# Seminarski radovi

Milena Stojić

April 2022

Na kursu postoje dva seminarska rada koje često možete gledati i kao jednu celinu. (ukoliko u drugom seminarskom radu radite raspisivanje dokaza teoreme iz prvog seminarskog rada)
Seminarski radovi ukupno nose **40** poena.

***Prvi seminarski rad vredi 10 poena***
Prvi seminarski rad se sastoji samo od formulacije teoreme koja predstavlja zadatak sa olimpijade. Iako je ovo samo formulacija tvrđenja bez dokazivanja, neophodno je da uvedete i odgovarajuće definicije neophodne da biste mogli da formulišete teoremu.
Zadatke tražite na linku **(u okviru pdf-ova u koloni Shortlist)**

Evo primera jednog zadatka sa olimpijade:

**A5.** Determine all functions $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ satisfying

$$\left(x + \frac{1}{x}\right) f(y) = f(xy) + f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1}$$

for all $x, y > 0$.

*(South Korea)*

Ovde je zapravo potrebno da se dokaže da su sve funkcije u odgovarajućem obliku (početak rešenja tog zadatka u pdf-u iz poglavlja sa rešenjima):

**A5.** Determine all functions $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ satisfying

$$\left(x + \frac{1}{x}\right) f(y) = f(xy) + f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1}$$

for all $x, y > 0$.

*(South Korea)*

**Answer:** $f(x) = C_1 x + \frac{C_2}{x}$ with arbitrary constants $C_1$ and $C_2$.

Prvi seminarski rad obuhvata samo prikazani deo:

```
definition C1 :: "(real⇒real) ⇒ real ⇒ real" where
"C1 f a = (a*(f 1 - f (a^2)) - (f (1/a^2) - f 1)/a)/(a + 1/a - (a^3 + 1/(a^3)))"


definition C2 :: "(real⇒real) ⇒ real ⇒ real" where
"C2 f a = ((f 1 - f (a^2))/a - a*(f (1/a^2) - f 1))/(a + 1/a - (a^3 + 1/(a^3)))"


theorem final_theorem:
  fixes t::real
  fixes a::real
  fixes f::"real⇒real"
  assumes "t > 0" "a > 1" "∀ x y. x > 0 ∧ y > 0 ⟶ (x + 1/x)*(f y) = f (x*y) + f (y/x)"
  shows "f t = (C1 f a)*t + (C2 f a)/t"
```

Ovde je samo formulisana teorema bez dokazivanja, ali da bi mogla da se formuliše, bilo je neophodno da se uvedu definicije C1 i C2.

***Drugi seminarski rad vredi 30 poena***

Drugi seminarski rad je raspisivanje nekog dokaza. Najčešće to bude raspisivanje dokaza tvrđenja iz prvog seminarskog rada, ali ukoliko ne želite da to radite, možete raditi i raspisivanje drugog matematičkog dokaza. U tom slučaju se **obavezno dogovarate sa profesorom** oko matematičke teme koju biste mogli da radite.

Ukoliko radite raspisivanje dokaza tvrđenja iz prvog seminarskog rada, ideja je da vi **prethodno prvo pročitate rešenje** (tj. dokaz) iz materijala sa olimpijade. Nakon što se upoznate sa dokazom iz materijala, potrebno je da isti raspišete u okviru Isabelle-a.

U datom zadatku sa olimpijade, u dokumentu su data dva moguća dokaza tvrđenja. U seminarskom radu je iskorišćen prvi dokaz koji je prikazan na narednoj stranici.

**Napomena: Iako drugi seminarski rad podrazumeva da vi znate dokaz tvrđenja "na papiru", to nikako ne znači da je seminarski rad lak i da bi trebalo da se opustite!**
Često će vam se događati da 'zapnete' i na naizgled "trivijalnim" koracima. (koji su vama sa vašim matematičkim iskustvom i na papiru trivijalni)

***Puno sreće u izradi seminarskih radova!***

**Solution 1.** Fix a real number $a > 1$, and take a new variable $t$. For the values $f(t)$, $f(t^2)$, $f(at)$ and $f(a^2t^2)$, the relation (1) provides a system of linear equations:

$$
\begin{array}{lrcl r}
x = y = t: & \left(t + \frac{1}{t}\right) f(t) & = & f(t^2) + f(1) & \text{(2a)} \\
x = \frac{t}{a},\ y = at: & \left(\frac{t}{a} + \frac{a}{t}\right) f(at) & = & f(t^2) + f(a^2) & \text{(2b)} \\
x = a^2t,\ y = t: & \left(a^2t + \frac{1}{a^2t}\right) f(t) & = & f(a^2t^2) + f\left(\frac{1}{a^2}\right) & \text{(2c)} \\
x = y = at: & \left(at + \frac{1}{at}\right) f(at) & = & f(a^2t^2) + f(1) & \text{(2d)}
\end{array}
$$

In order to eliminate $f(t^2)$, take the difference of (2a) and (2b); from (2c) and (2d) eliminate $f(a^2t^2)$; then by taking a linear combination, eliminate $f(at)$ as well:

$$\left(t + \frac{1}{t}\right) f(t) - \left(\frac{t}{a} + \frac{a}{t}\right) f(at) = f(1) - f(a^2) \quad \text{and}$$

$$\left(a^2t + \frac{1}{a^2t}\right) f(t) - \left(at + \frac{1}{at}\right) f(at) = f(1/a^2) - f(1), \quad \text{so}$$

$$\left(\left(at + \frac{1}{at}\right)\left(t + \frac{1}{t}\right) - \left(\frac{t}{a} + \frac{a}{t}\right)\left(a^2t + \frac{1}{a^2t}\right)\right) f(t)$$
$$= \left(at + \frac{1}{at}\right)\big(f(1) - f(a^2)\big) - \left(\frac{t}{a} + \frac{a}{t}\right)\big(f(1/a^2) - f(1)\big).$$

Notice that on the left-hand side, the coefficient of $f(t)$ is nonzero and does not depend on $t$:

$$\left(at + \frac{1}{at}\right)\left(t + \frac{1}{t}\right) - \left(\frac{t}{a} + \frac{a}{t}\right)\left(a^2t + \frac{1}{a^2t}\right) = a + \frac{1}{a} - \left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right) < 0.$$

After dividing by this fixed number, we get

$$f(t) = C_1 t + \frac{C_2}{t} \tag{3}$$

where the numbers $C_1$ and $C_2$ are expressed in terms of $a$, $f(1)$, $f(a^2)$ and $f(1/a^2)$, and they do not depend on $t$.

The functions of the form (3) satisfy the equation:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right) f(y) = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(C_1 y + \frac{C_2}{y}\right) = \left(C_1 xy + \frac{C_2}{xy}\right) + \left(C_1 \frac{y}{x} + C_2 \frac{x}{y}\right) = f(xy) + f\left(\frac{y}{x}\right).$$