ЕЛЕМЕНТАРНА МАТЕМАТИКА

решења 20.01.2023.

1. Решити једначине у $\mathbb{R}$:

(а) $\log_3(3^x+2)\cdot\log_3(3^{x+1}+6)=2$

$$\log_3(3^x+2)\cdot\log_3\left(3(3^x+2)\right)=2$$

$$\log_3(3^x+2)\cdot\left(\log_3 3+\log_3(3^x+2)\right)=2 \qquad \text{смена: } t=\log_3(3^x+2)$$

$$t(1+t)=2$$
$$t^2+t-2=0$$
$$t_{1/2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot(-2)}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}$$
$$t_1=-2,\quad t_2=1$$

1° $t_1=-2$:

$$-2=\log_3(3^x+2)$$
$$3^x+2=3^{-2}$$
$$3^x=\frac{1}{9}-2<0$$

$\Rightarrow$ нема решења јер $3^x>0$

2° $t_2=1$

$$1=\log_3(3^x+2)$$
$$3^x+2=3$$
$$3^x=1$$
$$\boxed{x=0}$$

(б) $\sin^4\frac{x}{6}+2\cos^4\frac{x}{6}=\frac{3}{2}$

Користимо:
$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$$
$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$\left(\frac{1-\cos\frac{x}{3}}{2}\right)^2+2\left(\frac{1+\cos\frac{x}{3}}{2}\right)^2=\frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos\frac{x}{3}+\frac{1}{4}\cos^2\frac{x}{3}+\frac{1}{2}+\cos\frac{x}{3}+\frac{1}{2}\cos^2\frac{x}{3}=\frac{3}{2}\quad /\cdot 4$$

$$3\cos^2\frac{x}{3}+2\cos\frac{x}{3}-3=0 \qquad \text{смена: } t=\cos\frac{x}{3}\in[-1,1]$$

$$3t^2+2t-3=0$$
$$t_{1/2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+36}}{6}=\frac{-1\pm\sqrt{10}}{3}$$

1° $t_1=\frac{-1-\sqrt{10}}{3}<-1\Rightarrow$ нема решења

2° $t_2=\frac{-1+\sqrt{10}}{3}$

$$\cos\frac{x}{3}=\frac{-1+\sqrt{10}}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{3}=\pm\arccos\frac{-1+\sqrt{10}}{3}+2k\pi \Rightarrow \boxed{x=\pm 3\arccos\frac{-1+\sqrt{10}}{3}+6k\pi,\ k\in\mathbb{Z}}$$

2. Решити неједначину у $\mathbb{R}$:

$$\frac{x+4}{|x-3|} - \frac{\sqrt{x+7}}{x-3} \geq \frac{x-11}{x-3}$$

Приметимо $x \geq -7$ (због корена) и $x \neq 3$ због дељења са $x-3$

1° $x > 3$, тј. $x-3>0$

$$\frac{x+4}{x-3} - \frac{\sqrt{x+7}}{x-3} \geq \frac{x-11}{x-3} \quad / \cdot (x-3)$$

смемо да множимо са $(x-3)$ јер знамо да је $x-3>0$ па се знак неједнакости не мења

$$x+4-\sqrt{x+7} \geq x-11$$

$$\sqrt{x+7} \leq 15 \quad /^2$$

$$|x+7| \leq 225$$

$$x+7 \leq 225$$

$x>3$ у 1° па је $|x+7| = x+7$

$$x \leq 218$$

закључак: $x \in (3, 218]$

2° $x<3$, тј. $x-3<0$

$$-\frac{x+4}{x-3} - \frac{\sqrt{x+7}}{x-3} \geq \frac{x-11}{x-3} \quad / \cdot (x-3)$$

сада је $x-3<0$ па множење окреће знак неједнакости

$$-x-4-\sqrt{x+7} \leq x-11$$

$$\sqrt{x+7} \geq 7-2x \quad /^2$$

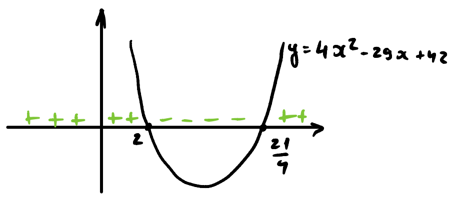
$7-2x>0$ јер $x<3$ па смемо да квадрирамо

$$x+7 \geq 49-28x+4x^2$$

$$4x^2-29x+42 \leq 0$$

$$x_{1/2} = \frac{29 \pm \sqrt{841-672}}{8} = \frac{29 \pm 13}{8}$$

$$x_1 = \frac{21}{4}, \quad x_2 = 2$$



па $x \in [2, \frac{21}{4}]$, али $x<3$, па је $x \in [2,3)$

Коначно решење кад спојимо 1° и 2°:

$$\boxed{x \in [2,3) \cup (3,218]}$$

3. Одредити домен

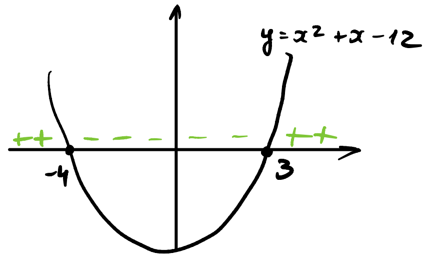
(а) $f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+x-12} - 2\sqrt{2}\right)$

$x^2+x-12 \geq 0$ (због корена)

$x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \dfrac{-1 \pm 7}{2}$

$x_1 = -4, \quad x_2 = 3$

$x \in (-\infty, -4] \cup [3, +\infty)$ (*)



$\sqrt{x^2+x-12} - 2\sqrt{2} > 0$ (због логаритма)

$\sqrt{x^2+x-12} > 2\sqrt{2} \quad /^2$

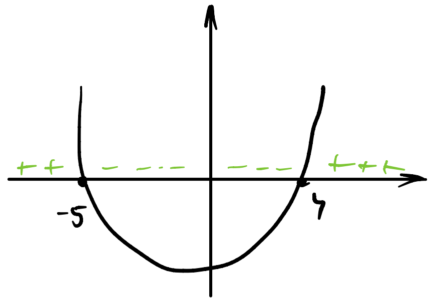
$x^2+x-12 > 8$

$x^2+x-20 > 0$

$x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+80}}{2} = \dfrac{-1 \pm 9}{2}$

$x_1 = -5, \quad x_2 = 4$

$x \in (-\infty, -5) \cup (4, +\infty)$ (**)



Услови (*) и (**) треба истовремено да важе, па је тражени домен:

$$\mathcal{D}_f = (-\infty, -5) \cup (4, +\infty)$$

(б) $f(x) = \operatorname{arctg}(3x - \pi)$

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$$

(в) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{3^x} - \sqrt{3}}$

$\dfrac{1}{3^x} - \sqrt{3} \geq 0$ (због корена)

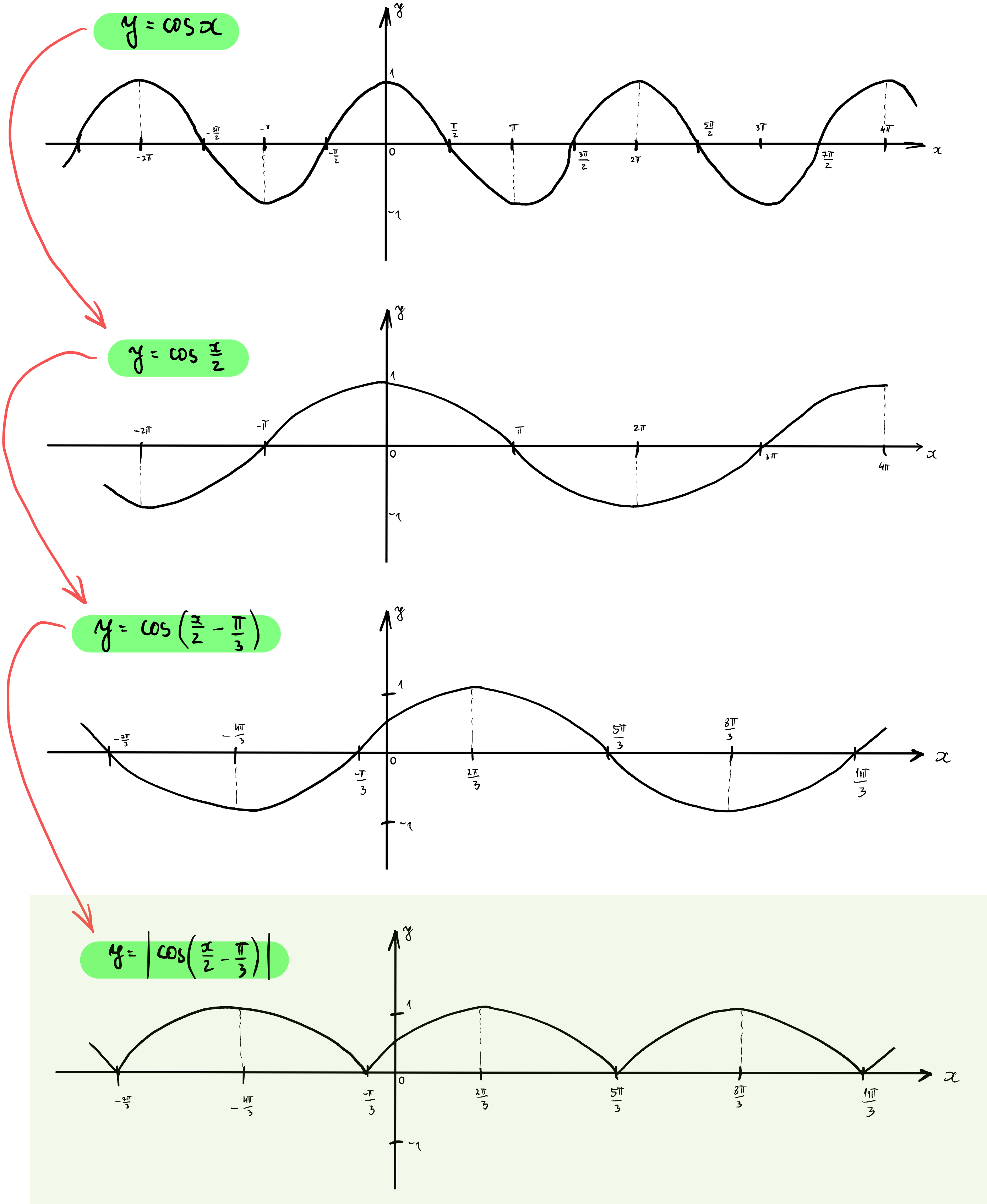
$3^{-x} \geq 3^{\frac{1}{2}} \quad / \ln_3$

$-x \geq \dfrac{1}{2}$

$x \leq -\dfrac{1}{2}$

$$\mathcal{D}_f = \left(-\infty, -\tfrac{1}{2}\right]$$

4. Скицирати график функције $f(x) = \left|\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\right|$



5. Израчунати $\arcsin\left(\cos \frac{19\pi}{5}\right)$

$$\cos\frac{19\pi}{5} = \cos\left(4\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) = \cos\frac{\pi}{5} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\frac{3\pi}{10}$$

$$\Rightarrow \arcsin\left(\cos\frac{19\pi}{5}\right) = \arcsin\left(\sin\frac{3\pi}{10}\right) = \frac{3\pi}{10}$$

НАПОМЕНЕ

1. У првом задатку се не сме користити идентитет

$$\log a \cdot \log b = \log(a+b)$$

јер није тачан.

2. Задатак 1.(б) је могао да се ради на више начина, али главна идеја је пребацити све у sin или у cos па увести смену.

3. Када се неједнакост множи негативним бројем, окреће се знак неједнакости.

4. Функција $y = \operatorname{arctg} x$ је дефинисана на целом $\mathbb{R}$. (Корисно је знати графике свих елементарних функција: степена, корена, експоненцијална, логаритамска, тригонометријске, ...)

5. Резултат у петом задатку мора бити из скупа $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ јер је то кодомен функције $y = \arcsin x$.

Бодовање по задацима:

1. 10 + 10
2. 20
3. 12 + 4 + 4
4. 20
5. 20