ЕЛЕМЕНТАРНА МАТЕМАТИКА

решења 08.02.2023.

1. Решити једначине у $\mathbb{R}$

(а) $7^{2x+1} + 3\cdot 28^{x} = 4^{2x+1} \quad / : 4^{2x}$

$$\frac{7\cdot 7^{2x}}{4^{2x}} + 3\cdot\frac{4^{x}\cdot 7^{x}}{4^{2x}} = 4$$

$$7\cdot\left(\frac{7}{4}\right)^{2x} + 3\cdot\left(\frac{7}{4}\right)^{x} = 4 \qquad \text{смена}: \ t = \left(\frac{7}{4}\right)^{x},\ t>0$$

$$7t^2 + 3t - 4 = 0$$

$$t_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+112}}{14} = \frac{-3\pm 11}{14}$$

$$t_1 = -1, \quad t_2 = \frac{4}{7}$$

1° $t_1 < 0$ ↯

2° $t_2 = \frac{4}{7} \Rightarrow \left(\frac{7}{4}\right)^{x} = \frac{4}{7} \Rightarrow \boxed{x=-1}$

(б) $\log_5 x + 2\log_x 5 = 3$

почетни услови: $x>0$ (због $\log_5 x$)

$x \in (0,1)\cup(1,+\infty)$ (због $\log_x 5$)

$$\log_5 x + \frac{2}{\log_5 x} = 3 \qquad \text{смена} \ t = \log_5 x$$

$$t + \frac{2}{t} = 3 \quad / \cdot t$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$t_{1/2} = \frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2} = \frac{3\pm 1}{2}$$

$\Rightarrow t_1 = 2, \quad t_2 = 1$

1° $t_1 = 2$

$\log_5 x = 2 \Rightarrow \boxed{x = 25}$

2° $t_2 = 1$

$\log_5 x = 1 \Rightarrow \boxed{x = 5}$

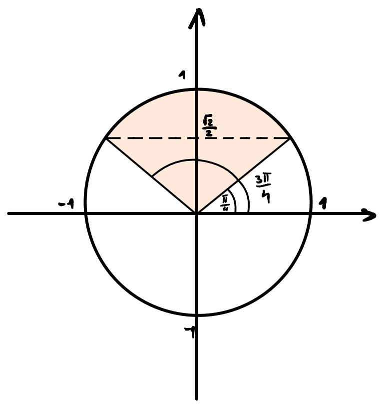
2. Решити неједначине у $\mathbb{R}$

(а) $\sqrt{3}\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} \geq \sqrt{2} \quad / : 2$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{x}{2} + \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{x}{2} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq \frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{12} + 2k\pi \leq \frac{x}{2} \leq \frac{11\pi}{12} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

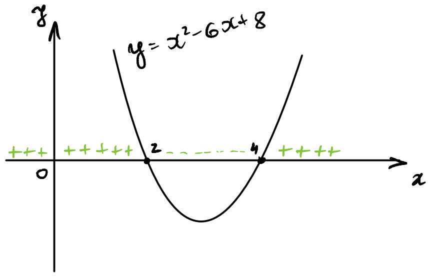
$$\boxed{\frac{\pi}{6} + 4k\pi \leq x \leq \frac{11\pi}{6} + 4k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

(б) $\sqrt{x^2 - 6x + 8} \geq \frac{x}{2} - 1$

почетни услови: $x^2 - 6x + 8 \geq 0$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2}$$

$x_1 = 2, \quad x_2 = 4$



$\Rightarrow \quad x \in (-\infty, -2] \cup [4, +\infty)$

1° $\frac{x}{2} - 1 \leq 0$, тј. $x \leq 2$

$\sqrt{x^2 - 6x + 8} \geq 0 \geq \frac{x}{2} - 1 \Rightarrow$ неједнакост важи за свако $\boxed{x \leq 2}$

2° $\frac{x}{2} - 1 > 0$, тј. $x > 2$

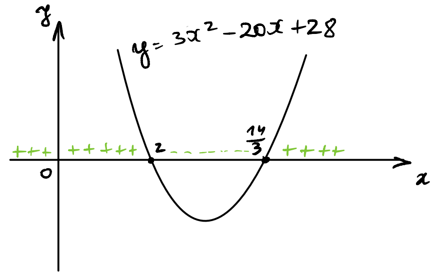
$$\sqrt{x^2 - 6x + 8} \geq \frac{x}{2} - 1 \quad /^2$$

$$x^2 - 6x + 8 \geq \frac{x^2}{4} - x + 1$$

$$\frac{3}{4}x^2 - 5x + 7 \geq 0 \quad / \cdot 4$$

$$3x^2 - 20x + 28 \geq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{400-336}}{6} = \frac{20 \pm 8}{6}$$



$x_1 = 2, \quad x_2 = \frac{14}{3}$

$\Rightarrow \; x \in (-\infty, 2] \cup [\frac{14}{3}, +\infty)$,

али у овом случају је $x > 2$, па

$$\boxed{x \in [\frac{14}{3}, +\infty)}$$

Коначно, кад спојимо 1° и 2°:

$$\boxed{x \in (-\infty, 2] \cup [\frac{14}{3}, +\infty)}$$

(имали смо у виду почетни услов $x \in (-\infty, 2] \cup [4, +\infty)$, али $\frac{14}{3} > 4$)

3. Одредити домен:

(а) $f(x) = \log_x (2-x)$

$x \in (0,1) \cup (1, +\infty)$ (због $\log_x$)

$2 - x > 0$, тј. $x < 2$

$\Rightarrow \; \boxed{\mathcal{D}_f = (0,1) \cup (1,2)}$

(б) $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{|x+2|} - \frac{x-2}{|x+1|}}$

$\left.\begin{array}{l} |x+2| \neq 0, \text{ тј. } x \neq -2 \\ |x+1| \neq 0, \text{ тј. } x \neq -1 \end{array}\right\}$ због разломка

$\frac{x-1}{|x+2|} - \frac{x-2}{|x+1|} \geq 0$ због корена

Како је

$$|x+1| = \begin{cases} x+1, & x \geq -1 \\ -(x+1), & x < -1 \end{cases}$$

$$|x+2| = \begin{cases} x+2, & x \geq -2 \\ -(x+2), & x < -2 \end{cases}$$

имамо 3 случаја.

1° $x > -1$

$$\frac{x-1}{x+2} - \frac{x-2}{x+1} \geq 0 \quad \Big/ \cdot (x+1)(x+2)$$

множимо позитивним бројем па знак неједнакости остаје исти

$$(x-1)(x+1) - (x-2)(x+2) \geq 0$$

$$x^2 - 1 - x^2 + 4 \geq 0$$

$$3 \geq 0 \ ✓$$

$\Rightarrow$ свако $\boxed{x > -1}$ задовољава неједначину

2° $-2 < x < -1$

$$\frac{x-1}{x+2} - \frac{x-2}{-(x+1)} \geq 0 \quad \Big/ \cdot (x+1)(x+1)$$

множимо негативним бројем, знак се окреће

$$x^2 - 1 + x^2 - 4 \leq 0$$

$$2x^2 \leq 5$$

$$x^2 \leq \frac{5}{2}$$

$$\left(x - \sqrt{\frac{5}{2}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{5}{2}}\right) \leq 0$$

$\Rightarrow x \in \left[-\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}}\right]$, али $x \in (-2, -1)$, па

$$\boxed{x \in \left[-\sqrt{\frac{5}{2}}, -1\right)}$$

$3^\circ \quad x < -2$

$$\frac{x-1}{-(x+2)} - \frac{x-2}{-(x+1)} \geq 0 \quad / \cdot (x+1)(x+2)$$

знак се не окреће

$$-(x^2-1) + x^2-4 \geq 0$$

$$-3 \geq 0 \quad \text{↯}$$

у овом случају нема решења

Коначно, спојимо $1^\circ + 2^\circ + 3^\circ$:

$$\mathcal{D}_f = \left[-\sqrt{\frac{5}{2}}, -1\right) \cup (-1, +\infty)$$

(б) $f(x) = \cos(\arcsin x)$

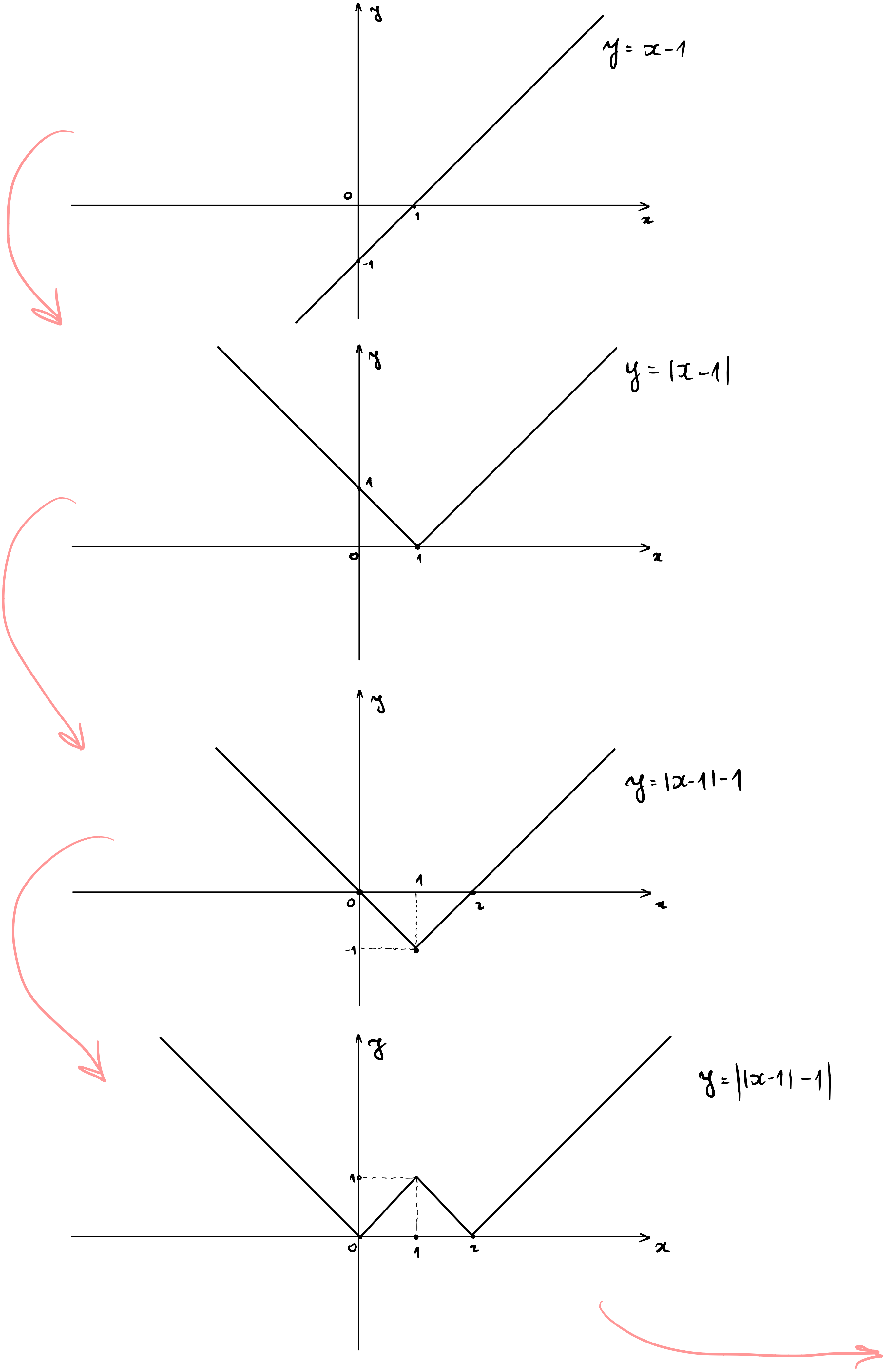
$x \in [-1, 1]$ (због arcsin)

$$\mathcal{D}_f = [-1, 1]$$

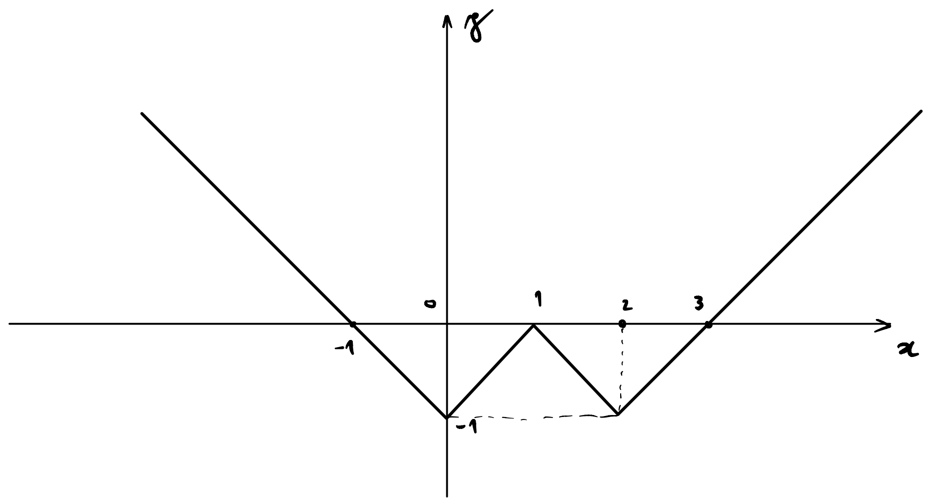
4. Скицирати график $f(x) = |||x-1|-1|-1|$

користимо особине : (1) -1 транслира график на доле за 1

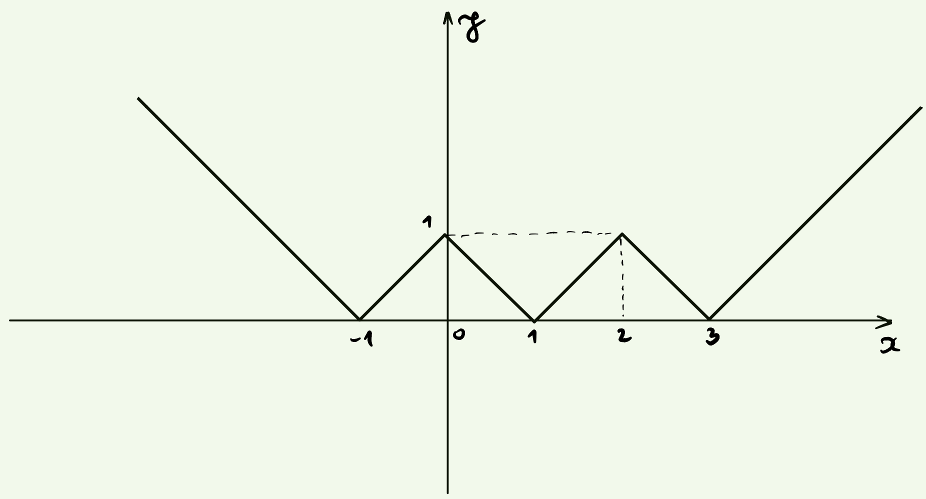
(2) $|\cdot|$ негативни део графика се симетрично пребаци изнад x-осе



y = x-1
y = |x-1|
y = |x-1|-1
y = ||x-1|-1|



$y = ||x-1|-1|-1$



$y = |||x-1|-1|-1|$

5. 17 историјских романа
15 научнофантастичних романа
бира се 4 тако да је више научнофантастичних

$\boxed{17\text{ И} \quad 15\text{ НФ}}$

1° бирамо 3НФ и 1И : $\binom{15}{3}\cdot\binom{17}{1} = \frac{15\cdot 14\cdot 13}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot 17 = 7735$

2° бирамо 4НФ : $\binom{15}{4} = \frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 1365$

укупно: $7735 + 1365 = 9100$

бодовање по задацима:

1. 10 + 10
2. 10 + 10
3. 4 + 12 + 4
4. 20
5. 20