Метрички простори

Задаци

1. Дато је пресликавање
$$f\colon X \to \mathbb{R}$$
где је $X \subset \mathbb{R}$ компактан скуп и на $\mathbb{R}$ се подразумева Еуклидска метрика. Доказати да је f непрекидно пресликавање ако и само ако је скуп $\left\{(x, f(x)) \,\middle|\, x \in X\right\}$ компактан у $\mathbb{R}^2$ са Еуклидском метриком.

2. Нека је
$$Y = \left\{f\colon [0,1] \to [0,1] \;\middle|\; \forall x \in [0,1]\ \exists f''(x)\right\}$$
са метриком
$$d\left(f_1, f_2\right) = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |f_1(t) - f_2(t)|.$$
Скуп $S \subseteq Y$ је задат са
$$S = \left\{f \in Y \;\middle|\; \exists x_0 \in [0,1]\ f''(x_0) = 0\right\}.$$
   (а) Испитати компактност и комплетност скупа $Y \setminus S$.
   (б) Доказати да за сваку строго конвексну функцију f постоји $\delta > 0$ такво да за сваку строго конкавну функцију g постоји $x_0 \in [0,1]$ тако да је $|f(x_0) - g(x_0)| > \delta$. Закључити да $Y \setminus S$ није повезан.
   (в) Испитати повезаност скупа S.

3. Нека је (X, d) произвољан метрички простор и нека је дато пресликавање
$$f\colon [0,1]^2 \to X$$
где на $[0,1]^2$ подразумевамо Еуклидску метрику. Ако за повезан скуп $A \subseteq X$ важи
$$f(0,0) \in A, \quad f(1,1) \notin A, \quad \forall (x,y) \in [0,1]^2\ f(x,y) \notin \partial A$$
доказати да f није непрекидно пресликавање. Да ли тврђење важи уколико се изостави услов да је скуп A повезан?

4. Нека је Y скуп свих реалних низова и нека су дата пресликавања
$$m\colon Y^2 \to \mathbb{N}, \quad m(x,y) = \left\{\min i \;\middle|\; x_i \neq y_i\right\},$$
и
$$d\colon Y^2 \to \mathbb{N}, \quad d(x,y) = \begin{cases} \ln\left(1 + \frac{1}{m(x,y)}\right), & x \neq y, \\ 0, & x = y \end{cases}.$$
   (а) Доказати да је са d задата метрика на скупу Y.
   (б) Да ли је метрички простор (Y, d) повезан?
   (в) Испитати да ли је метрика d тополошки и метрички еквивалентна дискретној метрици.
   (г) Испитати конвергенцију низа $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ако је
$$a_n = \Bigg(\underbrace{1, 2, 3, \ldots, n}_{n}, 0, 0, \ldots\Bigg).$$

5. Дат је компактан метрички простор X и непрекидно пресликавање

$$g \colon X \to \mathbb{R}^n.$$

Ако је $F \subseteq X$ доказати да је слика F при пресликавању g ограничен скуп. Показати да тврђење не важи уколико X није компактан.

6. Дато је пресликавање

$$d \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad d(x,y) = \begin{cases} \|x\| + \|y\|, & x \text{ и } y \text{ су линеарно независни} \\ \|x-y\|, & x \text{ и } y \text{ су линеарно зависни} \end{cases},$$

где је подразумевана Еуклидска норма.

(а) Доказати да је са d задата метрика на $\mathbb{R}^3$.

(б) Испитати отвореност и повезаност скупа $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x < 2,\ 0 < y < 2,\ z = 0\}$ у метрици d.

(в) Да ли је метрика d тополошки еквивалентна Еуклидској метрици?

(г) Испитати конвергенцију низа $\left(1, 1, \frac{1}{n}\right)$ у метрици d. Да ли је скуп

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant 2,\ 0 \leqslant z \leqslant 2\}$$

компактан у метрици d?

7. Дат је скуп

$$A_{\alpha,\beta} = \left\{ f_{\alpha,\beta} = e^{-\alpha t} - \operatorname{arctg}(1 + \beta t) \mid 0 \leqslant \alpha \leqslant 1,\ 0 \leqslant \beta \leqslant \pi \right\} \subseteq C[0,1].$$

Ако је метрика на $C\,[0,1]$ задата са

$$d(x,y) = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t) - y(t)|$$

испитати компактност, комплетност и повезаност скупа $A_{\alpha,\beta}$.

8. Одредити дијаметар подскупа

$$A_{\alpha,0} = \left\{ f_\alpha = e^{-\alpha t} - \frac{\pi}{4} \mid 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \right\} \subseteq A_{\alpha,\beta}.$$

9. Нека је (X,d) компактан метрички простор. Ако за подскуп $K \subset X$ важи да је свака непрекидна функција $f \colon K \to \mathbb{R}$ и равномерно непрекидна доказати да је K компактан.

10. Нека је X простор реалних низова чији чланови узимају вредности између 0 и 1. Дато је пресликавање

$$d \colon X \times X \to \mathbb{R} \quad d(x,y) = \sup\left\{ |x_n - y_n| \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

(а) Доказати да је (X,d) метрички простор.

(б) Да ли је (X,d) компактан?

(в) Да ли је (X,d) комплетан?

(г) Да ли је (X,d) повезан?

11. Нека су (M, d_M) и (N, d_N) метрички простори ($M, N \neq \emptyset$) и $f \colon M \to N$ пресликавање такво да за свако $x \in M$ и свако $r > 0$ важи

$$f(B[x;r]) = B[f(x);r]\ .$$

(а) Доказати да је f сурјективно пресликавање.

(б) Доказати да је f Липшицово пресликавање са Липшицовом константом $L = 1$.

(в) Доказати да је f отворено пресликавање.

(г) Доказати да за свако $x \in M$ и свако $y \in N$ постоји $x_0 \in M$ такво да важи $d_N(f(x), y) = d_M(x, x_0)$.

(д) Ако је пресликавање f и инјективно, доказати да је тада f изометрија.

12. Нека је (M, d) метрички простор и $U \subsetneq M$ непразан отворен строги подскуп. За свако $x \in U$, дефинишимо број $r_x = \sup\{r > 0 \mid B(x; r) \subset U\}$.

(а) Нека је $a \in U$. Доказати да $B(a; r_a) \subset U$ и да за свако $\varepsilon > 0$ постоји $x \in M \setminus U$ такво да $r_a \leqslant d(a, x) < r_a + \varepsilon$.

(б) Нека је $a \in U$. Доказати да за свако $b \in B(a; r_a/3)$ важи $a \in B(b; r_b)$.

(в) Претпоставимо да постоји пребројив поскуп K метричког простора (M, d) такав да је $\overline{K} = M$. Доказати да је

$$U = \bigcup_{x \in U \cap K} B(x; r_x) \ .$$

13. Нека је (X, d) повезан метрички простор и нека су $a, b \in X$ две различите тачке тог простора. Нека је $f\colon (X, d) \to (\mathbb{R}, d_e)$ (где је d_e ознака за стандардно еуклидско растојање у скупу $\mathbb{R}$) пресликавање дато са

$$f(x) = |d(x, a) - d(x, b)| \ .$$

(а) Доказати да је f непрекидно пресликавање.

(б) Доказати да је $f(c) = 0$ за неко $c \in X$.

(в) Доказати да је $f(X) = [0, d(a, b)]$.

14. Дато је пресликавање

$$l\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad l\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) = \begin{cases} |y_1| - |y_2| & , \ x_1 = x_2 \\ |y_1| + |y_2| + |x_1 - x_2| & , \ x_1 = x_2 \end{cases} .$$

(а) Доказати да l задаје метрику на $\mathbb{R}^2$.

(б) Описати кугле полупречника 3 са центрима $(0, 0)$ и $(1, 1)$.

(в) Да ли је овако задата метрика тополошки еквивалентна Еуклидској метрици?

(г) Ако са e означимо Еуклидску метрику испитати непрекидност пресликавања

$$f\colon \left(\mathbb{R}^2, l\right) \to \left(\mathbb{R}^2, e\right) \qquad f(x) = x,$$

$$g\colon \left(\mathbb{R}^2, e\right) \to \left(\mathbb{R}^2, l\right) \qquad g(x) = x.$$