ОДАБРАНА ПОГЛАВЉА ТОПОЛОГИЈЕ И ГЕОМЕТРИЈЕ

(вежбе)

1 Увод

1. Ако је $f : X \to Y$ непрекидно, доказати да је $j : X \hookrightarrow M_f$ кофибрација (M_f је ознака за цилиндар пресликавања f).

Решење: Цилиндар пресликавања је дефинисан као

$$M_f \stackrel{def}{=} X \times I \sqcup Y/_{(x,0)\sim f(x),\ x\in X}$$

са количничком топологијом, $j : X \to M_f$ је дато са $j(x) \stackrel{def}{=} [x, 1]$, а $\pi : X \times I \sqcup Y \twoheadrightarrow M_f$ је природна пројекција. Показаћемо да је j утапање (тј. хомеоморфизам на слику), као и да пар $(M_f, j(X))$ има својство проширења хомотопије, одакле директно следи да је j кофибрација.

- j је утапање.
  - j је „1-1", што се лако види из дефиниције;
  - j је затворено. Заиста, нека је $A \in \mathcal{F}_X$. Тада је

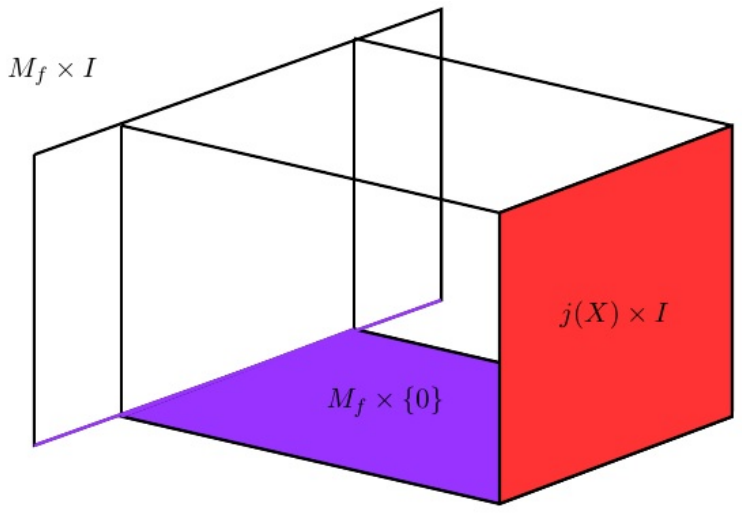
    $$\pi^{-1}(j(A)) = A \times \{1\} \in \mathcal{F}_{X\times I} \subseteq \mathcal{F}_{X\times I\sqcup Y},$$

    па је $j(A) \in \mathcal{F}_{M_f}$.

  Дакле, j је непрекидно, „1-1" и затворено, па је утапање.

- $(M_f, j(X))$ има својство проширења хомотопије.

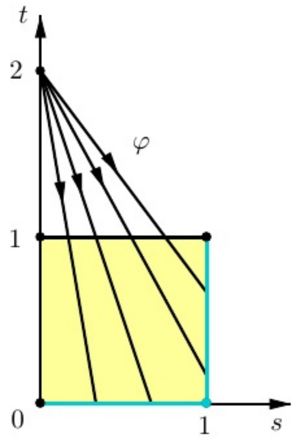
  Како је $j(X) \in \mathcal{F}_{M_f}$, то је довољно доказати да је $M_f \times \{0\} \cup j(X) \times I$ ретракт од $M_f \times I$. Конструишимо ту ретракцију.



  Најпре дефинишимо помоћно пресликавање

$$\varphi : I \times I \to I \times \{0\} \cup \{1\} \times I,$$

$$\varphi(s,t) \stackrel{def}{=} \begin{cases} \left(\frac{2s}{2-t}, 0\right), & t \leqslant -2s+2 \\ \left(1, \frac{t-2}{s}+2\right), & t \leqslant -2s+2 \end{cases}$$



Сада можемо дефинисати ретракцију

$$r : M_f \times I \to M_f \times \{0\} \cup j(X) \times I,$$

$$r\left([x,s],t\right) \overset{def}{=} \begin{cases} \left(\left[x, \frac{2s}{2-t}\right], 0\right), & t \leqslant -2s+2 \\ \left([x,1], \frac{t-2}{s}+2\right), & t \leqslant -2s+2 \end{cases}$$

$$r\left([y],t\right) \overset{def}{=} \left([y],0\right).$$

Знамо из ранијих курсева, да уколико је $g : X \to Z$ количничко, $f : X \to Y$ непрекидно и важи

$$(\forall x_1, x_2 \in X)\ g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

онда постоји јединствено непрекидно пресликавање $h : Z \to Y$ такво да је $f = h \circ g$, тј. такво да наредни дијаграм комутира.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "g"'] \arrow[dr, "f"] & \\ Z \arrow[rr, dashed, "h"] & & Y \end{tikzcd}$$

Ово тврђење ћемо искористити да покажемо да је пресликавање r непрекидно. Посматрајмо дијаграм

$$\begin{tikzcd} (X \times I \sqcup Y) \times I \arrow[r, equal] \arrow[dd, two heads, "\pi \times \mathbb{1}_I"'] & (X \times I \times I) \sqcup (Y \times I) \arrow[r, "\mathbb{1}_X \times \varphi \sqcup \mathbb{1}_Y \times 0"] & X \times (I \times \{0\} \cup \{1\} \times I) \sqcup Y \times \{0\} \arrow[d, equal] \\ & & (X \times I \sqcup Y) \times \{0\} \cup X \times \{1\} \times I \arrow[d, two heads, "\pi \times \mathbb{1}_I"] \\ M_f \times I \arrow[rr, dashed, "r"] & & M_f \times \{0\} \cup j(X) \times I \end{tikzcd}$$

Може се проверити да овај дијаграм комутира. Како је $\pi \times \mathbb{1}_I$ количничко и композиција $(\pi \times \mathbb{1}_I) \circ (\mathbb{1}_X \times \varphi \sqcup \mathbb{1}_Y \times 0)$ непрекидна, може се применити горње тврђење и закључити да је $r : M_f \times I \to M_f \times \{0\} \cup j(X) \times I$ непрекидно (рачун прескачемо).

Дакле, r је тражена ретракција, па је j кофибрација. $\square$

Ако је $j : X \hookrightarrow M_f$ кофибрација из претходног задатка и $h_f : M_f \to Y$ хомотопска еквиваленција дата са
$$h_f([x,t]) \overset{def}{=} f(x), \quad h_f([y]) \overset{def}{=} y,$$
онда имамо следећи комутативни дијаграм.

$$\begin{tikzcd}
 & M_f \arrow[d, "h_f"] \\
X \arrow[ur, hook, "j"] \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

Дакле, произвољно пресликавање f смо записали као композицију кофибрације и хомотопске еквиваленције. Ако означимо $H_n(Y,X) \overset{def}{=} H_n(M_f,X)$, из следећег дијаграма добијамо дуг тачан низ пара (Y,X).

$$\begin{tikzcd}
 & & H_n(M_f) \arrow[r] \arrow[dd, tail, two heads, "(h_f)_*"] & H_n(M_f,X) \arrow[dd, equal] \arrow[dr, "\partial"] & & \\
\cdots \arrow[r] & H_n(X) \arrow[ur, "j_*"] \arrow[dr, "f_*"'] & & & H_{n-1}(X) \arrow[r] & \cdots \\
 & & H_n(Y) \arrow[r] & H_n(Y,X) \arrow[ur, "\partial"'] & &
\end{tikzcd}$$

Слично важи и за фибрације – свако непрекидно пресликавање је композиција фибрације и хомотопске еквиваленције.

<u>H-простори</u> Нека је X тополошки простор, $e \in X$, $\mu : X \times X \to X$ и означимо инклузије
$$\begin{aligned} i_2 :&X \hookrightarrow X \times X, & \qquad i_1 :&X \hookrightarrow X \times X, \\ &x \ \mapsto (e,x) & &x \ \mapsto (x,e) \end{aligned}$$

(1) Ако је $\mu \circ i_2 = \mu \circ i_1 = \mathbb{1}_X$, онда је (X,μ,e) јаки H-простор;

(2) Ако је $\mu \circ i_2 \simeq \mu \circ i_1 \simeq \mathbb{1}_X$ $(rel\ e)$, онда је (X,μ,e) H-простор;

(3) Ако је $\mu \circ i_2 \simeq \mu \circ i_1 \simeq \mathbb{1}_X$, онда је (X,μ,e) слаби H-простор;

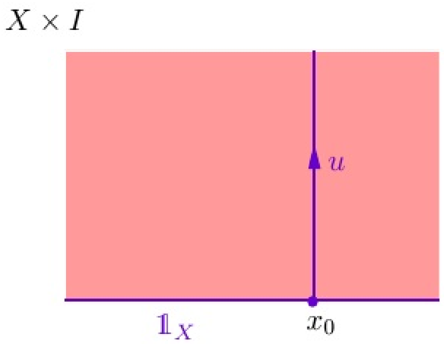
Напомене:

- Ако важи (1), онда је $\mu(e,e) = e$ и неутрал је јединствен;
- Ако важи (3), онда је $\mu(e,e) = (\mu \circ i_2)(e)$ што не мора бити једнако e, а ни неутрал није јединствен. На пример, уколико је $X \simeq *$, онда је $[X,X] = 0$, па за свако $e \in X$ важи да је $\mu \circ i_2 \simeq \mu \circ i_1 \simeq \mathbb{1}_X$, тј. свака тачка је неутрал.
- Ако важи (2), онда $\mu(e,e) = (\mu \circ i_2)(e) = e$ (јер је хомотопија релативна), али неутрал не мора бити јединствен. Заиста, нека је $\mu : D^n \times D^n \to D^n$ дато са
$$\mu(x,y) = \frac{1}{2}(x+y).$$
Свака тачка $x_0 \in D^n$ је неутрал овог H-простора. То можемо видети на следећи начин. Ако је $i_2 : D^n \to D^n \times D^n$ инклузија дата са $i_2(y) = (x_0,y)$, онда се може дефинисати хомотопија $H : D^n \times I \to D^n$ са
$$H(y,t) = \frac{1}{2}((1-t)x_0 + ty + y).$$
Тада је
$$\begin{aligned} H(y,0) &= \frac{1}{2}(x_0+y) = \mu(x_0,y) = (\mu \circ i_2)(y), \\ H(y,1) &= y = \mathbb{1}_{D^n}(y), \\ H(x_0,t) &= x_0, \end{aligned}$$

па је
$$H : \mu \circ i_2 \simeq \mathbb{1}_{D^n} \ (rel\ x_0),$$
а слично се може показати и за инклузију i_1. Дакле, x_0 је неутрал.

2. Ако је X слаби H-простор са неутралом $e \in X$, $x_0 \in X$ недегенерисана тачка и $u : I \to X$ пут од x_0 до e, доказати да постоји структура слабог H-простора на X таква да је x_0 неутрал од X, тј. да постоји непрекидно пресликавање $\nu : X \times X \to X$ такво да је (X, ν, x_0) слаби H-простор.

Решење: Из услова да је x_0 недегенерисана тачка добијамо да пар (X, x_0) има својство проширења хомотопије, па постоји хомотопија $H : X \times I \to X$ таква да је
$$H|_{X\times\{0\}} = \mathbb{1}_X, \quad H|_{\{x_0\}\times I} = u.$$



Нека је $f \overset{def}{=} H(\cdot, 1)$. Тада је
$$\mathbb{1}_X \underset{u}{\simeq} f, \quad f(x_0) = H(x_0, 1) = u(1) = e.$$
Нека је $\mu : X \times X \to X$ операција датог H-простора и инклузије
$$\begin{aligned} i_2 : X &\hookrightarrow X \times X, \\ x &\mapsto (e, x) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} i_1 : X &\hookrightarrow X \times X. \\ x &\mapsto (x, e) \end{aligned}$$
Тада је
$$\mu \circ i_2 \simeq \mu \circ i_1 \simeq \mathbb{1}_X.$$
Уведимо и ознаке
$$\begin{aligned} \widetilde{i_2} : X &\hookrightarrow X \times X, \\ x &\mapsto (x_0, x) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \widetilde{i_1} : X &\hookrightarrow X \times X. \\ x &\mapsto (x, x_0) \end{aligned}$$
Нека је још и пресликавање $\nu : X \times X \to X$ дато са
$$\nu(x_1, x_2) \overset{def}{=} \mu\left(f(x_1), f(x_2)\right).$$
Посматрајмо наредни дијаграм.
$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "\widetilde{i_2}"'] & X \arrow[d, hook, "i_2"] \\
X \times X \arrow[r, "f\times f"] \arrow[dr, "\nu"'] & X \times X \arrow[d, "\mu"] \\
 & X
\end{tikzcd}$$
Из дијаграма имамо
$$\nu \circ \widetilde{i_2} = \underbrace{\mu \circ i_2}_{\simeq \mathbb{1}_X} \circ \underbrace{f}_{\simeq \mathbb{1}_X} \simeq \mathbb{1}_X.$$

Слично се може показати да је $\nu \circ \widetilde{i_1} \simeq \mathbb{1}_X$, па је ν тражена операција. $\square$

3. Ако је X слаби H-простор и $X \simeq Y$, доказати да је и Y слаби H-простор.

Решење: Нека су $\mu,\ i_1,\ i_2$ дефинисани као и раније. Имамо и пресликавања

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] & Y \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

таква да је

$$f \circ g \simeq \mathbb{1}_Y, \quad g \circ f \simeq \mathbb{1}_X.$$

Потребно нам је пресликавање $\nu : Y \times Y \to Y$. Дефинишимо га на следећи начин

$$\nu(y_1, y_2) \overset{def}{=} f\left(\mu\left(g(y_1), g(y_2)\right)\right).$$

Тачка $f(e) \in Y$ је потенцијални неутрал. Нека је

$$\begin{aligned} j_2 :& Y \hookrightarrow Y \times Y \\ & y \ \mapsto (f(e), y) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} j_1 :& Y \hookrightarrow Y \times Y \\ & y \ \mapsto (y, f(e)) \end{aligned}$$

Посматрајмо следећи дијаграм.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[ddd, dashed, "\nu\circ j_2"'] & X \arrow[d, hook, "i_2"] \\ & X \times X \arrow[d, "(g\circ f)\times\mathbb{1}_X\simeq\mathbb{1}_{X\times X}"] \\ & X \times X \arrow[d, "\mu"] \\ Y & X \arrow[l, "f"'] \end{tikzcd}$$

Из дијаграма имамо

$$\begin{aligned} \nu \circ j_2 &= f \circ \mu \circ \underbrace{\left((g \circ f) \times \mathbb{1}_X\right)}_{\simeq \mathbb{1}_{X\times X}} \circ i_2 \circ g \\ &\simeq f \circ \underbrace{\mu \circ i_2}_{\simeq \mathbb{1}_X} \circ g \\ &\simeq f \circ g \\ &\simeq \mathbb{1}_Y \end{aligned}$$

Слично се може добити да је $\nu \circ j_1 \simeq \mathbb{1}_Y$, па $(Y, \nu, f(e))$ јесте слаби H-простор. $\square$

4. Нека је (X, μ, e) слаби H-простор и нека су $i_1 : X \hookrightarrow X \times X$ и $i_2 : X \hookrightarrow X \times X$ инклузије дате са $i_1(x) = (x, e)$ и $i_2(x) = (e, x)$.

(а) Ако су $u, v : I \to X$ путеви такви да је $\mu \circ i_2 \underset{u}{\simeq} \mathbb{1}_X$ и $\mu \circ i_1 \underset{v}{\simeq} \mathbb{1}_X$, доказати да постоји хомотопија $H : I \times I \to X$ таква да је

$$H(s, 0) = (u \cdot v^{-1})(s),\ \ s \in I,$$
$$H(0, t) = H(1, t) = u(t),\ \ t \in I.$$

(б) Ако је $\alpha : I \to X$ петља у e дефинисана са $\alpha(s) = H(s, 1)$, доказати да је $u \cdot v^{-1} \simeq \mu \circ i_2 \circ \alpha$ $(rel\ \{0, 1\})$.

(в) Доказати да постоји пут $w : I \to X$ такав да је $\mu \circ i_1 \underset{w}{\simeq} \mathbb{1}_X$ и $u \simeq w$ $(rel\ \{0,1\})$.

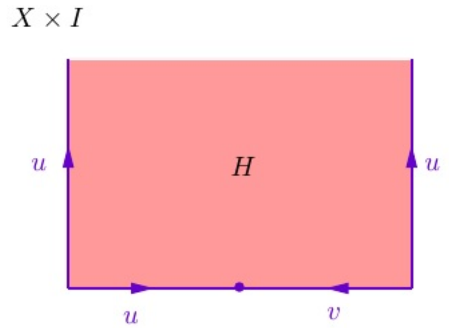
(г) Ако је e недегенерисана тачка таква да је $\{e\}$ затворен скуп у X, доказати да је тада X јаки H-простор при чему се одговарајућа операција $\nu : X \times X \to X$ може одабрати тако да је $\mu \simeq \nu$ и да је e неутрал за ν.

Решење: (а) Пар $(I, \partial I)$ има својство проширења хомотопије, па постоји хомотопија $H : I \times I \to I$ таква да је

$$H(s,0) \overset{def}{=} (u \cdot v^{-1})(s),\ \ s \in I,$$

$$H(1,t) = H(0,t) \overset{def}{=} u(t),\ \ t \in I,$$

где је $\cdot$ операција надовезивања путева. Приметимо да су u и v путеви од тачке $\mu(e,e)$ до тачке e.



(б) Нека је $\alpha : I \to X$ дато са $\alpha(s) \overset{def}{=} H(s,1),\ \ s \in I$. Из дела (а) имамо да је

$$u \cdot v^{-1} \simeq \alpha \simeq \underbrace{\mu \circ i_2}_{\simeq \mathbb{1}_X} \circ \alpha,$$

али нама је потребна релативна, а не обична хомотопија између $u \cdot v^{-1}$ и $\mu \circ i_2 \circ \alpha$, па ћемо је посебно дефинисати.

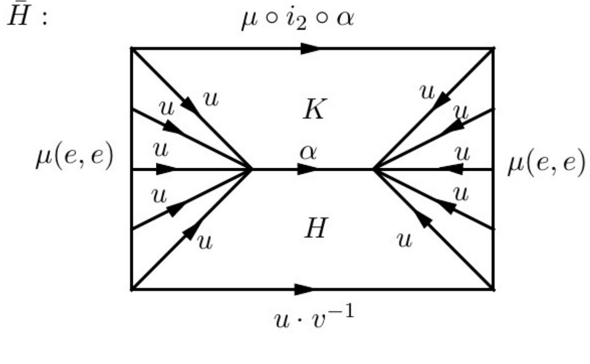
Како је $\mu \circ i_2 \underset{u}{\simeq} \mathbb{1}_X$, то је $G : \mathbb{1}_X \underset{u^{-1}}{\simeq} \mu \circ i_2$. Нека је $K : I \times I \to X$ дато са $K \overset{def}{=} G \circ (\alpha \times \mathbb{1}_I)$, тј.

$$K(s,t) \overset{def}{=} G(\alpha(s), t).$$

Тада је

$$\begin{aligned} K(s,0) &= G(\alpha(s),0) = \alpha(s), \\ K(s,1) &= G(\alpha(s),1) = (\mu \circ i_2 \circ \alpha)(s), \\ K(0,t) &= G(\alpha(0),t) = G(e,t) = u^{-1}(t), \\ K(1,t) &= G(\alpha(1),t) = G(e,t) = u^{-1}(t). \end{aligned}$$

Хомотопију $\bar{H} : u \circ v^{-1} \simeq \mu \circ i_2 \circ \alpha$ $(rel\ \{0,1\})$ правимо на следећи начин.



(в) Нека је $\widetilde{H} : X \times I \to X$ дато са

$$\widetilde{H}(x,t) \overset{def}{=} \mu(x, \alpha(t)).$$

Тада је

$$\begin{aligned}
\widetilde{H}(x,0) &= \mu(x,e) = (\mu \circ i_1)(x),\\
\widetilde{H}(x,1) &= \mu(x,e) = (\mu \circ i_1)(x),\\
\widetilde{H}(e,t) &= \mu(e,\alpha(t)) = (\mu \circ i_2 \circ \alpha)(t).
\end{aligned}$$

Дакле,

$$\widetilde{H} : \mu \circ i_1 \underset{\mu\circ i_2\circ\alpha}{\simeq} \mu \circ i_1.$$

Имамо и да је $\mu \circ i_1 \underset{v}{\simeq} \mathbb{1}_X$, па кад надовежемо ове хомотопије добијамо

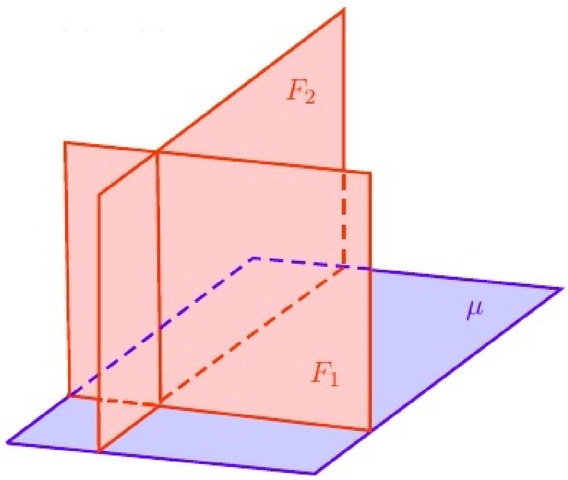
$$\mu \circ i_1 \underset{(\mu\circ i_2\circ\alpha)\cdot v}{\simeq} \mathbb{1}_X.$$

Нека је $w \overset{def}{=} (\mu \circ i_2 \circ \alpha) \cdot v$. Остаје још да проверимо да је $u \simeq w$ $(rel\ \{0,1\})$.

$$\begin{aligned}
u &\simeq u \cdot v^{-1} \cdot v \quad (rel\ \{0,1\})\\
&\simeq (\mu \circ i_2 \circ \alpha) \cdot v \quad (rel\ \{0,1\})\\
&= w \quad (rel\ \{0,1\}).
\end{aligned}$$

(г) У књизи *Algebraic Topology*, *Spanier* један од задатака гласи:
Ако парови (X,A) и (Y,B) имају својство проширења хомотопије и $A \in \mathcal{F}_X$, $B \in \mathcal{F}_Y$, онда пар $(X \times Y, X \times B \cup A \times Y)$ има својство проширења хомотопије.

Применимо ово тврђење на пар $(X, \{e\})$, одакле добијамо да пар $(X \times X, X \times \{e\} \cup \{e\} \times X)$ има својство проширења хомотопије.



$X \times X \times \{0\} \cup (X \times \{e\} \cup \{e\} \times X) \times I$

Из дела (в) је $\mu \circ i_1 \underset{w}{\simeq} \mathbb{1}_X$ и $u \simeq w$ $(rel\ \{0,1\})$, па како је e недегенерисана, то постоји $F_1 : \mu \circ i_1 \underset{u}{\simeq} \mathbb{1}_X$, а имамо и $F_2 : \mu \circ i_2 \underset{u}{\simeq} \mathbb{1}_X$. F_1 и F_2 смо бирали да се слажу лепо на пресеку, тј. на $\{(e,e)\} \times I$. Из својства проширења хомотопије пара $(X \times X, X \times \{e\} \cup \{e\} \times X)$ имамо да постоји хомотопија $H : X \times X \times I \to X$ таква да је

$$\begin{aligned}
H(x_1,x_2,0) &= \mu(x_1,x_2),\\
H(x,e,t) &= F_1(x,t),\\
H(e,x,t) &= F_2(x,t).
\end{aligned}$$

Нека је $\nu \overset{def}{=} H(\cdot,\cdot,1)$. Може се показати да је ν тражена операција. $\square$

Пример Диск D^n је јаки H-простор који није тополошка група. Заиста, из претходна два задатка можемо закључити да ако је $X \simeq *$ и постоји $e \in X$ недегенерисана таква да $\{e\} \in \mathcal{F}_X$, онда је X јаки H-простор. Диск D^n испуњава те услове, па јесте јаки H-простор.

Са друге стране, D^n није тополошка група јер ако би била онда како D^n има својство фиксне тачке, свака транслација $f_\alpha : D^n \to D^n$ дата са $f_\alpha = x + \alpha$ би имала фиксну тачку, што је немогуће, па закључујемо да D^n није тополошка група.

2 Хомотопске групе

1. Нека је X путно повезан простор и $n \in \mathbb{N}$. Доказати да је X n-прост ако и само ако за сваке две тачке $x_0, x_1 \in X$ и свака два пута $u, v : I \to X$ таква да је $u(0) = v(0) = x_0$ и $u(1) = v(1) = x_1$ важи $\beta_u = \beta_v : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(X, x_1)$.

Решење: $\Longrightarrow$: Како је X n-прост, онда $\pi_1(X, x_0)$ дејствује тривијално на $\pi_n(X, x_0)$, тј. за сваку петљу $w : (I, \partial I) \to (X, x_0)$ и свако $f : (S^n, e_1) \to (X, x_0)$ је

$$[f]_0 \cdot [w] = \beta_w([f]_0) = [f]_0.$$

Дакле,

$$\beta_w = \mathbb{1}_{\pi_n(X,x_0)}.$$

Нека је $w \overset{def}{=} u \cdot v^{-1}$, онда је

$$\mathbb{1}_{\pi_n(X,x_0)} = \beta_{u \cdot v^{-1}} = \beta_{v^{-1}} \circ \beta_u,$$

одакле добијамо

$$\beta_u = \beta_v.$$

$\Longleftarrow$: Нека је $x_0 \in X$ произвољно. Желимо да покажемо да $\pi_1(X, x_0)$ дејствује тривијално на $\pi_n(X, x_0)$. Нека је $w : (I, \partial I) \to (X, x_0)$ петља у x_0 и $x_1 = x_0$. Тада су w и c_{x_0} два пута од x_0 до x_1, па је

$$\beta_w = \beta_{c_{x_0}} = \mathbb{1}_{\pi_n(X,x_0)},$$

тј. дејство је тривијално, па је X n-прост. $\square$

2. Нека је (X, μ, e) H-простор. Ако су $p_1, p_2 : X \times X \to X$ пројекције на прву односно другу координату и са $+$ означена операција у $\pi_n(X)$, доказати да за свако $n \in \mathbb{N}$ комутира наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(X \times X) \arrow[r, "\mu_*"] \arrow[d, "((p_1)_*,(p_2)_*)"', "\cong"] & \pi_n(X) \\
\pi_n(X) \oplus \pi_n(X) \arrow[ur, "+"'] &
\end{tikzcd}$$

Решење: На основу теореме (2.23) знамо да је $((p_1)_*, (p_2)_*)$ изоморфизам и да му је инверз $(i_1)_* + (i_2)_*$, где је

$$\begin{aligned} i_2 :& X \hookrightarrow X \times X \\ & x \ \mapsto (e, x) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} i_1 :& X \hookrightarrow X \times X \\ & x \ \mapsto (x, e) \end{aligned}$$

Услови теореме су заиста испуњени јер имамо коначан Декартов производ и све групе $\pi_n(X \times X) \cong \pi_n(X) \oplus \pi_n(X)$ су Абелове јер је $\pi_n(X)$ Абелова за свако $n \in \mathbb{N}$ (за $n \geqslant 2$ је свакако Абелова, а за $n = 1$ је Абелова јер је X H-простор).

Довољно је да покажемо да комутира наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(X \times X) \arrow[r, "\mu_*"] & \pi_n(X) \\
\pi_n(X) \oplus \pi_n(X) \arrow[u, tail, two heads, "(i_1)_*+(i_2)_*"] \arrow[ur, "+"'] &
\end{tikzcd}$$

Нека је $(a, b) \in \pi_n(X) \oplus \pi_n(X)$. Тада је

$$\mu_* \Big(\left((i_1)_* + (i_2)_* \right) (a, b) \Big) = \mu_* \big((i_1)_*(a) + (i_2)_*(b) \big) = (\mu \circ i_1)_*(a) + (\mu \circ i_2)_*(b) = a + b,$$

јер је
$$\mu \circ i_1 \simeq \mu \circ i_2 \simeq \mathbb{1}_X \ (rel\ e). \ \Box$$

Нека су X и Y путно повезани.

- Ако је $X \simeq Y$, онда је $\pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$. Обрнуто не мора да важи. $\pi_1(S^2) = \pi_1(*)$, али $S^2 \not\simeq *$.
- Ако је $X \simeq Y$, онда је $H_n(X) \cong H_n(Y)$, за свако $n \in \mathbb{N}_0$. Обрнуто не мора да важи, пример за то је $X = T^2$, $Y = S^1 \vee S^1 \vee S^2$.
- Ако је $X \simeq Y$, онда је $\pi_n(X) \cong \pi_n(Y)$ за свако $n \in \mathbb{N}_0$. Обрнуто не мора да важи што ћемо видети у следећем задатку.

3. Доказати да простори $S^2 \times \mathbb{R}\mathrm{P}^3$ и $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \times S^3$ имају изоморфне све хомотопске групе али нису хомотопски еквивалентни.

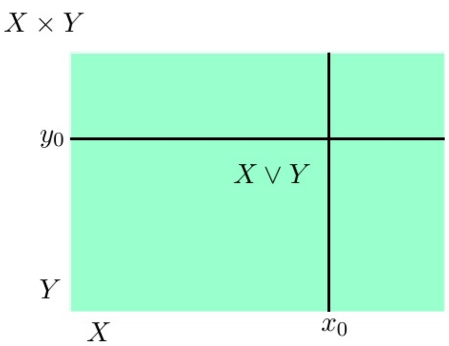
Решење: Ако је $n = 0$, онда је јасно $\pi_0(S^2 \times \mathbb{R}\mathrm{P}^3) \cong \pi_0(\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \times S^3)$.

За $n = 1$ имамо
$$\pi_1(S^2 \times \mathbb{R}\mathrm{P}^3) \cong \mathbb{Z}_2 \cong \pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \times S^3).$$

Ако је $n \geqslant 2$, онда је
$$\pi_n(\mathbb{R}\mathrm{P}^3) \cong \pi_n(S^3), \quad \pi_n(\mathbb{R}\mathrm{P}^2) \cong \pi_n(S^2),$$
јер постоје наткривања $S^3 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^3$, као и $S^2 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^2$, па је
$$\pi_n(S^2 \times \mathbb{R}\mathrm{P}^3) \cong \pi_n(S^2) \oplus \pi_n(\mathbb{R}\mathrm{P}^3) \cong \pi_n(S^2) \oplus \pi_n(S^3),$$
$$\pi_n(\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \times S^3) \cong \pi_n(\mathbb{R}\mathrm{P}^2) \oplus \pi_n(S^3) \cong \pi_n(S^2) \oplus \pi_n(S^3),$$
па је и у овом случају
$$\pi_n(S^2 \times \mathbb{R}\mathrm{P}^3) \cong \pi_n(\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \times S^3).$$
Дакле, ова два простора имају изоморфне све хомотопске групе. Да бисмо показали да нису хомотопски еквивалентни видећемо да им нису све хомолошке групе изоморфне. Заиста, из Кинетове формуле се може видети да је
$$H_2(S^2 \times \mathbb{R}\mathrm{P}^3) \cong \mathbb{Z},$$
$$H_2(\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \times S^3) \cong 0,$$
па закључујемо да $S^2 \times \mathbb{R}\mathrm{P}^3 \not\simeq \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \times S^3$. $\Box$

4. Нека су (X, x_0) и (Y, y_0) тополошки простори са базним тачкама и уочимо утапање $j : X \vee Y \hookrightarrow X \times Y$. Доказати да за свако $n \geqslant 2$ важи
$$\pi_n(X \vee Y) \cong \pi_n(X) \oplus \pi_n(Y) \oplus \pi_{n+1}(X \times Y, X \vee Y).$$

Решење: Пресликавање $j : X \vee Y \to X \times Y$ је дато са
$$[x] \mapsto (x, y_0), \quad [y] \mapsto (x_0, y),$$
па $X \vee Y$ идентификујемо са потпростором $X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y \subseteq X \times Y$.



Прецизније, имамо следећи дијаграм.

$$\begin{tikzcd} & X \sqcup Y \arrow[dl, two heads, "\text{количничко}"'] \arrow[dr, "\text{непрекидно}"] & \\ X \vee Y \arrow[rr, dashed, "j"] & & X \times Y \end{tikzcd}$$

Посматрајмо сада дуги тачни низ пара $(X \times Y, X \vee Y)$,

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & \pi_{n+1}(X \times Y, X \vee Y) \arrow[r] & \pi_n(X \vee Y) \arrow[r, "j_*"] & \pi_n(X \times Y) \arrow[r] \arrow[d, tail, two heads, "\big((p_1)_*, (p_2)_*\big)"] & \pi_{n-1}(X \times Y, X \vee Y) \arrow[r] & \cdots \\ & & & \pi_n(X) \oplus \pi_n(Y) & & \end{tikzcd}$$

одакле добијамо низ

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & \pi_{n+1}(X \times Y, X \vee Y) \arrow[r] & \pi_n(X \vee Y) \arrow[r, "\big((p_1\circ j)_*, (p_2\circ j)_*\big)"] & \pi_n(X) \oplus \pi_n(Y) \arrow[r] \arrow[l, dashed, bend left, "(j_1)_* + (j_2)_*"] & \cdots \end{tikzcd}$$

где је

$$\begin{tikzcd} & & X \\ X \vee Y \arrow[r, hook, "j"] & X \times Y \arrow[ur, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & \\ & & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "j_1"] & X \vee Y \\ Y \arrow[r, hook, "j_2"] & X \vee Y \end{tikzcd}$$

Приметимо да за $(a, b) \in \pi_n(X) \oplus \pi_n(Y)$ важи

$$(p_1 \circ j)_* \big((j_1)_*(a) + (j_2)_*(b)\big) = (p_1 \circ j \circ j_1)_*(a) + (p_1 \circ j \circ j_2)_*(b) = a,$$

$$(p_2 \circ j)_* \big((j_1)_*(a) + (j_2)_*(b)\big) = (p_2 \circ j \circ j_1)_*(a) + (p_2 \circ j \circ j_2)_*(b) = b,$$

па је

$$\big((p_1 \circ j)_*, (p_2 \circ j)_*\big) \circ \big((j_1)_* + (j_2)_*\big) = \mathbb{1}_{\pi_n(X) \oplus \pi_n(Y)}$$

одакле видимо да је $\big((p_1 \circ j)_*, (p_2 \circ j)_*\big)$ „на“ (за све $n \geqslant 2$) и да се кратак тачан низ

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \pi_{n+1}(X \times Y, X \vee Y) \arrow[r] & \pi_n(X \vee Y) \arrow[r, "\big((p_1\circ j)_*, (p_2\circ j)_*\big)"] & \pi_n(X) \oplus \pi_n(Y) \arrow[r] \arrow[l, dashed, bend left, "(j_1)_* + (j_2)_*"] & 0 \end{tikzcd}$$

цепа, па је

$$\pi_n(X \vee Y) \cong \pi_n(X) \oplus \pi_n(Y) \oplus \pi_{n+1}(X \times Y, X \vee Y). \; \square$$

5. Ако су $f : X \to Z$ и $g : Y \to W$ слабе хомотопске еквиваленције, доказати да је и $f \times g : X \times Y \to Z \times W$ такође слаба хомотопска еквиваленција.

Решење: Нека је $n \in \mathbb{N}_0$ и $(x_0, y_0) \in X \times Y$. Желимо да покажемо да је

$$(f \times g)_* : \pi_n(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_n(Z \times W, (f(x_0), g(y_0)))$$

изоморфизам. Посматрајмо наредни дијаграм

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(X \times Y, (x_0, y_0)) \arrow[r, "(f\times g)_*"] \arrow[d, tail, two heads, "\big((p_1)_*,(p_2)_*\big)"'] & \pi_n(Z \times W, (f(x_0), g(y_0))) \arrow[d, tail, two heads, "\big((q_1)_*,(q_2)_*\big)"] \\
\pi_n(X, x_0) \oplus \pi_n(Y, y_0) \arrow[r, tail, two heads, "f_* \oplus g_*"] & \pi_n(Z, f(x_0)) \oplus \pi_n(W, g(y_0))
\end{tikzcd}$$

где су

$$\begin{tikzcd}
& X \times Y \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & & & Z \times W \arrow[dl, "q_1"'] \arrow[dr, "q_2"] & \\
X & & Y & Z & & W
\end{tikzcd}$$

пројекције.

Горњи дијаграм комутира јер

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, mapsto] \arrow[dd, mapsto] & (f \times g)_*(a) \arrow[d, mapsto] \\
& \big((q_1)_*(f \times g)_*(a), (q_2)_*(f \times g)_*(a))\big) \arrow[d, equal, "?"] \\
\big((p_1)_*(a), (p_2)_*(a)\big) \arrow[r, mapsto] & \big(f_*((p_1)_*(a)), g_*((p_2)_*(a))\big)
\end{tikzcd}$$

и важи да је

$$q_1 \circ (f \times g) = f \circ p_1, \quad q_2 \circ (f \times g) = g \circ p_2.$$

Из комутативности дијаграма видимо да је $(f \times g)_*$ изоморфизам, па је $f \times g$ слаба хомотопска еквиваленција. $\square$

3 Проширење и подизање пресликавања

1. Ако је $1 \leqslant m < n$ доказати да скуп $[\mathbb{R}\mathrm{P}^m, \mathbb{R}\mathrm{P}^n]$ има тачно два елемента и то $[const]$ и $[i_{m,n}]$, где је $i_{m,n}$ стандардна инклузија (таква да наредни дијаграм комутира

$$\begin{tikzcd} S^m \arrow[r, hook, "j_{m,n}"] \arrow[d, "p"] & S^n \arrow[d, "p"] \\ \mathbb{R}\mathrm{P}^m \arrow[r, hook, "i_{m,n}"] & \mathbb{R}\mathrm{P}^n \end{tikzcd}$$

где је $j_{m,n} : S^m \to S^n$ инклузија дата са $j_{m,n}(x) = (x, 0) \in S^n$, а $p : S^m \to \mathbb{R}\mathrm{P}^m$ и $p : S^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ позната дволисна наткривања).

Решење: Прво ћемо показати да $i_{m,n} \not\simeq const$. Како је $\mathbb{R}\mathrm{P}^m$ m-скелет од $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$, то је пар $(\mathbb{R}\mathrm{P}^n, \mathbb{R}\mathrm{P}^m)$ m-повезан. Другим речима, $i_{m,n}$ је m-еквиваленција, па је

$$(i_{m,n})_* : \pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^m) \to \pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n)$$

епиморфизам (ако је $m \geqslant 2$ биће и изоморфизам), па није тривијално јер је $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) \cong \mathbb{Z}_2$. Дакле, $i_{m,n} \not\simeq const$.

Сада ћемо показати да осим $[i_{m,n}]$ и $[const]$ других елемената у $[\mathbb{R}\mathrm{P}^m, \mathbb{R}\mathrm{P}^n]$ нема и то показујемо индукцијом по $m \in \mathbb{N}$.

<u>База индукције:</u> ако је $m = 1$, онда

$$[\mathbb{R}\mathrm{P}^1, \mathbb{R}\mathrm{P}^n] \longleftrightarrow [S^1, \mathbb{R}\mathrm{P}^n] \underset{\Phi}{\twoheadleftarrow} [S^1, \mathbb{R}\mathrm{P}^n]_0 = \pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) = \mathbb{Z}_2$$

Како је $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) \cong \mathbb{Z}_2$ Абелова група, то је дејство $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n)$ на себе тривијално, одакле закључујемо да је Φ бијекција.

<u>Индукцијски корак:</u> Нека је $m \geqslant 2$.

<u>Индукцијска хипотеза:</u> Претпоставимо да тврђење важи за $m - 1 \in \mathbb{N}$.

Покажимо да тврђење важи за m.

Имамо да је $[\mathbb{R}\mathrm{P}^{m-1}, \mathbb{R}\mathrm{P}^n] = \big\{[const], [i_{m-1,n}]\big\}$. Посматрајмо дијаграм

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}\mathrm{P}^{m-1} \arrow[rr, hook, "i_{m-1,m}"] \arrow[dr, hook, "i_{m-1,n}"'] & & \mathbb{R}\mathrm{P}^m \arrow[dl, hook', "i_{m,n}"] \\ & \mathbb{R}\mathrm{P}^n & \end{tikzcd}$$

Желимо да покажемо да је

$$i^*_{m-1,m} : [\mathbb{R}\mathrm{P}^m, \mathbb{R}\mathrm{P}^n] \to [\mathbb{R}\mathrm{P}^{m-1}, \mathbb{R}\mathrm{P}^n]$$

бијекција, одакле директно следи да $[\mathbb{R}\mathrm{P}^m, \mathbb{R}\mathrm{P}^n]$ има тачно два елемента.

Покажимо, најпре, да је „на“. Из комутативности горњег дијаграма имамо да је

$$[const] = i^*_{m-1,m}[const],$$
$$[i_{m-1,n}] = i^*_{m-1,m}[i_{m,n}],$$

па $i^*_{m-1,m}$ јесте „на“.

Остаје још да покажемо да је и „1-1“. Нека су $f, g : \mathbb{R}\mathrm{P}^m \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ пресликавања таква да је

$$i^*_{m-1,m}[f] = i^*_{m-1,m}[g],$$

тј. постоји хомотопија

$$G : f|_{\mathbb{R}\mathrm{P}^{m-1}} \simeq g|_{\mathbb{R}\mathrm{P}^{m-1}}.$$

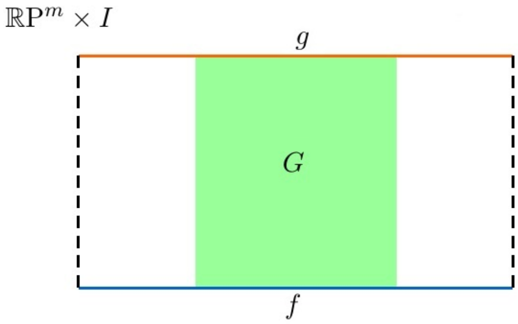
Хоћемо да покажемо да је $f \simeq g$. Имамо пресликавање

$$F : \mathbb{R}\mathrm{P}^{m-1} \times I \cup \mathbb{R}\mathrm{P}^{m} \times \{0,1\} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{n}$$

дато са

$$\begin{aligned} F|_{\mathbb{R}\mathrm{P}^{m-1}\times I} &= G, \\ F|_{\mathbb{R}\mathrm{P}^{m}\times \{0\}} &= f, \\ F|_{\mathbb{R}\mathrm{P}^{m}\times \{1\}} &= g, \end{aligned}$$

које желимо да проширимо на $\mathbb{R}\mathrm{P}^m \times I$.



Приметимо да је $\mathbb{R}\mathrm{P}^{m-1} \times I \cup \mathbb{R}\mathrm{P}^{m} \times \{0,1\}$ управо m-скелет од $\mathbb{R}\mathrm{P}^m \times I$, па треба проширити F на ћелију димензије $m+1$. Опструкција за ово проширење налази се у $\pi_m(\mathbb{R}\mathrm{P}^n)$, али ова група је тривијална јер је $2 \leqslant m < n$. Дакле, нема опструкција за проширење овог пресликавања па постоји $H : \mathbb{R}\mathrm{P}^m \times I \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ такво да је

$$H|_{\mathbb{R}\mathrm{P}^{m-1}\times I \cup \mathbb{R}\mathrm{P}^{m}\times \{0,1\}} = F,$$

па је

$$H : f \simeq g,$$

тј. $i^*_{m-1,m}$ је „1-1“. $\square$

2. Нека је $n \in \mathbb{N}_0$. Доказати да је свако непрекидно пресликавање из n-димензионог CW-комплекса у n-повезан тополошки простор хомотопски тривијално.

Решење: <u>I начин:</u> Како је X CW-комплекс димензије n, то је CX такође CW-комплекс и то димензије $n+1$. Посматрајмо следећи дијаграм.

$$\begin{tikzcd} CX \arrow[dr, dashed, "\bar{f}"] & \\ X \arrow[u, hook] \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Опструкције за постојање проширења $\bar{f}$ су у $\pi_0(Y),\ \pi_1(Y), \ldots, \pi_n(Y)$, али све те групе су тривијалне јер је Y n-повезан, па постоји $\bar{f} : CX \to Y$ тако да горњи дијаграм комутира. Како је $CX \simeq *$, то је $f \simeq const$ јер се факторише кроз контрактибилан простор.

<u>II начин:</u> Како је Y n-повезан, то је $p : * \to Y$ n-еквиваленција и X је димензије n, па на основу последице 3.17 постоји $\widetilde{f}$ такво да наредни дијаграм комутира до на хомотопију

$$\begin{tikzcd} & * \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, dashed, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

одакле се лако види да је $f \simeq const$. $\square$

4 Теореме Вајтхеда, Фројдентала и Хуревића

1. (а) Да ли је $\mathbb{RP}^2$ 1-прост простор?

(б) Да ли је $\mathbb{RP}^2$ 2-прост простор?

(в) Да ли је $\mathbb{RP}^2$ H-простор?

Решење: (а) Како је $\pi_1(\mathbb{RP}^2) \cong \mathbb{Z}_2$ Абелова, то је дејство $\pi_1(\mathbb{RP}^2)$ на себе тривијално, па $\mathbb{RP}^2$ јесте 1-прост.
(б) Проверавамо да ли $\pi_1(\mathbb{RP}^2)$ тривијално дејствује на $\pi_2(\mathbb{RP}^2)$. Нека је $e_1 \in S^2$ базна тачка. Ако је $p : S^2 \to \mathbb{RP}^2$ дволисно наткривање, знамо да је

$$\pi_2(\mathbb{RP}^2, [e_1]) \cong \mathbb{Z}\langle [p]_0 \rangle.$$

Нека је $[u] \in \pi_1(\mathbb{RP}^2, [e_1]) \cong \mathbb{Z}_2$. Тада имамо две могућности за вредност $[p]_0 \cdot [u]$ и то су

$$[p]_0 \cdot [u] = \begin{cases} [p]_0 \\ -[p]_0 = [p \circ r]_0 \end{cases}$$

где је $r : S^2 \to S^2$ дато са $r(x_1, x_2, x_3) \overset{def}{=} (x_1, x_2, -x_3)$. Да би дејство било тривијално, неопходно је да је $[p]_0 \cdot [u] = [p]_0$ за свако $[u]$. Ако је $[u] = 0 \in \pi_1(\mathbb{RP}^2, [e_1])$, ово свакако важи, па посматрамо случај када је u нетривијална петља у $\mathbb{RP}^2$. Тада u потиче од пута у S^2 који спаја e_1 и $-e_1$. Знамо да је $\deg r = -1 = \deg a_{S^2}$, где је $a_{S^2} : S^2 \to S^2$ антиподално пресликавање, па на основу Брауер–Хопфове теореме закључујемо да постоји хомотопија

$$H : r \simeq a_{S^2}.$$

Нека је $v : I \to S^2$ пут дефинисан са

$$v(t) \overset{def}{=} H(e_1, t), \ t \in I.$$

Тада је $v(0) = r(e_1) = e_1$, $v(1) = a_{S^2}(e_1) = -e_1$ и

$$H : r \underset{v}{\simeq} a_{S^2}. \tag{1}$$

Нека је даље $u \overset{def}{=} p \circ v : I \to \mathbb{RP}^2$. То је нетривијалан пут у $\mathbb{RP}^2$, тј. $[u] \neq 0 \in \pi_1(\mathbb{RP}^2, [e_1])$. Из (1) имамо

$$p \circ r \underset{u}{\simeq} p \circ a_{S_2} = p.$$

Из комутативности дијаграма

$$\begin{tikzcd}
\pi_2(S^2, e_1) \arrow[r, tail, two heads, "r_*"] \arrow[drr, tail, two heads, "p_*"'] & \pi_2(S^2, e_1) \arrow[r, tail, two heads, "p_*"] & \pi_2(\mathbb{RP}^2, [e_1]) \arrow[d, tail, two heads, "\beta_u"] \\
 & & \pi_2(\mathbb{RP}^2, [e_1])
\end{tikzcd}$$

добијамо да је

$$\begin{aligned}
[p]_0 \cdot [u] &= \beta_u([p]_0) \\
&= \beta_u([p \circ r \circ r]_0) \\
&= (\beta_u \circ p_* \circ r_*)[r]_0 \\
&= p_*[r]_0 \\
&= [p \circ r]_0 \\
&= -[p]_0 \\
&\neq [p]_0,
\end{aligned}$$

па $\mathbb{RP}^2$ није 2-прост.

(в) $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ није H-простор јер би онда био прост, а видели смо да није 2-прост. $\square$

Напомена: Доказ у претходном задатку пролази за сваки простор $\mathbb{R}\mathrm{P}^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$.

2. Нека је $n \geqslant 2$. Доказати да не постоји ретракт $A \subseteq \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ такав да је $A \simeq \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$.

Решење: Претпоставимо супротно да постоји ретракција, тј. имамо комутативни дијаграм

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "\mathbb{1}_A"'] & \mathbb{R}\mathrm{P}^n \arrow[d, "r"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Када применимо функтор π_{n-1} на претходни дијаграм, добијамо комутативни дијаграм

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, hook, "i_*"] \arrow[dr, "\mathbb{1}_{\mathbb{Z}}"'] & 0 \text{ или } \mathbb{Z}_2 \arrow[d, "r_*"] \\ & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

што је немогуће, па закључујемо да не постоји тражена ретракција. $\square$

3. Нека је $n \geqslant 2$ и $i : \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ инклузија.

(а) Доказати да је $i_* : \pi_n(\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}) \to \pi_n(\mathbb{R}\mathrm{P}^n)$ тривијалан хомоморфизам.

(б) Одредити $\pi_n(\mathbb{R}\mathrm{P}^n, \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1})$.

(в) Ако је $q : (\mathbb{R}\mathrm{P}^n, \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}) \twoheadrightarrow (\mathbb{R}\mathrm{P}^n/\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}, *)$, да ли је $q_* : \pi_n(\mathbb{R}\mathrm{P}^n, \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}) \to \pi_n(\mathbb{R}\mathrm{P}^n/\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1})$ изоморфизам?

Решење: (а) Када применимо функтор π_n на дијаграм

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "p"'] & S^n \arrow[d, "p"] \\ \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1} \arrow[r, hook, "i"] & \mathbb{R}\mathrm{P}^n \end{tikzcd}$$

имајући у виду да је $j \simeq const$, добијамо следећи дијаграм.

$$\begin{tikzcd} \pi_n(S^{n-1}) \arrow[r, "j_*=0"] \arrow[d, tail, two heads, "p_*"'] & \mathbb{Z} \arrow[d, tail, two heads, "p_*"] \\ \pi_n(\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}) \arrow[r, "i_*"] & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

Из дијаграма видимо да је $i_* = 0$ што је и требало показати. Приметимо да $i \not\simeq const$ јер иако је $i_* : \pi_k(\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}) \to \pi_k(\mathbb{R}\mathrm{P}^n)$ тривијално за свако $k \geqslant 2$, хомоморфизам у димензији 1

$$i_* : \pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}) \to \pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n)$$

неће бити тривијалан.

(б) Посматрајмо дуг тачан низ пара $(\mathbb{R}\mathrm{P}^n, \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1})$ у хомотопији.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \cdots \arrow[r] & \pi_n(\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}) \arrow[r, "i_*", "0"'] & \pi_n(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=-90] & \pi_n(\mathbb{R}\mathrm{P}^n, \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}) \arrow[r, "\partial"] & \pi_{n-1}(\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=-90] & \pi_{n-1}(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=-90] & \cdots \\ & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & 0 \text{ или } \mathbb{Z}_2 & \end{tikzcd}$$

Из дела (а) имамо да је $i_*:\pi_n(\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1})\to\pi_n(\mathbb{R}\mathrm{P}^n)$ тривијалан хомоморфизам, па имамо кратак тачан низ

$$0\longrightarrow\mathbb{Z}\longrightarrow\pi_n(\mathbb{R}\mathrm{P}^n,\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1})\longrightarrow\operatorname{im}\partial\longrightarrow 0$$

Из горњег дугог тачног низа имамо да је $\operatorname{im}\partial=\ker i_*\cong\mathbb{Z}$ јер i_* слика $\mathbb{Z}$ у 0 или $\mathbb{Z}_2$. Дакле, кратак тачан низ постаје

$$0\longrightarrow\mathbb{Z}\longrightarrow\pi_n(\mathbb{R}\mathrm{P}^n,\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1})\longrightarrow\mathbb{Z}\longrightarrow 0$$

а како је $\mathbb{Z}$ слободна, то се овај низ цепа, па коначно добијамо

$$\pi_n(\mathbb{R}\mathrm{P}^n,\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1})\cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}.$$

(в) Како је $\mathbb{R}\mathrm{P}^n/\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}\approx S^n$, то је

$$\pi_n(\mathbb{R}\mathrm{P}^n/\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1})\cong\pi_n(S^n)\cong\mathbb{Z}\ncong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\cong\pi_n(\mathbb{R}\mathrm{P}^n,\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}),$$

па q_* није изоморфизам у димензији n. Приметимо још да је пар $(\mathbb{R}\mathrm{P}^n,\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1})$ $(n-1)$-повезан, а $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$ је 0-повезан, па је q_* изоморфизам у димензијама мањим од n, а у димензији n је епиморфизам. $\square$

4. Нека је $n>m\geqslant 1$, G Абелова и H група (Абелова ако је $m\geqslant 2$). Доказати да је $[K(G,n),K(H,m)]=0$.

Решење: Како се кардиналност скупа $[X,Y]$ не мења уколико X и Y заменимо хомотопски еквивалентним просторима, за $K(G,n)$ можемо узети управо простор за који важи да је

$$K(G,n)^{n-1}=*$$

и који испуњава услов *(БТ)* теореме 4.9 (о CW-апроксимацији). Посматрајмо пресликавање

$$\Theta:[K(G,n),K(H,m)]_0\to\operatorname{Hom}(\pi_n(K(G,n),*),\pi_n(K(H,m),*))$$

дефинисано у ставу 4.32. Како је $K(G,n)^{n-1}=*$, простор $K(G,n)$ испуњава услов *(БТ)*, $K(H,m)$ је путно повезан и $\pi_i(K(H,m))=0$ за $i>n$, то је на основу тог става пресликавање Θ бијекција,

$$\begin{tikzcd}
{[K(G,n),K(H,m)]_0} \arrow[r, leftrightarrow, "\Theta"] \arrow[d, two heads, "\Phi"'] & \operatorname{Hom}(G,0)=0 \\
{[K(G,n),K(H,m)]} &
\end{tikzcd}$$

па како је Φ „на“, то је и $[K(G,n),K(H,m)]=0$. $\square$

5. За $n\in\mathbb{N}$ описати Хуревићев хомоморфизам $h:\pi_n(\mathbb{R}\mathrm{P}^n)\to H_n(\mathbb{R}\mathrm{P}^n)$.

Решење: <u>$n=1$:</u> У овом случају је $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^1)\cong\mathbb{Z}$ Абелова, па је h изоморфизам.

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^1) \arrow[r, tail, two heads, "h"] & H_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^1)
\end{tikzcd}$$

<u>$n\geqslant 2$:</u> Ако је n парно, онда је $h=0$ јер је $H_n(\mathbb{R}\mathrm{P}^n)=0$. Ако је n непарно, онда из дијаграма

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(S^n) \arrow[r, tail, two heads, "h"] \arrow[d, tail, two heads, "p_*"'] & H_n(S^n) \arrow[d, "p_*"] \\
\pi_n(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) \arrow[r, "h"] & H_n(\mathbb{R}\mathrm{P}^n)
\end{tikzcd}$$

имајући у виду да је $p_*:H_n(S^n)\to H_n(\mathbb{R}\mathrm{P}^n)$ множење са 2, закључујемо да је и $h:\pi_n(\mathbb{R}\mathrm{P}^n)\to H_n(\mathbb{R}\mathrm{P}^n)$ такође множење са 2. $\square$

5 Фибрације и раслојења

1. Доказати да је повлачење оријентабилне фибрације такође оријентабилна фибрација (оба базна простора су путно повезана).

Решење: Нека је $p : E \to B$ фибрација са слојем F и f^*p њено повлачење, тј. имамо следећи комутативни дијаграм

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, equal] \arrow[d, hook] & F \arrow[d, hook] \\
f^*(E) \arrow[r, "q"] \arrow[d, "f^*p"'] & E \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

где је

$$f^*E = \{(x, e) \in X \times E \mid f(x) = p(e)\} \subseteq X \times E$$

и $F = F_{f(x_0)} = p^{-1}(f(x_0))$, за неко $x_0 \in X$.

Посматрајмо наредни дијаграм, где су φ_1 и φ_2 одговарајућа дејства (до на хомотопију) фундаменталних група базних простора на слој.

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X, x_0) \arrow[rr, "\varphi_2"] \arrow[dr, "f_*"'] & & {[F, F]^*} \\
& \pi_1(B, f(x_0)) \arrow[ur, "\varphi_1"'] &
\end{tikzcd}$$

Како је фибрација p оријентабилна, то управо значи да је хомоморфизам φ_1 тривијалан. Ми желимо да покажемо да је и f^*p оријентабилна, тј. да је и φ_2 тривијалан, за шта је довољно да се уверимо да горњи дијаграм комутира. Нека је $[u] \in \pi_1(X, x_0)$. Са једне стране је

$$\varphi_2([u]) = L_{u^{-1}},$$

а са друге

$$(\varphi_1 \circ f_*)([u]) = \varphi_2([f \circ u]) = L_{f \circ u^{-1}}.$$

Сетимо се како су дефинисане класе $L_{u^{-1}}$ и $L_{f \circ u^{-1}}$.

$$\begin{tikzcd}
F \times \{0\} \arrow[rr, hook] \arrow[d, hook] & & f^*(E) \arrow[r, "q"] \arrow[d, "f^*p"] & E \arrow[d, "p"] \\
F \times I \arrow[r, "p_2"] \arrow[urr, dashed, "H"] & I \arrow[r, "u^{-1}"] & X \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

Како је f^*p фибрација то постоји решење H горњег дијаграма. Користили смо ознаку

$$l_{u^{-1}}(y) = H(y, 1), \; y \in F,$$

па је $L_{u^{-1}}$ била управо класа $[l_{u^{-1}}]$. Приметимо да је $l_{u^{-1}}(y) \in F$ за свако $y \in F$. Такође, из дијаграма добијамо да је

$$l_{f \circ u^{-1}}(y) = q(\underbrace{H(y, 1)}_{\in F}) = H(y, 1),$$

па је

$$L_{u^{-1}} = L_{f \circ u^{-1}}.$$

Одавде директно добијамо да је $\varphi_2 = \varphi_1 \circ f_*$, па f^*p јесте оријентабилна фибрација. $\square$

2. Доказати да је повлачење раслојења такође раслојење са истим слојем као и полазно.

Решење: Нека је дат дијаграм

$$\begin{tikzcd}
f^*(E) \arrow[r] \arrow[d, "f^*p"'] & E \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

и нека је $x_0 \in X$. Тада је $f(x_0) \in B$ па постоји отворена околина U тачке $f(x_0)$ у B и хомеоморфизам h такав да следећи дијаграм комутира.

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(U) \arrow[r, "h", "\approx"'] \arrow[dr, "p"'] & U \times F \arrow[d, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"] & \\
& U & F
\end{tikzcd}$$

Показаћемо да је $f^{-1}(U)$ отворена околина тачке x_0 која чини f^*p раслојењем. Како је f непрекидно, јасно је да је $f^{-1}(U)$ отворен. Желимо да дефинишемо пресликавања $\widetilde{h}$ и σ таква да је

$$\sigma \circ \widetilde{h} = \mathbb{1}_{(f^*p)^{-1}(f^{-1}(U))}, \quad \widetilde{h} \circ \sigma = \mathbb{1}_{f^{-1}(U) \times F}$$

и да наредни дијаграм комутира.

$$\begin{tikzcd}
(f^*p)^{-1}(f^{-1}(U)) \arrow[rr, dashed, "\widetilde{h}"] \arrow[dr, "f^*p"'] & & f^{-1}(U) \times F \arrow[ll, dashed, bend left, "\sigma"] \arrow[dl, "p_1"] \\
& f^{-1}(U) &
\end{tikzcd}$$

Приметимо да је

$$(f^*p)^{-1}(f^{-1}(U)) = \Big(f^{-1}(U) \times p^{-1}(U)\Big) \cap f^*(E)$$

и дефинишимо

$$\begin{aligned}
&\widetilde{h}(x,e) \stackrel{def}{=} (x, p_2(h(e))), \quad x \in f^{-1}(U),\ e \in p^{-1}(U),\ \text{такво да је } f(x) = p(e), \\
&\sigma(x,y) \stackrel{def}{=} (x, h^{-1}(f(x),y)), \quad x \in f^{-1}(U),\ y \in F.
\end{aligned}$$

Како је

$$p(h^{-1}(f(x),y)) = p_1(f(x),y) = f(x),$$

то је

$$\sigma(x,y) \in (f^*p)^{-1}(f^{-1}(U)),$$

тј. пресликавање σ је добро дефинисано.

Проверимо још да су $\widetilde{h}$ и σ једно другом инверз.

$$\begin{aligned}\sigma\left(\widetilde{h}(x,e)\right) &= \left(x, h^{-1}\left(f(x), p_2\left(h(e)\right)\right)\right)\\ &= \left(x, h^{-1}\left(h(e)\right)\right)\\ &= (x,e)\\ &= \mathbb{1}_{(f^*p)^{-1}(f^{-1}(U))}(x,e),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{h}\left(\sigma(x,y)\right) &= \left(x, p_2\left(h\left(h^{-1}\left(f(x),y\right)\right)\right)\right)\\ &= (x,y)\\ &= \mathbb{1}_{f^{-1}(U)\times F}(x,y).\end{aligned}$$

Дакле, $\widetilde{h}$ је тражени хомеоморфизам. $\square$

Напомена: Као и фибрације, раслојења идентификујемо уколико постоји хомеоморфизам φ такав да наредни дијаграм комутира.

$$\begin{tikzcd} T \arrow[rr, dashed, "\varphi", "\approx"'] \arrow[dr, "q"'] & & E \arrow[dl, "p"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Слично као и за фибрације, можемо идентификовати наредна раслојења.

1) $\mathbb{1}_B^*(E) = E$;

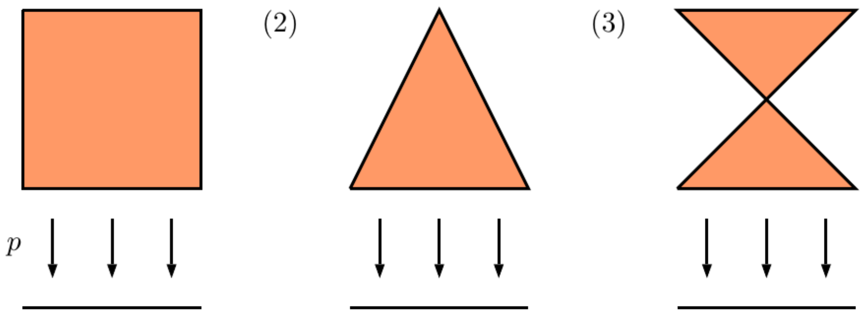
2) $(f\circ g)^*(E) = g^*(f^*(E))$;

3) $c^*(E) = X\times F$, где је $c : X \to B$ константно пресликавање;

4) $i^*(E) = p^{-1}(A)$, где је $i : A \hookrightarrow B$ и $p^{-1}(A)$ рестрикција раслојења p.

3. На слици (1) **представљена је прва пројекција** $p : I^2 \to I$**, која је једно раслојење. Нека су пресликавања на сликама** (2) **и** (3) **рестрикције пројекције** p **на дате потпросторе.**

(1) (2) (3)



(а) Показати да је пресликавање са слике (2) **фибрација, али није раслојење.**

(б) Показати да пресликавање са слике (3) **није фибрација.**

Решење: (а) Означимо са E троугао са слике (2), тј.

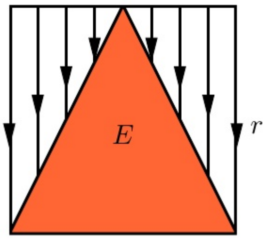
$$E = \{(s,t)\in I^2 \mid t \leqslant 1 - |1-2s|\}.$$

Нека је X произвољни тополошки простор и посматрајмо наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd}
X \times \{0\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & E \arrow[r, hook] \arrow[d, "p|_E"] & I^2 \arrow[dl, "p"] \\
X \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "r\circ\widetilde{H}"] \arrow[urr, dashed, "\widetilde{H}"'] & I &
\end{tikzcd}$$

Како је p фибрација, то постоји подизање $\widetilde{H} : X \times I \to I^2$. Нека је $r : I^2 \to E$ дато са

$$r(s,t) \overset{def}{=} \left(s, \min\{t, 1-|1-2s|\}\right).$$



Тада је $r \circ \widetilde{H}$ тражено подизање хомотопије H у односу на $p|_E$, па $p|_E$ јесте фибрација.

Како је

$$(p|_E)^{-1}(\{0\}) = *,$$
$$(p|_E)^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) = \left\{\frac{1}{2}\right\} \times I,$$

видимо да слојеви нису међусобно хомеоморфни, па $p|_E$ није раслојење.
(б) Ако са q означимо пресликавање са слике (3) имамо да је

$$q^{-1}(\{0\}) = \{0\} \times \{0,1\},$$
$$q^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) = \left\{\frac{1}{2}\right\} \times I,$$

па како ова два слоја нису међусобно хомотопски еквивалентна, то q не може бити фибрација. $\square$

4. Одредити $\pi_3(S^2 \vee S^2)$.

Решење: Применимо 4. задатак из другог поглавља на букет $S^2 \vee S^2$. Добијамо

$$\pi_3(S^2 \vee S^2) \cong \pi_3(S^2) \oplus \pi_3(S^2) \oplus \pi_4(S^2 \times S^2, S^2 \vee S^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \pi_4(S^2 \times S^2, S^2 \vee S^2),$$

па остаје још да одредимо групу $\pi_4(S^2 \times S^2, S^2 \vee S^2)$.

Како је пар $(S^2 \times S^2, S^2 \vee S^2)$ 3-повезан, а $S^2 \vee S^2$ је 1-повезан, то на основу последице 4.15 за свако $i \leqslant 3 + 1 = 4$ природна пројекција $q : (S^2 \times S^2, S^2 \vee S^2) \to ((S^2 \times S^2)/(S^2 \vee S^2), *)$ индукује изоморфизам

$$q_* : \pi_i(S^2 \times S^2, S^2 \vee S^2) \to \pi_i((S^2 \times S^2)/(S^2 \vee S^2), *).$$

Како је $S^2 \times S^2$ CW-комплекс са једном 0-ћелијом, две 2-ћелије и једном 4-ћелијом, а $S^2 \vee S^2$ CW-поткомплекс са једном 0-ћелијом и две 2-ћелије, то ће њихов количник имати једну 0-ћелију и једну 4-ћелију, тј.

$$(S^2 \times S^2)/(S^2 \vee S^2) \approx S^4.$$

Коначно, добијамо да је

$$\pi_4(S^2 \times S^2, S^2 \vee S^2) \cong \pi_4(S^4) \cong \mathbb{Z},$$

па је

$$\pi_3(S^2 \vee S^2) \cong \mathbb{Z}^3. \ \square$$

5. Ако је $n \geqslant 2$ доказати да не постоји ретракт $A \subseteq \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ такав да је $A \simeq \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}$.

Решење: Претпоставимо супротно да постоји ретракција $r : \mathbb{C}\mathrm{P}^n \to A$, тј. комутира дијаграм лево. Применом функтора π_{2n-1} на леви дијаграм добијамо да комутира десни

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}\mathrm{P}^n \arrow[drr, "r"] & & \\ A \arrow[u, hook, "i"] \arrow[rr, "\mathbb{1}_A"] & & A \end{tikzcd} \quad \xrightarrow{\pi_{2n-1}} \quad \begin{tikzcd} 0 \arrow[drr, "r_*"] & & \\ \mathbb{Z} \arrow[u, "i_*"] \arrow[rr, "\mathbb{1}_{\mathbb{Z}}"] & & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

што је немогуће. $\square$

6. За $n \geqslant 3$ одредити групу $\pi_2(V_{n-2}(\mathbb{R}^n))$.

Решење: Посматрајмо познато раслојење

$$\begin{tikzcd} V_{k-m}(\mathbb{R}^{n-m}) \arrow[r] & V_k(\mathbb{R}^n) \arrow[d] \\ & V_m(\mathbb{R}^n) \end{tikzcd}$$

за $k = n-1$ и $m = n-2$, тј. имамо

$$\begin{tikzcd} V_1(\mathbb{R}^2) \arrow[r] & V_{n-1}(\mathbb{R}^n) \arrow[d] \\ & V_{n-2}(\mathbb{R}^n) \end{tikzcd}$$

односно ово је управо раслојење

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r] & SO(n) \arrow[d] \\ & V_{n-2}(\mathbb{R}^n) \end{tikzcd}$$

па постоји дуги тачни низ

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & \pi_2(SO(n)) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & \pi_2(V_{n-2}(\mathbb{R}^n)) \arrow[r, "\varphi"] & \pi_1(S^1) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & \pi_1(SO(n)) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & \cdots \\ & 0 & & \mathbb{Z} & \mathbb{Z}_2 & \end{tikzcd}$$

Из низа добијамо да је

$$\pi_2(V_{n-2}(\mathbb{R}^n)) \cong \operatorname{im}\varphi = \ker i_* \cong \mathbb{Z}$$

јер је i_* или тривијалан хомоморфизам или остатак по модулу 2, па му је свакако језгро изоморфно са $\mathbb{Z}$. $\square$