[dl, "\deg"] \\ \mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

добијамо да је deg изоморфизам.

Још остаје да видимо да је $[\mathbb{1}_{S^n}]_0$ генератор групе $\pi_n(S^n, e_1)$. То ћемо показати индукцијом по $n \in \mathbb{N}$. За $n = 1$ смо већ рекли да $[\mathbb{1}_{S^1}]_0$ јесте генератор групе $\pi_1(S^1, e_1)$. Претпоставимо да је $[\mathbb{1}_{S^n}]_0$ генератор у $\pi_n(S^n, e_1)$. Тада је

$$E[\mathbb{1}_{S^n}]_0 = [S(\mathbb{1}_{S^n})]_0 = [\mathbb{1}_{S^{n+1}}]_0$$

генератор у $\pi_{n+1}(S^{n+1}, e_1)$. $\square$

Други генератор у $\pi_n(S^n, e_1)$ је $-[\mathbb{1}_{S^n}]_0 = [r_{n+1}]_0$, где је $r_{n+1} : S^n \to S^n$ рефлексија дата са

$$r_{n+1}(y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}) = (y_1, \ldots, y_n, -y_{n+1}).$$

Последица 4.22 (Брауер-Хопфова теорема о степену) *Ако су $f, g : S^n \to S^n$ непрекидна пресликавања онда $f \simeq g$ ако и само је $\deg f = \deg g$.*

Доказ: Директан смер знамо од раније да важи па остаје само да покажемо индиректан. Из дијаграма (3) имамо да је deg бијекција, а из низа изоморфизама

$$\begin{tikzcd} {[S^n, S^n]} \arrow[rr, bend right, "\deg"'] & {[S^n, S^n]_0} \arrow[l, tail, two heads, "\Phi"'] \arrow[r, tail, two heads, "\deg"] & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

добијамо тражено тврђење. $\square$

Напомена 4.23 *Нека је $n \geqslant 2$ и $p : S^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ дволисно наткривање. Тада је $p_* : \pi_n(S^n, e_1) \to \pi_n(\mathbb{R}\mathrm{P}^n, [e_1])$ изоморфизам, па је $p_*([\mathbb{1}_{S^n}]_0) = [p]_0$ генератор групе $\pi_n(\mathbb{R}\mathrm{P}^n, [e_1])$, тј.*

$$\pi_n(\mathbb{R}\mathrm{P}^n, [e_1]) = \mathbb{Z}\langle [p]_0 \rangle.$$

Теорема 4.24 *Ако је $n \in \mathbb{N}$ и $f : S^n \to S^n$ непрекидно, онда је $f_* : \pi_n(S^n) \to \pi_n(S^n)$ множење са $\deg f$.*

Доказ: Знамо да је $[\mathbb{1}_{S^n}]_0$ генератор у $\pi_n(S^n, e_1)$. На основу задатка 1. из одељка 2.4, за произвољну тачку $y \in S^n$ изоморфизам $\beta_u : \pi_n(S^n, e_1) \to \pi_n(S^n, y)$ не зависи од избора пута $u : I \to S^n$ од e_1 до y (јер је S^n прост простор). Зато и у $\pi_n(S^n, y)$ имамо истакнути генератор $\beta_u([\mathbb{1}_{S^n}]_0)$. Тврђење теореме је заправо да $f_* : \pi_n(S^n, y) \to \pi_n(S^n, f(y))$ истакнути генератор у $\pi_n(S^n, y)$ слика у $\deg f$ пута истакнути генератор у $\pi_n(S^n, f(y))$.

Нека је $e_1 \in S^n$ базна тачка. Уколико одаберемо било коју другу базну тачку $y \in S^n$, имамо наредни комутативни дијаграм

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(S^n, e_1) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, tail, two heads, "\beta_u"'] & \pi_n(S^n, f(e_1)) \arrow[d, tail, two heads, "\beta_{f\circ u}"] \\
\pi_n(S^n, y) \arrow[r, "f_*"] & \pi_n(S^n, f(y))
\end{tikzcd}$$

где је $u : I \to S^n$ пут од e_1 до y, па уколико покажемо да $f_* : \pi_n(S^n, e_1) \to \pi_n(S^n, f(e_1))$ слика $[\mathbb{1}_{S^n}]_0$ у $\deg f$ пута истакнути генератор у $\pi_n(S^n, f(e_1))$, онда ће то важити и за сваку другу базну тачку.

Како је Φ из дијаграма (3) „на“, то постоји $g : (S^n, e_1) \to (S^n, e_1)$такво да је $f \simeq g$, па је и $\deg g = \deg f$ и означимо тај степен са k. Нека је $u : I \to S^n$ пут такав да је $g \underset{u}{\simeq} f$.

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(S^n, e_1) \arrow[r, "g_*"] \arrow[dr, "f_*"'] & \pi_n(S^n, e_1) \arrow[d, tail, two heads, "\beta_u"] \\
& \pi_n(S^n, f(e_1))
\end{tikzcd}$$

Из дијаграма видимо да је довољно да докажемо да је g_* множење са k, што важи јер је

$$g_*([\mathbb{1}_{S^n}]_0) = [g]_0 = k \cdot [\mathbb{1}_{S^n}]_0.$$

Последња једнакост важи јер је пресликавање $\deg : \pi_n(S^n, e_1) \to \mathbb{Z}$ изоморфизам, а елементи $[g]_0$ и $k \cdot [\mathbb{1}_{S^n}]_0$ из $\pi_n(S^n, e_1)$ се са $\deg$ сликају у k. $\square$

Из Фројденталове теореме имамо низове пресликавања.

$$\pi_3(S^2) \xrightarrow{E} \pi_4(S^3) \xrightarrow{E} \pi_5(S^4) \xrightarrow{E} \pi_6(S^5) \xrightarrow{E} \cdots$$

$$\pi_5(S^3) \xrightarrow{E} \pi_6(S^4) \xrightarrow{E} \pi_7(S^5) \xrightarrow{E} \pi_8(S^6) \xrightarrow{E} \cdots$$

Генерално, имамо изоморфизам

$$\pi_{n+k}(S^n) \xrightarrow{E} \pi_{n+1+k}(S^{n+1}),$$

за $n + k \leqslant 2n - 2$, тј. за $n \geqslant k + 2$.

Дефиниција 4.25 Нека је $k \in \mathbb{N}_0$. *k-та стабилна хомотопска група сфере* је

$$\pi_k^s \overset{def}{=} \pi_{n+k}(S^n), \text{ за } n \geqslant k + 2.$$

Теорема 4.21 нам даје $\pi_0^s = \mathbb{Z}$. Уочимо наредну табелу за $\pi_i(S^n)$.

$n\backslash i$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	0	0	0
2	0	$\mathbb{Z}$						
3	0	0	$\mathbb{Z}$	π_1^s				
4	0	0	0	$\mathbb{Z}$	π_1^s	π_2^s		
5	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	π_1^s	π_2^s	π_3^s

Израчунато је да је $\pi_1^s = \pi_2^s = \mathbb{Z}_2$, $\pi_3^s = \mathbb{Z}_{24}$, $\pi_4^s = \pi_5^s = 0, \ldots$

Такође је доказано да су изнад главне дијагонале све групе коначне сем група $\pi_{4m-1}(S^{2m})$ које су изоморфне директној суми $\mathbb{Z}$ и неке коначне групе.

Сада ћемо одредити n-ту хомотопску групу букета $\bigvee_{\alpha \in \mathcal{A}} S^n_{(\alpha)}$, за $n \geqslant 2$. За свако $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ имамо утапање

$$i_{\alpha_0} : S^n \hookrightarrow \bigvee_{\alpha \in \mathcal{A}} S^n_{(\alpha)},$$

а ова утапања нам дају хомоморфизам

$$\mathop{+}_{\alpha \in \mathcal{A}} (i_\alpha)_* : \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{A}} \pi_n(S^n) \to \pi_n\Big(\bigvee_{\alpha \in \mathcal{A}} S^n_{(\alpha)}\Big).$$

Теорема 4.26 *Хомоморфизам $\mathop{+}_{\alpha \in \mathcal{A}} (i_\alpha)_*$ је изоморфизам. Дакле, група $\pi_n\Big(\bigvee_{\alpha \in \mathcal{A}} S^n_{(\alpha)}\Big)$ је слободна Абелова група са базом $\big\{[i_\alpha]_0 \mid \alpha \in \mathcal{A}\big\}$.*

Доказ: 1^o Нека је $\mathcal{A}$ коначан, на пример $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, m\}$. Нека је $1 \leqslant k_0 \leqslant m$. Тада комутира наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd}
S^n \arrow[rr, hook, "j_{k_0}"] \arrow[dr, hook, "i_{k_0}"'] & & \prod\limits_{k=1}^{m} S^n_{(k)} \\
& \bigvee\limits_{k=1}^{m} S^n_{(k)} \arrow[ur, hook, "j"'] &
\end{tikzcd}$$

Ако је $y \in S^n_{(l)}$, $1 \leqslant l \leqslant m$, онда је $j(y) = (\underbrace{e_1, \dots, e_1}_{l-1}, y, e_1, \dots, e_1)$. Из комутативности претходног дијаграма добијамо следећи.

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus\limits_{k=1}^{m} \pi_n(S^n) \arrow[rr, tail, two heads, "\mathop{+}\limits_{k=1}^{m}(j_k)_*"] \arrow[dr, "\mathop{+}\limits_{k=1}^{m}(i_k)_*"'] & & \pi_n\left(\prod\limits_{k=1}^{m} S^n_{(k)}\right) \\
& \pi_n\left(\bigvee\limits_{k=1}^{m} S^n_{(k)}\right) \arrow[ur, "j_*"'] &
\end{tikzcd}$$

На основу теореме 2.23 пресликавање $\mathop{+}\limits_{k=1}^{m}(j_k)_*$ је изоморфизам. Букет $\bigvee\limits_{k=1}^{m} S^n_{(k)}$ је n-скелет од $\prod\limits_{k=1}^{m} S^n_{(k)}$, али приметимо да ће бити и $(2n-1)$-скелет па како је j утапање $(2n-1)$-скелета, то је j $(2n-1)$-еквиваленција, тј. j_* је изоморфизам између хомотопских група у димензијама $i < 2n-1$, па је специјално j_* са горњег дијаграма изоморфизам, одакле закључујемо да је

$$\mathop{+}_{k=1}^{m}(i_k)_* : \bigoplus_{k=1}^{m} \pi_n(S^n) \to \pi_n\left(\bigvee_{k=1}^{m} S^n_{(k)}\right)$$

изоморфизам.

2^o Нека је $\mathcal{A}$ произвољан. Прво ћемо показати да је $\mathop{+}\limits_{\alpha\in\mathcal{A}}(i_\alpha)_*$ „на“.

Нека је $[\varphi]_0 \in \pi_n\Big(\bigvee\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} S^n_{(\alpha)}\Big)$, где је $\varphi : (S^n, e_1) \to \Big(\bigvee\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} S^n_{(\alpha)}, *\Big)$. Како је φ непрекидно пресликавање и S^n компактан, то је $\varphi(S^n)$ компактан па сече коначно много ћелија, тј.

постоје $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ такви да се φ факторише на следећи начин.

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, dashed, "\widetilde{\varphi}"'] & & \bigvee\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} S^n_{(\alpha)} \\ & \bigvee\limits_{k=1}^{m} S^n_{(\alpha_k)} \arrow[ur, hook, "l"'] & \end{tikzcd} \tag{4}$$

Дакле, имамо $[\widetilde{\varphi}]_0 \in \pi_n\left(\bigvee\limits_{k=1}^{m} S^n_{(\alpha_k)}\right)$. За $1 \leqslant k_0 \leqslant m$ комутира наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[rr, hook, "i_{\alpha_{k_0}}"] \arrow[dr, hook, "j_{\alpha_{k_0}}"'] & & \bigvee\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} S^n_{(\alpha)} \\ & \bigvee\limits_{k=1}^{m} S^n_{(\alpha_k)} \arrow[ur, hook, "l"'] & \end{tikzcd} \tag{5}$$

На основу дела 1^o постоје пресликавања $f_1, f_2, \ldots, f_m : (S^n, e_1) \to (S^n, e_1)$ таква да

$$(j_{\alpha_1})_*[f_1]_0 + (j_{\alpha_2})_*[f_2]_0 + \cdots + (j_{\alpha_m})_*[f_m]_0 = [\widetilde{\varphi}]_0 \tag{6}$$

јер је

$$\mathop{+}_{k=1}^{m} (j_{\alpha_k})_* : \bigoplus_{k=1}^{m} \pi_n(S^n) \to \pi_n\left(\bigvee_{k=1}^{m} S^n_{(\alpha_k)}\right)$$

изоморфизам. Ако нападнемо једначину (6) са l_* и применимо комутативност дијаграма (4) и (5), добијамо

$$(i_{\alpha_1})_*[f_1]_0 + (i_{\alpha_2})_*[f_2]_0 + \cdots + (i_{\alpha_m})_*[f_m]_0 = [\varphi]_0,$$

тј. $\mathop{+}\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} (i_\alpha)_*$ је „на“.

Остаје још да покажемо да је $\mathop{+}\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} (i_\alpha)_*$ „1-1“.

Нека су $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathcal{A}$ и $f_1, \ldots, f_m : (S^n, e_1) \to (S^n, e_1)$ таква да је

$$(i_{\alpha_1})_*[f_1]_0 + (i_{\alpha_2})_*[f_2]_0 + \cdots + (i_{\alpha_m})_*[f_m]_0 = 0 = [const]_0,$$

односно

$$[i_{\alpha_1} \circ f_1 + \cdots + i_{\alpha_m} \circ f_m]_0 = [const]_0,$$

где под операцијом + унутар класе подразумевамо дефиницију сабирања по формули (1) у оквиру одељка 2.1.

Из последње једнакости добијамо да мора да важи

$$i_{\alpha_1} \circ f_1 + \cdots + i_{\alpha_m} \circ f_m \simeq const \ (rel \ e_1),$$

тј. имамо хомотопију $H : S^n \times I \to \bigvee\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} S^n_{(\alpha)}$, а како је $S^n \times I$ компактан, то је и $H(S^n \times I)$ компактан па постоје $\alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_s \in \mathcal{A}$ такви да се H факторише на следећи начин.

$$\begin{tikzcd}
S^n \times I \arrow[rr, "H"] \arrow[dr, dashed, "\widetilde{H}"'] & & \bigvee\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} S^n_{(\alpha)} \\
& \bigvee\limits_{k=1}^{s} S^n_{(\alpha_k)} \arrow[ur, hook, "l"'] &
\end{tikzcd}$$

Одавде видимо да је

$$\widetilde{H} : j_{\alpha_1} \circ f_1 + \cdots + j_{\alpha_m} \circ f_m \simeq const \ (rel \ e_1),$$

па је

$$(j_{\alpha_1})_*[f_1]_0 + \cdots + (j_{\alpha_m})_*[f_m]_0 = 0 \in \pi_n\Bigg(\bigvee_{k=1}^{s} S^n_{\alpha_k}\Bigg).$$

Коначно из дела 1^o добијамо да је

$$[f_1]_0 = \ldots = [f_m]_0 = 0,$$

па је $\bigoplus\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} (i_\alpha)_*$ „1-1“. $\square$

Став 4.27 *Нека је $n \geqslant 2$ и G Абелова група задата преко генератора и релација*

$$G \cong Ab\left\langle s_\alpha, \alpha \in \mathcal{A} \mid r_\beta = 0, \beta \in \mathcal{B}\right\rangle = Ab\left\langle s_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}\right\rangle / \left\langle r_\beta, \beta \in \mathcal{B}\right\rangle$$

и нека је $\beta \in \mathcal{B}$ фиксиран и

$$r_\beta = \lambda_1 s_{\alpha_1} + \cdots + \lambda_m s_{\alpha_m}, \ \lambda_j \in \mathbb{Z}, \ \alpha_j \in \mathcal{A}.$$

Уочимо пресликавање $\varphi_\beta : S^n \to \bigvee\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} S^n_{(\alpha)}$ које чува базну тачку такво да

$$[\varphi_\beta]_0 = \lambda_1[i_{\alpha_1}]_0 + \cdots + \lambda_m[i_{\alpha_m}]_0 \in \pi_n\Bigg(\bigvee_{\alpha\in\mathcal{A}} S^n_{(\alpha)}\Bigg),$$

где је $i_{\alpha_j} : S^n \hookrightarrow \bigvee\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} S^n_{(\alpha)}$ инклузија за $1 \leqslant j \leqslant m$.

Нека је додатно X $(n+1)$-димензиони CW*-комплекс добијен од $\bigvee\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} S^n_{(\alpha)}$ лепљењем $(n+1)$-ћелија e^{n+1}_β помоћу пресликавања φ_β. Тада је*

$$\pi_n(X) \cong G.$$

Доказ: Посматрајмо дуги тачни низ пара $\left(X, \bigvee\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} S^n_{(\alpha)}\right)$. Како је $\bigvee\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} S^n_{(\alpha)}$ n-скелет простора X, то је овај пар n-повезан.

$$\cdots \longrightarrow \pi_{n+1}\left(X, \bigvee_{\alpha\in\mathcal{A}} S^n_{(\alpha)}\right) \xrightarrow{\partial} \pi_n\left(\bigvee_{\alpha\in\mathcal{A}} S^n_{(\alpha)}\right) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X) \longrightarrow \pi_n\left(X, \bigvee_{\alpha\in\mathcal{A}} S^n_{(\alpha)}\right) \longrightarrow \cdots$$

Како је $\pi_n\left(X, \bigvee\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} S^n_{(\alpha)}\right) = 0$, то је j_* „на“, па на основу прве теореме о изоморфизму и теореме 4.26 имамо

$$\pi_n(X) \cong \pi_n\left(\bigvee_{\alpha\in\mathcal{A}} S^n_{(\alpha)}\right)\Big/ \ker j_* = \pi_n\left(\bigvee_{\alpha\in\mathcal{A}} S^n_{(\alpha)}\right)\Big/ \mathrm{im}\ \partial \overset{4.26}{=} Ab\langle [i_\alpha]_0, \alpha\in\mathcal{A}\rangle/\mathrm{im}\ \partial.$$

Како је

$$G \cong Ab\langle [i_\alpha]_0, \alpha\in\mathcal{A}\rangle\big/\langle [\varphi_\beta]_0, \beta\in\mathcal{B}\rangle,$$

довољно је да покажемо да је

$$\mathrm{im}\ \partial = \langle [\varphi_\beta]_0, \beta\in\mathcal{B}\rangle. \tag{7}$$

Посматрајмо наредни дијаграм за фиксирано $\beta_0\in\mathcal{B}$

$$\begin{tikzcd}
(D^{n+1}, S^n) \arrow[r, "\phi^{n+1}_{\beta_0}"] \arrow[dr, two heads, "q"'] & \left(X, \bigvee\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} S^n_{(\alpha)}\right) \arrow[r, two heads, "p"] & \left(\bigvee\limits_{\beta\in\mathcal{B}} S^{n+1}_{(\beta)}, *\right) \\
& (S^{n+1}, e_1) \arrow[ur, hook, "i_{\beta_0}"'] &
\end{tikzcd} \tag{8}$$

где је p пресликавање које n-скелет скупља у тачку, а q пресликавање које границу диска D^{n+1} скупља у тачку e_1.

Тада је $p_* : \pi_{n+1}\left(X, \bigvee\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} S^n_{(\alpha)}\right) \to \pi_{n+1}\left(\bigvee\limits_{\beta\in\mathcal{B}} S^{n+1}_{(\beta)}\right)$ на основу последице 4.15 изоморфизам за $n+1 \leqslant n+n-1$, тј. за $n\geqslant 2$, а та претпоставка нам је дата у поставци теореме.

Знамо да је $\pi_{n+1}\left(\bigvee\limits_{\beta\in\mathcal{B}} S^{n+1}_{(\beta)}\right)$ слободна Абелова група са базом $\{[i_\beta]_0 \mid \beta\in\mathcal{B}\}$, па из низа једнакости

$$p_*([\phi^{n+1}_\beta]_{0r}) = [p\circ\phi^{n+1}_\beta]_{0r} \overset{(8)}{=} [i_\beta\circ q]_{0r} = [i_\beta]_0$$

закључујемо да је $\pi_n\left(X, \bigvee\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} S^n_{(\alpha)}\right)$ слободна Абелова група са базом $\{[\phi^{n+1}_\beta]_{0r} \mid \beta\in\mathcal{B}\}$.

Коначно, добијамо

$$\partial([\phi^{n+1}_\beta]_{0r}) = [\phi^{n+1}_\beta|_{S^n}]_0 = [\varphi_\beta]_0,$$

па важи (7). □

За свако $n \in \mathbb{N}$ и за сваку групу G (Абелову за $n \geqslant 2$) постоји $(n+1)$-димензиони CW-комплекс X такав да је $X^{n-1} = *$, $\pi_n(X) \cong G$ и важи услов *(БТ)* из теореме 4.9.

4.3 Ајленберг-Меклејнови простори

За $n \in \mathbb{N}$ имамо да је

$$\widetilde{H}_i(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = n \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

За $m \geqslant 2$ и $n \in \mathbb{N}$ се може конструисати простор $X_{n,m}$ такав да је

$$\widetilde{H}_i(X_{n,m}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_m, & i = n \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

на следећи начин. Нека је $\varphi : S^n \to S^n$ пресликавање степена m. Узмимо

$$X_{n,m} \overset{def}{=} D^{n+1} \cup_\varphi S^n.$$

Простор $X_{n,m}$ има по једну ћелију у димензијама 0, n и $n+1$ па имамо да је

$$\mathcal{C}^{\mathrm{CW}}(X_{n,m}) : \cdots \to 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{m} \mathbb{Z} \to 0 \to \cdots \to 0 \to \mathbb{Z} \to 0$$

одакле се види да је $X_{n,m}$ тражени простор.

Генерално, ако је G Абелова група и $n \in \mathbb{N}$ тополошки простор $M(G,n)$ такав да је

$$\widetilde{H}_i(M(G,n)) \cong \begin{cases} \mathbb{G}, & i = n \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

називамо Муровим простором типа (G,n) и може се показати да овај простор постоји за сваку групу G и свако $n \in \mathbb{N}$. Дакле, $S^n = M(\mathbb{Z}, n)$ и $X_{n,m} = M(\mathbb{Z}_m, n)$.

Ако је G коначно генерисана група, онда је она облика

$$G \cong \mathbb{Z}^k \oplus \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{m_l},$$

па можемо узети

$$M(G,n) = \bigvee_{j=1}^{k} S^n_{(j)} \vee \bigvee_{j=1}^{l} X_{n,m_j}.$$

Дефиниција 4.28 Нека је G група и $n \in \mathbb{N}$ (G Абелова ако је $n \geqslant 2$). *Ајленберг-Меклејнов простор типа* (G, n) јесте тополошки простор $K(G, n)$ који је CW-типа и важи

$$\pi_i(K(G,n)) \cong \begin{cases} G, & i = n \\ 0, & i \neq n \end{cases}$$

Теорема 4.29 *Нека је G група и $n \in \mathbb{N}$ (G Абелова ако је $n \geqslant 2$). Тада постоји Ајленберг-Меклејнов простор типа (G, n). Штавише, за $K(G, n)$ се може одабрати* CW-*комплекс X такав да је $X^{n-1} = \{x_0\}$ и такав да важи услов (БТ) теореме 4.9.*

Доказ: На крају претходног поглавља видели смо да постоји $(n+1)$-димензиони CW-комплекс који ћемо узети за X^{n+1} такав да је $X^{n-1} = \{x_0\}$, важи услов *(БТ)* и $\pi_n(X^{n+1}) \cong G$. Дакле,

$$\pi_i(X^{n+1}) \cong \begin{cases} G, & i = n \\ 0, & i < n \end{cases}$$

што не искључује могућност да ће нека хомотопска група реда вишег од n бити нетривијална. Да бисмо то средили додајемо ћелије димензије веће од $n+1$.

Нека је $\{s_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ неки скуп генератора групе $\pi_{n+1}(X^{n+1}, x_0)$. Нека је $\alpha \in \mathcal{A}$ и $\varphi_\alpha : (S^{n+1}, e_1) \to (X^{n+1}, x_0)$ такво да је $[\varphi_\alpha]_0 = s_\alpha$. Правимо $(n+2)$-скелет од X на следећи начин.

$$X^{n+2} \overset{def}{=} \left(\bigsqcup_{\alpha \in \mathcal{A}} D^{n+2}_{(\alpha)} \right) \cup_{\bigsqcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \varphi_{(\alpha)}} X^{n+1}.$$

Инклузија $j : X^{n+1} \hookrightarrow X^{n+2}$ је $(n+1)$-еквиваленција, па је

$$j_* : \pi_{n+1}(X^{n+1}, x_0) \to \pi_{n+1}(X^{n+2}, x_0)$$

епиморфизам. Показаћемо да је $j_* = 0$. Довољно је да покажемо да је j_* тривијално на свим генераторима. Нека је $\alpha \in \mathcal{A}$.

$$j_*(s_\alpha) = j_*([\varphi_\alpha]_0) = [j \circ \varphi_\alpha]_0 = 0$$

јер се пресликавање $j \circ \varphi_\alpha$ може проширити на диск на следећи начин.

$$\begin{tikzcd}
D^{n+2} \arrow[rrd, dashed, "\phi_\alpha"] & & \\
S^{n+1} \arrow[u, hook] \arrow[r, "\varphi_\alpha"] & X^{n+1} \arrow[r, hook, "j"] & X^{n+2}
\end{tikzcd}$$

Дакле, j_* је тривијални епиморфизам, па је $\pi_{n+1}(X^{n+2}) = 0$. За $i \leqslant n$ је

$$\pi_i(X^{n+2}) \cong \pi_i(X^{n+1}) \cong \begin{cases} G, & i = n \\ 0, & i < n \end{cases}$$

Индуктивно можемо наставити овај поступак додавања ћелија док не добијемо тражени простор X. Из конструкције видимо да ће X бити управо CW-комплекс са траженим својствима. □

Став 4.30 *Нека је $G_1, G_2, G_3, \ldots, G_n, \ldots$ низ група при чему је G_n Абелова за $n \geqslant 2$. Тада постоји простор X такав да је $\pi_n(X) \cong G_n$, за свако $n \in \mathbb{N}$.*

Доказ: Нека је $X = \prod_{n=1}^{\infty} K(G_n, n)$. Тада је

$$\pi_m(X) \cong \prod_{n=1}^{\infty} \pi_m(K(G_n, n)) \cong \pi_m(K(G_m, m)) \cong G_m. \ \square$$

Пример 4.31

1) $K(\mathbb{Z}, 1) = S^1$. Заиста, знамо да је фундаментална група кружнице $\mathbb{Z}$, а како $\mathbb{R}$ наткрива S^1 и $\mathbb{R} \simeq *$, то су све остале хомотопске групе тривијалне.

2) $K(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, 1) = T^2$. Фундаментална група торуса јесте $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, а све остале су тривијалне јер $\mathbb{R}^2$ наткрива T^2. Ако је M нека од затворених повезаних површи сем S^2 и $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$, онда постоји наткривање $\mathbb{R}^2 \to M$, па је $M = K(G, 1)$, где је $G = \pi_1(M)$.

Ако је X CW-комплекс онда је $X = K(G, 1)$ за неку групу G ако и само ако је универзално наткривање од X контрактибилно.

3) Одредимо $K(\mathbb{Z}_2, 1)$ користећи конструкцију из доказа теореме 4.29. Имамо да је $X^2 = \mathbb{R}\mathrm{P}^2$. Показали смо да је

$$\pi_2(\mathbb{R}\mathrm{P}^2, [e_1]) \cong \mathbb{Z}\langle [p]_0 \rangle,$$

где је $p : S^2 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ дволисно наткривање. Лепимо 3-ћелију помоћу пресликавања p и добијамо 3-скелет траженог простора

$$X^3 \overset{def}{=} D^3 \cup_p \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \approx \mathbb{R}\mathrm{P}^3.$$

Даље имамо да је

$$\pi_3(\mathbb{R}\mathrm{P}^3, [e_1]) \cong \mathbb{Z}\langle [p]_0 \rangle,$$

где је $p : S^3 \to \mathbb{RP}^3$ дволисно наткривање, па узимамо

$$X^4 \overset{def}{=} D^4 \cup_p \mathbb{RP}^3 \approx \mathbb{RP}^4.$$

Настављајући овај поступак добијамо да је тражени простор $K(\mathbb{Z}_2, 1) = \mathbb{RP}^\infty$.

У ово смо се могли уверити и на други начин. Универзално наткривање од $\mathbb{RP}^\infty$ је S^∞, а може се показати да је $S^\infty \simeq *$, па је $K(\mathbb{Z}_2, 1) = \mathbb{RP}^\infty$.

4) *Сада ћемо одредити $K(\mathbb{Z}_m, 1)$, за $m \geqslant 2$. Нека је $\mathbb{Z}_m \times S^{2n-1} \to S^{2n-1}$ дејство дато са*

$$(1, z) \mapsto e^{\frac{i2\pi}{m}} \cdot z,$$

где је $1 \in \mathbb{Z}_m$ генератор, а $z \in S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$. Овим је добро дефинисано дејство групе $\mathbb{Z}_m$ на S^{2n-1} и то дејство је слободно. Нека је

$$L_m^{2n-1} \overset{def}{=} S^{2n-1}/\mathbb{Z}_m.$$

Овај простор називамо лећастим простором. Како је S^{2n-1} Хауздорфов простор и ово дејство је слободно, то је природна сурјекција $S^{2n-1} \twoheadrightarrow S^{2n-1}/\mathbb{Z}_m = L_m^{2n-1}$ наткривање, а како је за $n \geqslant 2$ S^{2n+1} просто повезан простор, то важи $\pi_1(L_m^{2n-1}) \cong \mathbb{Z}_m$.

Како је S^{2n-1} затворена повезана $(2n-1)$-многострукост, то је и L_m^{2n-1} затворена повезана $(2n-1)$-многострукост. Приметимо $L_m^1 \approx S^1$ и $L_2^{2n-1} \approx \mathbb{RP}^{2n-1}$.

Претходна конструкција може да се уради и када уместо S^{2n-1} узмемо S^∞. Тада добијамо $L_m^\infty \overset{def}{=} S^\infty/\mathbb{Z}_m$. Коначно, имамо да је $K(\mathbb{Z}_m, 1) = L_m^\infty$.

Приметимо да сада знамо $K(G, 1)$ за сваку коначно генерисану Абелову групу G јер је $G \cong \mathbb{Z}^k \oplus \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{m_l}$, па је

$$K(G, 1) = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{k} \times L_{m_1}^\infty \times \cdots \times L_{m_l}^\infty.$$

Дејство групе $\mathbb{Z}_m$ на S^{2n-1} није јединствено већ можемо посматрати и дејство $\mathbb{Z}_m \times S^{2n-1} \to S^{2n-1}$ дато са

$$(1, (z_1, \ldots, z_n)) \mapsto \left(e^{i\frac{2l_1\pi}{m}} z_1, \ldots, e^{i\frac{2l_n\pi}{m}} z_n\right)$$

где су $l_1, \ldots, l_n \in \mathbb{N}$ бројеви узајамно прости са m. Ово ће такође бити слободно дејство групе $\mathbb{Z}_m$ на скуп S^{2n-1} и простор

$$L_m^{2n-1}(l_1, \ldots, l_n) = S^{2n-1}/\mathbb{Z}_m$$

исто називамо лећастим простором који ће имати све исте особине које смо навели за L_m^{2n-1}. *Приметимо да је* $L_m^{2n-1} = L_m^{2n-1}(1,1,\dots,1)$. *Простори* L_m^{2n-1} *и* $L_m^{2n-1}(l_1,\dots,l_n)$ *имају исте све хомотопске и хомолошке групе, али се бројеви* $l_1,\dots l_n$ *могу одабрати тако да ова два простора не буду хомотопски еквивалетна.*

Знамо да ако су M *и* N *затворене повезане* 2*-многострукости онда важи еквиваленција*

$$M \approx N \Longleftrightarrow \pi_1(M) \cong \pi_1(N).$$

У општем случају ово не важи за n*-многострукости. Пример за то су лећасти простори* $L_5^3(1,1)$ *и* $L_5^3(1,2)$ *који нису хомотопски еквивалентни али имају исте фундаменталне групе. Такође,* $L_7^3(1,1)$ *и* $L_7^3(1,2)$ *јесу хомотопски еквивалентни, али нису хомеоморфни.*

Ако су M *и* N *затворене повезане* n*-многострукости такве да је* $\pi_1(M) \cong \pi_1(N)$ *и* $H_i(M) \cong H_i(N)$ *за свако* $i \in \mathbb{N}_0$ *ни онда не мора бити* $M \approx N$ *(пример за то су опет лећасти простори* $L_5^3(1,1)$ *и* $L_5^3(1,2)$*).*

Поенкареова хипотеза: *Нека је* M *затворена повезана* n*-многострукост,* $n \geqslant 2$. *Ако је* $H_i(M) \cong H_i(S^n)$ *за свако* $i \in \mathbb{N}_0$ *и* $\pi_1(M) = 0$*, онда је* $M \approx S^n$.

Хипотезу је шездесетих година прошлог века за случај $n \geqslant 5$ *доказао Smale у [3]. Касније је Freedman 1982. године у [4] доказао хипотезу за случај* $n = 4$*, да би коначно Perelman 2003. у своја три рада [5], [6] и [7] скицирао доказ за случај* $n = 3$ *који је у наредних пар година допуњен техничким детаљима.*

5) *Сваки граф је* $K(G,1)$.

6) $K(\mathbb{Z},2) = \mathbb{C}\mathrm{P}^\infty$*, у шта ћемо се уверити касније.*

Став 4.32 *Нека је* X CW*-комплекс такав да је* $X^{n-1} = \{x_0\}$ *за неко* $n \in \mathbb{N}$*, да важи услов (БТ) теореме 4.9 и нека је* Y *путно повезан простор такав да је* $\pi_i(Y) = 0$ *за* $i > n$ *и* $y_0 \in Y$. *Тада је функција*

$$\Theta : [X,Y]_0 \to \mathrm{Hom}(\pi_n(X,x_0), \pi_n(Y,y_0))$$

дата са

$$\Theta([f]_0) = f_*, \text{ за } f : (X,x_0) \to (Y,y_0)$$

бијекција.

Доказ: Прво ћемо показати да је Θ „на“. Нека је $\psi : \pi_n(X,x_0) \to \pi_n(Y,y_0)$ хомоморфизам. Тражимо пресликавање $f : (X,x_0) \to (Y,y_0)$ такво да је $f_* = \psi$. Како је $X^0 = X^{n-1}$, дефинишимо f на $(n-1)$-скелету са $f(x_0) \overset{def}{=} y_0$. Даље желимо да дефинишемо f на X^n. Како је $X^{n-1} = \{x_0\}$, то је $X^n = \bigvee\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} S^n_{(\alpha)}$ па ћемо f дефинисати посебно на свакој сфери.

Нека је $\alpha \in \mathcal{A}$ и нека је $i_\alpha : (S^n, e_1) \hookrightarrow (X, x_0)$ инклузија. Тада је $[i_\alpha]_0 \in \pi_n(X, x_0)$, па је $\psi([i_\alpha]_0) \in \pi_n(Y, y_0)$, тј. постоји $g_\alpha : (S^n, e_1) \to (Y, y_0)$ такво да је $[g_\alpha]_0 = \psi([i_\alpha]_0)$. Пресликавање $f^n : (X^n, x_0) \to (Y, y_0)$ бирамо тако да за свако $\alpha \in \mathcal{A}$ комутира наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd}
S^n \arrow[rr, "g_\alpha"] \arrow[dr, hook, "j_\alpha"] \arrow[ddr, hook, "i_\alpha"'] & & Y \\
& X^n \arrow[ur, dashed, "f^n"] \arrow[d, hook, "j"] & \\
& X &
\end{tikzcd} \tag{9}$$

Приметимо да тада комутира и наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(X^n, x_0) \arrow[rr, "f^n_*"] \arrow[dr, "j_*"'] & & \pi_n(Y, y_0) \\
& \pi_n(X, x_0) \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd} \tag{10}$$

Заиста, како је $\pi_n(X^n, x_0)$ слободна група са базом $\{[j_\alpha]_0 \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$, лако се провери да дијаграм комутира на базним елементима. Нека је $\alpha \in \mathcal{A}$. Тада имамо

$$f^n_*([j_\alpha]_0) = [f^n \circ j_\alpha]_0 \overset{(9)}{=} [g_\alpha]_0 = \psi([i_\alpha]_0) \overset{(9)}{=} \psi(j_*([j_\alpha]_0)),$$

па закључујемо да комутира дијаграм (10).

Сада желимо да дефинишемо f на X^{n+1}. Нека је $\{e^{n+1}_\beta \mid \beta \in \mathcal{B}\}$ скуп свих $(n+1)$-ћелија у X^{n+1} и нека су $\varphi_\beta : S^n \to X$, $\beta \in \mathcal{B}$, њихове функције лепљења. На основу леме 3.9 пресликавање f^n се може проширити на X^{n+1} ако и само ако је $f^n \circ \varphi_\beta \simeq const$, за све $\beta \in \mathcal{B}$, тј. ако и само ако се ова пресликавања могу проширити на диск. Другим речима, $[f^n \circ \varphi_\beta]_0 \in \pi_n(Y, y_0)$, $\beta \in \mathcal{B}$ јесу опструкције за постојање овог проширења.

$$\begin{tikzcd}
D^{n+1} \arrow[drr, dashed] & & \\
S^n \arrow[u, hook] \arrow[r, "\varphi_\beta"] & X^n \arrow[r, "f^n"] & Y
\end{tikzcd}$$

Имамо да је

$$[f^n \circ \varphi_\beta]_0 = f^n_*([\varphi_\beta]_0) = \psi(j_*([\varphi_\beta]_0)) = \psi([j \circ \varphi_\beta]_0) = \psi(0) = 0$$

јер се $j \circ \varphi_\beta$ проширује на диск D^{n+1} на следећи начин.

$$\begin{tikzcd}
D^{n+1} \arrow[rrd, dashed, "\phi_\beta"] & & \\
S^n \arrow[u, hook] \arrow[r, "\varphi_\beta"] & X^n \arrow[r, "j"] & X
\end{tikzcd}$$

Дакле, нема опструкција па се f^n проширује на X^{n+1} и добијено проширење ћемо означити са f^{n+1}. Како је $\pi_i(Y) = 0$ за $i > n$, то из последице 3.12 сад следи да постоји и $f : X \to Y$ такво да комутира наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rdd, dashed, "f"] & \\
X^{n+1} \arrow[u, hook] \arrow[rd, dashed, "f^{n+1}"] & \\
X^n \arrow[u, hook] \arrow[r, "f^n"] & Y
\end{tikzcd}$$

Још остаје да се уверимо да је $f_* = \psi$. Из комутативности дијаграма (10) имамо да је $\psi j_* = f^n_*$. Са друге стране, како комутира дијаграм

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rd, "f"] & \\
X^n \arrow[u, hook, "j"] \arrow[r, "f^n"] & Y
\end{tikzcd}$$

добијамо да је $f_* j_* = f^n_*$, па мора да важи $\psi j_* = f_* j_*$. Како је $j : X^n \hookrightarrow X$ n-еквиваленција, то је у димензији n пресликавање j_* епиморфизам па из последње једнакости закључујемо да је $\psi = f_*$, тј. пресликавање Θ је „на“.

Сада ћемо показати да је Θ и „1-1“. Нека су $f, g : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ непрекидна пресликавања и претпоставимо да је $f_* = g_* : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_0)$. Показујемо да је $f \simeq g$ $(rel\ x_0)$. Постојање хомотопије можемо видети као проблем постојања проширења пресликавања $H : X \times \{0, 1\} \cup \{x_0\} \times I \to Y$ на $X \times I$, где је

$$H(x, 0) \stackrel{def}{=} f(x),\ x \in X,$$

$$H(x, 1) \stackrel{def}{=} g(x),\ x \in X,$$

$$H(x_0, t) = y_0,\ t \in I.$$

Желимо прво да дефинишемо H и на $X^n \times I$, па ћемо то проширење после проширити на $X \times I$. Како је $X^n = \bigvee\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} S^n_{(\alpha)}$, дефинисаћемо H посебно за сваку сферу.

Нека је $\alpha \in \mathcal{A}$. Из претпоставке имамо да је $f_*([i_\alpha]_0) = g_*([i_\alpha]_0)$, тј. $[f \circ i_\alpha]_0 = [g \circ i_\alpha]_0$, па постоји хомотопија $H_\alpha : f \circ i_\alpha \simeq g \circ i_\alpha$ $(rel\ e_1)$. Пресликавање $H : S^n_{(\alpha)} \times I \to Y$ бирамо тако да комутира наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd}
S^n \times I \arrow[rr, "H_\alpha"] \arrow[dr, "\approx"] \arrow[ddr, "i_\alpha \times \mathbb{1}_I"'] & & Y \\
& S^n_{(\alpha)} \times I \arrow[ur, dashed, "H"'] \arrow[d, hook] & \\
& X \times I &
\end{tikzcd}$$

Дакле, пресликавање H смо дефинисали на $X \times \{0,1\} \cup X^n \times I \subseteq X \times I$. Како је $(X \times I)^{n+1} = X^{n+1} \times \{0,1\} \cup X^n \times I$ то је $(X \times I)^{n+1} \subseteq X \times \{0,1\} \cup X^n \times I$, па $X \times I \backslash (X \times \{0,1\} \cup X^n \times I)$ садржи само ћелије димензије веће од $n+1$, а пошто је $\pi_i(Y) = 0$ за $i > n$, то на основу леме о проширењу 3.11 закључујемо да се H проширује на $X \times I$. $\square$

Теорема 4.33 *Нека је $n \in \mathbb{N}$, G група (G је Абелова ако је $n \geqslant 2$) и нека су X и Y два Ајленберг-Меклејнова простора типа (G, n). Тада је $X \simeq Y$.*

Доказ: Нека је X Ајленберг-Меклејнов простор добијен конструкцијом из доказа теореме 4.29, тј. X је CW-комплекс такав да је $X^{n-1} = \{x_0\}$ и важи услов *(БТ)* теореме 4.9. Нека је Y произвољан Ајленберг-Меклејнов простор и $y_0 \in Y$. Показаћемо да је $X \simeq Y$.

Нека је $\psi : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_0)$ неки фиксирани изоморфизам. На основу претходног става постоји $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ такво да је $f_* = \psi$. Због путне повезаности простора X и Y је и $f_* : \pi_n(X, x) \to \pi_n(Y, f(x))$ изоморфизам за свако $x \in X$. Такође, ако је $i \neq n$ и $x \in X$ онда је и $f_* : \pi_i(X, x) \to \pi_i(Y, f(x))$ изоморфизам јер су обе хомотопске групе $\pi_i(X, x)$ и $\pi_i(Y, f(x))$ тривијалне.

Дакле, f је слаба хомотопска екививаленција и X и Y су CW-типа, па на основу Вајтхедове теореме 4.4 закључујемо да је f и хомотопска еквиваленција. $\square$

Напомена 4.34 *За дато $n \in \mathbb{N}$ и Абелову групу G имамо контраваријантне функторе*

$$\begin{tikzcd}
Top \arrow[r, bend left, "H^n(\cdot; G)"] \arrow[r, bend right, "{[\cdot, K(G,n)]}"'] & Ab
\end{tikzcd}$$

који су природно изоморфни на поткатегорији простора CW*-типа, тј. за сваки тополошки простор* CW*-типа* X *постоји бијекција*

$$T_X : H^n(X;G) \to [X, K(G,n)]$$

и ако је $f : X \to Y$ *непрекидно онда комутира наредни дијаграм.*

$$\begin{tikzcd}
H^n(X;G) \arrow[r, tail, two heads, "T_X"] & {[X, K(G,n)]} \\
H^n(Y;G) \arrow[u, "f^*"] \arrow[r, tail, two heads, "T_Y"] & {[Y, K(G,n)]} \arrow[u, "f^*"']
\end{tikzcd}$$

4.4 Теорема Хуревића

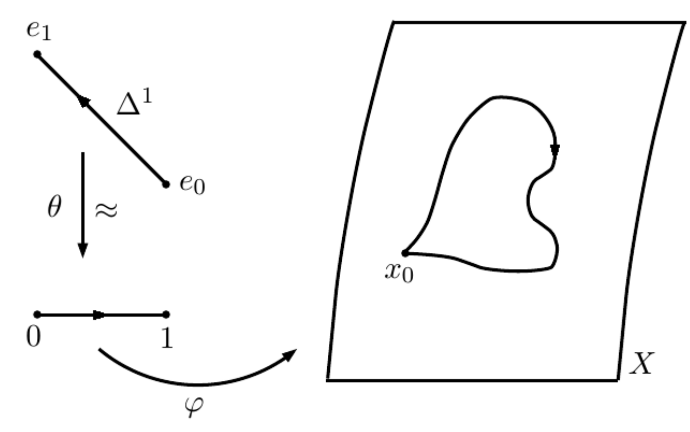
Познато је да важи наредна теорема.

Теорема 4.35 (Хуревић за $n = 1$) *Ако је* X 0*-повезан тополошки простор и* $x_0 \in X$ *онда је Хуревићев хомоморфизам* $h : \pi_1(X, x_0) \to H_1(X)$ *епиморфизам и његово језгро је извод фундаменталне групе, тј.* $\ker h = \pi_1'(X, x_0)$*. Дакле,* $\pi_1^{ab}(X, x_0) \cong H_1(X)$*.*

Подсетимо се како је дефинисан хомоморфизам h. Нека је $\varphi : (I, \{0,1\}) \to (X, x_0)$, онда је

$$h([\varphi]) \overset{def}{=} [\varphi \circ \theta] \in H_1(X),$$

где је $\theta : \Delta^1 \to I$ хомеоморфизам дат са $\theta(t_0, t_1) = t_1$.



Специјално, ако је $X = S^1$ пресликавање $h : \pi_1(S^1, e_1) \to H_1(S^1)$ је изоморфизам. Један генератор у $\pi_1(S^1, e_1)$ је $[p]$, где је $p : I \to S^1$ пресликавање дато са $p(t) \overset{def}{=} e^{i2\pi t}$. Тада ће и

$$\alpha_1 \overset{def}{=} h([p]) = [p \circ \theta] \in H_1(S^1)$$

бити генератор.

Сада да видимо како изгледа хомоморфизам h када фундаменталну групу посматрамо као $\pi_1(X, x_0) = [S^1, X]_0$. Нека је $f : (S^1, e_1) \to (X, x_0)$. Тада је

$$h([f]_0) = h([f \circ p]) = [f \circ p \circ \theta] = f_*([p \circ \theta]) = f_*(\alpha_1),$$

где је $f_* : H_1(S^1) \to H_1(X)$.

$$\begin{tikzcd}
\Delta^1 \arrow[d, "\theta"'] & & \\
I \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & X \\
& S^1 \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Ово нам даје мотивацију за дефинисање пресликавање h у већим димензијама. Нека је $n \in \mathbb{N}$. Уочимо пресликавање $q : (D^{n+1}, S^n) \to (S^{n+1}, e_1)$ које границу диска D^{n+1} скупља у e_1. Ово пресликавање индукује пресликавање два дуга тачна низа.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_{n+1}(D^{n+1}) \arrow[r] \arrow[d, "q_*"] & H_{n+1}(D^{n+1}, S^n) \arrow[r, tail, two heads, "\partial"] \arrow[d, tail, two heads, "q_*"] & H_n(S^n) \arrow[r] \arrow[d, "q_*"] & H_n(D^{n+1}) \arrow[r] \arrow[d, "q_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_{n+1}(S^{n+1}) \arrow[r, tail, two heads, "i_*"] & H_{n+1}(S^{n+1}, e_1) \arrow[r] & H_n(e_1) \arrow[r] & H_n(S^{n+1}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Пресликавања $\partial : H_{n+1}(D^{n+1}, S^n) \to H_n(S^n)$ и $i_* : H_{n+1}(S^{n+1}) \to H_{n+1}(S^{n+1}, e_1)$ су изоморфизми из дугих тачних низова одговарајућих парова док је $q_* : H_{n+1}(D^{n+1}, S^n) \to H_{n+1}(S^{n+1}, e_1)$ изоморфизам на основу става 4.12.

Имамо генератор $\alpha_1 \in H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$. Одаберимо генераторе $\alpha_n \in H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ и $\beta_{n+1} \in H_{n+1}(D^{n+1}, S^n) \cong \mathbb{Z}$ тако да за све $n \in \mathbb{N}$ важи

$$\partial\beta_{n+1} = \alpha_n \text{ и } i_*\alpha_{n+1} = q_*\beta_{n+1}.$$

Дакле, видимо да имамо генераторе $\alpha_n \in H_n(S^n)$ за свако $n \geqslant 1$ и $\beta_n \in H_n(D^n, S^{n-1})$ за свако $n \geqslant 2$.

Дефиниција 4.36

(a) Нека је X тополошки простор, $x_0 \in X$ и $n \in \mathbb{N}$. *Хуревићево пресликавање* је пресликавање $h : \pi_n(X, x_0) \to H_n(X)$ дато на следећи начин. За $f : (S^n, e_1) \to (X, x_0)$ је

$$h([f]_0) \overset{def}{=} f_*(\alpha_n),$$

где је $f_*: H_n(S^n) \to H_n(X)$.

(б) Нека је $a_0 \in A \subseteq X$ и $n \geqslant 2$. *Релативно Хуревићево пресликавање* је пресликавање $h: \pi_n(X, A, a_0) \to H_n(X, A)$ дато на следећи начин. За $g: (D^n, S^{n-1}, e_1) \to (X, A, a_0)$ је

$$h([g]_{0r}) \overset{def}{=} g_*(\beta_n),$$

где је $g_*: H_n(D^n, S^{n-1}) \to H_n(X, A)$.

Особине:

1) Ако је $u: I \to X$ пут од x_0 до x_1 онда комутира наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(X, x_0) \arrow[dr, "h"] \arrow[dd, tail, two heads, "\beta_u"'] & \\
& H_n(X) \\
\pi_n(X, x_1) \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

Заиста, ако је $[f]_0 \in \pi_n(X, x_0)$ и $[g]_0 = \beta_u([f]_0) \in \pi_n(X, x_1)$, онда је $f \underset{u}{\simeq} g$, па је $f_* = g_*$ одакле је

$$h(\beta_u([f]_0)) = h([g]_0) = g_*(\alpha_n) = f_*(\alpha_n) = h([f]_0).$$

Слично, ако је $v: I \to A$ пут од a_0 до a_1, онда комутира наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(X, A, x_0) \arrow[dr, "h"] \arrow[dd, tail, two heads, "\beta_v"'] & \\
& H_n(X, A) \\
\pi_n(X, A, x_1) \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

2) Ако је $A = \{a_0\}$, онда за $n \geqslant 2$ комутира наредни дијаграм

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(X, a_0, a_0) \arrow[r, "h"] \arrow[d, leftrightarrow, "k"'] & H_n(X, a_0) \\
\pi_n(X, a_0) \arrow[r, "h"] & H_n(X) \arrow[u, tail, two heads, "j_*"']
\end{tikzcd}$$

где је $k : \pi_n(X, a_0) \leftrightarrow \pi_n(X, a_0, a_0)$ идентификације (2) из одељка 2.2, а $j : (X, \varnothing) \hookrightarrow (X, a_0)$ инклузија. На основу дугог тачног низа пара (X, a_0) пресликавање j_* је изоморфизам.

Заиста, нека је $f : (S^n, e_1) \to (X, a_0)$. Из комутативности дијаграма

$$\begin{tikzcd}
(S^n, \varnothing) \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f"'] & (S^n, e_1) \arrow[d, "f"] \\
(X, \varnothing) \arrow[r, hook, "j"] & (X, a_0)
\end{tikzcd}$$

преласком на хомологију добијамо да важи $f_* i_* = j_* f_*$, одакле добијамо

$$\begin{aligned}
h(k([f]_0)) &= h([f \circ q]_{0r}) \\
&= (f \circ q)_*(\beta_n) \\
&= f_*(q_*(\beta_n)) \\
&= f_*(i_*(\alpha_n)) \\
&= j_*(f_*(\alpha_n)) \\
&= j_*(h([f]_0)).
\end{aligned}$$

Став 4.37 *Хуревићево пресликавање је хомоморфизам група.*

Доказ: Доказаћемо став за Хуревићево пресликавање, а сличан доказ се може извести и за релативно Хуревићево пресликавање.

Нека су $f, g : (S^n, e_1) \to (X, x_0)$. Желимо да покажемо да је

$$h([f]_0 + [g]_0) = h([f]_0) + h([g]_0).$$

Како је

$$h([f]_0 + [g]_0) = h([(f \veebar g) \circ \gamma]_0) = (f \veebar g)_* \gamma_*(\alpha_n),$$
$$h([f]_0) + h([g]_0) = f_*(\alpha_n) + g_*(\alpha_n),$$

довољно је показати да је

$$(f \veebar g)_* \gamma_*(\alpha_n) = f_*(\alpha_n) + g_*(\alpha_n) \tag{11}$$

у $H_n(X)$.

Имали смо пресликавања $S^n \xrightarrow{\gamma} S^n_a \vee S^n_b \xrightarrow{f \veebar g} X$. Уочимо и наредна пресликавања.

$$\begin{tikzcd}
S^n & & & & S^n \\
& & S^n_a \vee S^n_b \arrow[ull, "q_1"'] \arrow[urr, "q_2"] & & \\
S^n \arrow[uu, "\mathbb{1}_{S^n}"] \arrow[urr, hook, "i_1"'] & & & & S^n \arrow[uu, "\mathbb{1}_{S^n}"'] \arrow[ull, hook', "i_2"]
\end{tikzcd}$$

где је

$$q_1|_{S^n_a} = h, \quad q_1|_{S^n_b} \equiv e_1,$$
$$q_2|_{S^n_a} \equiv e_1, \quad q_2|_{S^n_b} = h \circ \rho,$$
$$i_1 = h^{-1}, \ i_2 = (h \circ \rho)^{-1},$$

а хомеоморфизми h и ρ су дефинисани у одељку 2.1.

Приметимо да је

$$q_1 \circ i_1 = q_2 \circ i_2 = \mathbb{1}_{S^n}, \ q_2 \circ i_1 = q_1 \circ i_2 = c_{e_1},$$

као и

$$q_1 = \mathbb{1}_{S^n} \veebar c_{e_1} \text{ и } q_2 = c_{e_1} \veebar \mathbb{1}_{S^n}.$$

Зато је

$$[q_1 \circ \gamma]_0 = [\mathbb{1}_{S^n}]_0 + [c_{e_1}]_0 = [\mathbb{1}_{S^n}]_0,$$

а слично важи и за пресликавање q_2, па добијамо да је

$$q_1 \circ \gamma \simeq \mathbb{1}_{S^n}, \quad q_2 \circ \gamma \simeq \mathbb{1}_{S^n}. \tag{12}$$

Посматрајмо наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd}
H_n(S^n) \arrow[r, "\gamma_*"] & H_n(S^n_a \vee S^n_b) \arrow[r, "(f\veebar g)_*"] \arrow[d, dashed, bend right, "((q_1)_*,(q_2)_*)"'] & H_n(X) \\
& H_n(S^n) \oplus H_n(S^n) \arrow[u, bend right, "(i_1)_*+(i_2)_*"']
\end{tikzcd}$$

Проверимо да је $((q_1)_*, (q_2)_*)$ инверз изоморфизма $(i_1)_* + (i_2)_*$. Нека је $(\sigma, \tau) \in H_n(S^n) \oplus H_n(S^n)$.

$$\begin{aligned}
((q_1)_*, (q_2)_*)((i_1)_* + (i_2)_*)(\sigma, \tau) &= ((q_1)_*, (q_2)_*)((i_1)_*\sigma + (i_2)_*\tau) \\
&= \big((q_1)_*((i_1)_*\sigma + (i_2)_*\tau), (q_2)_*((i_1)_*\sigma + (i_2)_*\tau)\big) \\
&= (\sigma + 0, 0 + \tau) \\
&= (\sigma, \tau)
\end{aligned}$$

Још остаје да покажемо једнакост (11).

$$\begin{aligned}
(f \veebar g)_*\gamma_*\alpha_n &= (f \veebar g)_*((i_1)_* + (i_2)_*)((q_1)_*, (q_2)_*)\gamma_*\alpha_n \\
&= (f \veebar g)_*((i_1)_* + (i_2)_*)((q_1 \circ \gamma)_*\alpha_n, (q_2 \circ \gamma)_*\alpha_n) \\
&\overset{(12)}{=} (f \veebar g)_*((i_1)_* + (i_2)_*)(\alpha_n, \alpha_n) \\
&= (f \veebar g)_*((i_1)_*\alpha_n + (i_2)_*\alpha_n) \\
&= f_*(\alpha_n) + g_*(\alpha_n),
\end{aligned}$$

где последња једнакост важи јер је $(f \veebar g) \circ i_1 = f$ и $(f \veebar g) \circ i_2 = g$. $\square$

Став 4.38 *Хуревићев хомоморфизам h има својство природности, тј. ако је $f : X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$ и $x \in X$, онда комутира наредни дијаграм*

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(X,x) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "h"'] & \pi_n(Y, f(x)) \arrow[d, "h"] \\
H_n(X) \arrow[r, "f_*"] & H_n(Y)
\end{tikzcd}$$

односно, ако је $g : (X,A) \to (Y,B)$, $n \geqslant 2$ и $a \in A$, онда комутира наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(X,A,a) \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, "h"'] & \pi_n(Y,B,g(a)) \arrow[d, "h"] \\
H_n(X,A) \arrow[r, "g_*"] & H_n(Y,B)
\end{tikzcd}$$

Доказ: Нека је $\varphi : (S^n, e_1) \to (X, x)$, тј. $[\varphi]_0 \in \pi_n(X,x)$. Тада је

$$f_*(h([\varphi]_0)) = f_*\varphi_*\alpha_n = (f \circ \varphi)_*\alpha_n = h([f \circ \varphi]_0) = h(f_*([\varphi]_0)),$$

па закључујемо да комутира први дијаграм, а слично се показује и комутативност другог. $\square$

Став 4.39 *Ако је $a \in A \subseteq X$, онда следећи дијаграм комутира.*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \pi_{n+1}(X,A,a) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, phantom, "I"] & \pi_n(A,a) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, phantom, "II"] & \pi_n(X,a) \arrow[r] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, phantom, "III"] & \pi_n(X,A,a) \arrow[r] \arrow[d, "h"] & \cdots \arrow[r] & \pi_1(X,a) \arrow[r] \arrow[d, "h"] & \pi_1(X,A,a) \\
\cdots \arrow[r] & H_{n+1}(X,A) \arrow[r, "\partial"] & H_n(A) \arrow[r, "i_*"] & H_n(X) \arrow[r, "l_*"] & H_n(X,A) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & H_1(X) \arrow[r] & H_1(X,A)
\end{tikzcd}$$

Доказ: Потребно је да покажемо да комутирају квадрати I, II и III из дијаграма.

Комутативност I. Нека је $g : (D^{n+1}, S^n, e_1) \to (X, A, a)$. Посматрајмо дуге тачне низове парова (D^{n+1}, S^n) и (X, A). Тада имамо комутативни дијаграм

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_{n+1}(D^{n+1}, S^n) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "g_*"'] & H_n(S^n) \arrow[r] \arrow[d, "(g|_{S^n})_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_{n+1}(X,A) \arrow[r, "\partial"] & H_n(A) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

одакле добијамо

$$\partial g_* = (g|_{S^n})_* \partial.$$

Како је

$$h\partial[g]_{0r} = h[g|_{S^n}]_0 = (g|_{S^n})_* \alpha_n = (g|_{S^n})_* \partial\beta_{n+1} = \partial g_* \beta_{n+1} = \partial h[g]_{0r}$$

то закључујемо да део I дијаграма комутира.

Комутативност II директно следи из претходног става.

Комутативност III. Пресликавање $\pi_n(X,a) \to \pi_n(X,A,a)$ из дијаграма је заправо композиција

$$\pi_n(X,a) \longleftrightarrow \pi_n(X,a,a) \xrightarrow{k_*} \pi_n(X,A,a),$$

где је

$$\begin{tikzcd}
(X,a) \arrow[r, hook, "k"] & (X,A) \\
(X,\varnothing) \arrow[u, hook, "j"] \arrow[ur, hook, "l"'] &
\end{tikzcd}$$

Дакле, квадрат III се заправо састоји од два квадрата са следећег дијаграма.

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(X,a) \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, "h"'] & \pi_n(X,a,a) \arrow[r, "k_*"] \arrow[d, "h"] & \pi_n(X,A,a) \arrow[d, "h"] \\
H_n(X) \arrow[r, "j_*"] & H_n(X,a) \arrow[r, "k_*"] & H_n(X,A)
\end{tikzcd}$$

Леви квадрат у овом дијаграму комутира на основу особине 2) Хуревићевог пресликавања, док десни комутира на основу претходног става што нам коначно даје да комутира и део III дијаграма. $\square$

Лема 4.40 *Ако је $n \geqslant 2$ онда је $h : \pi_n\Big(\bigvee_{\alpha\in\mathcal{A}} S^n_{(\alpha)}\Big) \to H_n\Big(\bigvee_{\alpha\in\mathcal{A}} S^n_{(\alpha)}\Big)$ изоморфизам.*

Доказ: Нека је $\alpha_0 \in \mathcal{A}$. Тада имамо природно утапање

$$i_{\alpha_0} : S^n \hookrightarrow \bigvee_{\alpha\in\mathcal{A}} S^n_{(\alpha)}.$$

Доказали смо да је

$$\underset{\alpha\in\mathcal{A}}{+} (i_\alpha)_* : \bigoplus_{\alpha\in\mathcal{A}} \pi_n(S^n) \to \pi_n\Big(\bigvee_{\alpha\in\mathcal{A}} S^n_{(\alpha)}\Big)$$

изоморфизам и да је $\pi_n\Big(\bigvee\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} S^n_{(\alpha)}\Big)$ слободна Абелова група са базом

$$\big\{[i_\alpha]_0 \mid \alpha \in \mathcal{A}\big\}.$$

Такође је познато да је и

$$\mathop{+}_{\alpha\in\mathcal{A}} (i_\alpha)_* : \bigoplus_{\alpha\in\mathcal{A}} H_n(S^n) \to H_n\Big(\bigvee_{\alpha\in\mathcal{A}} S^n_{(\alpha)}\Big)$$

изоморфизам, па је $H_n\Big(\bigvee\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} S^n_{(\alpha)}\Big)$ слободна Абелова група са базом

$$\big\{(i_\alpha)_*\alpha_n \mid \alpha \in \mathcal{A}\big\}.$$

Како за свако $\alpha \in \mathcal{A}$ важи

$$h[i_\alpha]_0 = (i_\alpha)_*\alpha_n,$$

то h слика одговарајуће генераторе у генераторе, па је изоморфизам. □

Теорема 4.41 (Хуревић за $n \geqslant 2$) *Нека је $n \geqslant 2$ и X $(n-1)$-повезан простор. Тада је*

$$\begin{aligned} h :&\pi_n(X) \to H_n(X) \text{ изоморфизам, а} \\ h :&\pi_{n+1}(X) \to H_{n+1}(X) \text{ епиморфизам.} \end{aligned}$$

Доказ: 1^o Нека је X CW-комплекс такав да је $X^{n-1} = \{x_0\}$ и важи услов *(БТ)* из теореме 4.9. Како се $(n-1)$-скелет састоји од једне тачке, то је $X^n = \bigvee\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} S^n_{(\alpha)}$. Применом става 4.39 на пар (X, X^n) добијамо да комутира наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \pi_{n+1}(X^n) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "h"] & \pi_{n+1}(X) \arrow[r, "k_*"] \arrow[d, "\boldsymbol{h}"] & \pi_{n+1}(X,X^n) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, two heads, "h"] & \pi_n(X^n) \arrow[r, two heads, "i_*"] \arrow[d, tail, two heads, "h"] \arrow[r, phantom, shift right=8ex, "(1)"] & \pi_n(X) \arrow[r, "0"] \arrow[d, "\boldsymbol{h}"] & \pi_n(X,X^n) \arrow[r] \arrow[d, "h"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_{n+1}(X^n) \arrow[r, "i_*"] & H_{n+1}(X) \arrow[r, tail, "l_*"] & H_{n+1}(X,X^n) \arrow[r, "\partial"] & H_n(X^n) \arrow[r, two heads, "i_*"] & H_n(X) \arrow[r, "l_*"] & H_n(X,X^n) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd} \tag{13}$$

Како је пар (X, X^n) n-повезан, то је $\pi_n(X, X^n) = 0$. Па из дијаграма добијамо да је пресликавање

$$i_* : \pi_n(X^n) \to \pi_n(X)$$

из дијаграма епиморфизам.

Такође, имали смо да је и $H_n(X, X^n) = 0$, па је и

$$i_* : H_n(X^n) \to H_n(X)$$

епиморфизам.

На основу претходне леме, пресликавање

$$h : \pi_n(X^n) \to H_n(X^n)$$

је изоморфизам.

Даље имамо да је и $H_{n+1}(X^n) = 0$, па је

$$l_* : H_{n+1}(X) \to H_{n+1}(X, X^n)$$

мономорфизам.

Да бисмо доказали да је $h : \pi_n(X) \to H_n(X)$ изоморфизам, односно $h : \pi_{n+1}(X) \to H_{n+1}(X)$ епиморфизам, биће нам још потребно да покажемо да је пресликавање $h : \pi_{n+1}(X, X^n) \to H_{n+1}(X, X^n)$ епиморфизам.

Посматрајмо дуги тачни низ у хомологији тројке (X, X^{n+1}, X^n).

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \xrightarrow{j_*} H_{n+1}(X, X^n) \longrightarrow H_{n+1}(X, X^{n+1}) \longrightarrow \cdots$$

Како је $H_{n+1}(X, X^{n+1}) = 0$, то је $j_* : H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \to H_{n+1}(X, X^n)$ епиморфизам. Циљ нам је да одредимо генераторе групе $H_{n+1}(X, X^n)$ и да видимо да пресликавање $h : \pi_{n+1}(X, X^n) \to H_{n+1}(X, X^n)$ погађа све генераторе.

Нека су $\phi_\beta : (D^{n+1}, S^n) \to (X^{n+1}, X^n),\ \beta \in \mathcal{B}$, све карактеристичне функције ћелија димензије $n+1$ ћелијског комплекса X. Тада ћемо и композицију $j \circ \phi_\beta$ означавати са ϕ_β.

$$\begin{tikzcd}
(D^{n+1}, S^n) \arrow[r, "\phi_\beta"] \arrow[rr, bend right, dashed, "\phi_\beta"'] & (X^{n+1}, X^n) \arrow[r, hook, "j"] & (X, X^n)
\end{tikzcd}$$

Нека је $\beta \in \mathcal{B}$. Посматрајмо наредни комутативни дијаграм.

$$\begin{tikzcd}
(D^{n+1}, S^n) \arrow[r, "\phi_\beta"] \arrow[d, two heads, "q"'] & (X^{n+1}, X^n) \arrow[d, two heads, "q_{n+1}"] \\
(S^{n+1}, e_1) \arrow[r, hook, "i_\beta"] & (X^{n+1}/X^n, X^n/X^n) \\
(S^{n+1}, \varnothing) \arrow[r, hook, "i_\beta"] \arrow[u, hook, "i"] & (X^{n+1}/X^n, \varnothing) \arrow[u, hook, "l_{n+1}"']
\end{tikzcd}$$

Преласком на хомологију добијамо наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd}
H_{n+1}(D^{n+1}, S^n) \arrow[r, "(\phi_\beta)_*"] \arrow[d, tail, two heads, "q_*"'] & H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \arrow[d, tail, two heads, "(q_{n+1})_*"] \\
H_{n+1}(S^{n+1}, e_1) \arrow[r, "(i_\beta)_*"] & H_{n+1}(X^{n+1}/X^n, X^n/X^n) \\
H_{n+1}(S^{n+1}) \arrow[r, "(i_\beta)_*"] \arrow[u, tail, two heads, "i_*"] & H_{n+1}(X^{n+1}/X^n) \arrow[u, tail, two heads, "(l_{n+1})_*"']
\end{tikzcd}$$

На основу става 4.12 имамо да су пресликавања $(q_{n+1})_*$ и q_* изоморфизми, а такође знамо да су и i_* и $(l_{n+1})_*$ изоморфизми.

$H_{n+1}(X^{n+1}/X^n)$ је слободна Абелова група са базом

$$\{(i_\beta)_*\alpha_{n+1} \mid \beta \in \mathcal{B}\},$$

па како је $q_*\beta_{n+1} = i_*\alpha_{n+1}$, то на основу комутативности дијаграма закључујемо да је $H_{n+1}(X^{n+1}, X^n)$ слободна Абелова група са базом

$$\{(\phi_\beta)_*\beta_{n+1} \mid \beta \in \mathcal{B}\}.$$

Како је пресликавање $j_* : H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \to H_{n+1}(X, X^n)$ „на“, коначно добијамо да је група $H_{n+1}(X, X^n)$ генерисана елементима скупа

$$\{j_*(\phi_\beta)_*\beta_{n+1} \mid \beta \in \mathcal{B}\},$$

а како смо користили ознаку $\phi_\beta = j \circ \phi_\beta$, то је ово заправо скуп

$$\{(\phi_\beta)_*\beta_{n+1} \mid \beta \in \mathcal{B}\}.$$

Како важи услов *(БТ)*, то све караткеристичне функције чувају базну тачку, па је

$$\phi_\beta : (D^{n+1}, S^n, e_1) \to (X, X^n, x_0),$$

тј. $[\phi_\beta]_{0r} \in \pi_{n+1}(X, X^n)$, а како је

$$h[\phi_\beta]_{0r} = (\phi_\beta)_*\beta_{n+1},$$

то пресликавање $h : \pi_{n+1}(X, X^n) \to H_{n+1}(X, X^n)$ погађа све генераторе групе $H_{n+1}(X, X^n)$ па је епиморфизам.

Сада можемо доказати тврђење теореме. На основу комутативности квадрата (1) дијаграма (13) имамо да је пресликавање $h : \pi_n(X) \to H_n(X)$ „на“. Покажимо да је и „1-1“.

Нека је $\sigma \in \pi_n(X)$ и претпоставимо да је $h(\sigma) = 0$. Тада из дијаграма видимо да постоји $\tau \in \pi_n(X^n)$ такво да је $i_*(\tau) = \sigma$. Нека је $\rho = h(\tau)$. Тада из комутативности дијаграма имамо да је $i_*(\rho) = 0$, па постоји $\xi \in H_{n+1}(X, X^n)$ такво да је $\partial(\xi) = \rho$. Даље, како је h „на“, то постоји $z \in \pi_{n+1}(X, X^n)$ такво да је $h(z) = \xi$. Како је $h(\partial(z)) = h(\tau)$ и h је „1-1“, то је $\partial(z) = \tau$, па коначно имамо $\sigma = i_*(\partial(z)) = 0$, тј. пресликавање $h : \pi_n(X) \to H_n(X)$ је „1-1“ па је изоморфизам. Претходни рачун можемо краће представити дијаграмом.

$$\begin{tikzcd}
z \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \tau \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \sigma \arrow[d, mapsto] \\
\xi \arrow[r, mapsto] & \rho \arrow[r, mapsto] & 0
\end{tikzcd}$$

За крај покажимо да је пресликавање $h : \pi_{n+1}(X) \to H_{n+1}(X)$ епиморфизам. Нека је $\tau \in H_{n+1}(X)$ и $\sigma = l_*(\tau)$. Тада је $\partial(\sigma) = 0$ и постоји $\xi \in \pi_{n+1}(X, X^n)$ такво да је $h(\xi) = \sigma$, па из комутативности дијаграма добијамо да је $h(\partial(\xi)) = 0$, па је и $\partial(\xi) = 0$. Из тачности низа у хомотопији добијамо да постоји $z \in \pi_{n+1}(X)$ такво да је $k_*(z) = \xi$. Коначно, како је $l_*(h(z)) = l_*(\tau)$ и l_* је „1-1“, то је $h(z) = \tau$, па закључујемо да је $h : \pi_{n+1}(X) \to H_{n+1}(X)$ епиморфизам. Ово краће можемо представити наредним дијаграмом

$$\begin{tikzcd}
z \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \xi \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & 0 \arrow[d, mapsto] \\
\tau \arrow[r, mapsto] & \sigma \arrow[r, mapsto] & 0
\end{tikzcd}$$

чиме је доказ првог случаја завршен.

2^o Нека је сада X произвољан простор. На основу теореме 4.9 о CW-апроксимацији постоји CW-комплекс Z такав да је $Z^{n-1} = \{z_0\}$, важи услов *(БТ)* и постоји слаба хомотопска еквиваленција $f : Z \to X$.

На основу последице 2.36 знамо да слаба хомотопска еквиваленција индукује изоморфизам и у хомологији па за $i \in \{n, n+1\}$ имамо следећи комутативни дијаграм.

$$\begin{tikzcd}
\pi_i(Z, z_0) \arrow[r, tail, two heads, "f_*"] \arrow[d, "h"'] & \pi_i(X, f(z_0)) \arrow[d, "h"] \\
H_i(Z) \arrow[r, tail, two heads, "f_*"] & H_i(X)
\end{tikzcd}$$

На основу случаја 1^o имамо да је лева вертикала изоморфизам за $i = n$, односно епиморфизам за $i = n+1$, па из комутативности дијаграма закључујемо да је $h : \pi_i(X, f(z_0)) \to H_i(X)$ изоморфизам за $i = n$, а епиморфизам за $i = n + 1$. $\square$

Напомена 4.42 *Ако је простор X 0-повезан знамо да је Хуревићев хомоморфизам у димензији 1 епиморфизам, док за димензију 2 не знамо ништа. Уколико би Хуревићев* *хомоморфизам био изоморфизам у димензији* 1*, поново не можемо ништа закључити о димензији* 2*. На пример, ако је* $X = T^2$ *или* $X = \mathbb{R}\mathrm{P}^2$*, онда имамо да је*

$$h : \pi_1(X) \to H_1(X)$$

изоморфизам, али

$$h : \pi_2(X) \to H_2(X)$$

није епиморфизам у случају $X = T^2$*, а није мономорфизам у случају* $X = \mathbb{R}\mathrm{P}^2$*.*

Последица 4.43 *Нека је* $n \geqslant 2$ *и* X *тополошки простор.*

(а) *Ако је* $\pi_0(X) = \pi_1(X) = \cdots = \pi_{n-1}(X) = 0$*, онда*

$$\widetilde{H}_0(X) = H_1(X) = \cdots = H_{n-1}(X) = 0,$$

$$\pi_n(X) \cong H_n(X),$$

$$h : \pi_{n+1}(X) \to H_{n+1}(X)$$

је епиморфизам.

(б) *Ако је* $\widetilde{H}_0(X) = H_1(X) = \cdots = H_{n-1}(X) = 0$ *и* X *просто повезан, онда*

$$\pi_0(X) = \pi_1(X) = \cdots = \pi_{n-1}(X) = 0,$$

$$\pi_n(X) \cong H_n(X),$$

$$h : \pi_{n+1}(X) \to H_{n+1}(X)$$

је епиморфизам.

Пример 4.44 *Ако је* $n \geqslant 2$ *и* G *Абелова, онда можемо закључити да је*

$$\widetilde{H}_i(K(G,n)) = 0,\ i \leqslant n-1,$$

$$H_n(K(G,n)) \cong \pi_n(K(G,n)) \cong G,$$

$$H_{n+1}(K(g,n)) = 0,$$

јер је $h : \pi_{n+1}(K(G,n)) \to H_{n+1}(K(G,n))$ *епиморфизам, док за* $i \geqslant n+2$ *група* $H_i(K(G,n))$ *не мора бити тривијална.*

Теорема 4.45 (Хуревић, релативна верзија) *Нека је* $n \geqslant 2$*,* $a_0 \in A \subseteq X$*,* A *путно повезан и нека је пар* (X, A) $(n-1)$*-повезан. Тада је*

$$h : \pi_n(X, A, a_0) \to H_n(X, A)$$

епиморфизам, $\ker h$ *је (нормална) подгрупа од* $\pi_n(X, A, a_0)$ *генерисана елементима облика* $\varphi - \varphi \cdot \sigma$*, где је* $\varphi \in \pi_n(X, A, a_0)$*, а* $\sigma \in \pi_1(A, a_0)$*. Посебно, ако* $\pi_1(A, a_0)$ *тривијално дејствује на* $\pi_n(X, A, a_0)$*, онда је* $h : \pi_n(X, A, a_0) \to H_n(X, A)$ *изоморфизам.*

Напомена 4.46 *Теореме Хуревића 4.35 и 4.41 могу да се запишу и у наредном облику. Ако је* $n \geqslant 1$, X $(n-1)$*-повезан простор и* $x_0 \in X$, *онда је* $h : \pi_n(X, x_0) \to H_n(X)$ *епиморфизам, а* $\ker h$ *је генерисана елементима облика* $\varphi - \varphi \cdot \sigma$, *где је* $\varphi \in \pi_n(X, x_0)$, *а* $\sigma \in \pi_1(X, x_0)$.

Последица 4.47 *Нека је* $n \geqslant 2$ *и* (X, A) *тополошки пар.*

(а) Ако су A *и* X *путно повезани и ако је*

$$\pi_1(X, A) = \pi_2(X, A) = \cdots = \pi_{n-1}(X, A) = 0,$$

онда је

$$H_0(X, A) = H_1(X, A) = \cdots = H_{n-1}(X, A) = 0.$$

Ако је још дејство групе $\pi_1(A)$ *на* $\pi_n(X, A)$ *тривијално, онда је и* $H_n(X, A) \cong \pi_n(X, A)$.

(б) Ако су A *и* X *просто повезани и ако је*

$$H_0(X, A) = H_1(X, A) = \cdots = H_{n-1}(X, A) = 0,$$

онда је

$$\pi_1(X, A) = \pi_2(X, A) = \cdots = \pi_{n-1}(X, A) = 0$$

и $\pi_n(X, A) \cong H_n(X, A)$.

Доказ: (а) За $k \geqslant 2$ директно из релативне теореме Хуревића добијамо да је $H_k(X, A) = 0$, па само остаје да покажемо да је

$$H_0(X, A) = H_1(X, A) = 0.$$

Посматрајмо наредни дијаграм

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(A) \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads, "h"] & \pi_1(X) \arrow[r] \arrow[d, two heads, "h"] & \pi_1(X, A) & & & & \\
H_1(A) \arrow[r, two heads] & H_1(X) \arrow[r, two heads] & H_1(X, A) \arrow[r] & \widetilde{H}_0(A) \arrow[r] & \widetilde{H}_0(X) \arrow[r] & H_0(X, A) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Како је $\pi_1(X, A) = 0$, то добијамо да је $\pi_1(A) \to \pi_1(X)$ епиморфизам. Како је X путно повезан то је $\widetilde{H}_0(X) = 0$, па из тачности низа у хомологоји добијамо да је $H_0(X, A) = 0$. Такође, како је и A путно повезан, онда је $\widetilde{H}_0(A) = 0$, па поново из тачности низа добијамо да је $H_1(X) \to H_1(X, A)$ епиморфизам. Даље, како су Хуревићеви хомоморфизми епиморфизми то из комутативности дијаграма добијамо да је и $H_1(A) \to H_1(X)$ епиморфизам, па закључујемо да пресликавање $H_1(X) \to H_1(X, A)$ мора бити тривијално, а како смо видели да је епиморфизам, коначно добијамо да је $H_1(X, A) = 0$.

(б) Ако је $k = 1$, онда из дела дугог тачног низа

$$\cdots \to \pi_1(X) \to \pi_1(X, A) \to \pi_0(A)$$

и услова да су A и X просто повезани, добијамо да је $\pi_1(X, A) = 0$.

Ако је $k \geqslant 2$ најмање такво да је $\pi_k(X, A) \neq 0$, онда је пар (X, A) $(k-1)$-повезан и имамо да $\pi_1(A) = 0$ тривијално дејствује на $\pi_k(X, A)$, па на основу релативне верзије теореме Хуревића 4.45 пресликавање $h : \pi_k(X, A) \to H_k(X, A)$ је изоморфизам, па је $H_k(X, A) \neq 0$, одакле закључујемо да мора бити $k \geqslant n$. Дакле, $\pi_k(X, A) = 0$ за $1 \leqslant k \leqslant n - 1$. $\square$

Вајтхедова теорема 4.4 се понекад назива и *I Вајтхедова теорема*, а сада ћемо навести и *II Вајтхедову теорему.*

Теорема 4.48 (II Вајтхедова теорема) *Нека је $f : X \to Y$ непрекидно, X, Y путно повезани и нека је $n \in \mathbb{N}$. Уочимо следећа два исказа.*

(1) f је n-еквиваленција (тј. $f_* : \pi_i(X) \to \pi_i(Y)$ је изоморфизам за $i < n$, а епиморфизам за $i = n$);

(2) $f_* : H_i(X) \to H_i(Y)$ је изоморфизам за $i < n$, а епиморфизам за $i = n$.

Тада имамо да исказ (1) *повлачи исказ* (2)*, а ако су додатно X и Y просто повезани, онда важи и обрнуто.*

Доказ: Посматрајмо наредни дијаграм

$$\begin{tikzcd}
 & M_f \arrow[d, "h_f"] \\
X \arrow[ur, hook, "j"] \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

где је M_f цилиндар пресликавања f, а h_f хомотопска еквиваленција. Посматрајмо дуге тачне низове у хомотопији и хомологији пара (M_f, X) и имајући у виду да је $M_f \simeq Y$.

$$\cdots \to \pi_i(X) \overset{f_*}{\to} \pi_i(Y) \to \pi_i(M_f, X) \to \pi_{i-1}(X) \overset{f_*}{\to} \pi_{i-1}(Y) \to \cdots \tag{14}$$

$$\cdots \to H_i(X) \overset{f_*}{\to} H_i(Y) \to H_i(M_f, X) \to H_{i-1}(X) \overset{f_*}{\to} H_{i-1}(Y) \to \cdots \tag{15}$$

Из тачности низа (14) видимо да је услов (1) еквивалентан томе да је $\pi_i(M_f, X) = 0$ за $i \leqslant n$, па из дела (а) претходне последице и тачности низа (15) добијамо да мора да важи услов *(2)*. Дакле, услов *(1)* повлачи услов *(2)*.

Додатно, ако су X и Y просто повезани, онда из услова *(2)*, тачности низа (15) и дела (б) претходне последице добијамо да мора да важи услов *(1)*.

Доказ краће можемо представити на следећи начин.

$$(1) \overset{(14)}{\iff} \pi_i(M_f, X) = 0,\ i \leqslant n \underset{(б)}{\overset{(a)}{\rightleftarrows}} H_i(M_f, X) = 0,\ i \leqslant n \overset{(15)}{\iff} (2) \quad \square$$

Прва и друга Вајтхедова теорема нам дају и наредну последицу.

Последица 4.49 (Хомолошка верзија I Вајтхедове теореме) *Ако су X и Y просто повезани простори* CW*-типа и $f : X \to Y$ такво да је $f_* : H_i(X) \to H_i(Y)$ изоморфизам за све $i \in \mathbb{N}_0$, онда је f хомотопска еквиваленција.*

Доказ: За све $n \in \mathbb{N}$ важи услов *(2)* друге Вајтхедове теореме 4.48 и X и Y су просто повезани, па добијамо да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи услов *(1)*, тј. f је слаба хомотопска еквиваленција, па на основу прве Вајтхедове теореме 4.4 закључујемо да је f хомотопска еквиваленција. $\square$

4.5 Задаци

1. (а) Да ли је $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ 1-прост простор?
   (б) Да ли је $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ 2-прост простор?
   (в) Да ли је $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ H-простор?

2. Нека је $n \geqslant 2$. Доказати да не постоји ретракт $A \subseteq \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ такав да је $A \simeq \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$.

3. Нека је $n \geqslant 2$ и $i : \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ инклузија.
   (а) Доказати да је $i_* : \pi_n(\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}) \to \pi_n(\mathbb{R}\mathrm{P}^n)$ тривијалан хомоморфизам.
   (б) Одредити $\pi_n(\mathbb{R}\mathrm{P}^n, \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1})$.
   (в) Ако је $q : (\mathbb{R}\mathrm{P}^n, \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}) \twoheadrightarrow (\mathbb{R}\mathrm{P}^n/\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}, *)$, да ли је $q_* : \pi_n(\mathbb{R}\mathrm{P}^n, \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}) \to \pi_n(\mathbb{R}\mathrm{P}^n/\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1})$ изоморфизам?

4. Нека је $n > m \geqslant 1$, G Абелова и H група (Абелова ако је $m \geqslant 2$). Доказати да је $[K(G, n), K(H, m)] = 0$.

5. Доказати да је скуп хомотопских класа пресликавања пројективног простора $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ у самог себе (тј. скуп $[\mathbb{R}\mathrm{P}^n, \mathbb{R}\mathrm{P}^n]$) бесконачан за свако $n \in \mathbb{N}$.

6. За свако $n \in \mathbb{N}$ испитати да ли је количнички простор $\mathbb{R}\mathrm{P}^n/\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$ ретракт простора $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n+1}/\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$.

7. Нека је X тополошки простор. Доказати да су следећи искази међусобно еквивалентни.

   (1) X је контрактибилан.

   (2) За произвољан тополошки простор Y важи $X \times Y \simeq Y$.

   (3) Постоји $n \in \mathbb{N}_0$ такво да важи $X \times S^n \simeq S^n$.

8. Одредити групу $\pi_2(S^1 \vee S^2)$.

9. За $n \in \mathbb{N}$ описати Хуревићев хомоморфизам $h : \pi_n(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) \to H_n(\mathbb{R}\mathrm{P}^n)$.

10. Нека је X просто повезан CW-комплекс, $n \geqslant 2$ и $f : S^n \to X$ непрекидно пресликавање. Ако је $h\big([f]_0\big) = 0$, где је $h : \pi_n(X, f(e_1)) \to H_n(X)$ Хуревићев хомоморфизам, доказати да је f хомотопно пресликавању $g : S^n \to X$ таквом да је $g(S^n) \subseteq X^{n-1}$.

11. Нека је $f : X \to Y$ непрекидно пресликавање између CW-комплекса X и Y. Нека су $p : \widetilde{X} \to X$ и $q : \widetilde{Y} \to Y$ њихова универзална наткривања (p и q су наткривања, а $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$ просто повезани).

   (а) Доказати да постоји (непрекидно) $\widetilde{f} : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ које „наткрива“ f (такво да је $q \circ \widetilde{f} = f \circ p$).

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[r, dashed, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "p"'] & \widetilde{Y} \arrow[d, "q"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

   (б) Ако је $f_* : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ изоморфизам и ако је за свако $n \geqslant 2$ и $\widetilde{f}_* : H_n(\widetilde{X}) \to H_n(\widetilde{Y})$ изоморфизам, доказати да је f хомотопска еквиваленција.

5 Фибрације и раслојења

5.1 Фибрације

Дефиниција 5.1 Кажемо да непрекидно пресликавање $p : E \to B$ има *својство подизања хомотопије у односу на простор* X ако за свако пресликавање $f : X \to E$ и хомотопију $H : X \times I \to B$, такве да је $p(f(x)) = H(x, 0)$ за све $x \in X$, постоји пресликавање $\widetilde{H} : X \times I \to E$ такво да је $\widetilde{H}(x, 0) = f(x)$ и $p \circ \widetilde{H} = H$.

$$\begin{tikzcd}
X \times \{0\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\
X \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{H}"] & B
\end{tikzcd}$$

Кажемо још да за свака два пресликавања f и H горњи дијаграм има решење $\widetilde{H}$.

Уколико $p : E \to B$ има својство подизања хомотопије у односу на X и важи да је $X \approx Y$, онда p има својство подизања хомотопије и у односу на Y. То се лако види из наредног дијаграма.

$$\begin{tikzcd}
X \times \{0\} \arrow[r, "h", "\approx"'] \arrow[d, hook] & Y \times \{0\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\
X \times I \arrow[r, "h \times \mathbb{1}", "\approx"'] \arrow[urr, dashed, "F"] & Y \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{H}"] & B
\end{tikzcd}$$

Заиста, како p има својство подизања хомотопије то постоји решење целог дијаграма $F : X \times I \to E$, па ће $\widetilde{H} \overset{def}{=} F \circ (h \times \mathbb{1})^{-1}$ бити решење десног дела дијаграма, тј. p има својство подизања хомотопије и у односу на Y.

Дефиниција 5.2

(а) Пресликавање $p : E \to B$ јесте *фибрација (Хуревићева фибрација)* ако има својство подизања хомотопије у односу на све просторе.

(б) Пресликавање $p : E \to B$ јесте *слаба фибрација (Серова фибрација)* ако за свако $n \in \mathbb{N}_0$ има својство подизања хомотопије у односу на диск D^n.

За фиксирано $b \in B$ скуп $F_b \overset{def}{=} p^{-1}(\{b\})$ зовемо *слој (фибра) фибрације* p *над тачком* b.

Став 5.3 *Нека је* $p : E \to B$ *(Серова) фибрација и* $b_0 \in B$*. Ако је* $b_0 \in \operatorname{im} p$*, онда је цела компонента путне повезаности* P_{b_0} *тачке* b_0 *садржана у слици од* p*. Дакле,* $p(E)$ *је унија неких компонената путне повезаности од* B*.*

Доказ: Нека је $b \in P_{b_0}$ и $\varphi : I \to B$ пут од b_0 до b. Нека је $f : * \times \{0\} \to E$ дато са $f(*, 0) \stackrel{def}{=} e_0$, где је $e_0 \in p^{-1}(\{b_0\})$ произвољан елемент. Како p има својство подизања хомотопије у односу на диск $D^0 = *$, то дијаграм

$$\begin{tikzcd}
* \times \{0\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\
* \times I \arrow[r, "\varphi"] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{\varphi}"] & B
\end{tikzcd}$$

има решење $\widetilde{\varphi} : * \times I \to E$. Коначно, имамо $p(\widetilde{\varphi}(1)) = \varphi(1) = b$, па је $b \in \operatorname{im} p$. $\square$

Композиција две (Серове) фибрације јесте (Серова) фибрација. Заиста, уколико су $p : E \to B$ и $q : T \to E$ (Серове) фибрације, онда из наредног дијаграма видимо да је и $p \circ q : T \to B$ (Серова) фибрација.

$$\begin{tikzcd}
X \times \{0\} \arrow[r] \arrow[dd, hook] & T \arrow[d, "q"] \\
 & E \arrow[d, "p"] \\
X \times I \arrow[r] \arrow[ur, dashed] \arrow[uur, dashed] & B
\end{tikzcd}$$

Ако је $p : E \to B$ (Серова) фибрација и $A \subseteq B$ онда је $p|_{p^{-1}(A)} : p^{-1}(A) \to A$ (Серова) фибрација што можемо видети на следећем дијаграму. Ово пресликавање се зове *рестрикција фибрације* p.

$$\begin{tikzcd}
X \times \{0\} \arrow[r] \arrow[d, hook] & p^{-1}(A) \arrow[r, hook] \arrow[d, "p|_{p^{-1}(A)}"] & E \arrow[d, "p"] \\
X \times I \arrow[r] \arrow[ur, dashed] \arrow[urr, dashed] & A \arrow[r, hook] & B
\end{tikzcd}$$

Пример 5.4 *Нека су B и F тополошки простори. Тада је пројекција на прву координату $p_1 : B \times F \to B$ фибрација (коју називамо тривијалном фибрацијом). Заиста,* *дијаграм*

$$\begin{tikzcd} X \times \{0\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & B \times F \arrow[d, "p_1"] \\ X \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{H}"] & B \end{tikzcd}$$

има решење $\widetilde{H} : X \times I \to B \times F$ *дато са*

$$\widetilde{H}(x,t) \stackrel{def}{=} (H(x,t), p_2(f(x))).$$

Слој ове фибрације над тачком $b \in B$ *је* $p_1^{-1}(\{b\}) = \{b\} \times F$.

Нека су дата пресликавања $p : E \to B$ и $f : X \to B$ и нека је

$$f^*(E) \stackrel{def}{=} \{(x,e) \in X \times E \mid f(x) = p(e)\} \subseteq X \times E$$

подскуп од $X \times E$ са наслеђеном топологијом. Дефинишимо пресликавања $f^*p : f^*(E) \to X$ и $q : f^*(E) \to E$ са

$$(f^*p)(x,e) \stackrel{def}{=} x, \quad q(x,e) = e,$$

тј. $f^*p = p_1|_{f^*(E)}$ и $q = p_2|_{f^*(E)}$. Са овако дефинисаним пресликавањима комутира наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd} f^*(E) \arrow[r, "q"] \arrow[d, "f^*p"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Дефиниција 5.5 Пресликавање f^*p зовемо *повлачење* (*pullback*) пресликавања p помоћу f.

Пример 5.6 *Нека је* $b_0 \in B$ *и* $c_{b_0} : X \to B$ *константно пресликавање. Тада је*

$$c_{b_0}^*(E) = \{(x,e) \in X \times E \mid c_{b_0}(x) = p(e)\} = X \times F_{b_0},$$

па имамо наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd} X \times F_{b_0} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p_1"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "c_{b_0}"] & B \end{tikzcd}$$

Дакле, повлачење помоћу константног пресликавања је тривијална фибрација.

Став 5.7 *Ако је $p : E \to B$ (Серова) фибрација и $f : X \to B$ непрекидно, онда је $f^*p : f^*(E) \to X$ (Серова) фибрација.*

Доказ: Нека је Y произвољан тополошки простор и нека су дата пресликавања $H : Y \times I \to X$ и $g : Y \times \{0\} \to f^*(E)$ таква да комутира дијаграм.

$$\begin{tikzcd}
Y \times \{0\} \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook, "i"'] & f^*(E) \arrow[r, "q"] \arrow[d, "f^*p"] & E \arrow[d, "p"] \\
Y \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{H}"] \arrow[urr, dashed, "F"'] & X \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

Како је p фибрација то постоји $F : X \times I \to E$ такво да је

$$F \circ i = q \circ g, \quad p \circ F = f \circ H \tag{1}$$

Дефинишимо пресликавање $\widetilde{H} : Y \times I \to f^*(E)$ са

$$\widetilde{H}(y,t) \overset{def}{=} (H(y,t), F(y,t)).$$

Како је на основу једнакости (1)

$$(f \circ H)(y,t) = (p \circ F)(y,t)$$

то $\widetilde{H}(y,t) \in f^*(E)$ па је $\widetilde{H}$ добро дефинисано. Још остаје да проверимо комутативност дијаграма. Лако се види да је

$$f^*p \circ \widetilde{H} = H,$$

јер је f^*p пројекција на прву координату, па је потребно још уверити се да је

$$\widetilde{H} \circ i = g.$$

Претходна једнакост ће важити уколико важи једнакост на обе координате, тј. уколико важе наредне две једнакости.

$$f^*p \circ \widetilde{H} \circ i = f^*p \circ g,$$

$$q \circ \widetilde{H} \circ i = q \circ g.$$

Из дијаграма имамо да је

$$H \circ i = f^*p \circ g$$

што је еквивалетно првој једнакости, а из (1) имамо

$$F \circ i = q \circ g,$$

па важи и друга једнакост. Дакле, $\widetilde{H}$ јесте решење горњег дијаграма. $\square$

Став 5.8 *Нека је $p : E \to B$ фибрација, $f : X \to B$ и $g : Y \to X$ непрекидна пресликавања и $(f \circ g)(Y) \subseteq p(E)$. Ако је $f \circ g \simeq const$ онда постоји подизање $\widetilde{g} : Y \to f^*(E)$ пресликавања g у односу на f^*p.*

$$\begin{tikzcd}
 & f^*(E) \arrow[r, "q"] \arrow[d, "f^*p"] & E \arrow[d, "p"] \\
Y \arrow[ur, dashed, "\widetilde{g}"] \arrow[r, "g"] & X \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

Доказ: Нека је $b \in B$ такво да је $f \circ g \simeq c_b : Y \to B$. За свако $y \in Y$ постоји пут од од $(f \circ g)(y)$ до b добијен помоћу хомотопије, па је b у истој компоненти путне повезаности као $(f \circ g)(y) \in p(E)$. На основу става 5.3 знамо да је $p(E)$ унија компоненти путне повезаности од B па закључујемо да је $b \in p(E)$. Нека је $e \in E$ такво да је $p(e) = b$ и посматрајмо константно пресликавање $c_e : Y \to E$. Тада је

$$p \circ c_e = c_b \simeq f \circ g.$$

Дакле, c_e је подизање пресликавања $f \circ g$ до на хомотопију па на основу задатка 1. у одељку 1.3 закључујемо да постоји право подизање $\varphi : Y \to E$, тј. $p \circ \varphi = f \circ g$. Нека је $\widetilde{g} : Y \to f^*(E)$ дефинсиано са

$$\widetilde{g}(y) \stackrel{def}{=} (g(y), \varphi(y)).$$

Како је

$$f^*p \circ \widetilde{g} = g,$$

то је $\widetilde{g}$ тражено подизање. □

Дефиниција 5.9 Нека је $p : E \to B$ пресликавање и (X, A) тополошки пар. Кажемо да p има *својство проширења подизања у односу на пар* (X, A) ако за свака два пресликавања $f : X \to B$ и $g : A \to E$ таква да је

$$p \circ g = f|_A$$

постоји $\widetilde{f} : X \to E$ такво да је

$$\widetilde{f}|_A = g \ \text{ и } \ p \circ \widetilde{f} = f.$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[ur, dashed, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

Приметимо да p има својство подизања хомотопије у односу на тополошки простор X ако и само ако има својство проширења подизања у односу на пар $(X \times I, X \times \{0\})$.

Дефиниција 5.10 Тополошки пар (X, A) је DR-*пар* ако је A јаки деформациони ретракт од X и постоји непрекидна функција $\alpha : X \to I$ таква да је $\alpha^{-1}(\{0\}) = A$.

Пример 5.11 *Пар* $(X \times I, X \times \{0\})$ *јесте* DR-*пар.*

Лема 5.12 *Ако је* (X, A) DR-*пар и* Y *тополошки простор, онда је* $(X \times Y, A \times Y)$ DR-*пар.*

Доказ: Нека је $i_A : A \hookrightarrow X$ инклузија и $r : X \to A$ ретракција таква да је

$$r \circ i_A = \mathbb{1}_A \;\text{ и }\; i_A \circ r \simeq \mathbb{1}_X \ (rel\ A)$$

и нека је $\alpha : X \to I$ функција таква да је $\alpha^{-1}(\{0\}) = A$.

Посматрајмо ретракцију

$$r \times \mathbb{1}_Y : X \times Y \to A \times Y.$$

Тада је

$$(r \times \mathbb{1}_A) \circ (i_A \times \mathbb{1}_Y) = \mathbb{1}_{A \times X},$$

па ово заиста јесте ретракција, а да би била јака деформациона ретракција потребно је још да важи

$$j_{A \times Y} \circ (r \times \mathbb{1}_A) = (i_A \times \mathbb{1}_Y) \circ (r \times \mathbb{1}_A) \simeq \mathbb{1}_{X \times Y} \ (rel\ A \times Y).$$

Нека је $F : X \times Y \times I \to X \times Y$ дато са

$$F(x, y, t) \stackrel{def}{=} (H(x, t), y),$$

где је $H : i_a \circ r \simeq \mathbb{1}_X \ (rel\ A)$.

Ово ће бити тражена хомотопија, па $A \times Y$ јесте јаки деформациони ретракт од $X \times Y$.

За крај, посматрајмо функцију $\alpha \circ p_1 : X \times Y \to I$. Како је

$$(\alpha \circ p_1)^{-1}(\{0\}) = p_1^{-1}(\alpha^{-1}(\{0\})) = p_1^{-1}(A) = A \times Y,$$

то закључујемо да $(X \times Y, A \times Y)$ јесте DR-пар. $\square$

Лема 5.13 *Ако је* X *метрички простор и* $A \subseteq X$ *онда је* (X, A) DR-*пар ако и само ако је* A *јаки деформациони ретракт од* X*.*

Доказ: $\Rightarrow$: Овај смер тривијално важи.
$\leftarrow$: Како је A ретракт у Хауздорфовом простору, то је он затворен. Нека је $d : X \times X \to [0, +\infty)$ метрика. Дефинишимо

$$\alpha(x) \stackrel{def}{=} \frac{d(x, A)}{1 + d(x, A)}.$$

Тада је $\alpha^{-1}(\{0\}) = A$, па (X, A) јесте DR-пар. $\square$

Став 5.14 *Нека $p : E \to B$ има својство подизања хомотопије у односу на X и нека је $A \subseteq X$ такав да је (X, A) DR-пар. Тада p има својство проширења подизања у односу на (X, A).*

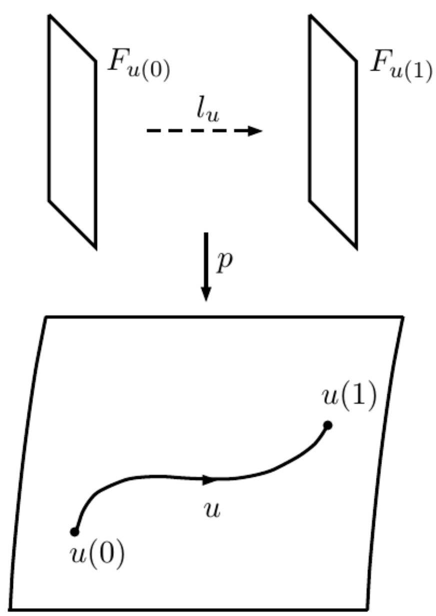
Последица 5.15

(а) Фибрација има својство проширења подизања у односу на сваки DR-*пар.*

(б) Ако је $p : E \to B$ Серова фибрација, (X, A) DR-*пар, и $X \approx D^n$ за неко $n \in \mathbb{N}_0$, онда p има својство проширења подизања у односу на (X, A).*

5.2 Слој фибрације

Нека је $p : E \to B$ фибрација. За $b \in B$ са $F_b = p^{-1}(\{b\}) \subseteq E$ означавамо слој фибрације p над тачком b. Нека је $u : I \to B$ пут. Дефинисаћемо пресликавање $l_u : F_{u(0)} \to F_{u(1)}$.



Посматрајмо наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd}
F_{u(0)} \times \{0\} \arrow[rr, hook] \arrow[d, hook] & & E \arrow[d, "p"] \\
F_{u(0)} \times I \arrow[r, "p_2"] \arrow[urr, dashed, "H"] & I \arrow[r, "u"] & B
\end{tikzcd}$$

Како је $p : E \to B$ фибрација, то постоји подизање $H : F_{u(0)} \times I \to E$ такво да дијаграм комутира.

Дефинишимо пресликавање $l_u : F_{u(0)} \to F_{u(1)}$ са

$$l_u(y) \stackrel{def}{=} H(y,1),\ y \in F_{u(0)}.$$

Како је $p(H(y,1)) = u(1)$, то $H(y,1) \in F_{u(1)}$, па је l_u добро дефинисано.

Напомена 5.16 *Пресликавање l_u не зависи само од пута и већ и од одабира подизања H које не мора бити јединствено. Алтернативна ознака за ово пресликавање би била $l_{u,H}$.*

Лема 5.17 *Нека је $p : E \to B$ фибрација и $u, v : I \to B$ путеви.*

(а) Ако је $u \simeq v$ (rel $\{0,1\}$) онда је $l_u \simeq l_v$ (за сваки одабир подизања H_1 и H_2 пресликавања $u \circ p_2$, односно $v \circ p_2$). Посебно, ако је $u = v$, онда је $l_{u,H_1} \simeq l_{u,H_2}$.

(б) Ако је $u(1) = v(0)$, онда је $l_{u \cdot v} \simeq l_v \circ l_u$.

Доказ: (а) Нека је $F : u \simeq v$ (rel $\{0,1\}$), дакле, $F : I \times I \to B$. Нека су $H_1 : F_{u(0)} \times I \to E$ и $H_2 : F_{v(0)} \times I \to E$ решења наредна два дијаграма и нека је $l_u = l_{u,H_1}$ и $l_v = l_{v,H_2}$.

$$\begin{tikzcd}
F_{u(0)} \times \{0\} \arrow[rr, hook] \arrow[d, hook] & & E \arrow[d, "p"] \\
F_{u(0)} \times I \arrow[r, "p_2"] \arrow[urr, dashed, "H_1"] & I \arrow[r, "u"] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F_{v(0)} \times \{0\} \arrow[rr, hook] \arrow[d, hook] & & E \arrow[d, "p"] \\
F_{v(0)} \times I \arrow[r, "p_2"] \arrow[urr, dashed, "H_2"] & I \arrow[r, "v"] & B
\end{tikzcd}$$

Посматрајмо сада следећи дијаграм.

$$\begin{tikzcd}
F_{u(0)} \times (I \times \{0,1\} \cup \{0\} \times I) \arrow[rr, "G"] \arrow[d, hook, "i"] & & E \arrow[d, "p"] \\
F_{u(0)} \times I \times I \arrow[r, "{(p_2,p_3)}"] \arrow[urr, dashed, "H"] & I \times I \arrow[r, "F"] & B
\end{tikzcd}$$

Где је пресликавање G дефинисано на следећи начин.

$$\begin{aligned}
G(y,s,0) &\overset{def}{=} H_1(y,s),\ y \in F_{u(0)},\ s \in I,\\
G(y,s,1) &\overset{def}{=} H_2(y,s),\ y \in F_{u(0)},\ s \in I,\\
G(y,0,t) &\overset{def}{=} y,\ y \in F_{u(0)}.
\end{aligned}$$

Ово пресликавање је добро дефинисано, а како важе једнакости

$$(F \circ (p_2,p_3) \circ i)(y,s,0) = F(s,0) = u(s) = p(H_1(y,s)) = p(G(y,s,0)),$$

$$(F \circ (p_2,p_3) \circ i)(y,s,1) = F(s,1) = v(s) = p(H_2(y,s)) = p(G(y,s,1)),$$

$$(F \circ (p_2,p_3) \circ i)(y,0,t) = F(0,t) = u(0) = p(y) = p(G(y,0,t)),$$

то закључујемо да горњи дијаграм комутира.

$I\times\{0,1\}\cup\{0\}\times I$ је јаки деформациони ретракт од $I\times I$, па је $(I\times I, I\times\{0,1\}\cup\{0\}\times I)$ DR-пар, па је и $(F_{u(0)}\times I\times I, F_{u(0)}\times(I\times\{0,1\}\cup\{0\}\times I))$ DR-пар. На основу последице 5.15 закључујемо да p има својство проширења подизања у односу на овај пар па постоји $H : F_{u(0)}\times I\times I \to E$ такво да горњи дијаграм комутира.

Нека је $K : F_{u(0)} \times I \to F_{u(1)}$ дато са

$$K(y,t) \overset{def}{=} H(y,1,t).$$

Како је $p(H(y,1,t)) = F(1,t) = u(1) = v(1)$, то је $H(y,1,t) \in F_{u(1)}$, па пресликавање K јесте добро дефинисано и непрекидно. Даље имамо да је

$$K(y,0) = H(y,1,0) = G(y,1,0) = H_1(y,1) = l_u(y),$$

$$K(y,1) = H(y,1,1) = G(y,1,1) = H_2(y,1) = l_v(y),$$

па је

$$K : l_u \simeq l_v.$$

(б) Посматрјамо поново следеће дијаграме ($l_u = l_{u,H_1},\ l_v = l_{v,H_2}$).

$$\begin{tikzcd}
F_{u(0)}\times\{0\} \arrow[rr, hook] \arrow[d, hook] & & E \arrow[d, "p"] \\
F_{u(0)}\times I \arrow[r, "p_2"] \arrow[urr, dashed, "H_1"] & I \arrow[r, "u"] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F_{v(0)}\times\{0\} \arrow[rr, hook] \arrow[d, hook] & & E \arrow[d, "p"] \\
F_{v(0)}\times I \arrow[r, "p_2"] \arrow[urr, dashed, "H_2"] & I \arrow[r, "v"] & B
\end{tikzcd}$$

На основу дела (а) довољно је да пронађемо $H : F_{u(0)} \times I \to E$ такво да комутира дијаграм (2) и да је $H(y,1) = l_v(l_u(y))$.

$$\begin{tikzcd}
F_{u(0)} \times \{0\} \arrow[rr, hook] \arrow[d, hook] & & E \arrow[d, "p"] \\
F_{u(0)} \times I \arrow[r, "p_2"] \arrow[urr, dashed, "H"] & I \arrow[r, "u\cdot v"] & B
\end{tikzcd} \tag{2}$$

Дефинишимо $H : F_{u(0)} \times I \to E$ са

$$H(y,t) \overset{def}{=} \begin{cases} H_1(y,2t), & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ H_2(l_u(y), 2t-1), & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

Ако је $t = \frac{1}{2}$, онда је

$$H_1(y,2t) = H_1(y,1) = l_u(y),$$

$$H_2(l_u(y), 2t-1) = H_2(l_u(y), 0) = l_u(y),$$

па је пресликавање H добро дефинисано и непрекидно по теореми о лепљењу. Имамо и да је

$$H(y,1) = H_2(l_u(y), 1) = l_v(l_u(y)),$$

па остаје још да се покаже да комутира дијаграм (2).

Из једнакости

$$H(y,0) = H_1(y,0) = y,$$

$$\begin{aligned} p(H(y,t)) &= \begin{cases} p(H_1(y,2t)), & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ p(H_2(l_u(y), 2t-1)), & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} u(2t), & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ v(2t-1), & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases} \\ &= (u \cdot v)(t) \end{aligned}$$

коначно закључујемо да важи тврђење (б). □

Ако је $p : E \to B$ фибрација, $b_1, b_2 \in B$ и

$$P_{b_1,b_2} \overset{def}{=} \{u : I \to B \mid u(0) = b_1, u(1) = b_2\}$$

на основу дела (а) имамо добро дефинисано пресликавање $P_{b_1,b_2} \to [F_{b_1}, F_{b_2}]$ дато са

$$u \longmapsto [l_u].$$

Уведимо ознаку
$$L_u \stackrel{def}{=} [l_u].$$
Лему 5.17 можемо преформулисати на следећи начин.

Лема 5.18

(а) Ако је $u \simeq v$ $(rel\ \{0,1\})$, онда је $L_u = L_v$;

(б) Ако је $u(1) = v(0)$ онда је $L_{u\cdot v} = L_v \circ L_u$.

Нека је $b \in B$ и $c_b : I \to B$ константан пут. Тада је
$$L_{c_b} = [\mathbb{1}_{F_b}]. \tag{3}$$

Теорема 5.19 *Ако је $p : E \to B$ фибрација и $u : I \to B$ пут онда сваки представник класе $L_u \in [F_{u(0)}, F_{u(1)}]$ јесте хомотопска еквиваленција.*

Доказ: Користимо претходну лему.
$$L_u \circ L_{u^{-1}} \stackrel{(б)}{=} L_{u^{-1}\cdot u} \stackrel{(а)}{=} L_{c_{u(1)}} \stackrel{(3)}{=} [\mathbb{1}_{F_{u(1)}}],$$
а слично се показује и $L_{u^{-1}} \circ L_u = [\mathbb{1}_{F_{u(0)}}]$. □

Последица 5.20 *Ако је $p : E \to B$ фибрација, B путно повезан, $b_1, b_2 \in B$, онда је $F_{b_1} \simeq F_{b_2}$.*

У овом случају се често користи ознака $F \to E \xrightarrow{p} B$ где је F слој фибрације.

Нека је X тополошки простор и посматрајмо скуп $[X, X]$. Ово не мора бити група, али јесте моноид у односу на композицију са неутралом $[\mathbb{1}_X]$. Нека је $[X, X]^*$ ознака за све елементе из $[X, X]$ који су инвертибилни. Ова група се састоји управо од класа функција $f : X \to X$ које су хомотопске еквиваленције.

Дефиниција 5.21 *(Лево) дејство групе G до на хомотопију на тополошки простор X* јесте хомоморфизам група
$$\varphi : G \to [X, X]^*.$$

Став 5.22 *Ако је $p : E \to B$ фибрација и $b \in B$, онда је пресликавање*
$$\varphi : \pi_1(B, b) \to [F_b, F_b]^*$$
дато са
$$\varphi([u]) \stackrel{def}{=} L_{u^{-1}}$$
једно (лево) дејство до на хомотопију.

Доказ: Пресликавање φ јесте добро дефинисано на основу дела (а) леме 5.18 и теореме 5.19. Остаје још да покажемо да је и хомоморфизам. Нека су $[u],[v] \in \pi_1(B,b)$. Тада је

$$\varphi([u] * [v]) = \varphi([u \cdot v]) = L_{(u \cdot v)^{-1}} = L_{v^{-1} \cdot u^{-1}} = L_{u^{-1}} \circ L_{v^{-1}} = \varphi([u]) \circ \varphi([v]).$$

Дакле, φ јесте дејство до на хомотопију. $\square$

Дефиниција 5.23 Ако је $p : E \to B$ фибрација и B путно повезан кажемо да је p *оријентабилна* ако је дејство (до на хомотопију) групе $\pi_1(B,b)$ на F_b тривијално за свако $b \in B$.

Пример 5.24 *Свака фибрација над просто повезаним простором B је оријентабилна.*

Може се дефинисати хомоморфизам између групе $[F_b, F_b]^*$ и $\mathrm{Aut}(H_n(F_b))$ тако што се елементу $[f] \in [F_b, F_b]^*$ додели индуковани хомоморфизам $f_* \in \mathrm{Aut}(H_n(F_b))$, који је и аутоморфизам јер је f хомотопска еквиваленција. Композиција хомоморфизама

$$\pi_1(B,b) \xrightarrow{\varphi} [F_b, F_b]^* \to \mathrm{Aut}(H_n(F_b))$$

је (право) дејство фундаменталне групе $\pi_1(B,b)$ на $H_n(F_b)$.

Ако су $p : E \to B$ и $q : T \to B$ две фибрације идентификоваћемо их уколико постоји хомеоморфизам $h : T \to E$ такав да комутира наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd} T \arrow[rr, dashed, "h", "\approx"'] \arrow[dr, "q"'] & & E \arrow[dl, "p"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

У том случају ћемо писати $T = E$.

Сада ћемо навести неколико примера везаних за идентификацију фибрација.

1) Нека је $p : E \to B$ фибрација. Тада је

$$\mathbb{1}_B^*(E) = \{(b,e) \mid b = p(e)\} \subseteq B \times E$$

и комутира наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{1}_B^*(E) \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\mathbb{1}_B^* p"'] & E \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "\mathbb{1}_B"] & B \end{tikzcd}$$

Како је

$$\mathbb{1}_B^*(E) = \{(p(e), e) \mid e \in E\} = \Gamma_p,$$

а знамо да је график непрекидне функције хомеоморфан домену и да је пројекција један хомеоморфизам, то је управо $q : \mathbb{1}_B^*(E) \to E$ хомеоморфизам, па можемо идентификовати ове две фибрације, тј.

$$\mathbb{1}_B^*(E) = E.$$

2) Нека је $p : E \to B$ фибрација и $f : X \to B$ и $g : Y \to X$ непрекидна пресликавања. Тада је

$$(f \circ g)^*(E) = g^*(f^*(E)).$$

Заиста, посматрајмо наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd}
(f \circ g)^*(E) \arrow[dr, "h", "\approx"'] \arrow[drrr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & & \\
& g^*(f^*(E)) \arrow[r] \arrow[d] & f^*(E) \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\
& Y \arrow[r, "g"] & X \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

Желимо да дефинишемо хомеоморфизам $h : (f \circ g)^*(E) \to g^*(f^*(E))$. Погледајмо најпре како изгледају елементи ова два скупа.

$$(f \circ g)^*(E) = \{(y, e) \mid f(g(y)) = p(e)\} \subseteq Y \times E,$$

$$g^*(f^*(E)) = \{(y, x, e) \mid g(y) = x, f(x) = p(e)\} \subseteq Y \times X \times E.$$

Природно је дефинисати

$$h(y, e) \overset{def}{=} (y, g(y), e).$$

Ово ће заиста бити хомеоморфизам па можемо идентификовати

$$(f \circ g)^*(E) = g^*(f^*(E)).$$

3) Нека је $p : E \to B$ фибрација и $c_b : X \to B$ константно пресликавање. Тада је

$$c_b^*(E) = X \times F_b.$$

4) Нека је $p : E \to B$ фибрација и $A \subseteq B$. Као и раније имамо дијаграм

$$\begin{tikzcd}
i^*(E) \arrow[r, "q"] \arrow[d, "i^*p"'] & E \arrow[d, "p"] \\
A \arrow[r, hook, "i"] & B
\end{tikzcd}$$

Како је

$$i^*(E) = \{(a, e) \in A \times E \mid a = p(e)\} = \{(p(e), e) \mid e \in p^{-1}(A)\} = \Gamma_{p|_{p^{-1}(A)}}$$

то је пројекција на другу координату $p_2 : i^*(E) \to p^{-1}(A)$ хомеоморфизам.

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(A) \arrow[dr, "p|_{p^{-1}(A)}"'] & & i^*(E) \arrow[ll, "p_2"', "\approx"] \arrow[dl, "i^*p"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Дакле, имамо идентификацију

$$i^*(E) = p^{-1}(A).$$

Нека је дата фибрација $p : E \to B$, $f : X \to B$ непрекидно и $x_0 \in X$. Посматрајмо наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd}
\{x_0\} \times F_{f(x_0)} \arrow[r, "\approx"] \arrow[d, hook] & F_{f(x_0)} \arrow[d, hook] \\
f^*(E) \arrow[r] \arrow[d, "f^*p"'] & E \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

Како је

$$(f^*p)^{-1}(\{x_0\}) = \{(x_0, e) \mid p(e) = f(x_0)\} = \{x_0\} \times F_{f(x_0)},$$

закључујемо да је слој повлачења фибрације исти као слој фибрације.

5.3 Дуги тачни низ хомотопских група за фибрације

Став 5.25 *Нека је $p : E \to B$ Серова фибрација, $b \in B$ и $F_b = p^{-1}(\{b\}) \subseteq E$ слој фибрације над тачком b. Пресликавање p можемо видети као пресликавање парова*

$$\bar{p} : (E, F_b) \to (B, b).$$

Тада за свако $n \in \mathbb{N}$ и свако $e \in F_b$ хомоморфизам

$$\bar{p}_* : \pi_n(E, F_b, e) \to \pi_n(B, b, b) = \pi_n(B, b)$$

јесте изоморфизам.

Доказ: Покажимо прво да је $\bar{p}_*$ „на“. Нека је $[f]_0 \in \pi_n(B, b)$, тј. на основу (2) у одељку 2.2 имамо да је

$$[f]_0 \longleftrightarrow [f \circ q]_{0r} \in \pi_n(B, b, b).$$

$$\begin{tikzcd}
(D^n, S^{n-1}) \arrow[rr, dashed, "f\circ q"] \arrow[dr, "q"'] & & (B, b) \\
& (S^n, e_1) \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Тражимо пресликавање $g : (D^n, S^{n-1}, e_1) \to (E, F_b, e)$ такво да је

$$\bar{p} \circ g = f \circ q,$$

тј. такво да комутира наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd}
& (E, F_b, e) \arrow[d, "\bar{p}"] \\
(D^n, S^{n-1}, e_1) \arrow[ur, dashed, "g"] \arrow[r, "f\circ q"] & (B, b, b)
\end{tikzcd}$$

Дакле, тражимо подизање g од $f \circ q$ такво да је $g(S^{n-1}) \subseteq F_b$ и $g(e_1) = e$. Како је $(f \circ q)(S^{n-1}) = \{b\} = \bar{p}(F_b)$, то ће свакако важити $g(S^{n-1}) \subseteq F_b$. Остаје још да наместимо да буде $g(e_1) = e$. Посматрајмо сада следећи дијаграм.

$$\begin{tikzcd}
\{e_1\} \arrow[r, "c_e"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\
D^n \arrow[ur, dashed, "g"] \arrow[r, "f\circ q"] & B
\end{tikzcd}$$

Како је p Серова фибрација то p има својство подизања хомотопије у односу на диск D^n за свако $n \in \mathbb{N}$. Пошто је $\{e_1\}$ јаки деформациони ретракт метричког простора D^n, то је на основу леме 5.13 пар (D^n, e_1) један DR-пар. Коначно, на основу става 5.14 закључујемо да p има својство проширења подизања у односу на (D^n, e_1), па постоји пресликавање $g : D^n \to E$такво да горњи дијаграм комутира. То ће управо бити тражено пресликавање.

Сада ћемо показати да је $\bar{p}_*$ „1-1“. Нека су $g_1, g_2 : (I^n, \partial(I^n), J^{n-1}) \to (E, F_b, b)$ пресликавања таква да је

$$\bar{p}_*[g_1] = \bar{p}_*[g_2].$$

Желимо да покажемо да је $[g_1] = [g_2]$, тј. треба нам хомотопија $g_1 \simeq g_2$ кроз пресликавања тројки $(I^n, \partial(I^n), J^{n-1}) \to (E, F_b, b)$. Услов $\bar{p}_*[g_1] = \bar{p}_*[g_2]$ је еквивалентан томе да је

$$[\bar{p} \circ g_1] = [\bar{p} \circ g_2].$$

Нека је

$$H : \bar{p} \circ g_1 \simeq \bar{p} \circ g_2 \ (rel\ \partial(I^n)).$$

Ова хомотопија ће заиста бити релативна јер је то хомотопија кроз пресликавања тројки $(I^n, \partial(I^n), J^{n-1}) \to (B, b, b)$ па се све време $\partial(I^n)$ слика у $\{b\}$.

Посматрајмо следећи дијаграм.

$$\begin{tikzcd}
(I^n \times \partial I) \cup (J^{n-1} \times I) \arrow[r, "F"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\
I^n \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "G"] & B
\end{tikzcd}$$

Пресликавање F је дефинисано са

$$\begin{aligned}
F(x,0) &\overset{def}{=} g_1(x),\ x \in I^n, \\
F(x,1) &\overset{def}{=} g_2(x),\ x \in I^n, \\
F(x,t) &\overset{def}{=} e,\ x \in J^{n-1},\ t \in I.
\end{aligned}$$

Сличним аргументима као за постојање пресликавања $g : D^n \to E$ из првог дела доказа показује се да постоји пресликавање $G : I^n \times I \to E$ такво да горњи дијаграм комутира.

Дакле, добили смо

$$G : g_1 \simeq g_2,$$

а лако се види да је ово управо хомотопија кроз пресликавања тројки. $\square$

Теорема 5.26 *Нека је $p : E \to B$ Серова фибрација, $b \in B$, $e \in F_b$ и $j : F_b \hookrightarrow E$ инклузија. Тада је следећи низ тачан.*

$$\cdots \to \pi_n(F_b, b) \overset{j_*}{\to} \pi_n(E, e) \overset{p_*}{\to} \pi_n(B, b) \to \pi_{n-1}(F_b, e) \to \cdots \to \pi_0(F_b, e) \overset{j_*}{\to} \pi_0(E, e) \overset{p_*}{\to} \pi_0(B, b)$$

Доказ: Посматрајмо дуги тачни низ пара (E, F_b).

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \pi_n(E,e) \arrow[r] \arrow[dr, dashed, "p_*"'] & \pi_n(E,F_b,e) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, tail, two heads, "\bar{p}_*"] & \pi_{n-1}(F_b,e) \arrow[r] & \cdots \\
& & \pi_n(B,b) \arrow[ur, dashed] & &
\end{tikzcd}$$

Из комутативног дијаграма

$$\begin{tikzcd}
(E,e) \arrow[r, hook] \arrow[dr, "p"'] & (E,F_b) \arrow[d, "\bar{p}"] \\
& (B,b)
\end{tikzcd}$$

видимо да пресликавање $\pi_n(E, e) \to \pi_n(B, b)$ јесте управо p_* па коришћењем изоморфизма $\bar{p}_*$ можемо у дугом тачном низу пара заменити $\pi_n(E, F_b, e)$ са $\pi_n(B, b)$.

Дуги тачни низ пара (E, F_b) се завршава на месту $\pi_0(E, e)$, па је за тачност низа из теореме потребно доказати и тачност на овом месту, али то се лако проверава. □

Нека су $p : E \to B$ и $q : T \to X$ Серове фибрације и $f : X \to B$, $g : T \to E$ непрекидна пресликавања таква да комутира наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q"'] & E \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd} \tag{4}$$

Нека је $x_0 \in X$ фиксирано. Означимо са $S = S_{x_0} = q^{-1}(\{x_0\})$ слој фибрације q над тачком x_0, а са $F = F_{f(x_0)} = p^{-1}(\{f(x_0)\})$ слој фибрације p над тачком $f(x_0)$. Тада је $g(i(S)) \subseteq F$, па је добро дефинисано пресликавање $g|_S : S \to F$, тј. имамо наредни комутативни дијаграм.

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "g|_S"] \arrow[d, hook, "i"'] & F \arrow[d, hook, "j"] \\
T \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q"'] & E \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd} \tag{5}$$

Став 5.27 *Ако су $p : E \to B$ и $q : T \to X$ Серове фибрације и $f : X \to B$, $g : T \to E$ непрекидна пресликавања таква да комутира дијаграм (4) и ако је $x_0 \in X$, $s \in S$, онда комутира следећи дијаграм.*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \pi_n(S,s) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "(g|_S)_*"'] & \pi_n(T,s) \arrow[r, "q_*"] \arrow[d, "g_*"] & \pi_n(X,x_0) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_*"] & \pi_{n-1}(S,s) \arrow[r] \arrow[d, "(g|_S)_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \pi_n(F,g(s)) \arrow[r, "j_*"] & \pi_n(E,g(s)) \arrow[r, "p_*"] & \pi_n(B,f(x_0)) \arrow[r, "\partial"] & \pi_{n-1}(F,g(s)) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Доказ: Комутативност првог и другог квадрата лако следи из комутативности дијаграма (5), па је потребно само показати да комутира и трећи квадрат у горњем дијаграму. Пресликавања ∂ из горњег дијаграма су дефинисана као композиције у врстама наредног дијаграма.

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(X,x_0) \arrow[d, "f_*"'] & \pi_n(T,S,s) \arrow[l, tail, two heads, "\bar{q}_*"'] \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "g_*"] & \pi_{n-1}(S,s) \arrow[d, "(g|_S)_*"] \\
\pi_n(B,f(x_0)) & \pi_n(E,F,g(s)) \arrow[l, tail, two heads, "\bar{p}_*"'] \arrow[r, "\partial"] & \pi_{n-1}(F,g(s))
\end{tikzcd}$$

Леви квадрат у овом дијаграму комутира на основу комутативности дијаграма (5), а десни квадрат комутира из природности дугог тачног низа пара у хомотопији, па коначно добијамо да комутира и трећи квадрат дијаграма из тврђења теореме. □

5.4 „Претварање“ произвољног пресликавања у фибрацију

Дефиниција 5.28 Пресликавање $f : X \to Y$ јесте *хомотопски еквивалентно* пресликавању $g : Z \to W$ ако постоје хомотопске еквиваленције $\varphi : X \to Z$ и $\psi : Y \to W$ такве да је $g \circ \varphi \simeq \psi \circ f$, тј. да наредни дијаграм комутира до на хомотопију.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"', "\simeq"] & Y \arrow[d, "\simeq"', "\psi"] \\ Z \arrow[r, "g"] & W \end{tikzcd}$$

Специјално, уколико је $f, g : X \to Y$ и $f \simeq g$ онда је f хомотопски еквивалентно са g што видимо из следећег дијаграма.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathbb{1}_X"'] & Y \arrow[d, "\mathbb{1}_Y"] \\ X \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

Лако се може показати да је хомотопска еквиваленција пресликавања једна релација еквиваленције.

Нека су X и Y тополошки простори и посматрајмо скуп непрекидних пресликавања $C(X,Y) \subseteq Y^X$ са доменом X и кодоменом Y. Желимо да дефинишемо топологију на овом скупу.

Ако је $K \subseteq X$ и $U \subseteq Y$, означимо

$$M(K,U) \stackrel{def}{=} \{f \in C(X,Y) \mid f(K) \subseteq U\}.$$

Нека је $\mathcal{T}_{co}$ топологија на $C(X,Y)$ дата предбазом

$$\mathcal{S}_{co} \stackrel{def}{=} \{M(K,U) \mid K \in \mathcal{K}_X, U \in \mathcal{T}_Y\}.$$

Ову топологију зовемо *компактно-отворена топологија* на $C(X,Y)$.

Зашто је ова топологија погодна видећемо кроз њене наредне особине.

Нека је $\mathcal{T}$ стандардна Тихоновљева топологија на Y^X, а $\mathcal{T}_{C(X,Y)}$ њом индукована топологија на $C(X,Y)$. Тада важе следећа својства.

1) $\mathcal{T}_{C(X,Y)} \subseteq \mathcal{T}_{co}$, док обрнуто не мора да важи;

2) Ако је X коначан, онда је $\mathcal{T}_{C(X,Y)} = \mathcal{T}_{co}$;

3) Ако је X дискретан, онда је $C(X,Y) = Y^X$ и $\mathcal{T}_{co} = \mathcal{T} = \mathcal{T}_{C(X,Y)}$;

У наредним особинама $\mathcal{T}_{co}$ је подразумевана топологија на $C(X,Y)$, а Z је произвољан тополошки простор.

4) Нека је $ev : C(X,Y) \times X \to Y$ евалуација, тј.

$$ev(f,x) \overset{def}{=} f(x),\ f \in C(X,Y),\ x \in X.$$

Ако је X T_2 и локално компактан, онда је ev непрекидно;

5) Нека је $H : Z \times X \to Y$ непрекидно пресликавање. Тада је са

$$h(z)(x) \overset{def}{=} H(z,x),\ z \in Z,\ x \in X,$$

добро дефинисано непрекидно пресликавање $h : Z \to C(X,Y)$;

6) Нека је $h : Z \to C(X,Y)$ непрекидно. Ако је X T_2 и локално компактан, онда је $H : Z \times X \to Y$ дато са

$$H(z,x) \overset{def}{=} h(z)(x),\ z \in Z,\ x \in X,$$

добро дефинисано непрекидно пресликавање.

Додатно, ако је $x_0 \in X$, може се дефинисати пресликавање $ev_{x_0} : C(X,Y) \to Y$ као композиција пресликавања из дијаграма

$$\begin{tikzcd} C(X,Y) \arrow[r, hook] \arrow[dr, "ev_{x_0}"'] & C(X,Y) \times X \arrow[d, "ev"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

где је хоризонтално пресликавање дато са

$$f \longmapsto (f, x_0),$$

за $f \in C(X,Y)$. Ако је X локално компактан и T_2, пресликавање ev_{x_0} је непрекидно као композиција непрекидних пресликавања.

Надаље ћемо користити ознаку Y^X за тополошки простор $(C(X,Y), \mathcal{T}_{co})$.

Теорема 5.29 *Свако пресликавање је хомотопски еквивалентно фибрацији.*

Доказ: Конструисаћемо простор $\widetilde{X}$, хомотопску еквиваленцију $\varphi : X \to \widetilde{X}$ и фибрацију $g : \widetilde{X} \to Y$ такве да комутира наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[dr, "g"] & \\ X \arrow[u, "\varphi", "\simeq"'] \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd} \qquad (6)$$

Најпре дефинишимо простор $\widetilde{X}$ на следећи начин.

$$\widetilde{X} \overset{def}{=} \{(x,u) \in X \times Y^I \mid u(0) = f(x)\} \subseteq X \times Y^I$$

Даље, нека је $\varphi : X \to \widetilde{X}$ дато са

$$\varphi(x) \overset{def}{=} (x, c_{f(x)}) \in \widetilde{X}.$$

Пресликавање φ јесте непрекидно. Заиста, да би показали непрекидност ово пресликавања, довољно је показати да су непрекидне композиције $p_1 \circ i \circ \varphi$ и $p_2 \circ i \circ \varphi$ из наредног дијаграма.

$$\begin{tikzcd}
 & & & X \\
X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[urrr, dashed] \arrow[drrr, dashed] & \widetilde{X} \arrow[r, hook, "i"] & X \times Y^I \arrow[ur, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & \\
 & & & Y^I
\end{tikzcd}$$

Како је $p_1 \circ i \circ \varphi = \mathbb{1}_X$, то ова композиција јесте непрекидна, па само треба показати да је и $p_2 \circ i \circ \varphi$ непрекидно. На основу особина 5) и 6) компактно-отворене топологије, ово пресликавање је непрекидно ако и само ако је непрекидно пресликавање $X \times I \to Y$ дато са

$$(x,t) \longmapsto c_{f(x)}(t) = f(x),$$

а ово пресликавање јесте непрекидно јер је то заправо композиција пројекције на прву координату и пресликавања f. Дакле, φ јесте непрекидно пресликавање.

Сада ћемо показати да је и хомотопска еквиваленција. Нека је $\psi : \widetilde{X} \to X$ дато са

$$\psi(x,u) \overset{def}{=} x.$$

Ово пресликавање јесте непрекидно јер је то заправо пројекција на прву координату. Доказаћемо да је ψ хомотопски инверз од φ. Како је $\psi \circ \varphi = \mathbb{1}_X$, треба само показати да је $\varphi \circ \psi \simeq \mathbb{1}_{\widetilde{X}}$. Нека је $H : \widetilde{X} \times I \to \widetilde{X}$ дато са

$$H((x,u),s) \overset{def}{=} (x, u_s),$$

где је $u_s : I \to Y$ пут дат са $u_s(t) \overset{def}{=} u(st),\ t \in I$. Како је

$$u_s(0) = u(0) = f(x),$$

то заиста $H((x,u),s) \in \widetilde{X}$, па је H добро дефинисано. Пресликавање H ће бити непрекидно уколико су композиције $p_1 \circ i \circ H$ и $p_2 \circ i \circ H$ непрекидне.

$$\begin{tikzcd}
 & & & X \\
\widetilde{X} \times I \arrow[r, "H"] \arrow[urrr, dashed] \arrow[drrr, dashed] & \widetilde{X} \arrow[r, hook, "i"] & X \times Y^I \arrow[ur, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & \\
 & & & Y^I
\end{tikzcd}$$

Прва композиција $p_1 \circ i \circ H$ јесте непрекидна јер је то заправо пројекција на X. На основу особина 5) и 6) компактно-отворене топологије композиција $p_2 \circ i \circ H$ ће бити непрекидна ако и само ако је непрекидно пресликавање $\widetilde{X} \times I \times I \to Y$ дато са

$$((x,u),s,t) \longmapsto u(st),$$

а из наредног дијаграма видимо да је ово пресликавање заправо композиција непрекидних пресликавања па је и оно непрекидно ($m : I \times I \to I$ је множење).

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{X} \times I \times I \arrow[r] \arrow[d, hook] & Y \\
(X \times Y^I) \times (I \times I) \arrow[r, "p_2 \times m"] & Y^I \times I \arrow[u, "ev"']
\end{tikzcd}$$

Даље, како је

$$H((x,u),0) = (x,u_0) = (x, c_{f(x)}) = (\varphi \circ \psi)(x,u),$$

$$H((x,u),1) = (x,u) = \mathbb{1}_{\widetilde{X}}(x,u),$$

то је управо $H : \varphi \circ \psi \simeq \mathbb{1}_{\widetilde{X}}$, па је φ хомотопска еквиваленција. Важи и више, пресликавање φ је утапање и $\varphi(X)$ је јаки деформациони ретракт простора $\widetilde{X}$.

Дефинишимо сада пресликавање $g : \widetilde{X} \to Y$ на следећи начин

$$g(x,u) \stackrel{def}{=} u(1).$$

Пресликавање g је непрекидно јер се може видети као композиција из наредног дијаграма.

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{X} \arrow[r, hook] \arrow[d, "g"'] & X \times Y^I \arrow[d, "p_2"] \\
Y & Y^I \arrow[l, "ev_1"']
\end{tikzcd}$$

Пресликавање ev_1 јесте непрекидно јер је I локално компактан и T_2.

Такође, лако се види да комутира дијаграм (6). Заиста,

$$g(\varphi(x)) = g(x, c_{f(x)}) = c_{f(x)}(1) = f(x).$$

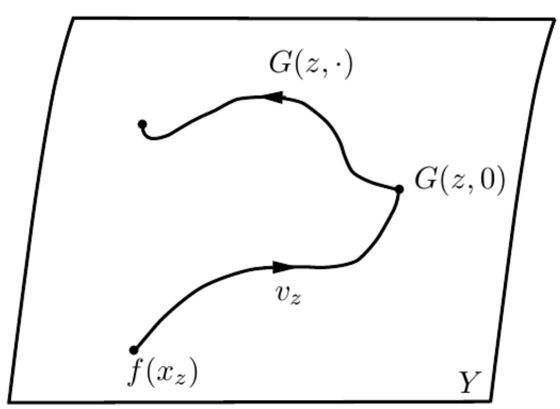
Остаје још да покажемо да је g фибрација.

Нека је Z произвољан тополошки простор и $G : Z \times I \to Y$, $k : Z \times \{0\} \to Y$ непрекидна пресликавања таква да комутира наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd}
Z \times \{0\} \arrow[r, "k"] \arrow[d, hook] & \widetilde{X} \arrow[d, "g"] \\
Z \times I \arrow[r, "G"'] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{G}"] & Y
\end{tikzcd}$$

Желимо да нађемо решење $\widetilde{G}$ овог дијаграма. Како је $\widetilde{X}$ кодомен пресликавања k, то за $z \in Z$ имамо $k(z) = (x_z, v_z)$, где је $x_z \in X$, а $v_z : I \to Y$ пут са почетком у $f(x_z)$. Из комутативности горњег дијаграма имамо да је крај овог пута

$$v_z(1) = g(x_z, v_z) = g(k(z)) = G(z, 0).$$



Дефинишимо $\widetilde{G}$ са

$$\widetilde{G}(z,t) \overset{def}{=} (x_z, u_{z,t}),$$

где је пут $u_{z,t}$ дат са

$$u_{z,t}(s) \stackrel{def}{=} \begin{cases} v_z\left(\frac{2s}{2-t}\right), & 0 \leqslant s \leqslant 1-\frac{t}{2} \\ G(z, 2s-2+t), & 1-\frac{t}{2} \leqslant s \leqslant 1 \end{cases}$$

Како је $u_{z,t}(0) = v_z(0) = f(x_z)$, то је заиста $(x_z, u_{z,t}) \in \widetilde{X}$, тј. пресликавање $\widetilde{G}$ је добро дефинисано.

Као и за остала пресликавања у ранијем делу доказа, на сличан начин се може показати да је пресликавање $\widetilde{G}$ непрекидно. Коначно, да би $\widetilde{G}$ било тражено решење остаје још да покажемо да комутирају оба троугла из горњег дијаграма.

$$\widetilde{G}(z,0) = (x_z, u_{z,0}) = (x_z, v_z) = k(z),$$

$$g(\widetilde{G}(z,t)) = u_{z,t}(1) = G(z,t). \ \square$$

Пример 5.30 *Нека су X и Y тополошки простори, $y_0 \in Y$ базна тачка. „Претворимо“ у фибрацију константно пресликавање $c_{y_0} : X \to Y$. Тада имамо комутативан дијаграм*

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[dr, "g"] & \\ X \arrow[u, hook, "\varphi"] \arrow[r, "c_{y_0}"] & Y \end{tikzcd}$$

где је

$$\widetilde{X} = \{(x,u) \in X \times Y^I \mid u(0) = y_0\} = X \times \{u \in Y^I \mid u(0) = y_0\}.$$

Уколико са $P_{y_0}Y$ означимо простор путева у Y са почетком у y_0, тј.

$$P_{y_0}Y \stackrel{def}{=} \{u \in Y^I \mid u(0) = y_0\},$$

онда је

$$\widetilde{X} = X \times P_{y_0}Y.$$

Пресликавање $g : \widetilde{X} \to Y$ је било дефинисано тако да комутира наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd} X \times P_{y_0}Y \arrow[dd, "g"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ & P_{y_0}Y \arrow[dl, "ev_1"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

Одредимо слој фибрације g над тачком y_0:

$$g^{-1}(\{y_0\}) = \{(x,u) \in X \times P_{y_0}Y \mid u(1) = y_0\} = X \times \{u \in Y^I \mid u(0) = u(1) = y_0\},$$

па ако са $\Omega_{y_0}Y$ означимо простор петљи простора Y у тачки y_0, тј.

$$\Omega_{y_0}Y \overset{def}{=} \{u \in Y^I \mid u(0) = u(1) = y_0\},$$

добијамо да је овај слој једнак $X \times \Omega_{y_0}Y$.

Често се изоставља y_0 у индексу већ се пише само ΩY, односно PY, имајући у виду која је тачка истакнута у Y.

Дакле, имамо да за сваки простор X и сваки простор са базном тачком (Y, y_0) постоји фибрација

$$\begin{tikzcd} X \times \Omega Y \arrow[r] & X \times PY \arrow[d, "ev_1 \circ p_2"] \\ & Y \end{tikzcd} \tag{7}$$

При том,

$$X \times PY \simeq X, \tag{8}$$

што се види из конструкције у доказу теореме 5.29.

Став 5.31 *Нека су $p : E \to B$ и $q : T \to X$ хомотопски еквивалентне фибрације и простори B и X путно повезани. Ако је F слој фибрације p и S слој фибрације q, онда постоји слаба хомотопска еквиваленција $\theta : S \to F$.*

Доказ: Нека су $\varphi : X \to B$ и $\widetilde{\psi} : T \to E$ хомотопске еквиваленције такве да је

$$p \circ \widetilde{\psi} \simeq \varphi \circ q.$$

Тада је $\widetilde{\psi}$ подизање до на хомотопију пресликавања $\varphi \circ q$, па на основу задатка 1. из одељка 1.3 имамо да постоји право подизање $\psi : T \to E$ пресликавања $\varphi \circ q$ у односу на фибрацију pтакво да је $\psi \simeq \widetilde{\psi}$. Тада за $x_0 \in X$ имамо следећи комутативни дијаграм.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, dashed, "\theta"] \arrow[d, hook, "i"'] & F \arrow[d, hook, "j"] \\ T \arrow[r, "\psi", "\simeq"'] \arrow[d, "q"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "\varphi", "\simeq"'] & B \end{tikzcd}$$

где је $S \stackrel{def}{=} S_{x_0}$ и $F \stackrel{def}{=} F_{\varphi(x_0)}$. На основу става 5.27 имамо да комутира наредни дијаграм.

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \pi_{n+1}(T) \arrow[r, "q_*"] \arrow[d, tail, two heads, "\psi_*"] & \pi_{n+1}(X) \arrow[r] \arrow[d, tail, two heads, "\varphi_*"] & \pi_n(S) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\theta_*"] & \pi_n(T) \arrow[r, "q_*"] \arrow[d, tail, two heads, "\psi_*"] & \pi_n(X) \arrow[r] \arrow[d, tail, two heads, "\varphi_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \pi_{n+1}(E) \arrow[r, "p_*"] & \pi_{n+1}(B) \arrow[r] & \pi_n(F) \arrow[r, "j_*"] & \pi_n(E) \arrow[r, "p_*"] & \pi_n(B) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Како су φ и ψ хомотопске еквиваленције, то су пресликавања φ_* и ψ_* из горњег дијаграма изоморфизми, па на основу Стинродове 5-леме закључујемо да је и θ_* изоморфизам за $n \geqslant 1$. За случај $n = 0$, такође се може показати да је $\theta_* : \pi_0(S) \to \pi_0(F)$ изоморфизам, па закључујемо коначно да је θ слаба хомотопска еквиваленција. $\square$

Дефиниција 5.32 Нека је $f : X \to Y$ непрекидно и Y путно повезан. *Хомотопски слој (хомотопска фибра)* пресликавања f јесте слој (било које) фибрације хомотопски еквивалентне са f.

Из теореме 5.29 видимо да постоји хомотопски слој од f, а из последице 5.20 и става 5.31 следи да је он добро дефинисан до на слабу хомотопску еквиваленцију. Заправо, ако X и Y имају хомотопски тип CW-комплекса, хомотопски слој је добро дефинисан и до на хомотопску еквиваленцију. То следи из Вајтхедове теореме и наредног става, чији се доказ може наћи у [8].

Став 5.33 *Нека је $p : E \to B$ фибрација и B* CW*-типа. Тада је E* CW*-типа ако и само ако је за свако $b \in B$ слој F_b* CW*-типа.*

Пример 5.34 *Нека је $f : X \to Y$, Y путно повезан и $f \simeq const$. Желимо да одредимо хомотопски слој од f. Како је $f \simeq const$ онда су f и $const$ и хомотопски еквивалентни па имају исте хомотопске слојеве те је довољно наћи хомотопски слој константног пресликавања c_{y_0}, за неко y_0. Из примера 5.30, пак, видимо да је тај хомотопски слој $X \times \Omega Y$.*

Видели смо раније да пресликавање $f_* : \pi_i(X) \to \pi_i(Y)$, $i \in \mathbb{N}_0$, можемо да видимо као део дугог тачног низа.

$$\cdots \longrightarrow \pi_{i+1}(Y, X) \longrightarrow \pi_i(X) \xrightarrow{f_*} \pi_i(Y) \longrightarrow \pi_i(Y, X) \longrightarrow \pi_{i-1}(X) \xrightarrow{f_*} \cdots$$

Са друге стране, како је f хомотопски еквивалентно некој фибрацији $p : E \to B$, тј. постоје хомотопске еквиваленције $\varphi : Y \to B$ и $\psi : X \to E$ такве да следећи дијаграм комутира

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\psi", "\simeq"'] \arrow[d, "f"'] & E \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, "\varphi", "\simeq"'] & B \end{tikzcd}$$

па када посматрамо дуги тачни низ за фибрацију p и искористимо изоморфизме φ_* и ψ_* између одговарајућих хомотопских група простора Y и B, односно X и E, добијамо наредни тачан низ.

$$\cdots \longrightarrow \pi_i(F) \longrightarrow \pi_i(X) \xrightarrow{f_*} \pi_i(Y) \longrightarrow \pi_{i-1}(F) \longrightarrow \pi_{i-1}(X) \longrightarrow \cdots$$

Иако немамо никакво пресликавање из једног дугог тачног низа у други, нити групе $\pi_i(Y,X)$ и $\pi_{i-1}(F)$ морају бити изоморфне, ипак из тачности ова два дуга тачна низа можемо закључити нешто о вези између ове две групе. Наиме, ако је $f : X \to Y$, Y путно повезан и F хомотопски слој пресликавања f, онда за свако $i \in \mathbb{N}$ важи еквиваленција

$$\pi_i(Y,X) = 0 \iff \pi_{i-1}(F) = 0. \tag{9}$$

Одавде директно добијамо и еквиваленцију

$$f \text{ је } n\text{-еквиваленција} \iff F \text{ је } (n-1)\text{-повезан.}$$

Користећи еквиваленцију (9) можемо преформулисати теорему 3.16 на следећи начин.

Теорема 5.35 *Нека је (X,A) CW-пар и нека је $p : E \to Y$ непрекидно, Y путно повезан и F хомотопски слој од p. Претпоставимо да за све $n \in \mathbb{N}$ са својством да постоји n-ћелија у $X \backslash A$ важи $\pi_{n-1}(F) = 0$. Тада за свако пресликавање $f : X \to Y$ и $h : A \to E$ такво да је $p \circ h = f|_A$ постоји $g : X \to E$ такво да је $g|_A = h$ и $p \circ g \simeq f$.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"] \arrow[ur, dashed, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

5.5 Главне фибрације

Нека је (Y, y_0) простор са базном тачком и

$$PY \overset{def}{=} \{u : I \to Y \mid u(0) = y_0\} \subseteq Y^I \text{ (простор путева у } (Y,y_0)),$$

$$\Omega Y \overset{def}{=} \{u : I \to Y \mid u(0) = u(1) = y_0\} \subseteq Y^I \text{ (простор петљи у } (Y,y_0)).$$

Тада је $c_{y_0} : I \to Y$ природна базна тачка у ова два простора.

Став 5.36 *Нека је (Y, y_0) простор са базном тачком.*

(а) PY је контрактибилан;

(б) ΩY је H-простор.

Доказ: (а) Уколико у (8) узмемо $X = *$, добијамо да је $PY \simeq *$.
(б) Дефинишимо $\nu : \Omega Y \times \Omega Y \to \Omega Y$ као надовезивање петљи, тј.

$$\nu(u, v) \stackrel{def}{=} u \cdot v.$$

Пресликавање ν је непрекидно уколико је непрекидна композиција

$$\Omega Y \times \Omega Y \stackrel{\nu}{\to} \Omega Y \hookrightarrow Y^I,$$

а на основу особина 5) и 6) компактно-отворене топологије, ово пресликавање је непрекидно ако и само ако је непрекидно пресликавање $\Omega Y \times \Omega Y \times I \to Y$ дато са

$$(u, v, t) \longmapsto (u \cdot v)(t).$$

Рестрикција овог пресликавања на $\Omega Y \times \Omega Y \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$ може се видети као наредна композиција

$$\begin{tikzcd}
 & & Y^I \times I \arrow[dr, "ev"] & \\
\Omega Y \times \Omega Y \times \left[0, \frac{1}{2}\right] \arrow[r, "p_1 \times (t \mapsto 2t)"] & \Omega Y \times I \arrow[ur, hook] \arrow[rr, "ev"] & & Y
\end{tikzcd}$$

одакле закључујемо да је ова рестрикција непрекидна. Слично се добија да је и рестрикција на $\Omega Y \times \Omega Y \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ непрекидна, па на основу теореме о лепљењу непрекидно је и само пресликавање.

Дакле, ν је једна добро дефинисана непрекидна операција. Остало је још показати да су композиције

$$\begin{tikzcd}
\Omega Y \arrow[r, hook, "i_1"] \arrow[dr, dashed] & \Omega Y \times \Omega Y \arrow[d, "\nu"] \\
 & \Omega Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Omega Y \arrow[r, hook, "i_2"] \arrow[dr, dashed] & \Omega Y \times \Omega Y \arrow[d, "\nu"] \\
 & \Omega Y
\end{tikzcd}$$

(где је $i_1(u) = (u, c_{y_0})$, а $i_2(u) = (c_{y_0}, u)$) хомотопне идентитети релативно c_{y_0}, тј. да је

$$\mathbb{1}_{\Omega Y} \simeq \nu \circ i_1 \ (rel\ c_{y_0}),$$

$$\mathbb{1}_{\Omega Y} \simeq \nu \circ i_2 \ (rel\ c_{y_0}).$$

Нека је $F : \Omega Y \times I \to \Omega Y$ дато са

$$F(u,s)(t) \overset{def}{=} \begin{cases} u\left(\frac{2t}{2-s}\right), & 0 \leqslant t \leqslant 1 - \frac{s}{2} \\ y_0, & 1 - \frac{s}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

Слично као и за ν, показује се да је пресликавање F непрекидно. Како важи

$$F(u,0) = u = \mathbb{1}_{\Omega Y}(u),$$

$$F(u,1)(t) = \begin{cases} u(2t), & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ y_0, & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases} = (u \cdot c_{y_0})(t) = \nu(i_1(u))(t),$$

$$F(c_{y_0}, s)(t) = y_0, \text{ тј. } F(c_{y_0}, s) = c_{y_0}, \ s \in I,$$

то је

$$F : \mathbb{1}_{\Omega Y} \simeq \nu \circ i_1 \ (rel\ c_{y_0}).$$

Слично се показује да је $\mathbb{1}_{\Omega Y} \simeq \nu \circ i_2 \ (rel\ c_{y_0})$, па закључујемо да је ΩY заиста H-простор. □

Може се дефинисати и операција $\mu : \Omega Y \times PY \to PY$ као надовезивање путева, тј.

$$\mu(u,v) \overset{def}{=} u \cdot v.$$

Тада је μ заправо проширење операције ν, тј. комутира наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd} \Omega Y \times PY \arrow[r, "\mu"] & PY \\ \Omega Y \times \Omega Y \arrow[r, "\nu"] \arrow[u, hook] & \Omega Y \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Приметимо да комутира и следећи дијаграм.

$$\begin{tikzcd} \Omega Y \times PY \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "p_2"'] & PY \arrow[d, "ev_1"] \\ PY \arrow[r, "ev_1"] & Y \end{tikzcd}$$

Теорема 5.37 *Нека је (Y, y_0) простор са базном тачком.*

(a) Пресликавање $ev_1 : PY \to Y$ јесте фибрација са слојем ΩY;

(б) За свако $n \in \mathbb{N}$ важи $\pi_n(Y) \cong \pi_{n-1}(\Omega Y)$.

Доказ: (а) Ако у (7) изаберемо $X = *$ добијамо тражену фибрацију.
(б) Како је простор путева PY контрактибилан, то из дугог тачног низа за фибрацију

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(PY) \longrightarrow \pi_n(Y) \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \pi_{n-1}(\Omega Y) \longrightarrow \pi_{n-1}(PY) \longrightarrow \cdots$$

добијамо да је $\pi_n(Y) \cong \pi_{n-1}(\Omega Y)$. $\square$

Напомена 5.38

1) *Ако је $n = 1$, може се показати да је изоморфизам у дугом тачном низу за фибрацију између $\pi_1(Y)$ и $\pi_0(\Omega Y)$ баш једнакост.*

2) *Хуревић је хомотопске групе дефинисао индуктивно на следећи начин.*

$$\pi_n(Y) \overset{def}{=} \pi_1(\Omega^{n-1} Y)$$

Користећи ову дефиницију лако се показује да је $\pi_n(Y)$ Абелова за $n \geqslant 2$ јер је $\Omega^{n-1}Y$ простор петљи па је H-простор, а знамо да је фундаментална група H-простора Абелова, а то је у овом случају управо $\pi_n(Y)$.

Став 5.39 *Нека је $n \in \mathbb{N}$ и G Абелова.*

(а) $\Omega K(G, n+1) = K(G, n)$;

(б) $K(G, n)$ је (слаби) H-простор.

Доказ: (а) На основу дела (б) теореме 5.37 имамо да је

$$\pi_i(\Omega K(G, n+1)) \cong \begin{cases} G, & i = n \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Још је потребно показати да је $\Omega K(G, n+1)$ CW-типа. Како су у фибрацији

$$\begin{tikzcd} \Omega K(G, n+1) \arrow[r] & PK(G, n+1) \arrow[d] \\ & K(G, n) \end{tikzcd}$$

простори $PK(G, n+1)$ и $K(G, n)$ CW-типа, то је на основу става 5.33 и $\Omega K(G, n+1)$ CW-типа.
(б) Знамо да су сви простори $K(G, n)$ међусобно хомотопски еквивалентни и да је један од њих управо $\Omega K(G, n+1)$, који је на основу става 5.36 H-простор, па ће сваки $K(G, n)$ бити бар слаби H-простор. $\square$

Дефиниција 5.40 Нека је (Y, y_0) простор са базном тачком. *Канонска фибрација над простором* Y јесте фибрација

$$\begin{tikzcd} \Omega Y \arrow[r] & PY \arrow[d, "ev_1"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Ако је још $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *главна фибрација над* X *индукована са* f јесте повлачење канонске фибрације над Y помоћу f.

$$\begin{tikzcd} \Omega Y \arrow[r, equal] \arrow[d, hook] & \Omega Y \arrow[d, hook] \\ f^*(PY) \arrow[r] \arrow[d, "p"'] & PY \arrow[d, "ev_1"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Означимо $E \overset{def}{=} f^*(PY)$. Може се дефинисати „дејство“ слоја на тотални простор $\mu : \Omega Y \times E \to E$ на следећи начин

$$\mu(u, x, v) \overset{def}{=} (x, u \cdot v).$$

Приметимо да тада комутира наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd} \Omega Y \times E \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "p_2"'] & E \arrow[d, "p"] \\ E \arrow[r, "p"] & X \end{tikzcd}$$

Заиста,

$$(p \circ \mu)(u, x, v) = p(x, u \circ v) = x = p(x, v) = (p \circ p_2)(u, x, v).$$

Такође, μ ће бити и проширење надовезивања петљи, тј. комутира наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd} \Omega Y \times E \arrow[r, "\mu"] & E \\ \Omega Y \times \Omega Y \arrow[r, "\nu"] \arrow[u, hook] & \Omega Y \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Став 5.41 *Нека је $p : E \to X$ главна фибрација индукована пресликавањем $f : X \to Y$ и нека је $g : Z \to X$ непрекидно такво да је $(f \circ g)(Z) \subseteq Y_0$, где је Y_0 компонента путне повезаности простора Y која садржи тачку y_0.*

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[r] \arrow[d, "p"] & PY \arrow[d, "ev_1"] \\ Z \arrow[ur, dashed, "\widetilde{g}"] \arrow[r, "g"] & X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

(а) *Постоји подизање $\widetilde{g} : Z \to E$ пресликавања g ако и само ако је $f \circ g \simeq const$;*

(б) *Ако је $h : Z \to E$ једно фиксирано подизање од g, онда је за свако непрекидно пресликавање $\varphi : Z \to \Omega Y$ композиција*

$$h_\varphi : Z \xrightarrow{(\varphi,h)} \Omega Y \times E \xrightarrow{\mu} E$$

такође подизање од g. При том, ако је $\varphi_1 \simeq \varphi_2$, онда је $h_{\varphi_1} \simeq h_{\varphi_2}$.

Доказ: (а) $\Rightarrow$: Уколико постоји подизање онда се пресликавање $f \circ g$ факторише кроз контрактибилни простор PY па је хомотопски тривијално.
$\Leftarrow$: Овај смер директно следи на основу става 5.8.
(б) Из комутативног дијаграма

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "(\varphi,h)"] \arrow[dr, "h"'] & \Omega Y \times E \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "p_2"] & E \arrow[d, "p"] \\ & E \arrow[r, "p"] & X \end{tikzcd}$$

имамо да је

$$p \circ h_\varphi = p \circ \mu \circ (\varphi, h) = p \circ h = g,$$

тј. пресликавање h_φ јесте подизање пресликавања g у односу на фибрацију p. Додатно, ако је $\varphi_1 \simeq \varphi_2$, онда је и $(\varphi_1, h) \simeq (\varphi_2, h)$, па је

$$h_{\varphi_1} = \mu \circ (\varphi_1, h) \simeq \mu \circ (\varphi_2, h) = h_{\varphi_2}. \square$$

5.6 Раслојења

Дефиниција 5.42 Нека су E, F и B тополошки простори. Непрекидно пресликавање $p : E \to B$ јесте *раслојење са слојем* F ако за сваку тачку $b \in B$ постоји отворена околина $U_b \in \mathcal{T}_B$ тачке b и хомеоморфизам $h : p^{-1}(U_b) \to U_b \times F$ такав да комутира наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_b) \arrow[rr, "h", "\approx"'] \arrow[dr, "p"'] & & U_b \times F \arrow[dl, "p_1"] \\ & U_b & \end{tikzcd}$$

Користићемо ознаку

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] & E \arrow[d, "p"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Ако је $C \subseteq U_b$, онда комутира и наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(C) \arrow[rr, "h|_{p^{-1}(C)}", "\approx"'] \arrow[dr, "p"'] & & C \times F \arrow[dl, "p_1"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

Специјално, ако је $C = \{b\}$, имамо да комутира дијаграм.

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(\{b\}) \arrow[rr, "h|_{p^{-1}(\{b\})}", "\approx"'] \arrow[dr, "p"'] & & \{b\} \times F \arrow[dl, "p_1"] \\ & \{b\} & \end{tikzcd}$$

Дакле, за свако $b \in B$ важи $p^{-1}(\{b\}) \approx F$.

Свако раслојење је отворено пресликавање. Заиста, довољно је показати да су рестрикције пресликавања p на сваком од скупова који чине отворен покривач од E отворене. Имамо да је

$$E = \bigcup_{b \in B} p^{-1}(U_b)$$

и сваки од скупова $p^{-1}(U_b)$ је отворен.

Из комутативности дијаграма

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_b) \arrow[r, "h", "\approx"'] \arrow[d, dashed, "p|_{p^{-1}(U_b)}"'] & U_b \times F \arrow[d, "p_1"] \\ B & U_b \arrow[l, hook', "i"'] \end{tikzcd}$$

видимо да рестрикцију $p|_{p^{-1}(U_b)}$ можемо да видимо као композицију хомеоморфизма h, пројекције p_1 и инклузије i. Јасно је да су h и p_1 отворена пресликавања, а како је U_b отворен у B, то ће и инклузија i бити отворена па је и рестрикција $p|_{p^{-1}(U_b)}$ отворено пресликавање. Дакле, p је отворено, а из дефиниције видимо и да је непрекидно и „на“, па закључујемо да је свако раслојење количничко пресликавање.

Нека су $p : E \to B$ и $q : T \to B$ раслојења и $\varphi : T \to E$ хомеоморфизам такви да комутира дијаграм.

$$\begin{tikzcd} T \arrow[rr, "\varphi", "\approx"'] \arrow[dr, "q"'] & & E \arrow[dl, "p"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Тада раслојења p и q сматрамо једнаким, тј. еквивалентним.

Пример 5.43

1) *Уколико су F и B тополошки простори, тривијално раслојење над простором B са слојем F јесте раслојење*

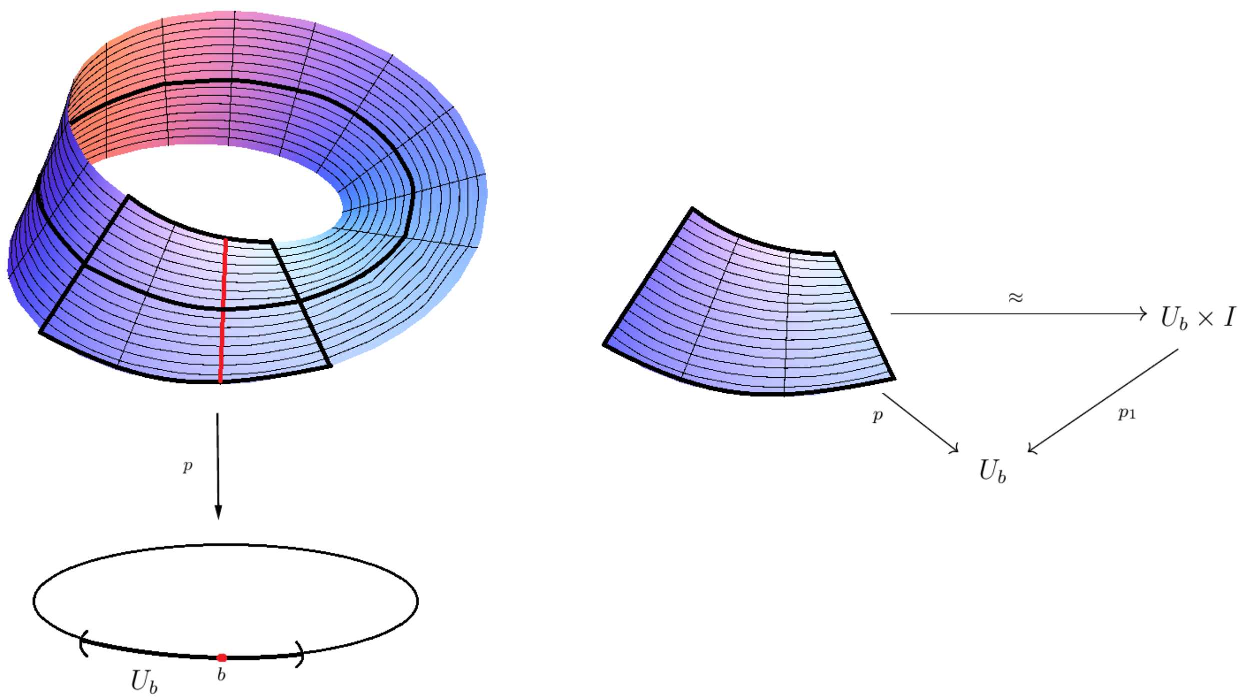
$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] & B \times F \arrow[d, "p_1"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Заиста, за $b \in B$ узмимо $U_b \overset{def}{=} B$ и $h \overset{def}{=} \mathbb{1}_{B\times F}$. Тада је $p^{-1}(U_b) = B \times F$ па јасно комутира наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd} B \times F \arrow[rr, "\mathbb{1}_{B\times F}", "\approx"'] \arrow[dr, "p_1"'] & & B \times F \arrow[dl, "p_1"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Такође, свако раслојење еквивалентно тривијалном ћемо називати тривијалним.

2) *Пројекција $p : M \to S^1$ на средњу кружницу Мебијусове траке јесте раслојење са слојем I. Ово ће бити нетривијално раслојење.*



3) Раслојење са дискретним слојем је наткривање.

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r] & E \arrow[d, "p"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Нека је $b \in B$. Тада постоје $U_b \in \mathcal{T}_B$ и хомеоморфизам h тако да комутира наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_b) \arrow[rr, "h", "\approx"'] \arrow[dr, "p"'] & & U_b \times D \arrow[dl, "p_1"] \\ & U_b & \end{tikzcd}$$

Како је D дискретан, имамо да је

$$U_b \times D = \bigsqcup_{d \in D} U_b \times \{d\},$$

где за свако $d \in D$ важи $U_b \times \{d\} \in \mathcal{T}_{U_b \times D}$. Тада је

$$p^{-1}(U_b) = \bigsqcup_{d \in D} h^{-1}(U_b \times \{d\})$$

и за свако $d \in D$ је $h^{-1}(U_b \times \{d\}) \in \mathcal{T}_{p^{-1}(U_b)} \subseteq \mathcal{T}_E$. Како комутира дијаграм

$$\begin{tikzcd} h^{-1}(U_b \times \{d\}) \arrow[rr, "h", "\approx"'] \arrow[dr, "p"', "\approx"] & & U_b \times \{d\} \arrow[dl, "p_1", "\approx"'] \\ & U_b & \end{tikzcd}$$

добијамо да је $h^{-1}(U_b \times \{d\}) \approx U_b$ при p, па p заиста јесте наткривање.

Обратно, ако је $p : E \to B$ наткривање такво да за свако $b_1, b_2 \in B$ важи

$$|p^{-1}(\{b_1\})| = |p^{-1}(\{b_2\})|,$$

(то важи, на пример, кад је B повезан) онда је p раслојење са дискретним слојем. Заиста, нека је $b \in B$. Тада постоји околина $U_b \in \mathcal{T}_B$ тачке b таква да је

$$p^{-1}(U_b) = \bigsqcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_b^{\alpha}$$

где су сви скупови V_b^{α} отворени у E и хомеоморфни U_b при хомеоморфизму $p|_{V_b^{\alpha}}$. Узмимо $D \overset{def}{=} \mathcal{A}$ са дискретном топологијом. Тада ако са $h : p^{-1}(U_b) \to U_b \times D$ означимо пресликавање

$$h(e) \overset{def}{=} (p(e), \alpha_0),\ e \in E,$$

где је $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ јединствено такво да $e \in V_b^{\alpha_0}$, добијамо да комутира дијаграм.

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_b) \arrow[rr, "h", "\approx"'] \arrow[dr, "p"'] & & U_b \times D \arrow[dl, "p_1"] \\ & U_b & \end{tikzcd}$$

Лако се проверава да је h хомеоморфизам, тј. p је раслојење.

Лема 5.44 *Нека је $n \in \mathbb{N}_0$, I^{n+1} коцка димензије $n+1$, A унија неких n-страна коцке I^{n+1} таква да $I^n \times \{0\} \subseteq A$ и $I^n \times \{1\} \nsubseteq A$. Тада је A јаки деформациони ретракт коцке I^{n+1}, тј. (I^{n+1}, A) је* DR*-пар.*

Теорема 5.45 *Свако раслојење је Серова фибрација.*

Доказ: Нека је $p : E \to B$ раслојење са слојем F и $n \in \mathbb{N}_0$. Како је $D^n \approx I^n$, довољно је показати да следећи дијаграм има решење $\widetilde{H}$.

$$\begin{tikzcd} I^n \times \{0\} \arrow[r] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\ I^n \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{H}"] & B \end{tikzcd}$$

Како је p раслојење, то постоји отворен покривач $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ простора B, као и хомеоморфизми $h_\alpha,\ \alpha\in\mathcal{A}$, такви да за свако $\alpha\in\mathcal{A}$ комутира наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(U_\alpha) \arrow[rr, "h_\alpha", "\approx"'] \arrow[dr, "p"'] & & U_b\times F \arrow[dl, "p_1"] \\
& U_\alpha &
\end{tikzcd}$$

Тада је $\{H^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ отворен покривач од $I^n\times I$, па како је $I^n\times I$ компактан метрички простор добро је дефинисан Лебегов број $L>0$ овог покривача. Нека је сада $m\in\mathbb{N}$ такав да је $\frac{\sqrt{n+1}}{m}<L$. Поделићемо коцку $I^n\times I$ на m^{n+1} једнаких коцки па ће свака од њих имати пречник мањи од L. Уредимо те коцке у низ m слојева по m^n коцки.Дакле, нека је

$$\begin{aligned}
I^n\times I = {}& I_1^{n+1}\cup I_2^{n+1}\cup\cdots\cup I_{m^n}^{n+1}\\
&\cup I_{m^n+1}^{n+1}\cup I_{m^n+2}^{n+1}\cup\cdots\cup I_{2m^n}^{n+1}\\
&\qquad\vdots\\
&\cup I_{(m-1)m^n+1}^{n+1}\cup I_{(m-1)m^n+2}^{n+1}\cup\cdots\cup I_{m^{n+1}}^{n+1},
\end{aligned}$$

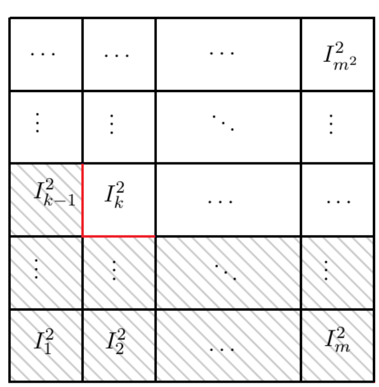
где је

$$I_{(i-1)\cdot m^n+j}^{n+1}=\cdots\times\left[\frac{i-1}{m},\frac{i}{m}\right],\ 1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant m^n.$$

Сада подижемо пресликавање H редом коцку по коцку. Нека је $1\leqslant k\leqslant m^{n+1}$ и претпоставимо да је $\widetilde{H}$ дефинисано на свим коцкама $I_1^{n+1},\ldots,I_{k-1}^{n+1}$. Желимо да проширимо ово пресликавање и на I_k^{n+1}. Нека је

$$A_k^n\overset{def}{=}\left(I^n\times\{0\}\cup I_1^{n+1}\cup I_2^{n+1}\cup\cdots\cup I_{k-1}^{n+1}\right)\cap I_k^{n+1}$$

део границе коцке I_k^{n+1} на којем је већ дефинисано пресликавање $\widetilde{H}$. На следећој слици видимо шта су ови скупови за случај $n=2$.



A_k^n је унија неких n-страна коцке I_k^{n+1}. Како A_k^n садржи базу од I_k^{n+1}, а не садржи горњу страну, то је на основу леме 5.44 (I_k^{n+1}, A_k^n) један DR-пар. Како је $\operatorname{diam} I_k^{n+1} = \frac{\sqrt{n+1}}{m} < L$, то постоји $\alpha_k \in \mathcal{A}$ такво да је $H(I_k^{n+1}) \subseteq U_{\alpha_k}$.

Посматрајмо наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd}
A_k^n \arrow[r] \arrow[d, hook] & p^{-1}(U_{\alpha_k}) \arrow[r, "h_{\alpha_k}", "\approx"'] \arrow[d, "p"] & U_{\alpha_k} \times F \arrow[dl, "p_1"] \\
I_k^{n+1} \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{H}_k"] \arrow[urr, dashed, "F_k"] & U_{\alpha_k} &
\end{tikzcd}$$

Како је пројекција $p_1 : U_{\alpha_k} \times F \to U_{\alpha_k}$ фибрација, и (I_k^{n+1}, A_k^n) DR-пар, то постоји подизање F_k, а како је h_{α_k} хомеоморфизам, добијамо да постоји $\widetilde{H}_k$.

Настављањем овог поступка добијамо тражено пресликавање $\widetilde{H} : I^n \times I \to E$. $\square$

Напомена 5.46 *Ако је $p : E \to B$ раслојење и B паракомпактан (и T_2) онда је p фибрација.*

Како је свако раслојење Серова фибрација, за раслојење $p : E \to B$ са слојем F имамо следећи дуг тачан низ.

$$\cdots \to \pi_n(F) \to \pi_n(E) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B) \to \pi_{n-1}(E) \to \cdots$$

Погледајмо шта нам даје овај дуг тачан низ за пример 5.43.

1) Нека је $p_1 : B \times F \to B$ тривијално раслојење са слојем F и нека је $i_1 : B \hookrightarrow B \times F$ инклузија. Тада из дугог тачног низа

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \pi_n(F) \arrow[r] & \pi_n(B \times F) \arrow[r, "(p_1)_*"] & \pi_n(B) \arrow[r, "0"] \arrow[l, bend left, "(i_1)_*"] & \pi_{n-1(F)} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

видимо да је $(p_1)_*$ „на“, па добијамо кратак тачан низ

$$0 \to \pi_n(F) \to \pi_n(B \times F) \xrightarrow{(p_1)_*} \pi_n(B) \to 0$$

који се цепа, тј. важи

$$\pi_n(B \times F) \cong \pi_n(B) \oplus \pi_n(F).$$

2) Уколико је $p : M \to S^1$ пројекција на централну кружницу Мебијусове траке (која је раслојење са слојем I), онда из дугог тачног низа добијамо да је p_* изоморфизам.

3) Нека је $p : E \to B$ раслојење са дискретним слојем D. Ако је $n \geqslant 2$ онда из дугог тачног низа за ово раслојење и чињенице да је тада $\pi_n(D) = \pi_{n-1}(D) = 0$ добијамо да је p_* изоморфизам, а за случај $n = 1$ можемо закључити да је p_* мономорфизам.

5.7 Хопфова раслојења

(1) Нека је $n \in \mathbb{N}$. Имамо дволисно наткривање, па и раслојење.

$$\begin{array}{ccc} S^0 & \longrightarrow & S^n \\ & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ & & \mathbb{R}\mathrm{P}^n \end{array}$$

Приметимо да је тада

$$C_p = D^{n+1} \cup_p \mathbb{R}\mathrm{P}^n \approx \mathbb{R}\mathrm{P}^{n+1}.$$

Специјално, за $n = 1$ добијамо раслојење

$$\begin{array}{ccc} S^0 & \longrightarrow & S^1 \\ & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ & & S^1 \end{array}$$

које називамо *првим Хопфовим раслојењем*. Приметимо да је у овом случају $C_h \approx \mathbb{R}\mathrm{P}^2$.

Уколико је $n \geqslant 2$ хомотопске групе пројективног простора $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ биће изоморфне одговарајућим хомотопским групама сфере у димензијама већим од 1, а знамо да је фундаментална група простора $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ изоморфна $\mathbb{Z}_2$, па ово можемо представити наредном табелом.

i	0	1	2	$\cdots$	$n-1$	n	$n+1$
$\pi_i(\mathbb{R}\mathrm{P}^n)$	0	$\mathbb{Z}_2$	0	$\cdots$	0	$\mathbb{Z}$	$\cdots$

(2) Нека је $n \in \mathbb{N}$. Комплексни пројективни простор се дефинише као

$$\mathbb{C}\mathrm{P}^n = \mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\} /_{z \sim \lambda z,\ \lambda \in \mathbb{C} \backslash \{0\}} \approx S^{2n+1} /_{z \sim \lambda z,\ \lambda \in S^1}.$$

Ако са $p : S^{2n+1} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ означимо природну пројекцију, онда је

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \longrightarrow & S^{2n+1} \\ & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ & & \mathbb{C}\mathrm{P}^n \end{array}$$

раслојење што ћемо и показати.

За $1 \leqslant i \leqslant n+1$ уведимо ознаку

$$U_i \stackrel{def}{=} \left\{ [z] \in \mathbb{C}\mathrm{P}^n \mid z_i \neq 0 \right\} \in \mathcal{T}_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n}.$$

Желимо да дефинишемо хомеоморфизам h_i тако да комутира наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(U_i) \arrow[rr, dashed, "h_i", "\approx"'] \arrow[dr, "p"'] & & U_i \times S^1 \arrow[dl, "p_1"] \\
& U_i &
\end{tikzcd}$$

Нека је

$$h_i(z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}) \overset{def}{=} \left([z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}], \frac{z_i}{|z_i|} \right).$$

Очигледно је да је h_i непрекидно и да горњи дијаграм комутира. Покажимо да је h_i хомеоморфизам, тј. нађимо му инверз и докажимо да је он непрекидан.

Нека је $\sigma_i : U_i \times S^1 \to p^{-1}(U_i)$ дато са

$$\sigma_i \left([\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n+1}], \lambda \right) \overset{def}{=} \lambda \cdot |\omega_i| \cdot \omega_i^{-1} (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n+1}).$$

Пресликавање σ_i је добро дефинисано. Заиста, нека је $\mu \in S^1$. Тада је

$$\begin{aligned}
\sigma_i \left([\mu\omega_1, \mu\omega_2, \ldots, \mu\omega_{n+1}], \lambda \right) &= \lambda \cdot |\mu| \cdot |\omega_i| \cdot \omega_i^{-1} \cdot \mu^{-1} (\mu\omega_1, \mu\omega_2, \ldots, \mu\omega_{n+1}) \\
&= \sigma_i \left([\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n+1}], \lambda \right).
\end{aligned}$$

Посматрајмо сада дијаграм.

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(U_i) \times S^1 \arrow[rr] \arrow[dr, "p \times \mathbb{1}_{S^1}"'] & & p^{-1}(U_i) \\
& U_i \times S^1 \arrow[ur, dashed, "\sigma_i"'] &
\end{tikzcd}$$

Пресликавање $p^{-1}(U_i) \times S^1 \to p^{-1}(S^1)$ дато је са

$$\left((\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n+1}), \lambda \right) \longmapsto \lambda \cdot |\omega_i| \cdot \omega_i^{-1} (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n+1}),$$

па је непрекидно, док је пресликавање $p \times \mathbb{1}_{S^1}$ количничко, па закључујемо да пресликавање σ_i мора бити непрекидно.

Још остаје да покажемо да су σ_i и h_i међусобно инверзна пресликавања.

$$\begin{aligned}
\sigma_i(h_i(z_1, z_2 \ldots, z_{n+1})) &= \frac{z_i}{|z_i|} \cdot |z_i| \cdot z_i^{-1} (z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}) \\
&= (z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}) \\
h_i \left(\sigma_i \left([\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n+1}], \lambda \right) \right) &= \left([\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n+1}], \frac{\lambda \cdot |\omega_i| \cdot \omega_i^{-1} \cdot \omega_i}{|\lambda \cdot |\omega_i| \cdot \omega_i^{-1} \cdot \omega_i|} \right) \\
&= \left([\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n+1}], \lambda \right)
\end{aligned}$$

Дакле, $h_i^{-1} = \sigma_i$, па је h_i заиста хомеоморфизам, тј. p јесте раслојење.

Приметимо да је

$$C_p = D^{2n+2} \cup_p \mathbb{C}\mathrm{P}^n \approx \mathbb{C}\mathrm{P}^{n+1}.$$

Специјално, за $n = 1$ добијамо раслојење

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r] & S^3 \arrow[d, "p"] \arrow[dr, dashed, "h"] & \\ & \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \arrow[r, "\approx"] & S^2 \end{tikzcd}$$

Хомеоморфизам између $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ и S^2 бирамо тако да $h : S^3 \to S^2$ чува базну тачку, тј. тако да важи $h(e_1) = e_1$. Често се узима хомеоморфизам задат следећим дијаграмом.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \arrow[rr, dashed, "\approx"] \arrow[dr, "{[z_1,z_2] \mapsto \frac{z_1}{z_2}}"'] & & S^2 \\ & \mathbb{C} \cup \{\infty\} \arrow[ur, "\approx", "s"'] & \end{tikzcd}$$

где је $s : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to S^2$ стереографска пројекција ($s(\infty) = e_1$).

Дакле, добили смо раслојење

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r] & S^3 \arrow[d, "h"] \\ & S^2 \end{tikzcd}$$

које називамо *другим Хопфовим раслојењем.* У овом случају је $C_h \approx \mathbb{C}\mathrm{P}^2$.

Ако је $i \geqslant 3$ онда из дугог тачног низа

$$\cdots \to \pi_i(S^1) \to \pi_i(S^3) \xrightarrow{h_*} \pi_i(S^2) \to \pi_{i-1}(S^1) \to \cdots$$

видимо да је

$$\pi_i(S^2) \cong \pi_i(S^3).$$

Специјално,

$$\pi_3(S^2) \cong \pi_3(S^3) \cong \mathbb{Z}.$$

Штавише, ако h одаберемо тако да чува базну тачку, добијамо изоморфизам

$$\pi_3(S^3, e_1) \overset{h_*}{\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow} \pi_3(S^2, e_1)$$

па је

$$\pi_3(S^2, e_1) \cong \mathbb{Z}\langle [h]_0 \rangle.$$

Уколико је $n \geqslant 2$, из дугог тачног низа добијамо да је $\pi_2(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) \cong \mathbb{Z}$, а за $i \geqslant 3$ је

$$\pi_i(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) \underset{p_*}{\twoheadleftarrow\!\!\!\prec} \pi_i(S^{2n+1})$$

што можемо представити табелом.

i	0	1	2	3	$\cdots$	$2n$	$2n+1$	$2n+2$
$\pi_i(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)$	0	0	$\mathbb{Z}$	0	$\cdots$	0	$\mathbb{Z}$	$\cdots$

Знамо да је

$$(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{2n} = (\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{2n+1} = \mathbb{C}\mathrm{P}^n,$$

па како је

$$\pi_i(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty) \cong \pi_i(\mathbb{C}\mathrm{P}^n),\ 2n > i,$$

то је

$$\pi_i(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Дакле,

$$\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty = K(\mathbb{Z}, 2).$$

Могуће је направити и раслојење

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \longrightarrow & S^\infty \\ & & \downarrow \\ & & \mathbb{C}\mathrm{P}^\infty \end{array}$$

па како је $S^\infty \simeq *$ и $S^1 = K(\mathbb{Z}, 1)$ и одавде би се могло добити да је $\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty = K(\mathbb{Z}, 2)$.

(3) Нека је $n \in \mathbb{N}$. Кватернионски пројективни простор се дефинише као

$$\mathbb{H}\mathrm{P}^n = \mathbb{H}^{n+1} \backslash \{0\} /_{z \sim \lambda z,\ \lambda \in \mathbb{H} \backslash \{0\}} \approx S^{4n+3} /_{z \sim \lambda z,\ \lambda \in S^3}.$$

Ако са $p : S^{4n+3} \to \mathbb{H}\mathrm{P}^n$ означимо природну пројекцију, онда је

$$\begin{array}{ccc} S^3 & \longrightarrow & S^{4n+3} \\ & & \big\downarrow p \\ & & \mathbb{H}\mathrm{P}^n \end{array}$$

раслојење, што се показује на исти начин као у случају комплексног пројективног простора.

Приметимо да је
$$C_p = D^{4n+4} \cup_p \mathbb{H}\mathrm{P}^n \approx \mathbb{H}\mathrm{P}^{n+1},$$
тј. $\mathbb{H}\mathrm{P}^n$ има ћелијску декомпозицију
$$\mathbb{H}\mathrm{P}^n = e^0 \cup e^4 \cup e^8 \cup \cdots \cup e^{4n}.$$

Специјално, за $n = 1$ имамо $\mathbb{H}\mathrm{P}^1 \approx S^4$ и добијамо раслојење
$$\begin{tikzcd} S^3 \arrow[r] & S^7 \arrow[d, "h"] \\ & S^4 \end{tikzcd}$$
које називамо *трећим Хопфовим раслојењем*. Приметимо да је $C_h \approx \mathbb{H}\mathrm{P}^2$.

Могуће је конструисати и раслојење
$$\begin{tikzcd} S^3 \arrow[r] & S^\infty \arrow[d] \\ & \mathbb{H}\mathrm{P}^n \end{tikzcd}$$
али неће важити да је $\mathbb{H}\mathrm{P}^\infty = K(\mathbb{Z}, 4)$, јер S^3 није $K(\mathbb{Z}, 3)$.

(4) Очекујемо да је за $n \in \mathbb{N}$ могуће конструисати раслојење
$$\begin{tikzcd} S^7 \arrow[r] & S^{8n+7} \arrow[d] \\ & \mathbb{O}\mathrm{P}^n \end{tikzcd}$$
али како множење октониона није асоцијативно, не може се дефинисати $\mathbb{O}\mathrm{P}^n$. Упркос томе, може се конструисати Хопфово раслојење
$$\begin{tikzcd} S^7 \arrow[r] & S^{15} \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "(z_1,z_2)\mapsto z_2^{-1}\cdot z_1"] & \\ & S^8 & \mathbb{O}\cup\{\infty\} \arrow[l, "s", "\approx"'] \end{tikzcd}$$
где је $s : \mathbb{O} \cup \{\infty\} \to S^8$ стереографска пројекција. Ово раслојење називамо *четвртим Хопфовим раслојењем*.

Користе се ознаке

$$\mathbb{O}\mathrm{P}^1 \stackrel{def}{=} S^8,$$
$$\mathbb{O}\mathrm{P}^2 \stackrel{def}{=} C_h = D^{16} \cup_h S^8.$$

Став 5.47 *Нека је $p : E \to B$ раслојење са слојем F и B и F многострукости. Тада је и E многострукост и важи* $\dim E = \dim F + \dim B$.

Доказ: Покажимо најпре да је E Хауздорфов простор. Нека су $e_1, e_2 \in E$ две различите тачке.
1^o Нека је $p(e_1) \neq p(e_2)$. Тада постоје отворене околине $U, V \in \mathcal{T}_B$ такве да је $p(e_1) \in U$, $p(e_2) \in V$ и $U \cap V = \varnothing$. Тада су $p^{-1}(U)$ и $p^{-1}(V)$ дисјунктне отворене околине тачака e_1 и e_2.
2^o Нека је $p(e_1) = p(e_2) = b$. Постоји отворен скуп $U \in \mathcal{T}_B$, $b \in U$, и хомеоморфизам $h : p^{-1}(U) \to U \times F$ такав да комутира следећи дијаграм.

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "h", "\approx"'] \arrow[dr, "p"'] & & U \times F \arrow[dl, "p_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Како је $U \times F$ Хауздорфов простор, то је и $p^{-1}(U)$ Хауздорфов, па постоје $W_1, W_2 \in \mathcal{T}_{p^{-1}(U)} \subseteq \mathcal{T}_E$ такви да је $e_1 \in W_1$, $e_2 \in W_2$ и $W_1 \cap W_2 = \varnothing$.

Дакле, E јесте Хауздорфов простор.

Нека је сада $e \in E$. Како је $p(e) \in B$, постоји отворена околина $U \in \mathcal{T}_B$ тачке $p(e)$ и хомеоморфизам $h : p^{-1}(U) \to U \times F$ такви да комутира дијаграм.

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "h", "\approx"'] \arrow[dr, "p"'] & & U \times F \arrow[dl, "p_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Како је U непразан и отворен у B то је U многострукост димензије $\dim B$, па је $U \times F$ многострукост димензије $n \stackrel{def}{=} \dim B + \dim F$. Пошто је h хомеоморфизам, из дијаграма закључујемо да је $p^{-1}(U)$ n-многострукост, па постоји $W \in \mathcal{T}_{p^{-1}(U)} \subseteq \mathcal{T}_E$ такав да $e \in W$ и $W \approx \mathbb{R}^n$.

Дакле, E је многострукост димензије n. $\square$

Теорема 5.48 *Нека су* $m, n, l \in \mathbb{N}_0$ *такви да постоји раслојење*

$$\begin{array}{ccc} S^l & \longrightarrow & S^m \\ & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ & & S^n \end{array}$$

Тада је $l = n - 1$ *и* $m = 2n - 1$.

Доказ: Ако је $n = 0$, онда би и m било 0 јер је S^0 неповезан, а p непрекидно и „на“. Тада би p морало бити хомеоморфизам, тј. раслојење које за слој има једну тачку, а то није сфера. Дакле, мора бити $n \geqslant 1$.

На основу става 5.47 имамо да је S^m многострукост димензије $n + l$, па мора бити $m = n + l$. Још остаје да покажемо да је $n = l + 1$.
1^o Нека је $l = 0$. Тада имамо раслојење

$$\begin{array}{ccc} S^0 & \longrightarrow & S^n \\ & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ & & S^n \end{array}$$

па је p двослојно наткривање одакле добијамо да је

$$[\pi_1(S^n) : p_*(\pi_1(S^n))] = 2,$$

а како је $\pi_1(S^n) = 0$ за $n \geqslant 2$ закључујемо да мора бити $n = 1$. Дакле, $n = l + 1$.
2^o Нека је $l \geqslant 1$. Имамо раслојење

$$\begin{array}{ccc} S^l & \longrightarrow & S^{n+l} \\ & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ & & S^n \end{array}$$

и посматрајмо дуг тачан низ овог раслојења.

$$\cdots \to \pi_{l+1}(S^n) \to \pi_l(S^l) \to \pi_l(S^{n+l}) \to \cdots$$

Како је $\pi_l(S^l) \cong \mathbb{Z}$ и $\pi_l(S^{n+l}) = 0$, закључујемо да је $\pi_{l+1}(S^n) \neq 0$, тј. мора да важи $l + 1 \geqslant n$. Са друге стране, посматрајмо следећи део истог дугог тачног низа.

$$\cdots \to \pi_n(S^{n+l}) \to \pi_n(S^n) \to \pi_{n-1}(S^l) \to \cdots$$

Како је $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ и $\pi_n(S^{n+l}) = 0$, то закључујемо да је $\pi_{n-1}(S^l) \neq 0$, односно мора бити $n - 1 \geqslant l$. Коначно, и у овом случају закључујемо да је $n = l + 1$. $\square$

Напомена 5.49 *Дакле, раслојење у ком су сва три простора сфере мора бити облика*

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r] & S^{2n-1} \arrow[d] \\ & S^n \end{tikzcd}$$

за неко $n \in \mathbb{N}$. *У свом чувеном раду [9] из 1960. године Адамс је доказао да овакво раслојење постоји само за* $n \in \{1, 2, 4, 8\}$ *(четири Хопфова раслојења).*

5.8 Штифелове многострукости

Нека је $1 \leqslant k \leqslant n$ и нека је

$$\begin{aligned} V_k(\mathbb{R}^n) &\overset{def}{=} \Big\{(v_1, v_2, \ldots, v_k) \in (\mathbb{R}^n)^k \mid \langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij},\ 1 \leqslant i, j \leqslant k\Big\} \\ &= \Big\{A \in M_{n\times k}(\mathbb{R}) \mid A^T A = E\Big\} \subseteq (\mathbb{R}^n)^k \end{aligned}$$

Приметимо да је

$$\begin{aligned} V_1(\mathbb{R}^n) &= S^{n-1}, \\ V_n(\mathbb{R}^n) &= O(n), \\ V_{n-1}(\mathbb{R}^n) &\approx SO(n). \end{aligned}$$

Теорема 5.50 *Ако је* $1 \leqslant m < k \leqslant n$ *уочимо пресликавање* $p : V_k(\mathbb{R}^n) \to V_m(\mathbb{R}^n)$ *дато са*

$$p(v_1, v_2, \ldots, v_k) \overset{def}{=} (v_1, v_2, \ldots, v_m)$$

(p је пројекција на првих m координата).

Тада је p раслојење са слојем $V_{k-m}(\mathbb{R}^{n-m})$.

$$\begin{tikzcd} V_{k-m}(\mathbb{R}^{n-m}) \arrow[r] & V_k(\mathbb{R}^n) \arrow[d, "p"] \\ & V_m(\mathbb{R}^n) \end{tikzcd}$$

Скица доказа: Како је p пројекција, јасно је да је непрекидно. Нека је $(u_1, u_2, \ldots, u_m) \in V_m(\mathbb{R}^n)$. Нека је $u_{m+1}, \ldots, u_n$ ортонормирана база за $\mathcal{L}(u_1, u_2, \ldots, u_m)^\perp$ и нека је

$$U \overset{def}{=} \left\{(v_1, v_2, \ldots, v_m) \in V_m(\mathbb{R}^m) \mid \det[v_1\ v_2\ \cdots\ v_m\ u_{m+1}\ \cdots\ u_n] \neq 0\right\}.$$

Тада је $(u_1, u_2, \ldots, u_m) \in U$ и $U \in \mathcal{T}_{V_m(\mathbb{R}^n)}$. Потребно је још конструисати хомеоморфизам h такав да комутира наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, dashed, "h", "\approx"'] \arrow[dr, "p"'] & & U \times V_{k-m}(\mathbb{R}^{n-m}) \arrow[dl, "p_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Уочимо композицију

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\ \pi\ } \mathcal{L}(u_1, u_2, \ldots, u_m)^\perp \xrightarrow{\ L\ } \mathbb{R}^{n-m}$$

где је π ортогонална пројекција, а L изоморфизам дат са

$$L(u_{m+i}) \stackrel{def}{=} e_i, \ 1 \leqslant i \leqslant n-m.$$

Дефинишимо

$$h(v_1, v_2, \ldots, v_k) \stackrel{def}{=} \Big((v_1, v_2, \ldots, v_m), GS\left(L(\pi(v_{m+1})), L(\pi(v_{m+2})), \ldots, L(\pi(v_k))\right)\Big)$$

(где је GS Грам-Шмитов поступак ортогонализације у $\mathbb{R}^{n-m}$). Може се показати да је h заиста хомеоморфизам. $\square$

Теорема 5.51 *Нека је* $1 \leqslant k \leqslant n$. $V_k(\mathbb{R}^n)$ *је* $(n-k-1)$*-повезана затворена многострукост димензије* $(n-k)+(n-k+1)+\cdots+(n-1) = \binom{n}{2} - \binom{n-k}{2}$. *Ова многострукост се зове Штифелова многострукост.*

Доказ: Приметимо да је $V_k(\mathbb{R}^n) \subseteq \underbrace{S^{n-1} \times \cdots \times S^{n-1}}_{k}$, па је $V_k(\mathbb{R}^n)$ ограничен. Са друге стране, имамо да је $V_k(\mathbb{R}^n) \in \mathcal{F}_{(\mathbb{R}^n)^k}$ јер је задат са коначно много једнакости облика $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$. Дакле, $V_k(\mathbb{R}^n)$ је затворен и ограничен па је компактан.

Сада индукцијом по $k \in \mathbb{N}$ показујемо да је $V_k(\mathbb{R}^n)$ $(n-k-1)$-повезана многострукост димензије $\binom{n}{2} - \binom{n-k}{2}$.

За $k=1$ имамо да је $V_1(\mathbb{R}^n) = S^{n-1}$, па је $V_1(\mathbb{R}^n)$ $(n-2)$-повезана многострукост димензије $n-1$. Нека је сада $k \geqslant 2$ и претпоставимо да тврђење важи за све $V_j(\mathbb{R}^m)$, где је $1 \leqslant j \leqslant k-1$ и $m \geqslant j$, и покажимо да важи и за k. Имамо раслојење

$$\begin{tikzcd} V_{k-1}(\mathbb{R}^{n-1}) \arrow[r] & V_k(\mathbb{R}^n) \arrow[d, "p"] \\ & S^{n-1} \end{tikzcd}$$

Знамо да је S^{n-1} многострукост димензије $n-1$, а по индукцијској хипотези имамо да је $V_{k-1}(\mathbb{R}^{n-1})$ многострукост димензије $(n-k)+\cdots+(n-2)$, па на основу става 5.47 закључујемо да је $V_k(\mathbb{R}^n)$ многострукост димензије $(n-k)+\cdots+(n-2)+(n-1)$.

Остаје још да покажемо да је многострукост $V_k(\mathbb{R}^n)$ $(n-k-1)$-повезана. Нека је $0 \leqslant i \leqslant n-k-1$. Посматрајмо дуг тачан низ

$$\cdots \to \pi_i(V_{k-1}(\mathbb{R}^{n-1})) \to \pi_i(V_k(\mathbb{R}^n)) \to \pi_i(S^{n-1}) \to \cdots$$

Како је $\pi_i(S^{n-1}) = 0$ и $\pi_i(V_{k-1}(\mathbb{R}^{n-1})) = 0$ по индукцијској хипотези, закључујемо да је и $\pi_i(V_k(\mathbb{R}^n)) = 0$, тј. многострукост $V_k(\mathbb{R}^n)$ је $(n-k-1)$-повезана. $\square$

Из претходне теореме добијамо да је $\dim O(n) = \dim SO(n) = \binom{n}{2}$. Многострукост $SO(n)$ је повезана, а $O(n)$ није већ има тачно две компоненте повезаности $O(n) = SO(n) \sqcup (O(n)\backslash SO(n))$. Наиме, детерминанта $\det : O(n) \to \{-1,1\}$ јесте непрекидна функција из $O(n)$ у двотачку, $\det^{-1}(\{1\}) = SO(n)$, $\det^{-1}(\{-1\}) = O(n)\backslash SO(n)$. Затим, $SO(n)$ је (путно) повезана, а $O(n)\backslash SO(n) \approx SO(n)$, при чему се један хомеоморфизам може добити као множење било којом (фиксираном) матрицом из $O(n)\backslash SO(n)$.

Погледајмо како изгледа раслојење из теореме 5.50 у случају $k=n$.

$$\begin{tikzcd} O(n-m) \arrow[r] & O(n) \arrow[d, "p"] \\ & V_m(\mathbb{R}^n) \end{tikzcd}$$

Желимо да видимо како изгледа слој овог раслојења над тачком $(e_1, e_2, \ldots, e_m) \in V_m(\mathbb{R}^n)$. Произвољна матрица из слоја $p^{-1}\Big(\big\{(e_1, e_2, \ldots, e_m)\big\}\Big)$ је облика

$$A' = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & A & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & & & \end{array}\right]$$

где је $A \in O(n-m)$. Приметимо да постоји природно утапање $i : O(n-m) \hookrightarrow O(n)$ дато са

$$i(A) \stackrel{def}{=} A'.$$

Пресликавање i је мономорфизам група, па $O(n-m)$ можемо видети као подгрупу групе $O(n)$.

Нека су $B, C \in O(n)$. Тада

$$p(B) = p(C) \iff B^T C \in O(n-m) \iff B^{-1} C \in O(n-m).$$

Дакле, видимо да је простор $O(n)/p$ једнак простору левих косета подгрупе $O(n-m)$, тј.

$$O(n)/p = O(n)/O(n-m),$$

а како је p количничко, то је $O(n)/p \approx V_m(\mathbb{R}^n)$, тј. добијамо

$$V_m(\mathbb{R}^n) \approx O(n)/O(n-m).$$

Специјално, ако је додатно и $m = 1$, имамо раслојење

$$\begin{tikzcd} O(n-1) \arrow[r] & O(n) \arrow[d, "p"] \\ & S^{n-1} \end{tikzcd}$$

па је

$$S^{n-1} \approx O(n)/O(n-1).$$

Уколико посматрамо раслојење из теореме 5.50 за $k = n-1$

$$\begin{tikzcd} SO(n-m) \arrow[r] & SO(n) \arrow[d, "p"] \\ & V_m(\mathbb{R}^n) \end{tikzcd}$$

на сличан начин добијамо

$$V_m(\mathbb{R}^n) \approx SO(n)/SO(n-m).$$

Специјално, ако је додатно $m = 1$ имамо раслојење

$$\begin{tikzcd} SO(n-1) \arrow[r] & SO(n) \arrow[d, "p"] \\ & S^{n-1} \end{tikzcd}$$

па је
$$S^{n-1} \approx SO(n)/SO(n-1).$$

Одредимо сада неке хомотопске групе простора $O(n)$ и $SO(n)$. Како $O(n)$ има две, а $SO(n)$ једну компоненту путне повезаности, то је
$$\pi_0(O(n)) \cong \mathbb{Z}_2,\ \pi_0(SO(n)) = 0.$$

Даље, знамо да је $\pi_i(O(n)) \cong \pi_i(SO(n))$ за $i \geqslant 1$, па ћемо надаље рачунати хомотопске групе простора $SO(n)$.

Ако је $n = 2$, имамо $SO(2) \approx V_1(\mathbb{R}^2) = S^1$, па је
$$\pi_i(SO(2)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Ако је $n = 3$, онда је $SO(3) \approx \mathbb{R}\mathrm{P}^3$. Заиста, групу $SO(3)$ можемо видети као ротације у $\mathbb{R}^3$ око правих које пролазе кроз координатни почетак. Нека је $f : D^3 \to SO(3)$ дато са $f(0) \overset{def}{=} E$, тј. $f(0) \overset{def}{=} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^3}$, а ако је $x \neq 0$, онда ће $f(x)$ бити ротација око праве Ox за угао $\pi\|x\|$ у смеру одређеном правилом десне руке (ако палац десне руке показује смер вектора $\overrightarrow{Ox}$, онда прсти показују смер ротације). Пресликавање f је непрекидно и „на“, а како слика компакт у T_2-простор оно је и затворено, па је количничко, одакле добијамо да је
$$SO(3) \approx D^3/f = D^3/_{x\sim -x,\ x\in S^2} \approx \mathbb{R}\mathrm{P}^3.$$

Дакле,
$$\pi_i(SO(3)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & i = 1 \\ 0, & i = 2 \\ \mathbb{Z}, & i = 3 \\ \pi_i(S^3), & i \geqslant 4 \end{cases}$$

Нека је $n \geqslant 4$ и посматрајмо раслојење од малочас:
$$\begin{tikzcd} SO(n-1) \arrow[r] & SO(n) \arrow[d, "p"] \\ & S^{n-1} \end{tikzcd}$$

Индукцијом по $n \geqslant 3$ из дугог тачног низа овог раслојења добија се да је
$$\pi_1(SO(n)) \cong \mathbb{Z}_2,$$
$$\pi_2(SO(n)) = 0.$$

Напомена 5.52 *Чињеница да је* $\pi_2(SO(n)) = 0$ *јесте последица општијег резултата: ако је* X *компактан, путно повезан* H*-простор који има структуру* CW*-комплекса или структуру многострукости, онда је* $\pi_2(X) = 0$.

Дакле, ако је $n \geqslant 3$ имамо

i	0	1	2	3	$\cdots$
$\pi_i(O(n))$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\cdots$	$\cdots$

Посматрајмо сада следеће раслојење.

$$\begin{array}{ccc} O(n) & \longrightarrow & O(n+1) \\ & & \Big\downarrow p \\ & & S^n \end{array}$$

Из дугог тачног низа ово раслојења

$$\cdots \to \pi_{i+1}(S^n) \to \pi_i(O(n)) \to \pi_i(O(n+1)) \to \pi_i(S^n) \to \cdots$$

добијамо да ако је $n > i+1$ онда је

$$\pi_i(O(n+1)) \cong \pi_i(O(n)),$$

тј. за фиксирано i хомотопске групе простора $O(n)$ се стабилизују почев од неког $n \in \mathbb{N}$, па има смисла дефинисати

$$\pi_i(O) \overset{def}{=} \pi_i(O(n)),\ n > i+1.$$

Простор O се може и експлицитно дефинисати. Како имамо утапања

$$O(1) \hookrightarrow O(2) \hookrightarrow O(3) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow O(n) \hookrightarrow O(n+1) \hookrightarrow \cdots$$

дефинишемо

$$O \overset{def}{=} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} O(n).$$

Напомена 5.53 *На Штифеловим многострукостима* $V_k(\mathbb{R}^n)$*, па и на* $O(n)$*, постоје канонске* CW*-декомпозиције, које дају и* CW*-декомпозицију простора* O*. У њој,* n*-скелет простора* O *неће бити* $O(n)$ *већ је* $O^n = O(n+1)^n$.

Познате су све хомотопске групе простора O. Наиме, првих осам група су дате табелом

i	0	1	2	3	4	5	6	7
$\pi_i(O)$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$

а затим се ових осам група периодично понавља и то се зове *Ботова периодичност.* Дакле, за $i \in \mathbb{N}_0$ важи

$$\pi_{i+8}(O) \cong \pi_i(O).$$

Напомена 5.54 *Као и реалне, слично се могу дефинисати и комплексне Штифелове многострукости $V_k(\mathbb{C}^n)$. Ове многострукости имају аналогне особине као и реалне. Наиме, ако је $1 \leqslant m < k \leqslant n$ онда постоји раслојење*

$$\begin{tikzcd} V_{k-m}(\mathbb{C}^{n-m}) \arrow[r] & V_k(\mathbb{C}^n) \arrow[d, "p"] \\ & V_m(\mathbb{C}^n) \end{tikzcd}$$

Такође, важи и да је $V_n(\mathbb{C}^n) = U(n)$ и на сличан начин као O, дефинише се и простор U, за који постоји Ботова периодичност, овај пут са периодом два.

i	0	1
$\pi_i(U)$	0	$\mathbb{Z}$

Ако је $i \in \mathbb{N}_0$, онда

$$\pi_{i+2}(U) \cong \pi_i(U).$$

5.9 Задаци

1. Нека је $p : E \to B$ (Серова) фибрација, $e_0 \in E$, $b_0 = p(e_0) \in B$, E_0 компонента путне повезаности (простора E) која садржи тачку e_0 и B_0 компонента путне повезаности (простора B) која садржи тачку b_0. Доказати да је $p(E_0) = B_0$ и да је рестрикција $p|_{E_0} : E_0 \to B_0$ пресликавања p (с кодоменом суженим на B_0) такође (Серова) фибрација.

2. Нека је (X, A) тополошки пар.

   (a) Претпоставимо да је A јаки деформациони ретракт од X и нека је $H : X \times I \to X$ пресликавање које остварује хомотопију релативно A између $i \circ r$ и $\mathbb{1}_X$ ($i : A \hookrightarrow X$ јесте инклузија, а $r : X \to A$ ретракција), тј. $H : i \circ r \simeq \mathbb{1}_X$ $(rel\ A)$. Претпоставимо још и да имамо непрекидно пресликавање $\alpha : X \to I$ такво да је $\alpha^{-1}(\{0\}) = A$ и дефинишимо $\varphi : X \times I \to I$ на следећи начин:

   $$\varphi(x,t) := \begin{cases} \min\{1, \frac{t}{\alpha(x)}\}, & x \notin A \\ 1, & x \in A \end{cases}, \quad (x,t) \in X \times I.$$

Ако је $D : X \times I \to X$ пресликавање дефинисано са $D(x,t) := H(x, \varphi(x,t))$, $(x,t) \in X \times I$, доказати да је D непрекидно.

(б) Ако је (X, A) DR-пар и ако пресликавање $p : E \to B$ има својство подизања хомотопије (HLP) у односу на X, доказати да онда p има својство проширења подизања (LEP) у односу на пар (X, A).

3. Доказати да Серова фибрација има својство подизања хомотопије (HLP) у односу на све ћелијске комплексе.

4. Нека је $p : E \to B$ фибрација, B путно повезан, $b_1, b_2 \in B$ и нека су F_{b_1} и F_{b_2} одговарајући слојеви. Доказати да је дејство (до на хомотопију) групе $\pi_1(B, b_1)$ на F_{b_1} тривијално ако и само ако је дејство (до на хомотопију) групе $\pi_1(B, b_2)$ на F_{b_2} тривијално.

5. Доказати да је повлачење оријентабилне фибрације такође оријентабилна фибрација (оба базна простора су путно повезана).

6. Нека је $p : E \to B$ Серова фибрација и $n \in \mathbb{N}_0$.

(а) Нека је $f : X \to B$ непрекидно пресликавање, $f^*p : f^*(E) \to X$ повлачење Серове фибрације p помоћу f и $q : f^*(E) \to E$ рестрикција друге пројекције на $f^*(E)$.

$$\begin{tikzcd} f^*(E) \arrow[r, "q"] \arrow[d, "f^*p"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Ако је f n-еквиваленција, доказати да је онда и q n-еквиваленција.

(б) Ако је $A \subseteq B$ такав да је пар (B, A) n-повезан, доказати да је онда и пар $(E, p^{-1}(A))$ такође n-повезан.

7. *Шварцов род* фибрације $p : E \to B$, у ознаци $\mathrm{SG}(p)$, дефинишемо као најмањи број $k \in \mathbb{N}$ такав да постоји отворен покривач $\{U_1, U_2, \ldots, U_k\}$ простора B са својством да p има секцију над сваким елементом покривача, тј. да за све $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ постоји подизање $s_i : U_i \to E$ инклузије $U_i \hookrightarrow B$ у односу на p (в. први дијаграм на наредној слици).

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ U_i \arrow[ur, dashed, "s_i"] \arrow[r, hook] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & T \arrow[dl, "q"] \\ & B & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} f^*(E) \arrow[r] \arrow[d, "f^*p"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

(а) Ако је $p : E \to B$ фибрација и B контрактибилан, доказати да је $\mathrm{SG}(p) = 1$.

(б) Ако су $p : E \to B$ и $q : T \to B$ фибрације такве да постоји (непрекидно) $\varphi : E \to T$ са својством $q \circ \varphi = p$ (в. други дијаграм на претходној слици), доказати да је $\mathrm{SG}(q) \leqslant \mathrm{SG}(p)$.

(в) Ако је $p : E \to B$ фибрација, $f : X \to B$ непрекидно пресликавање и $f^*p : f^*(E) \to X$ повлачење фибрације p помоћу f (в. трећи дијаграм на претходној слици), доказати да је $\mathrm{SG}(f^*p) \leqslant \mathrm{SG}(p)$.

Нека је сад X путно повезан простор.

(г) Наћи фибрацију p чији је Шварцов род једнак Лустерник–Шнирелмановој категорији простора X ($\mathrm{SG}(p) = \mathrm{cat}(X)$).

Нека је $\pi : X^I \to X \times X$ пресликавање дефинисано са $\pi(\omega) = (\omega(0), \omega(1))$, $\omega \in X^I$.

(д) Доказати да је π фибрација и одредити њен слој.

Тополошку комплексност простора X, у ознаци $\mathrm{TC}(X)$, дефинишемо као Шварцов род фибрације π:

$$\mathrm{TC}(X) := \mathrm{SG}(\pi).$$

(ђ) Доказати да је $\mathrm{TC}(X) = 1$ ако и само ако је X контрактибилан.

(е) Доказати да је $\mathrm{cat}(X) \leqslant \mathrm{TC}(X) \leqslant \mathrm{cat}(X \times X)$.

8. Ако је F хомотопски слој инклузије $i : \mathbb{R}\mathrm{P}^n \hookrightarrow \mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$, доказати да је $F \simeq S^n$ ($n \in \mathbb{N}$).

9. Нека је $0 \to A \longrightarrow B \longrightarrow C \to 0$ кратак тачан низ Абелових група и $n \in \mathbb{N}$. Доказати да постоји фибрација $p : K(B,n) \to K(C,n)$ са слојем $K(A,n)$.

$$\begin{tikzcd} K(A,n) \arrow[r] & K(B,n) \arrow[d, "p"] \\ & K(C,n) \end{tikzcd}$$

10. • Одредити следеће хомотопске групе (K је Клајнова боца):

$$\pi_4(K), \qquad \pi_{17}(\mathbb{R}\mathrm{P}^{18}), \qquad \pi_{11}(S(S^{10} \times S^{10})), \qquad \pi_{17}(\Omega S^{17}).$$

• Одредити кардиналност скупа хомотопских класа $[D^3, \Omega(\mathbb{R}\mathrm{P}^3)]$.

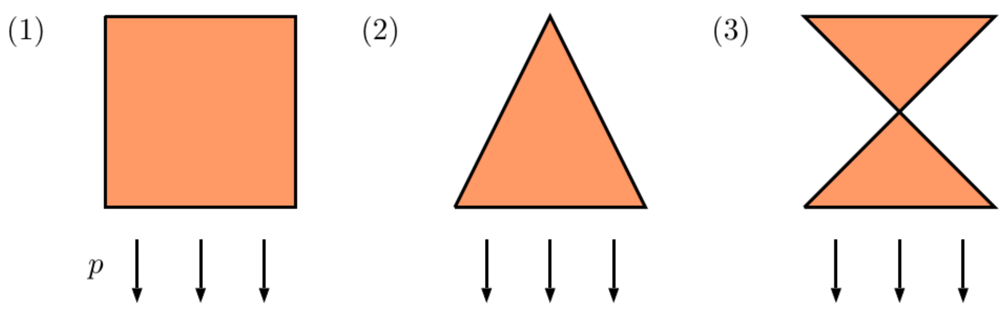
• Наћи потребан и довољан услов за k и n да би букет $S^k \vee S^n \vee S^k \vee S^n$ био прост ($k, n \in \mathbb{N}$).

11. Ако је X произвољан CW-комплекс, доказати да је пресликавање $\Phi : [X, L_m^\infty]_0 \to [X, L_m^\infty]$ бијекција. (L_m^∞ је бесконачно димензиони лећасти простор, $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Φ је дато са $\Phi([f]_0) = [f]$, $[f]_0 \in [X, L_m^\infty]_0$.)

12. Нека је Y путно повезан простор с базном тачком y_0. Ако је $p : E \to X$ главна фибрација добијена повлачењем канонске фибрације над Y помоћу пресликавања $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$, доказати да је простор $E = f^*(PY)$ управо хомотопски слој пресликавања f.

13. Доказати да је повлачење раслојења такође раслојење са истим слојем као и полазно.

14. На слици (1) представљена је прва пројекција $p : I^2 \to I$, која је једно раслојење. Нека су пресликавања на сликама (2) и (3) рестрикције пројекције p на дате потпросторе.



   (а) Показати да је пресликавање са слике (2) фибрација, али није раслојење.

   (б) Показати да пресликавање са слике (3) није фибрација.

15. Нека су $n \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ и нека је $L_m^{2n+1} = S^{2n+1}/\mathbb{Z}_m$ лећасти простор (елемент $k \in \mathbb{Z}_m$ дејствује на S^{2n+1} као множење са $e^{i\frac{2k\pi}{m}}$).

   (а) Доказати да постоји раслојење $q : L_m^{2n+1} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ са слојем S^1.

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r] & L_m^{2n+1} \arrow[d, "q"] \\ & \mathbb{C}\mathrm{P}^n \end{tikzcd}$$

   (б) Описати повезујући хомоморфизам $\pi_2(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) \to \pi_1(S^1)$ из дугог тачног низа придруженог раслојењу из дела (а).

16. Одредити $\pi_3(S^2 \vee S^2)$.

17. Ако је $n \geqslant 2$ доказати да не постоји ретракт $A \subseteq \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ такав да је $A \simeq \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}$.

18. Да ли је $\mathbb{C}\mathrm{P}^2 \simeq S^2 \vee S^4$?

19. Ако је $k \in \mathbb{Z}$ и $f : S^2 \to S^2$ пресликавање степена k, одредити хомоморфизам $f_* : \pi_3(S^2) \to \pi_3(S^2)$.

20. Нека је $i : S^2 \hookrightarrow \mathbb{C}\mathrm{P}^2$ инклузија, тј. природно утапање ($S^2 \approx \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ јесте 2-скелет од $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ при уобичајеној ћелијској декомпозицији овог простора).

   (а) Доказати да је пресликавање $f : S^2 \to S^2$ хомотопски тривијално ако и само ако се може проширити на $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}\mathrm{P}^2 \arrow[dr, dashed] & \\ S^2 \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, "f"] & S^2 \end{tikzcd}$$

   (б) Користећи чињеницу $\pi_1^S = \mathbb{Z}_2$ (или некако другачије) доказати да је $[\mathbb{C}\mathrm{P}^2, S^2] = 0$.

21. Нека је $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}_0$, M многострукост и $p : S^{m+n-1} \to M$ раслојење са слојем S^{n-1}.

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r] & S^{m+n-1} \arrow[d, "p"] \\ & M \end{tikzcd}$$

   Доказати да је тада конус пресликавања p, тј. $C_p = D^{m+n} \cup_p M$, затворена повезана $(m+n)$-димензиона многострукост.

22. За $n \geqslant 3$ одредити групу $\pi_2(V_{n-2}(\mathbb{R}^n))$.

23. Користећи чињеницу $\pi_1^S = \mathbb{Z}_2$ (или некако другачије) одредити групе $\pi_3(SO(4))$ и $\pi_3(V_2(\mathbb{R}^4))$.

24. (Подразумевамо да су сви простори који се појављују у овом задатку Хауздорфови.)

   Нека група G дејствује на простор Y. Уочимо следећи услов:

$$(\forall y \in Y)\,(\exists U \in \mathcal{T}_Y) \quad y \in U \;\wedge\; \big[(\forall g_1, g_2 \in G)\;\; g_1 \neq g_2 \implies g_1 U \cap g_2 U = \emptyset\big]. \tag{$*$}$$

Доказати:

(а) $(*) \Rightarrow$ дејство је слободно;

(б) ако је G коначна и дејство слободно, онда важи $(*)$.

Нека G дејствује и на простор X и нека је $f : X \to Y$ непрекидно G-еквиваријантно пресликавање.

(в) Доказати да f индукује непрекидно пресликавање $\widetilde{f} : X/G \to Y/G$ такво да комутира дијаграм на слици (ρ и π су природне сурјекције).

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "\rho"'] & Y \arrow[d, two heads, "\pi"] \\ X/G \arrow[r, dashed, "\widetilde{f}"] & Y/G \end{tikzcd}$$

(г) Ако дејство на Y задовољава услов $(*)$, доказати да онда и дејство на X задовољава услов $(*)$.

Нека је сада $p : E \to B$ раслојење и нека група G дејствује и на E и на B тако да је p G-еквиваријантно и да дејство G на B задовољава услов $(*)$.

(д) Доказати да је индуковано пресликавање $\widetilde{p} : E/G \to B/G$ такође раслојење са истим слојем као p.

(ђ) Ако је $\pi : B \to B/G$ природна сурјекција, доказати да се повлачење раслојења $\widetilde{p}$ помоћу π (означимо га са $\pi^*\widetilde{p} : \pi^*(E/G) \to B$) поклапа са p (у смислу да постоји хомеоморфизам φ тако да комутира дијаграм на слици).

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\varphi", "\approx"'] \arrow[dr, "p"'] & & \pi^*(E/G) \arrow[dl, "\pi^*\widetilde{p}"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

25. Група $\mathbb{Z}_2$ дејствује на природан начин на Штифелову многострукост $V_k(\mathbb{R}^n)$:

$$(v_1, v_2, \dots, v_k) \mapsto (-v_1, -v_2, \dots, -v_k).$$

(На пример, $V_1(\mathbb{R}^n)/\mathbb{Z}_2 = S^{n-1}/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$.) При том дејству је раслојење $p : V_m(\mathbb{R}^n) \to V_k(\mathbb{R}^n)$, $(v_1, v_2, \dots, v_m) \mapsto (v_1, v_2, \dots, v_k)$, $\mathbb{Z}_2$-еквиваријантно пресликавање $(k \leqslant m)$.

Доказати да за $k, n \in \mathbb{N}$ постоји $\mathbb{Z}_2$-еквиваријантно пресликавање $S^n \to V_{n+1}(\mathbb{R}^{n+k+1})$ ако и само ако постоји подизање инклузије $\mathbb{R}\mathrm{P}^n \hookrightarrow \mathbb{R}\mathrm{P}^{n+k}$ у односу на пресликавање $\widetilde{p}$, где је $\widetilde{p} : V_{n+1}(\mathbb{R}^{n+k+1})/\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{n+k}$ индуковано пресликавањем $p : V_{n+1}(\mathbb{R}^{n+k+1}) \to S^{n+k}$.

$$\begin{tikzcd} & V_{n+1}(\mathbb{R}^{n+k+1})/\mathbb{Z}_2 \arrow[d, "\widetilde{p}"] \\ \mathbb{R}\mathrm{P}^n \arrow[ur, dashed] \arrow[r, hook] & \mathbb{R}\mathrm{P}^{n+k} \end{tikzcd}$$

26. Нека је $1 \leqslant k \leqslant n$ и $V_k(\mathbb{C}^n) = \big\{(v_1, v_2, \ldots, v_k) \in (\mathbb{C}^n)^k \mid (\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, k\})\, \langle v_i, v_j\rangle = \delta_i^j\big\}$, где је $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ стандардни скаларни (хермитски) производ на $\mathbb{C}^n$.

   (а) Доказати да је $V_k(\mathbb{C}^n)$ $(2n-2k)$-повезана затворена многострукост.

   (б) Колика је димензија Штифелове многострукости $V_k(\mathbb{C}^n)$?

   (в) Одредити групу $\pi_{2n-2k+1}(V_k(\mathbb{C}^n))$.

   (г) Наћи фундаменталну групу унитарне (тополошке) групе $U(n) = \big\{A \in M_n(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}^n)^n \mid A^T\overline{A} = E\big\}$ ($E \in M_n(\mathbb{C})$ је јединична матрица).

Индекс

Литература

[1] Edwin H. Spanier, *Algebraic Topology*, McGraw-Hill Book Company, 1981.

[2] Tammo tom Dieck, *Algebraic Topology*, European Mathematical Society, Germany, 2008.

[3] Stephen Smale, *The generalized Poincaré conjecture in higher dimensions*, Bull. Amer. Math. Soc. 66 (1960), no. 5, 373–375.

[4] Michael Hartley Freedman, *The topology of four-dimensional manifolds*, J. Differential Geom. 17 (1982), no. 3, 357–453.

[5] Grigori Perelman, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, https://arxiv.org/abs/math/0211159

[6] Grigori Perelman, *Ricci flow with surgery on three-manifolds*, https://arxiv.org/abs/math/0303109

[7] Grigori Perelman, *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds*, https://arxiv.org/abs/math/0307245

[8] James Stasheff, *A classification theorem for fibre spaces*, Topology 2 (1963), 239–246.

[9] John Frank Adams, *On the non-existence of elements of Hopf-invariant one*, Ann. of Math. 72 (1960), 20–104.