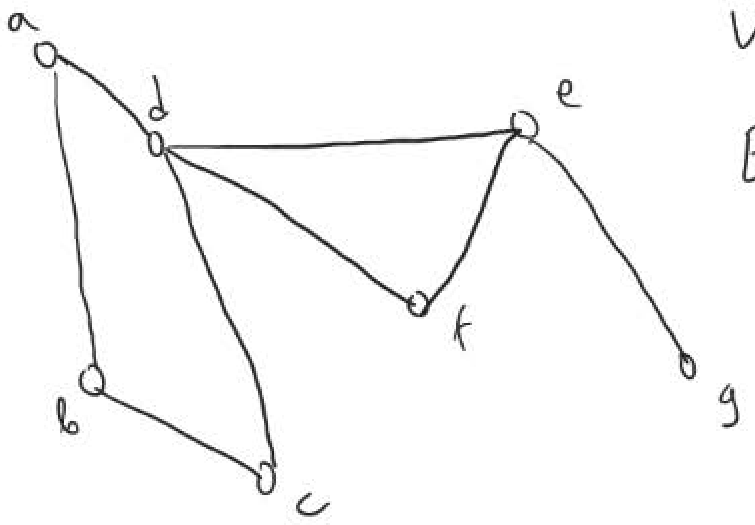
primer: $G=(V,E)$



$V=\{a,b,c,d,e,f,g\}$

$E=\{ab, ad, bc, cd, de, df, ef, eg\}$

$d_G(a)=2 \quad d_G(b)=2 \quad d_G(c)=2$

$d_G(d)=4 \quad d_G(e)=3 \quad d_G(f)=2 \quad d_G(g)=1$

$\Delta(G)=4 \quad \delta(G)=1$

$N_G(a)=\{b,d\} \quad N_G(b)=\{a,c\} \quad N_G(c)=\{b,d\}$

$N_G(d)=\{a,c,e,f\} \quad N_G(e)=\{d,f,g\} \quad N_G(f)=\{d,e\} \quad N_G(f)=\{g\}$

primer: Ne postoji graf sa stepenima čvorova 6,6,6,6,6,6,5,3,3,3,3.

pp postoji $G=(V,E)$ sa ovakvim stepenima čvorova

$$\sum_{v\in V} d_G(v)=2|E|$$

$$2|E|=53 \ ↯$$

ne postoji ovakav graf

1. U jednoj grupi učenika, neki od njih se međusobno poznaju. Pri tome

dva učenika koji imaju zajedničkog poznanika uvek poznaju različit broj učenika iz te grupe. Dokazati da postoji učenik koji poznaje samo jednog učenika.

V – učenici E – poznanstva

$G=(V,E)$

$|V| = n$

pps $\{d_G(v) \mid v \in V\} = \{0,2,3,\dots,n-1\}$

Neka je $d_G(u) = \Delta(G) = k \geq 2$ $\quad N_G(u) = \{v_1,\dots,v_k\}$

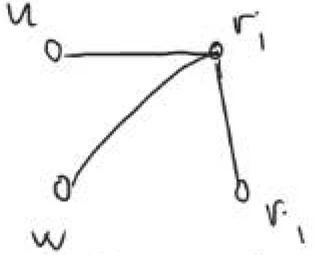
$$\underbrace{\{d_G(v_i) \mid 1 \leq i \leq k\}}_{k \text{ elemenata}} \subseteq \underbrace{\{2,3,\dots,k\}}_{k-1 \text{ elemenata}} \ \lightning$$

2. U skupu od n ljudi, $n \geq 4$, između svake četiri osobe postoji jedna osoba koja poznaje preostale tri. Dokazati da u tom skupu postoji osoba koja poznaje sve ostale.

$G=(V,E)$

pps $\Delta(G) = k < n-1$

$d_G(u) = k \quad uw \notin E$



za neko i, j

$v_i v_l \in E \quad l \neq i$

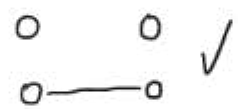
(uzimamo v_i, v_l, u, w i koristimo uslov)

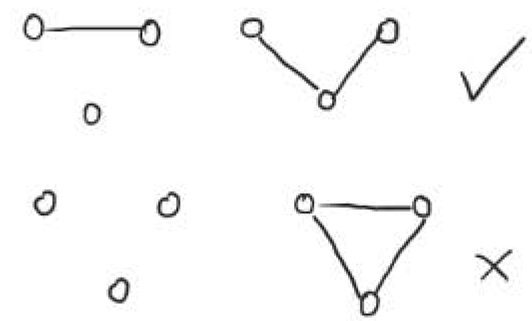
$N_G(u)=\{v_1,\dots,v_k\}$

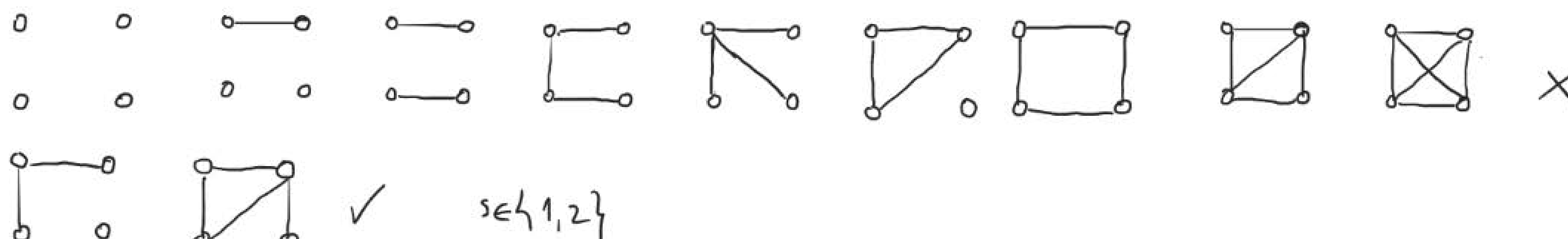
Dakle, $\Delta(G)=n-1$

2

3. U grafu sa n čvorova svi stepeni su različiti osim stepena s koji se pojavljuje dvaput. Odrediti stepen s.

$n=2$:  $s\in\{0,1\}$

$n=3$:  $s=1$

$n=4$:  $s\in\{1,2\}$

$n\geq 5$: Neka je $G=(V,E)$ zadati graf i $D=\{d(v)\mid v\in V\}$.

Kako $|D|=n-1$, a nemoguće je da $\{0,n-1\}\subseteq D$, imamo dva slučaja:

1° $0\notin D$ $\quad 2^\circ$ $n-1\notin D$

1° niz stepena je: $1,2,\dots,s,s,\dots,n-1$

$s \neq n-1$: u suprotnom nema čvora stepena 1

Ako bismo izbacili taj čvor stepena $n-1$, stepen svih čvorova bi se smanjio za 1 i dobili bismo graf koji ispunjava uslove zadatka sa $n-1$ čvorova.

broj čvorova : niz stepena

n : $1, 2, \ldots, s, s, \ldots n-1$

$n-1$: $\cancel{0}, 1, \ldots, s-1, s-1, \ldots, n-3$ $\quad$ ($s-1 \neq 0$: u suprotnom nema čvora stepena $n-3$)

$n-2$: $1, \ldots, s-1, s-1, \ldots, n-3$

$n-3$: $0, \ldots, s-2, s-2, \ldots, n-5$

$\ldots$

$n-2i$: $1, \ldots, s-i, s-i, \ldots, n-2i-1$

$n-2i-1$: $0, 1, \ldots s-i-1, s-i-1, \ldots, n-2i-3$

Do kog koraka možemo da ponavljamo postupak?

Dok god možemo da smanjujemo s.

Proces staje kad $s-k-1=0$ ili $s-l=n-2l-1$.

$(n-2k-1)$ $\quad$ $(n-2l)$

$k=s-1$ $\quad$ $l=n-s-1$

Sa druge strane, to je graf koji i dalje zadovoljava uslove zadatka: $n-2s+1=2$ ili $-n+2s+2=2$

(graf sa 2 čvora) $\quad$ $n=2s+1$ $\quad$ $n=2s$

U prvom slučaju n je neparan i $s=\frac{n-1}{2}$,

u drugom slučaju n je paran i $s=\frac{n}{2}$

2° niz stepena je: $0, 1, \dots, s, s, \dots, n-2$

broj čvorova: niz stepena

$n: \cancel{0}, 1, \dots, s, s, \dots, n-2$

$n-1: 1, 2, \dots, s, s, \dots, \cancel{n}-2$

$n-2: \cancel{0}, 1, \dots, s-1, s-1, \dots, n-4$

$n-3: 1, 2, \dots, s-1, s-1, \dots n-4$

...

$n-2i: 0, 1, \dots, s-i, s-i, \dots, n-2i-2$

$n-2i-1: 1, 2, \dots, s-i, s-i, \dots n-2i-2$

Proces staje kad $s-k=0$ ili $s-l=n-2l-2$.

$(n-2k)$ $\qquad (n-2l-1)$

$k=s$ $\qquad l=n-s-2$

Sa druge strane, to je graf koji i dalje zadovoljava uslove zadatka: $n-2s=2$ ili $n-2n+2s+3=2$

(graf sa 2 čvora) $n=2s+2$ $\qquad n=2s+1$

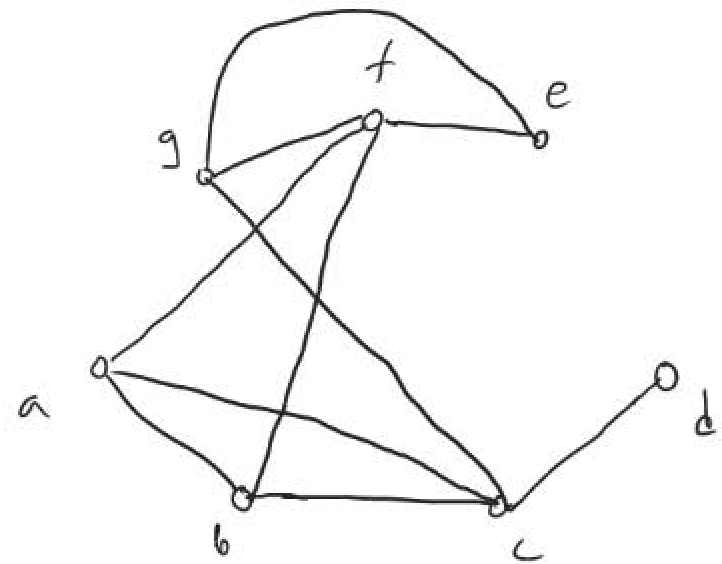
U prvom slučaju n je paran i $s=\frac{n-2}{2}$,

u drugom slučaju n je neparan i $s=\frac{n-1}{2}$.

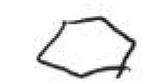
Dakle, za n paran: $s \in \{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}-1\}$

n neparan: $s=\frac{n-1}{2}$

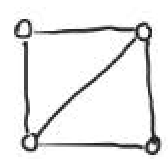
primer:



- efabfg je šetnja koja nije zatvorena, a nije ni put
- dcgefab je put
- gefbafg je zatvorena šetnja koja nije ciklus
- acgefba je ciklus



4. Neka graf G ima $2n$ čvorova i n^2+1 grana, $n \geq 2$. Dokazati da G sadrži trougao

$n=2$: 

Dokazaćemo indukcijom po n.

baza $n=2$: ✓

IH: Graf sa $2n$ čvorova i n^2+1 grana sadrži trougao.

IK: Neka $G=(V,E)$ ima $2n+2$ čvorova i n^2+2n+2 grana.

Neka su u i w čvorovi povezani granom.

Ako $N(u) \cap N(w) \neq \emptyset$, G ima trougao.

Neka $N(u) \cap N(w) = \emptyset$. Tada $\#\{e \in E \mid u \in e \text{ ili } w \in e\} \leq 2n+1$.

Neka je G' dobijen od G izbacivanjem čvorova u i w, kao i odgovarajućih grana (G' označavamo sa $G \setminus \{u,w\}$):

Tada G' ima $2n$ i bar n^2+1 grana, pa na osnovu IH, G' ima trougao, pa time i G'.

$\diamond$

1. Neka G sadrži ciklus C i put dužine bar k između neka dva čvora u C. Dokazati da G sadrži ciklus dužine bar $\sqrt{k}$.

Neka je p dati put i neka su $\underset{\text{tok}}{v_{i_1}}, \dots, \underset{\text{kraj puta}}{v_{i_t}}$ zajednički čvorovi ciklusa i puta.

Ako je $t \geq \sqrt{k}$, onda je C dužine bar $\sqrt{k}$.

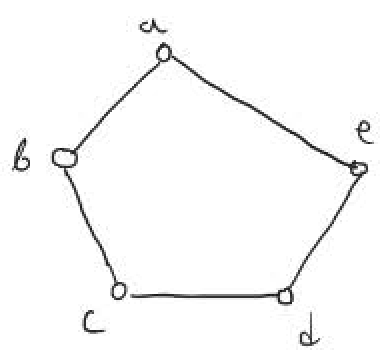
Neka je $t < \sqrt{k}$.

Za neko $j \in [t-1]$ imamo da se između v_{i_j} i $v_{i_{j+1}}$ nalazi bar $\frac{k-t}{t-1}$ čvorova koji su van C.

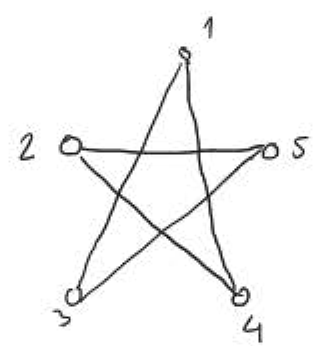
$$\frac{k-t}{t-1} > \frac{k-\sqrt{k}}{t-1} > \frac{k-\sqrt{k}}{\sqrt{k}-1} = \sqrt{k}$$

Spajanjem $v_{i_j}v_{i_{j+1}}$-puta čiju unutrašnjost čine ti čvorovi i $v_{i_j}v_{i_{j+1}}$-puta na samom ciklusu C dobijamo ciklus dužine bar $\sqrt{k}$.

primer: 1°

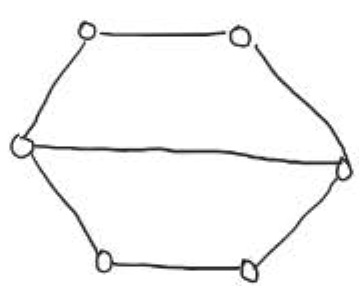


$\cong$

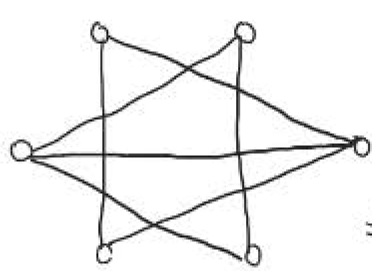


$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

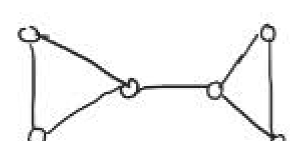
2°



$\not\cong$



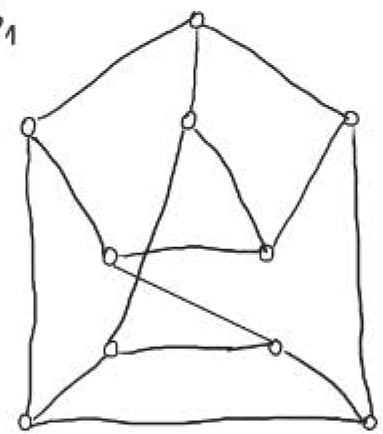
$\cong$



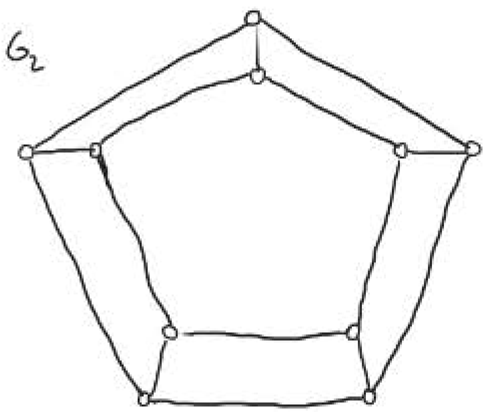
na primer: desni graf nema ciklus dužine 6; levi graf nema trouglove ...

2 Ispitati da li su sledeći grafovi izomorfni.

G_1



G_2



G_1 i G_2 imaju isti broj čvorova (i grana).
Svi čvorovi u grafovima G_1 i G_2 su stepena 3.

Međutim, G_2 ima samo dva ciklusa stepena 5.

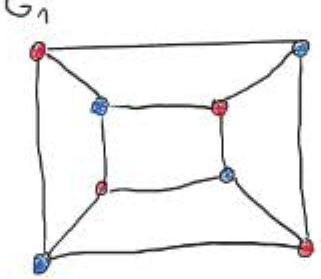
(Ako je C ciklus koji ima čvorove na „unutrašnjem i spoljašnjem" petouglu, a C nije dužine 4, onda, C mora biti dužine veće od 5.)

G_1 ima više od dva ciklusa dužine 5, pa $G_1 \not\cong G_2$.

2

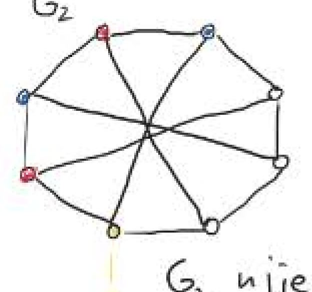
3. Ispitati da li su sledeći grafovi izomorfni.

G_1



G_1 je bipartitni graf.

G_2

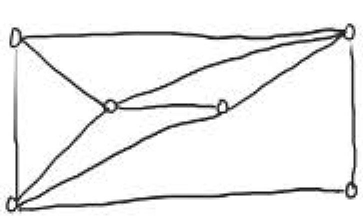


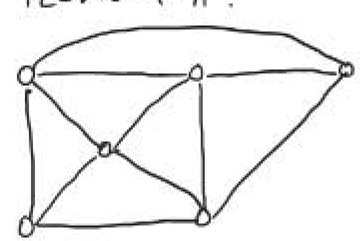
G_2 nije bipartitni, pa $G_1 \not\cong G_2$.

G_1 i G_2 imaju isti broj čvorova i grana, a i svi čvorovi su im stepena 3.

3

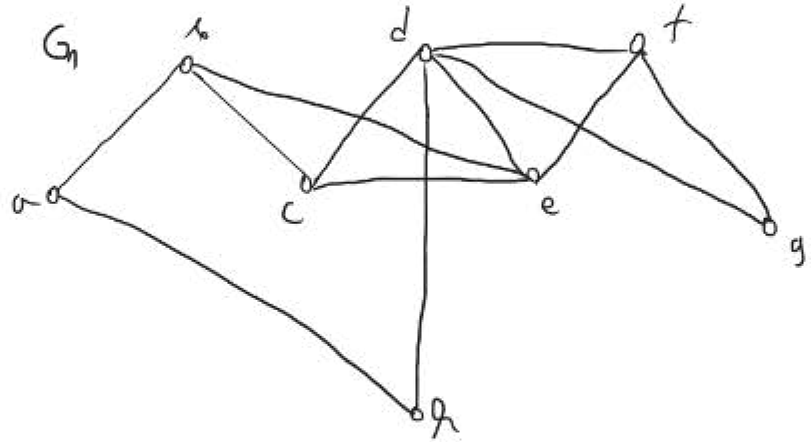
4. Ispitati da li su sledeći grafovi izomorfni.

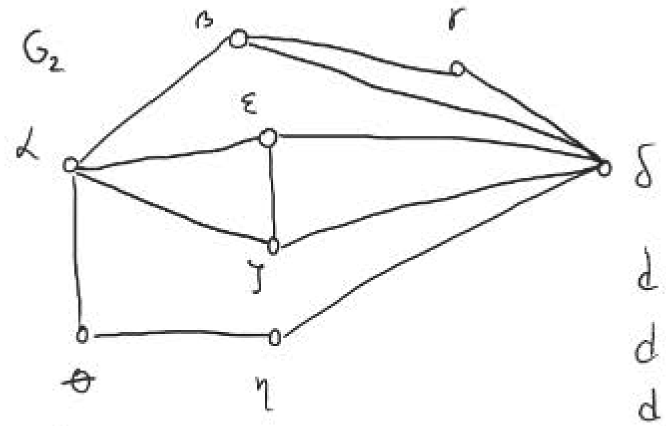




domaći

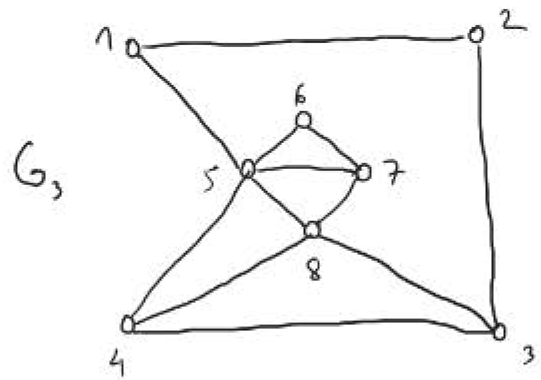
5. Ispitati koji od sledećih grafova su izomorfni.





$d(\alpha)=4$ $d(\varepsilon)=3$
$d(\beta)=3$ $d(\zeta)=3$
$d(\gamma)=2$ $d(\eta)=2$
$d(\delta)=5$ $d(\theta)=2$

$d(a)=2$ $d(e)=4$
$d(b)=3$ $d(f)=3$
$d(c)=3$ $d(g)=2$
$d(d)=5$ $d(h)=2$



$d(1)=2$ $d(5)=5$
$d(2)=2$ $d(6)=2$
$d(3)=3$ $d(7)=3$
$d(4)=3$ $d(8)=4$

de i 58 su grane u G_1 i G_3 redom, a $\alpha\delta$ nije grana u G_2, pa $G_2 \not\cong G_1, G_3$

$\Phi : G_1 \longrightarrow G_3$ $d \longmapsto 5$ jedini čvorovi stepena 5
$e \longmapsto 8$ jedini čvorovi stepena 4
a (2) je jedini čvor u G_1 (G_3) koji nije u $N_{G_1}(d)$ ($N_{G_3}(5)$)
$a \longmapsto 2$: $h \longmapsto 1$
$b \longmapsto 3$ (samo pratimo okoline i stepene)

$g \longmapsto 6$
$f \longmapsto 7$
$c \longmapsto 4$

$G_1 \cong G_3$

5

def: Komplement grafa $G=(V,E)$ je graf $\overline{G}=(V, \binom{V}{2} \setminus E)$.

6. Ako je $G=(V,E)$ izomorfan svom komplementu, dokazati da G ima $4k$ ili $4k+1$ čvorova, za neki prirodan broj k.

$G \cong \overline{G}$ imaju po m grana

$|V| = n$

$2m = \frac{n(n-1)}{2}$ $\quad 4 \mid n(n-1)$: $n \equiv 0 \pmod 4$ ili $n \equiv 1 \pmod 4$

6

primer

Bulova mreža B_n $(n \geq 1)$ je graf gde je skup čvorova $\mathcal{P}([n])$ i skupovi X i Y su povezani granom ako $|X \Delta Y| = 1$.

n-kocka Q_n $(n \geq 1)$ je graf gde je skup čvorova $\mathbb{Z}_2^n$ i dva čvora su povezani granom ako se razlikuju na tačno jednoj koordinati.

B_n i Q_n su bipartitni

$$\mathcal{P}([n]) = \{X \subseteq [n] \mid 2 \mid |X|\} \sqcup \{Y \subseteq [n] \mid 2 \nmid |Y|\}$$

$$\mathbb{Z}_2^n = \{u \in \mathbb{Z}_2^n \mid \|u\| = 0\} \sqcup \{w \in \mathbb{Z}_2^n \mid \|w\| = 1\}$$

$v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$

$\|v\| = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$ (u $\mathbb{Z}_2$)

7. U bipartitnom grafu $G = (V_1 \sqcup V_2, E)$, $|V_1| = 2022$ i $d(v) \leq 10$ za sve $v \in V_1$. Ako između svaka tri čvora iz V_1 postoje bar dva koji imaju zajedničkog suseda, dokazati da u V_2 postoji čvor stepena bar 102.

pps $d(w) < 102$ za sve $w \in V_2$

1° $u, v \in V_1$ t.d. $N(u) \cap N(v) = \emptyset$

za svako $x \in V_1 \setminus \{u, v\}$, imamo ili $N(u) \cap N(x) \neq 0$ ili $N(v) \cap N(x) \neq 0$.

Bez umanjenja opštosti, bar 1010 čvorova ima zajedničkog suseda sa čvorom u.

Kako $d(u) \leq 10$, to znači da najviše 10 čvorova ima bar 1011 suseda ukupno, pa postoji $w \in V_2$ t.d. $d(w) \geq 102$

2° Svaka dva čvora iz V_1 imaju zajedničkog suseda.

Tada najviše 10 čvorova ima 2022 suseda ukupno, pa postoji $w \in V_2$ t.d. $d(w) \geq 102$.

7

1. Neka je $G=(V,E)$ graf bez trouglova t.d. $\delta(G) > \frac{2|V|}{5}$. Dokazati da je G bipartitan.

$|V|=n$

za $n \leq 4$, očito važi (jer nema trouglove, a to su jedini mogući ciklusi neparne dužine)

Neka je $n \geq 5$.

pps G nije bipartitan: G ima ciklus neparne dužine.

Neka je C najkraći ciklus neparne dužine $C = c_1 \dots c_k c_1$ k neparan, ≥ 5

za svako $i \in [k]$, $d(c_i) > 2$, pa imaju suseda koji nije c_{i-1}, c_{i+1} $(c_0 = c_k, c_{k+1} = c_1)$.

Svaki c_i mora da ima suseda van C (u suprotnom dobijamo kraći ciklus neparne dužine).

Neka su $v_1, \dots, v_{n-k}$ van C. $d(v_i) > 2$ za sve $i \in [n-k]$.

v_i ne može da ima 3 ili više suseda u C: u suprotnom dobijamo ciklus neparne dužine koji je kraći od C.

$$\sum_{i=1}^{k} d(c_i) \leq 2k + 2(n-k) = 2n$$

Dakle, za neko $i \in [k]$: $d(c_i) \leq \frac{2n}{k} \leq \frac{2n}{5} < \delta(G)$. ↯

G jeste bipartitan.

$\boxed{1}$

Lemica: Neka je $G(V,E)$ graf bez trouglova. Tada $\sum_{v \in V} d(v)^2 \leq |V||E|$.

dokaz:

$$\sum_{uv \in E} \underbrace{(d(u)+d(v))}_{\leq |V| \text{ jer nema trouglova}} \leq |V||E|$$

$$||$$

$$\sum_{v \in V} d(v)^2$$

$\square$

Posledica: Neka je $G=(V,E)$ graf bez trouglova. Tada $|E| \leq \frac{1}{4}|V|^2$.

dokaz: $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

$x=(1,1,\dots,1),\ y=(v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$

$\|y\|^2 = \sum_{v \in V} d(v)^2 \leq |V||E|$

$\|x\|^2 \|y\|^2 \overset{K-S}{\geq} \langle x, y \rangle^2 = \left(\sum_{v \in V} d(v)\right)^2 = 4|E|^2$

$4|E|^2 \leq |V|^2 |E|$

$|E| \leq \frac{1}{4}|V|$ □

2. Neka je G graf sa n čvorova i više od $\frac{(n-1)^2}{4}+1$ grana. Dokazati da je G bipartitan ako i samo ako ne sadrži trougao.

$\rightarrow$: ✓

$\leftarrow$: Neka $G=(V,E)$ nije bipartitni graf. $|V|=n$, $|E| > \frac{(n-1)^2}{4}+1$

pps G ne sadrži trougao

Kako G nije bipartitan, on sadrži ciklus neparne dužine.

Neka je C najkraći takav (dužine bar 5 jer G nema trouglove.)

$C = w_1 w_2 \dots w_l w_1$ $l \geq 5$. Označimo preostale čvorove sa $v_1, \dots, v_{n-l}$

Kako je najkraći ciklus neparne dužine, ne postoje grane između w_i i w_j, $j \neq i \pm 1$ $(w_0 = w_l, w_{l+1} = w_1)$. Takođe, svaki v_i ima najviše dva suseda u C (videti 1. zad).

Dakle, imamo: $|E| \leq l + 2(n-l) + \frac{(n-l)^2}{4}$

$= 2n - l + \frac{(n-1)^2 - 2n(l-1) + l^2 - 1}{4}$

$$= 1 + 2n - l - 1 + \frac{(n-1)^2 - (2n-l-1)(l-1)}{4}$$

$$= \frac{(n-1)^2}{4} + 1 + \underbrace{\frac{(5-l)(2n-l-1)}{4}}_{\leq 0}$$

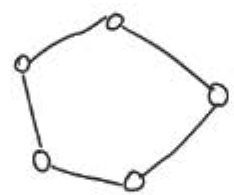
$$\leq \frac{(n-1)^2}{4} + 1$$

$$< |E|$$

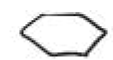
$$\lightning$$

Ojlerove šetnje i Hamiltonovi ciklusi

primer:

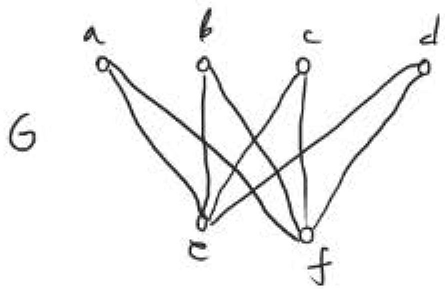


$\delta(C) = 2 < \frac{5}{2}$, ali je Hamiltonov.



3. Ispitati da li su sledeći grafovi Ojlerovi, odnosno Hamiltonovi. Ukoliko jesu, naći Ojlerovu šetnju, odnosno Hamiltonov ciklus.

a)

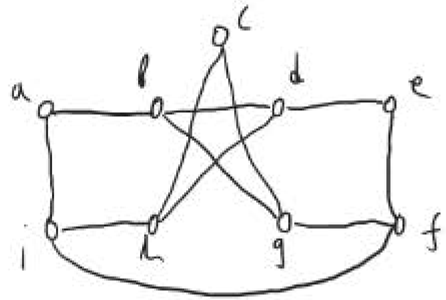


Ojlerov je, sa Ojlerovom šetnjom: aebfcedfa

G je bipartitni graf, sa particijom $\{a,b,c,d\} \sqcup \{e,f\}$

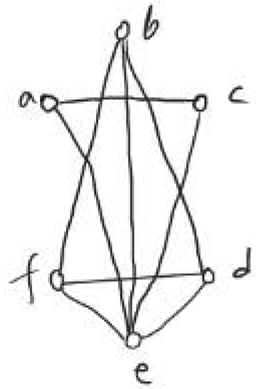
Da bismo obišli sve čvorove iz $\{a,b,c,d\}$ morali bismo bar dvaput da prođemo kroz e ili f, pa ne možemo da dobijemo ciklus. G nije Hamiltonov.

b)



Nije Ojlerov ($d(b)=3$).

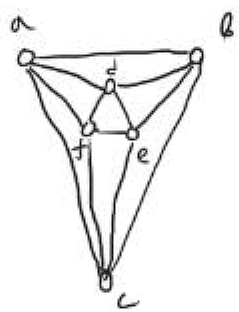
Hamiltonov je, sa Hamiltonovim ciklusom: abdefgchia v)



Nije Ojlerov ($d(b)=3$).

Zbog trougla ace ne možemo da obiđemo sve čvorove grafa bez više prolazaka kroz e, pa nije Hamiltonov.

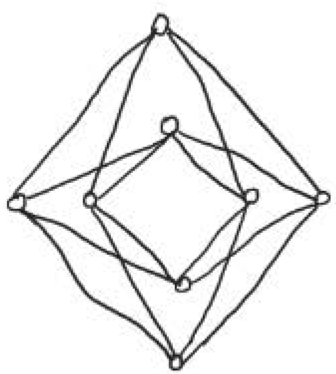
g)



Ojlerov je, sa Ojlerovom šetnjom: abcadbecfedfa

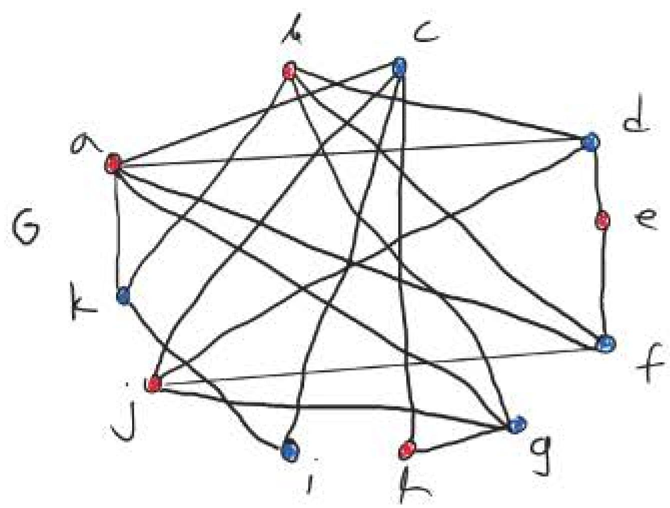
Hamiltonov je (Dirak), sa Hamiltonovim ciklusom: abcefda

d)



domaći

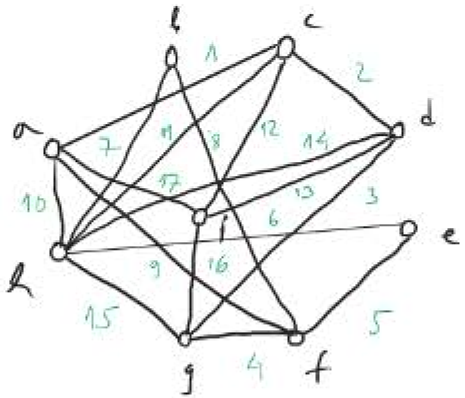
đ)



Nije Ojlerov ($d(a)=5$)

G je bipartitni, pa ne može da ima ciklus dužine 11, pa nije Hamiltonov.

e)



Ojlerov je, sa Ojlerovim ciklusom:

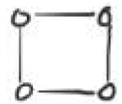
acdgfehbfahcidhgia

Da bi se obišli čvorovi b i e, Hamiltonov ciklus bi morao da sadrži grane hb, bf, fe, eh, ali to nam daje ciklus dužine 4 ili zatvorenu šetnju koja nije ciklus.

$\boxed{3}$

1. Dokazati da je n-kocka Q_n Hamiltonov za $n \geq 2$.

dokaz indukcijom

baza: $n=2$  ✓

hipoteza: Q_n je Hamiltonov.

korak: $Q_{n+1} = (\mathbb{Z}_2^{n+1}, E)$

$X = \{(a_1,\ldots,a_n,0) \mid a_i \in \mathbb{Z}_2,\ i \in [n]\}$

$Y = \{(a_1,\ldots,a_n,1) \mid a_i \in \mathbb{Z}_2,\ i \in [n]\}$

Indukovani podgrafi na skupovima X i Y hiperkocke H_n i K_n, redom.

H_n je Hamiltonov na osnovu induktivne hipoteze.

Neka je $C = u_1 \ldots u_{2^n} u_1$ Hamiltonov ciklus u H_n. Ako je $e_{n+1} = (\underbrace{0,0,\ldots,0}_{n},1)$, $w_i = u_i + e_{n+1}$, $i \in [2^n]$, onda je $C' = w_1 \ldots w_{2^n} w_1$ Hamiltonov ciklus u K_n.

$u_1 \ldots u_{2^n} w_{2^n} \ldots w_1 u_1$ je Hamiltonov ciklus u Q_{n+1}.

1

2. Neka je $G=(V,E)$ Hamiltonov graf. Ako je $\emptyset \neq S \subseteq E$, graf $(V, E \setminus S)$ označavamo sa $G \setminus S$. Dokazati da je broj komponenti povezanosti u $G \setminus S$ najviše $|S|$.

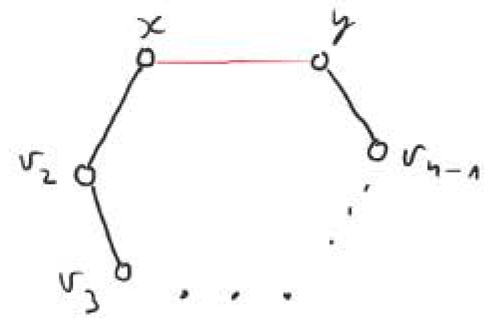
domaći

3. Neka je $G=(V,E)$ graf sa čvorovima x i y t.d. $xy \notin E$ i $d(x)+d(y) \geq |V|$. Dokazati da je G Hamiltonov ako i samo ako je $G' = (V, E \cup \{xy\})$ Hamiltonov.

$\Rightarrow$: ✓

$\Leftarrow$: Neka je C' Hamiltonov ciklus u G'. Ako xy nije grana u C', onda je C' Hamiltonov ciklus i u G.

Neka je xy grana u C'.



$C' = x v_2 \dots v_{n-1} y$

$I_x = \{ i \in [n-2] \setminus \{1\} \mid x v_{i+1} \in E \}$

$I_y = \{ i \in [n-2] \setminus \{1\} \mid y v_i \in E \}$

$$\left. \begin{array}{l} |I_x \cup I_y| \leq n-3 \\ |I_x| + |I_y| \geq n-2 \end{array} \right\} \text{postoji } j \in I_x \cap I_y, \text{ odnosno } x v_{j+1}, y v_j \in E$$

Traženi Hamiltonov ciklus je $x v_1 \dots v_j y v_{n-1} \dots v_{j+1} x$.

4. Pokazati da je povezan graf G Ojlerov akko njegov skup grana može biti razložen na granski disjunktne cikluse.

$G = (V, E)$

$\Leftarrow$: $v \in V$ proizvoljan

$C_1, \dots, C_l$ ciklusi na kojima se nalazi v

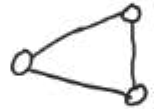
Za svako i, tačno dve grane iz C_i sadrže v

Kako su C_i granski disjunktni, sledi da je v incidentan sa $2l$ grana.

$d(v) = 2l$

Svaki čvor je parnog stepena: G je Ojlerov.

$\rightarrow$:

 Ojlerov graf sa najmanjim brojem čvorova i grana. Očigledno njegov skup grana može da se razloži na granski disjunktne cikluse.

$G=(V,E)$ Ojlerov

Pokažimo indukcijom po $|V|$ da postoji traženo razlaganje.

baza: $|V|=3$ ✓

hipoteza: Ako je $|V|<n$, E ima traženo razlaganje.

korak: Neka je $|V|=n$

Pošto je G Ojlerov, $\delta(G)\geq 2$, pa G sadrži ciklus C.
Neka $G\setminus C$ označava graf dobijen od G izbacivanjem grana koje se nalaze u C.

U $G\setminus C$ se svaki stepen smanji za 2 ili ostane isti.
Ako $G\setminus C$ nije povezan, svaka komponenta povezanosti je Ojlerov graf ili izolovan čvor, pa na osnovu IH grane svake komponente imaju razlaganje na granski disjunktne cikluse. Tim ciklusima dodamo C i dobijemo razlaganje za početni graf G.

Ako je $G\setminus C$ povezan, $\delta(G\setminus C)\geq 2$, pa možemo da ponovimo postupak. Kako je broj grana konačan, u nekom trenutku ćemo dobiti nepovezan graf (možda i n čvorova bez ijedne grane). Izbačeni ciklusi i granski disj. ciklusi komponenti povezanosti će dati traženo razlaganje.

Stabla

5. Dokazati da svako stablo T ima bar $\Delta(T)$ listova.

domaći

6. Dokazati da svaki automorfizam stabla T fiksira čvor ili granu.

 svaki automorfizam fiksira granu

 svaki automorfizam fiksira čvor

$T=(V, E)$

indukcijom po $|V|$

baza: $|V|=2$ ✓

hipoteza: Ako $|V|\leq n$, svaki automorfizam fiksira čvor ili granu

korak: $|V|=n+1$

$f\in Aut(T)$

f slika listove u listove

$d(u)=d(f(u))=1$

Ako $f(u)=u$, u je fiksni čvor

Neka $f(u)\neq u$ i neka je $T'=T\setminus\{v\in V \mid d(v)=1\}$, a f' restrikcija izomorfizma f na preostale čvorove. Kako f čuva okoline, f' je isto izomorfizam. Na osnovu IH, f' ima fiksni čvor ili granu, a time i f.

6

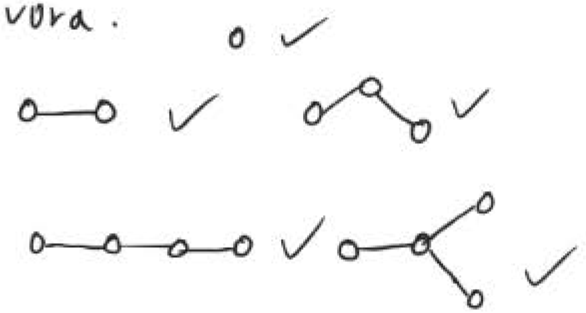
primer: $G=(V,E)$

$d(u,v) :=$ broj grana u najkraćem uv-putu (rastojanje od u do v)

$\varepsilon(u) := \max\limits_{v \in V} d(u,v)$ (ekscentritet čvora u)

Centar grafa je skup čvorova najmanjeg ekscentriciteta.

1. Dokazati da centar svakog stabla čine tačno jedan čvor ili dva susedna čvora.



$T=(V,E)$ $|V| \geq 3$

$v \in V$

Ako je $d(v,w) = \varepsilon(v)$, onda je $d(w)=1$.

Neka je $T'=(V',E')$ stablo dobijeno od T brisanjem listova.

Tada za svako $v \in V'$ imamo $\varepsilon_{T'}(v) = \varepsilon_T(v) - 1$.

Odavde sledi da je centar od T isti kao od T'.

Indukcijom po $|V|$ sledi da centar od T čine čvor ili dva susedna čvora.

2. Neka je T stablo u kome svaki čvor koji je susedan sa listom ima stepen bar 3. Dokazati da T ima par listova sa zajedničkim susedom.

Najduži put u stablu počinje i završava se listom:

Neka je P najduži put u T sa početnim čvorom u i krajnjim v.
Tvrdimo da je v list (analogno za u). U suprotnom $d(v) \geq 2$.
Ako je w sused od v različit od prethodnika unutar puta, imamo dva slučaja: 1° w je neki čvor unutar P. ↯ T nema cikluse

2° w je čvor van P. ↯ P je najduži put.

Neka je Q najduži put u T i x krajnji čvor tog puta.
Tada $d(x)=1$ i $N(x)=\{y\}$, gde $d(y) \geq 3$.
Čvor y je na P, ali ima suseda z van P ($d(y) \geq 3$).
z mora biti list, u suprotnom dobijamo duži put.

3. Dokazati da je niz prirodnih brojeva $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ niz stepena nekog stabla akko $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n-2$. 2

$\rightarrow$ ✓ (stablo ima $n-1$ grana)

$\leftarrow$: indukcijom po n

baza: $n=2$ $d_1+d_2=2$  ✓

hipoteza: Ako $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n-2$, graf je stablo.

korak: $G=(V,E)$ $|V|=n+1$

$\sum_{i=1}^{n+1} d_i = 2n$, pa za neko j imamo $d_j=1$.

Neka je v_k sused od v_j $(d(v_j)=d_j=1)$.

$G \setminus v_j$ je graf sa nizom stepena takvim da

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n+1 \\ i\neq j,k}} d_i + d_k - 1 = 2n-2.$$

Na osnovu IH $G\setminus v_j$ je stablo, a time i G.

3

Povezanost

4. Ako je u grafu sa n čvorova broj grana veći od $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, dokazati da je G povezan.

Indukcijom po broju čvorova

baza: 2 o—o ✓

hipoteza: Graf sa n čvorova i više od $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ grana je povezan.

korak: $G=(V,E)$

$|V|=n+1$ $|E|>\frac{n(n-1)}{2}$

Neka je $v\in V$ t.d. $d(v)=\delta(G)$.

Ako je $d(v)=n$, onda $G=K_{n+1}$.

Neka $d(v) < n$. Tada $G \setminus v$ ima više od $\frac{n(n-1)}{2} - (n-1) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ grana.

IH: $G \setminus v$ je povezan, a time i G.

4

5. Neka je G graf sa n čvorova, m grana i k komponente povezanosti.

Dokazati da tada važi $m \leq \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$.

Povezan graf ima najviše $\frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}(n-1)(n-1+1)$ grana (*).

indukcijom po broju komponenti povezanosti

baza: 1 ✓ (*)

hipoteza: Za graf G sa n čvorova, m grana i k komponente povezanosti važi $m \leq \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$

korak: $G=(V,E)$ ima $k+1$ komponenti povezanosti $K_1, K_2, \dots, K_{k+1}$.

K_i ima n_i čvorova i m_i grana.

$$\sum_{i=1}^{k+1} n_i = n \qquad \sum_{i=1}^{k+1} m_i = m$$

$$m = m_1 + \dots + m_k + m_{k+1} \overset{IH}{\leq} \frac{1}{2}(n - n_{k+1} - k)(n - n_{k+1} - k + 1) + \frac{1}{2} n_{k+1}(n_{k+1} - 1)$$

$$= \frac{1}{2}\left((n-k-1-(n_{k+1}-1))(n-k-(n_{k+1}-1)) + (n_{k+1}-1)^2 + n_{k+1} - 1 \right)$$

$$= \frac{1}{2}(n-k-1)(n-k) + \frac{1}{2}\left((-2n+2k+1)(n_{k+1}-1) + 2(n_{k+1}-1)^2 + n_{k+1} - 1 \right)$$

$$= \frac{1}{2}(n-k+1)(n-k) + \frac{1}{2}(n_{k+1}-1)\left(-2n+2k+1+2n_{k+1}-2+1 \right)$$

$= \frac{1}{2}(n-k+1)(n-k) + \frac{1}{2}(n_{k+1}-1)(-2n+2k+2n_{k+1})$

$\leq \frac{1}{2}(n-k+1)(n-k) \qquad (k+n_{k+1} \leq n_1+\ldots+n_k+n_{k+1} \leq n)$

5

6. Naći minimalan 3-povezan bipartitni graf.
domaći

7. Neka je G k-povezan graf i neka je G' dobijen od G dodavanjem jednog čvora i njegovim spajanjem sa bar k čvorova iz G. Pokazati da je G' k-povezan.

$G = (V, E)$

$G' = (V', E') \quad V' = V \cup \{w\}$

$S \subseteq V', \; |S| < k$

Ako $w \notin S$, onda je $G' \setminus S$ povezan jer je i $G \setminus S$ povezan, a $d_{G' \setminus S}(w) \geq 1$.

Ako $w \in S$, onda $G' \setminus S = G \setminus (S \setminus \{w\})$, pa je opet $G' \setminus S$ povezan.

Dakle, G' je k-povezan.

7

8. Pokazati da je graf sa n čvorova k-povezan $(n > k)$ ako $\delta(G) \geq \frac{n+k-2}{2}$.

$G = (V, E) \quad |V| = n > k$

pps $S \subseteq V, \; |S| < k$ i $G \setminus S$ nije povezan

Neka je H komponenta povezanosti sa najmanjim brojem čvorova t

Tad $t \leq n - |S| - t$

$t \leqslant \frac{n-|S|}{2}$

v tvor iz H

$d_G(v) \leqslant \frac{n-|S|}{2} - 1 + |S| = \frac{n+|S|-2}{2} < \frac{n+k-2}{2} \leqslant \delta(G)$. $\lightning$

8

1. Dokazati da je graf G k-povezan akko za svaka dva čvora u, v postoji k u-v puteva sa međusobno disj. unutrašnjostima.

$G = (V, E)$

$\leftarrow$: $u, v \in V$

Kako postoji k u-v puteva sa međusobno disj. unutrašnjostima, $k-1$ je različito od grane uv, pa $|V| \geq k+1$.

Ako $|S| < k$, onda za svaka dva čvora u $G \setminus S$ postoji put između njih (brisanjem $|S|$ čvorova prekinuto je najviše $|S|$ od k puteva sa međusobno disj. unutrašnjostima).

$\rightarrow$: pps $u, v \in V$ t.d. postoji najviše $k-1$ u-v puteva sa međusobno disj. unutrašnjostima.

$1°$ $uv \notin E$

Tada $c(u,v) \overset{(Menger)}{=} p(u,v) \leq k-1$

Ovo znači da postoji $S \subseteq V$, $|S| \leq k-1$ t.d. $G \setminus S$ nije povezan. $\lightning$ G k-povezan

$2°$ $uv \in E$

Neka je $G' = G \setminus uv$.

Možemo da primenimo Mengerovu teoremu na G':

$c_{G'}(u,v) = p_{G'}(u,v) \leq k-2$

Dakle, postoji $S \subseteq V \setminus \{u, v\}$ i $|S| \leq k-2$ t.d. su u, v razdvojeni u $G' \setminus S$.

Pošto je G k-povezan, postoji $w \in V \setminus (S \cup \{u, v\})$ $(|V| \geq k+1)$.

b.u.o. w je u istoj komponenti povezanosti kao u.

$S' := S \cup \{u\}$. Tada su v i w u različitim komponentama povezanosti u $G \setminus S'$

$\lightning$ G je k-povezan.

2. Neka je $k \geq 2$. Dokazati da k-povezan graf G sa bar $2k$ čvorova sadrži ciklus dužine bar $2k$. 1

$G = (V, E)$

Neka je $C = v_1 v_2 \dots v_l v_1$ ciklus najveće dužine.

G k-povezan, pa $\delta(G) \geq k$, te $l \geq k+1$.

pps $l < 2k$

Neka je $U \subseteq \{v_1, v_2, \dots, v_l\}$ skup čvorova ciklusa C koji imaju susede van C.

Kako je G k-povezan, $|U| \geq k$.

Neka je $G' = (V \cup \{w\}, E \cup \{w v_j \mid v_j \in U\})$.

Tada je G' k-povezan (7. zadatak).

$u \in V \setminus \{v_1, \dots, v_l\}$ $(l < 2k)$

G' je k-povezan, pa postoji k u-w puteva sa međusobno disj. unutrašnjostima.

Dakle, postoji k puteva od u do C koji su međusobno disj. (ne računajući u).

Kako $l < 2k$, postoji $i \in [l]$ t.d. su među spomenutim putevima i u-v_i i u-v_{i+1} puteri P i Q $(v_{l+1} = v_1)$. Time dobijamo ciklus $C' = v_1 \dots v_{i-1} P Q v_{i+2} \dots v_l v_1$ veće dužine od C.

$\lightning$ 2

3. Dokazati da je n-kocka Q_n n-povezana.

baza: Q_1 je povezan graf o—o ✓

hipoteza: Q_n je n-povezan

korak: $Q_{n+1} = (\mathbb{Z}_2^{n+1}, E)$

$u = (u_1, u_2, \dots, u_{n+1}),\ v = (v_1, v_2, \dots, v_{n+1}) \in \mathbb{Z}_2^{n+1}$

1° $u_j = v_j = t$ za neko $j \in [n+1]$

$V_j = \{(x_1, \dots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \dots, x_{n+1}) \mid x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{Z}_2\}$

Indukovani podgraf od Q_{n+1} nad V_j je n-kocka $K_{(j)}$.

IH: K_n je n-povezan, pa postoji n u-v puteva (kroz V_j) sa međusobno disj. unutrašnjostima.

Slično, indukovani podgraf nad $\{(x_1, \dots, x_{j-1}, t+1, x_{j+1}, \dots, x_{n+1}) \mid x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{Z}_2\}$ je povezan, pa unutar njega postoji u'-v' put.

$\left(u' = u + e_j,\ v' = v + e_j \qquad e_j = (0, \dots, 0, \underset{j}{1}, 0, \dots, 0) \right)$

Imamo n+1 u-v puteva sa međusobno disj. unutrašnjostima.

2° $u + v = (1, 1, \dots, 1)$

Postoji n+1 u-v puteva sa međusobno disj. unutrašnjostima

1: $u, (u_1+1, u_2, \dots, u_{n+1}), (u_1+1, u_2+1, \dots, u_{n+1}), \dots, (u_1+1, u_2+1, \dots, u_n+1, u_{n+1}), v$

2: $u, (u_1, u_2+1, \dots, u_{n+1}), (u_1, u_2+1, u_3+1, \dots, u_{n+1}), \dots, (u_1, u_2+1, \dots, u_{n+1}+1), v$

⋮

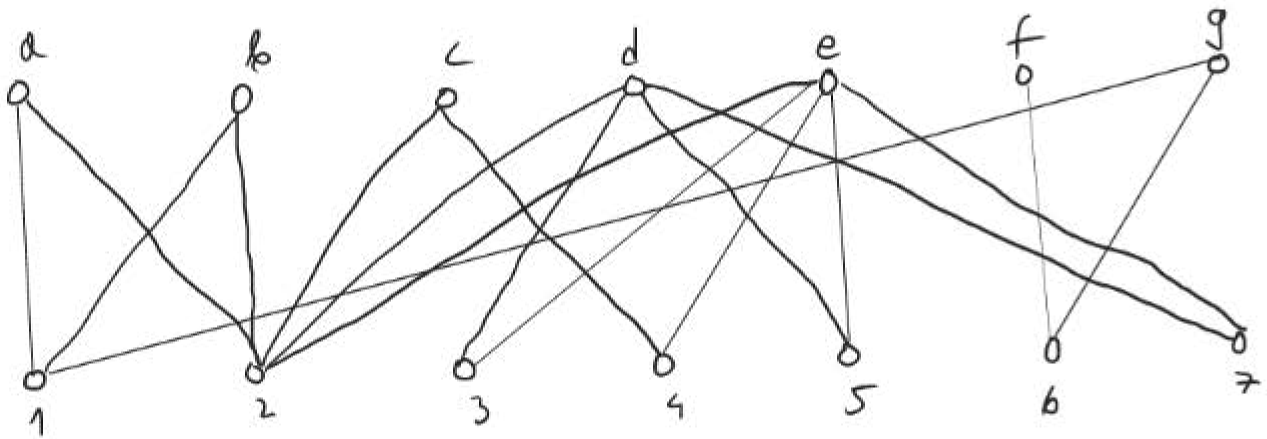
$n+1$: $u, (u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}+1), (u_1+1, u_2, \ldots, u_{n+1}+1), \ldots, (u_1+1, u_2+1, \ldots, u_{n-1}+1, u_n, u_{n+1}+1), v$

$1^\circ, 2^\circ$: Q_{n+1} je $(n+1)$-povezana

$\diamond$ 3

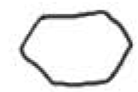
Uparivanja

primer:

G 

G nema savršeno uparivanje

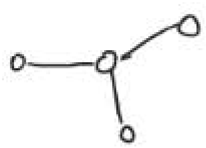
Maksimalno uparivanje $\{f6, g1, a2, c4, d5, e7\}$

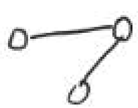


1. Dokazati da n-kocka Q_n ima savršeno uparivanje.
domaći

2. Pokazati da stablo ima najviše jedno savršeno uparivanje.

 0

 0

 1

 1

$T=(V,E)$

indukcijom po $|V|$

baza: $|V|=2$ ✓

hipoteza: Ako $|V| \leq n$, T ima najviše jedno savršeno uparivanje.

korak: $|V| = n+1$

Ako postoji $v \in V$ t.d. ima bar dva lista u $N(v)$, T nema savršeno uparivanje.

Neka T ima savršeno uparivanje M i neka je $w \in V$ list, a $u \in V$ njegov sused. Tada $uw \in M$ i $uv \notin M$ za $v \in N(u) \setminus \{w\}$.

$T \setminus \{u, w\}$ ima komponente povezanosti $H_1 = (V_1, E_1), \ldots, H_l = (V_l, E_l)$ i $M \cap E_j$ je savršeno uparivanje u H_j, $j \in [l]$.

IH: H_j ima jedinstveno savršeno uparivanje M_j, pa $M \cap E_j = M_j$.

Odavde sledi da je M jedinstveno (jer svako savršeno uparivanje u T sadrži uw).

2

3. Neka je $G = (A \cup B, E)$ bipartitni graf i neka je $|A| = |B| = n$. Ako je $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$, dokazati da G ima savršeno uparivanje.

$S \subseteq A$

1° $0 \leq |S| \leq \frac{n}{2}$

$|S| \leq \frac{n}{2} \leq \delta(G) \leq N(S)$

2° $\frac{n}{2} < |S| \leq n$

$v \in B$ proizvoljan

$d(v) \geq \frac{n}{2}$: $N(v) \cap S \neq \emptyset$

Odavde sledi $v \in N(S)$ za proizvoljan $v \in B$, pa $|N(S)| = n \geq |S|$

$1^\circ, 2^\circ$: G ima uparivanje M koje sadrži sve čvorove iz A, mora da sadrži i sve čvorove iz B, pa je M savršeno.

4. Svaki od nekoliko studenata ima spisak od k knjiga koje želi da pozajmi iz biblioteke. Svaka knjiga se nalazi tačno na k spiskova. Dokazati da je moguće organizovati istovremeno pozajmljivanje knjiga tako da svako od studenata pozajmi jednu knjigu sa svog spiska. $\boxed{3}$

domaći

5. Neka je $G=(V,E)$ bipartitni Hamiltonov graf i $u, v \in V$ različiti čvorovi. Dokazati da $G \setminus \{u,v\}$ ima savršeno uparivanje ako i samo ako su u i v u različitim delovima particije grafa G.

$\Leftarrow$: Hamiltonov ciklus $v_1 v_2 \cdots v_{2n} v_1$ (G je bipartitni)

$u = v_{2s-1}$
$v = v_{2t}$ za neke $s, t \in [n]$

1° $s < t$

$M = \{ v_1v_2, \ldots, v_{2s-3}v_{2s-2}, v_{2s}v_{2s+1}, \ldots, v_{2t-2}v_{2t-1}, v_{2t+1}v_{2t+2}, \ldots, v_{2n-1}v_{2n} \}$

2° $s>t$

$M=\{v_{2n}v_1, v_2v_3, \dots, v_{2t-2}v_{2t-1}, v_{2t+1}v_{2t+2}, \dots, v_{2s-3}v_{2s-2}, v_{2s}v_{2s+1}, \dots, v_{2n-2}v_{2n-1}\}$

3° $s=t$

$M=\{v_{2i-1}v_{2i} \mid i\in[n]\setminus s\}$

$1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$ $G\setminus\{u,v\}$ ima savršeno uparivanje

$\rightarrow$: G ima savršeno uparivanje, kao bipartitni i Hamiltonov.
Odavde sledi da $|A|=|B|=n$, gde $V=A\sqcup B$.
Kako je i $G\setminus\{u,v\}$ bipartitni i ima savršeno uparivanje, onda $|A\setminus\{u,v\}|=|B\setminus\{u,v\}|=n-1$, odnosno u i v su u različitim delovima particije.

5

6. Neka je $G=(A\sqcup B, E)$ bipartitni graf i $a=\min\limits_{v\in A} d(v)$ i $b=\max\limits_{v\in B} d(v)$. Ako je $a\geq b$, dokazati da postoji uparivanje koje sadrži svaki čvor iz A.

domaći

7. Neka je u biblioteci na raspolaganju n knjiga. Pokazati da u grupi od m studenata postoji t studenata koji mogu uzeti željenu knjigu iz biblioteke ukoliko svakih k studenata (za svako k: $m-t\leq k\leq n$) želi najmanje $k+t-m$ različitih knjiga.

$t\leq m$

$G=(A\sqcup B, E)$

A - studenti $|A|=m$

B - knjige $|B| = n$

$uw \in E$: knjiga w se nalazi na spisku studenta u

$S \subseteq A$

$|S| = k$ $|N(S)| \geq k + t - m$

Dodajmo skupu B još $m-t$ čvorova i označimo novodobijeni skup sa B'.

$E' = E \cup \{uw' \mid u \in A, w' \in B' \setminus B\}$

$|N_{G'}(S)| \geq k$

Holova teorema: postoji uparivanje M' u G' koje sadrži sve čvorove iz A.

$M := M' \cap E$

$|M'| = m$

$|M| \geq m - (m-t) = t$

Dakle, može da se organizuje traženo pozajmljivanje. $\boxed{7}$

8. Neka je $G = (A \cup B, E)$ bipartitni graf gde je svaki čvor iz A neparnog stepena. Ako svaka dva čvora iz A imaju paran broj zajedničkih suseda, dokazati da G ima uparivanje koje sadrži svaki čvor iz A.

$S \subseteq A$

$N(S) = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$

$t_v := (\chi_E(vw_1), \chi_E(vw_2), \ldots, \chi_E(vw_m)) \in \mathbb{Z}_2^m$

$p : \mathbb{Z}_2^m \times \mathbb{Z}_2^m \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ dato sa $p((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$

je bilinearno i simetrično

$u, v \in S \quad u \neq v$

$N(u) \cap N(v) \neq \emptyset : \; p(t_u, t_v) = 0 \quad (2 \mid |N(u) \cap N(v)|)$

$N(u) \cap N(v) = \emptyset : \; p(t_u, t_v) = 0$

$p(t_v, t_v) = 1$

$S = \{v_1, \ldots, v_k\}$

$\Bigg\}$ $t_{v_1}, t_{v_2}, \ldots, t_{v_k}$ su lin. nez.

$\downarrow$

$|S| = k \leq m \leq |N(S)|$

Na osnovu Holove teoreme, imamo traženo uparivanje.

9. Neka je $G = (A \cup B, E)$ bipartitni graf t.d. $d(v) \geq 1$ za sve $v \in A$ i $d(v) \geq d(w)$ za sve $vw \in E$ i $v \in A, w \in B$. Dokazati da G ima uparivanje koje sadrži svaki čvor iz A. 8

pps postoji $S \subseteq A$ t.d. $|S| > |N(S)|$

Neka je S minimilan takav (ako $T \subsetneq S$, onda $|N(T)| \leq |T|$)

$2 \leq |S|$ (jer $d(v) \geq 1$ za sve $v \in A$)

$v \in S$

Tada $|N(S \setminus \{v\})| = |N(S)|$ (u suprotnom $|N(S \setminus \{v\})| < |N(S)| \leq |S| - 1$)

$\sum_{w \in N(S \setminus \{v\})} d(w) \leq \sum_{u \in S \setminus \{v\}} d(u) =$ broj grana čiji je jedan kraj u $S \setminus \{v\} \leq \sum_{w \in N(S \setminus \{w\})} d(w)$

Dakle, $\sum_{w \in N(S \setminus \{v\})} d(w) =$ broj grana čiji je jedan kraj u $S \setminus \{v\}$.

$N(N(S \setminus \{v\})) = S \setminus \{v\}$

Međutim, $v \in N(N(S \setminus \{v\}))$, ali $v \notin S \setminus \{v\}$. $\lightning$

G ima traženo uparivanje.

$\boxed{9}$

1. Neka su $S_1, S_2, \ldots, S_m$ r-točlani podskupovi n-točlanog skupa A i neka se svaki element skupa A nalazi u tačno d skupova od $S_1, S_2, \ldots, S_m$. Ako je $m \leq n$, pokazati da $S_1, S_2, \ldots, S_m$ imaju sistem različitih predstavnika.

$|S_1| = |S_2| = \ldots = |S_m| = r$

pps postoji $I \subseteq [m]$ t.d. $|I| > |\bigcup_{i \in I} S_i|$

$|I| > r \geq d \quad (mr = nd \text{ i } m \leq n)$

$d_x = \#\{ i \in I \mid x \in S_i \}$

$r|I| = \sum_{x \in \bigcup_{i \in I} S_i} d_x \leq d |\bigcup_{i \in I} S_i| < d|I| \leq r|I|$ ↯

1

2. Neka je k prirodan broj. Pokazati da svake dve particije konačnog skupa na skupove veličine k imaju zajednički sistem predstavnika.

Neka su X, Y particije skupa T od nk elemenata.

$|X| = |Y| = n$ za sve $x \in X, y \in Y$ $|x| = |y| = k$

$G = (X \sqcup Y, E)$

$uv \in E$ ako $u \cap v \neq \emptyset$ $u \in X, v \in Y$

$S \subseteq X$

$|S| = l$

$|\cup S| = ln : |N(S)| \geq l$

Holova teorema: G ima savršeno uparivanje, pa imamo (nakon eventualnog preoznačavanja)

$x_1 \cap y_1 \neq \emptyset, x_2 \cap y_2 \neq \emptyset, \dots, x_n \cap y_n \neq \emptyset$ $\quad X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

$(x_i \cap y_i) \cap (x_j \cap y_j) = \emptyset \quad i \neq j$ $\quad Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$

Uzimanjem po jednog elementa iz $x_1 \cap y_1, x_2 \cap y_2, \dots, x_n \cap y_n$ dobijamo zajednički sistem različitih predstavnika.

2

3. Dat je konačan skup A, njegovi podskupovi $A_1, A_2, \dots, A_n$ i prirodni brojevi $d_1, d_2, \dots, d_n$. Dokazati da postoje međusobno disjunktni podskupovi $D_i \subseteq A_i$ t.d. $|D_i| = d_i$ za sve $1 \leq i \leq n$ akko $|\bigcup_{i \in I} A_i| \geq \sum_{i \in I} d_i$ za sve $I \subseteq [n]$.

$\rightarrow$: $\sum_{i \in I} d_i = |\bigcup_{i \in I} D_i| \leq |\bigcup_{i \in I} A_i|$

$\leftarrow$: $X = \{x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1d_1}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2d_2}, \dots, x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nd_n}\}$

$G = (X \cup A, E)$

$x_{ij} a \in E$ ako $a \in A_i$ gde $x_{ij} \in X$ i $a \in A$

Postoje traženi skupovi D_i akko G ima uparivanje koje sadrži sve čvorove iz X

$S \subseteq X$

Neka $S = \{x_{i_1, j_1}, \dots, x_{i_1, j_{i_1}}, \dots, x_{i_s, j_1}, \dots, x_{i_s, j_{i_s}}\}$

$|S| \leq \sum_{t=1}^{s} d_{i_t} \leq |\bigcup_{t=1}^{s} A_{i_t}| = |N(S)|$

Holova teorema: postoji uparivanje koje sadrži sve čvorove iz X. 3

4. Dokazivati da svaki bipartitni graf $G=(V,E)$ ima uparivanje veličine najmanje $\frac{|E|}{\Delta(G)}$.

Za svaki pokrivač $K \subseteq V$ imamo $|E| \leq |K| \Delta(G)$

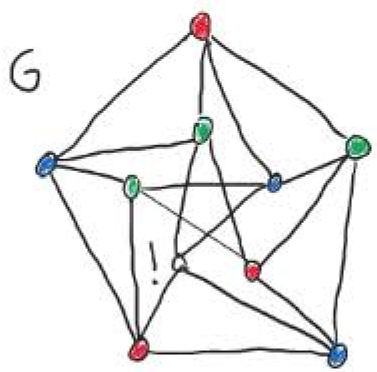
Konigova teorema: maksimalno uparivanje M^* ima isti broj elemenata kao minimalni pokrivač $\tilde{K}$

$$|M^*| = |\tilde{K}| \geq \frac{|E|}{\Delta(G)}$$ 4

Bojenje grafova

5. Odrediti hromatski broj sledećih grafova:

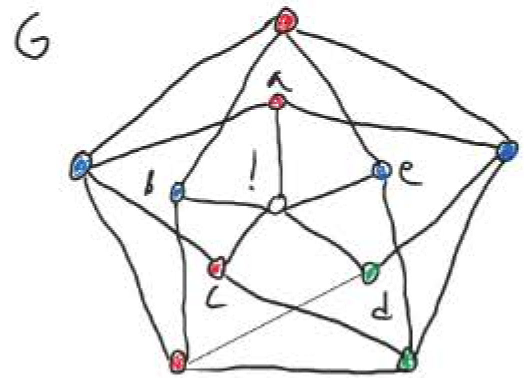
a)



G sadrži ciklus neparne dužine: $\chi(G) \geq 3$

Obojimo prvo „spoljni" ciklus sa tri boje. Zbog simetrije grafa, svi slučajevi su međusobno ekvivalentni (ne zavise od izbora čvor kog ćemo obojiti trećom bojom). Tada pravilno bojenje sa tri boje može da se proširi na četiri čvora (forsirano je), ali preostaje čvor za koji mora da se upotrebi nova boja. Dakle, $\chi(G) = 4$.

b)



$\chi(G) \geq 3$

„Spoljni" ciklus može pravilno da se oboji sa tri boje. Tada se pri daljem pravilnom bojenju moraju pojaviti sve tri boje među čvorovima a, b, c, d, e. Međutim, to znači da se centralni čvor mora obojiti novom bojom.

$\chi(G) = 4$

$\boxed{5}$

6. Odrediti hromatski broj grafa koji se dobija od kompletnog grafa K_n, $n \geq 4$, brisanjem dve grane koje nemaju zajednički čvor.

domaći

7. Neka je G graf sa n čvorova. Dokazati:

a) $\chi(G)\chi(\overline{G}) \geq n$

b) $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n+1$

$G = (V, E)$

a) $\chi(G) = k$

$c : V \longrightarrow \{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$

$c^{-1}(c_1), c^{-1}(c_2), \ldots, c^{-1}(c_k)$ su međusobno nezavisni skupovi

Indukovani podgraf nad $c^{-1}(c_i)$ u $\overline{G}$ je kompletan

$\chi(\overline{G}) \geq |c^{-1}(c_i)|$ za sve $i \in [k]$

$\chi(\overline{G}) \geq \frac{n}{k}$

$\chi(G)\chi(\overline{G}) \geq k\frac{n}{k} = n$

b) Indukcijom po $|V|$

baza: $|V|=2$  ✓

hipoteza: $|V|=n$ $\quad \chi(G)+\chi(\overline{G}) \leq n+1$

korak: $|V|=n+1$

$v \in V$

$G' = G \setminus v$

IH: $\underbrace{\chi(G')}_{=k} + \underbrace{\chi(\overline{G'})}_{=l} \leq n+1$

Ako je $k+l \leq n$, onda obojimo v sa novom bojom, a $V\setminus\{v\}$ obojimo kao u G' i $\overline{G'}$ i imamo $\chi(G)+\chi(\overline{G}) \leq n+2$.

pp $k+l=n+1$

$d_G(v)+d_{\overline{G}}(v)=n$

1° $d_G(v)<k$

Tada u G možemo pravilno da obojimo v sa nekom bojom kojom smo obojili G', a u $\overline{G}$ obojimo v novom bojom.

$\chi(G) + \chi(G') = k+1+l = n+2$

2° $d_G(v) \geq k$

$d_{\overline{G}}(v) = n - d_G(v) < l$

Tada u $\overline{G}$ možemo pravilno da obojimo v sa nekom bojom kojom smo obojili $\overline{G'}$, a u G obojimo v novom bojom.

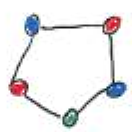
$\chi(G) + \chi(G') = k + l + 1 = n+2$

7

8. Za svako $k \in \mathbb{N}$, konstruisati k-hromatski graf bez trouglova.

$k=1$: 

$k=2$: 

$k=3$: 

Neka je $G=(V,E)$ k-hromatski graf bez trouglova.

$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

$V' = V \cup \{u_1, u_2, \ldots, u_n, w\}$

$E' = E \cup \{u_i w \mid i \in [n]\} \cup \{u_i v_j, u_j v_i \mid i,j \in [n]\ v_i v_j \in E\}$

$G' = (V', E')$

pps G' sadrži trougao

Tada taj trougao mora da bude oblika $v_i v_j u_k$.

Međutim, iz definicije E' $v_i v_k \in E$ i $v_j v_k \in E$. $\lightning$ G ne sadrži trouglove

Dakle, G' ne sadrži trouglove.

Očigledno se pravilno k-bojenje c grafa G može proširiti na $G' \setminus w$ $\begin{pmatrix} c'(u_i) = c(v_i) \\ c'(v_i) = c(v_i) \end{pmatrix}$

Neka je $c: V' \setminus \{w\} \longrightarrow \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ pravilno k-bojenje grafa $G' \setminus w$.

pps $|c(V' \setminus (V \cup \{w\}))| \leq k$

bez umanjenja opštosti $c(V' \setminus (V \cup \{w\})) \subseteq \{c_1, c_2, \dots, c_{k-1}\}$

$c' : V \longrightarrow \{c_1, c_2, \dots, c_{k-1}\}$

$c'(v_i) := c(v_i)$ kad $c(v_i) \neq c_k$

$c'(v_i) := c(u_i)$ kad $c(v_i) = c_k$

Tada je c' pravilno $(k-1)$-bojenje grafa G $\lightning$ $\chi(G) = k$

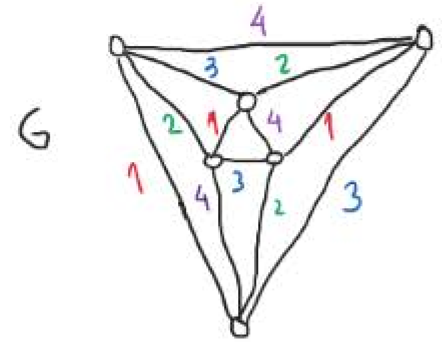
Odavde sledi $|c(V' \setminus V \cup \{w\})| = k$, pa za pravilno bojenje grafa G', čvor w mora da se oboji novom bojom.

$\chi(G') = k+1$

8

primer: Odredimo hromatske indekse sledećih grafova:

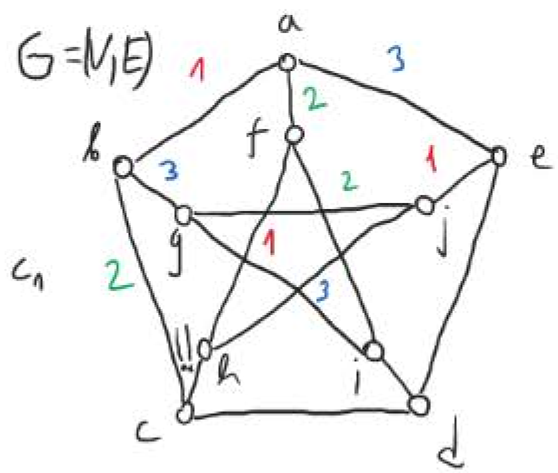
i)



Vizing: $4 \leq \chi'(G) \leq 5$

Imamo pravilno bojenje grana sa 4 boje.

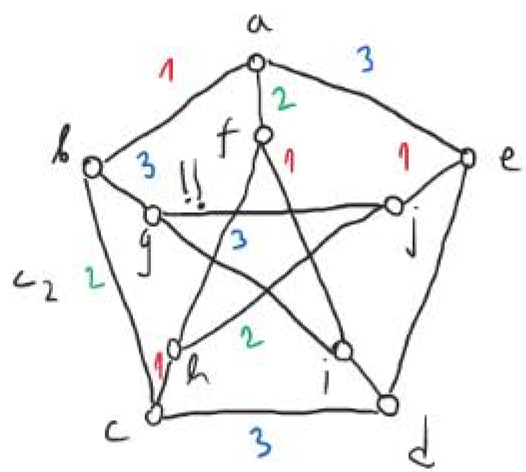
ii)



Vizing: $3 \leq \chi'(G) \leq 4$

Pokušajmo da obojimo grane sa tri boje.

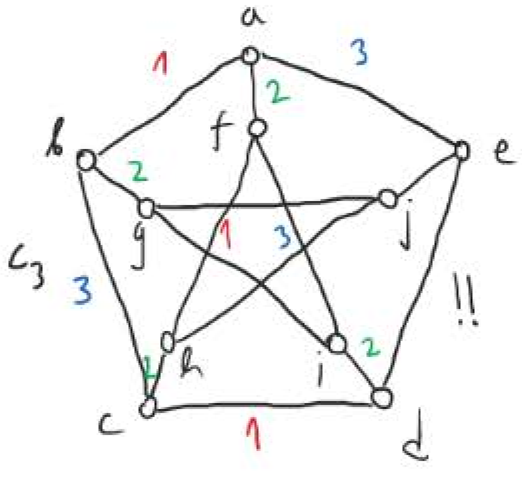
Neka je ab obojena bojom 1
af obojena bojom 2
ae obojena bojom 3

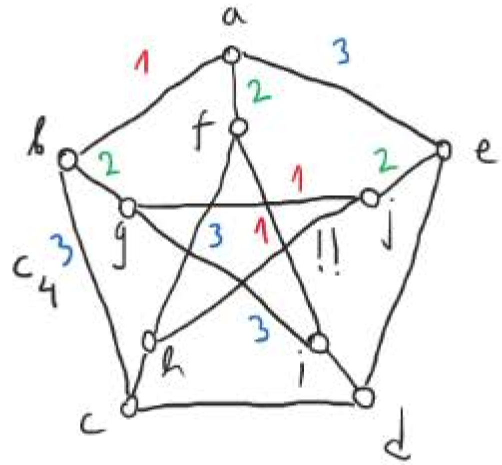


Imamo 4 mogućnosti kako da proširimo na ostatatak grafa (na osnovu bojenja grana bc i fh)

$c_1(bc)=2,\ c_1(fh)=1$
$c_2(bc)=2,\ c_2(fh)=3$
$c_3(bc)=3,\ c_3(fh)=1$
$c_4(bc)=3,\ c_4(fh)=3$

nijedno od ovih bojenja se ne može dopuniti do pravilnog bojenja grana: $\chi'(G)=4$



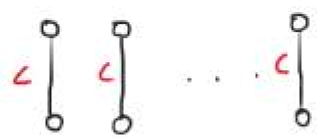


1. Neka je G bipartitni graf u kome je svaki čvor stepena k. Dokazati da je $\chi'(G)=k$.

$G=(V,E)$

indukcijom po $\delta(G)=\Delta(G)$

baza: $\delta(G)=\Delta(G)=1$



✓

hipoteza: $\delta(G)=\Delta(G)=k$

Tada $\chi'(G)=k$

korak: $\delta(G)=\Delta(G)=k+1$

Posledica Holove t: G ima savršeno uparivanje M.

Tada je $\chi'(G\setminus M)=k$. Neka je $c: E\setminus M \longrightarrow \{c_1,c_2,\dots,c_k\}$

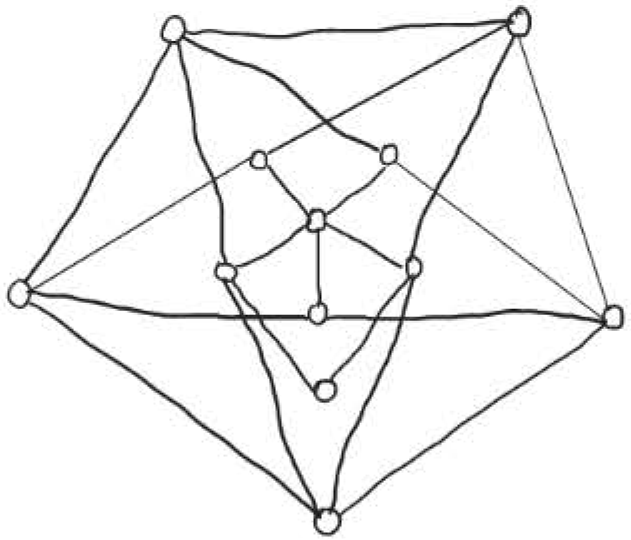
pravilno bojenje grana grafa $G\setminus M$.

Tada je $c': E \longrightarrow \{c_1, c_2, \dots, c_{k+1}\}$, $c'(e) = \begin{cases} c(e), & e \in E \setminus M \\ c_{k+1}, & e \in M \end{cases}$

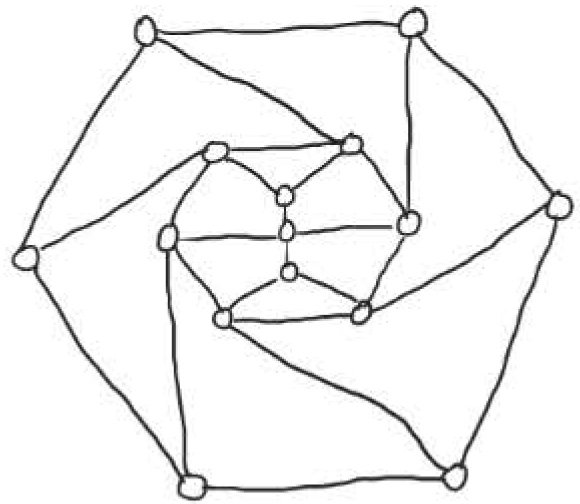
$\left.\begin{array}{l} \text{pravilno bojenje grafa } G. \\ \text{Vizing: } \chi'(G) \geq k+1. \end{array}\right\} \chi'(G) = k+1.$

2. Odrediti hromatske brojeve i indekse sledećih grafova.

a)



b)



domaći

Planarnost grafova

3. Dokazati da planaran povezan bipartitni graf sa n čvorova, $n \geq 3$, ima najviše $2n-4$ grana.

$G = (V, E)$ bipartitni graf

$|V| = n \quad n \geq 3$

1° G stablo

$$|E| = n-1 \underset{n\geq 3}{\leq} 2n-4$$

2° G nije stablo

Svaki ciklus je dužine bar 4.

Tada je u planarnom utapanju svaka oblast oivičena sa bar 4 grane. (g oblast, $d(g)$ broj grana kojima je oblast oivičena)

F skup oblasti

$|E| = e \quad |F| = f$

$$2e \geq \sum_{g\in F} d(g) \geq 4f$$

Ojlerova formula: $n-e+f=2$

$$4(2+e-n) \leq 2e$$

$$2e \leq 4n-8$$

$$e \leq 2n-4$$

3

komentar: Posledica Ojlerove formule: $G=(V,E)$ povezan planaran graf, $|V|\geq 3$.

Tada $|E| \leq 3|V|-6$

4. Neka je G povezan graf sa 11 čvorova. Dokazati da bar jedan od grafova G i $\overline{G}$ nije planaran.

$G=(V,E) \quad \overline{G}=(V,E')$

$|V|=11$

$|E|+|E'| = \frac{1}{2}|V|(|V|-1) = 55$

pps G i $\overline{G}$ planarni

$|E|+|E'| \leq 2(3|V|-6)$

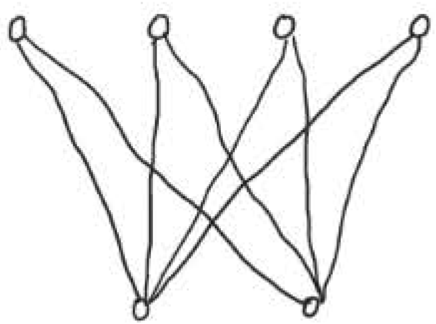
$55 \leq 54$ ↯

5. Neka je G povezan planaran graf sa 12 čvorova. Pokazati da postoji bar šest čvorova stepena najviše 7.

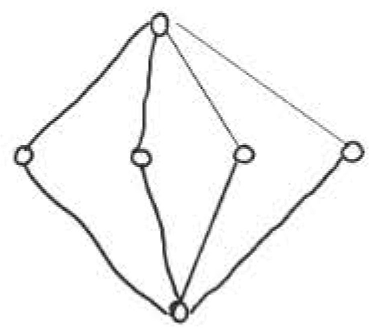
domaći

6. Ispitati planarnost sledećih grafova:

a)

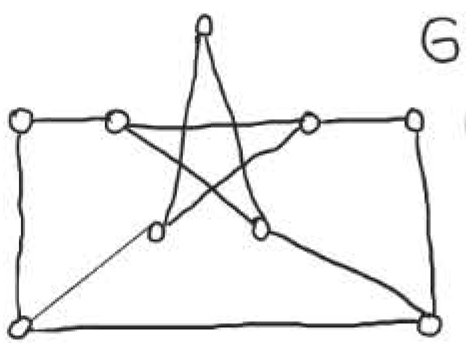


$\cong$



planaran

b)



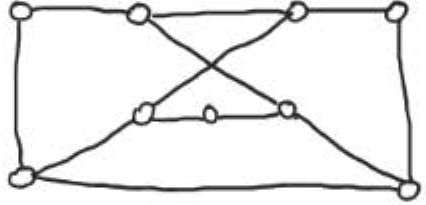
$\cong$

$G=(V,E)$

$v=|V|=9$ $\qquad |E| \leq 3|V|-6$

$e=|E|=12$

najkraći ciklus u G je dužine bar 5



pps G ima planarno utapanje

Tada $v-e+f=2$

$2e \geqslant 5f$

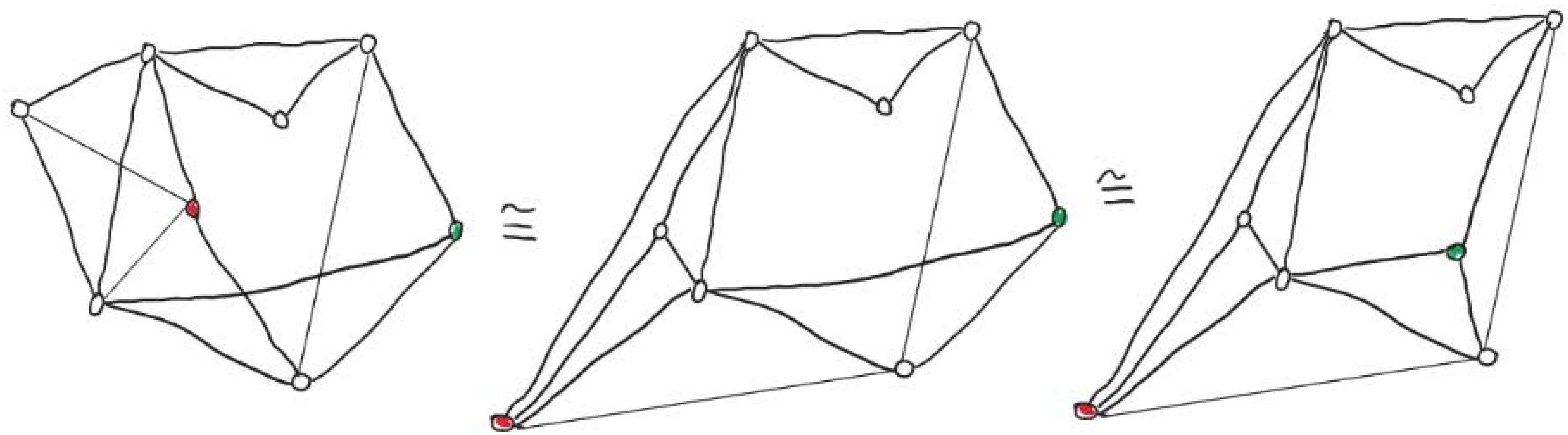
$2e \geqslant 5(2+e-v)$

$3e \leq 5v-10$

$36 \leq 35$ ↯

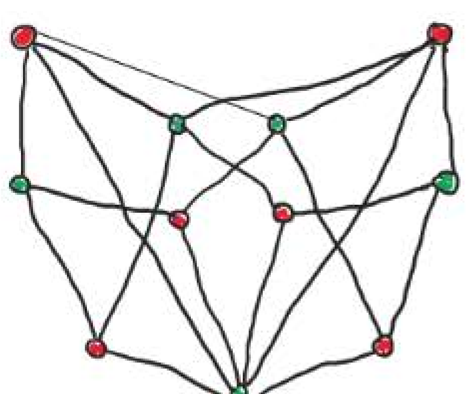
G nije planaran

v)



planaran

g)



bipartitan

$G=(V,E)$

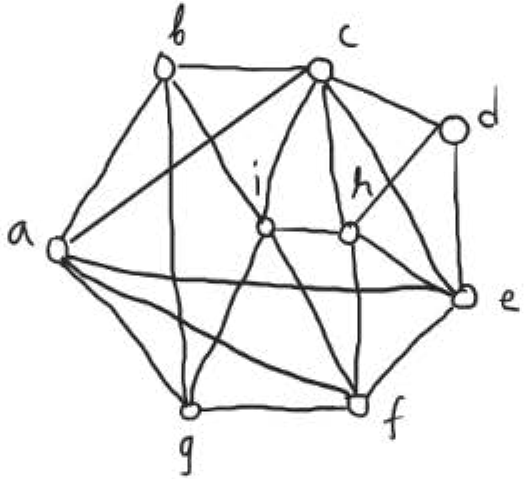
$|V|=11$

$|E|=20$

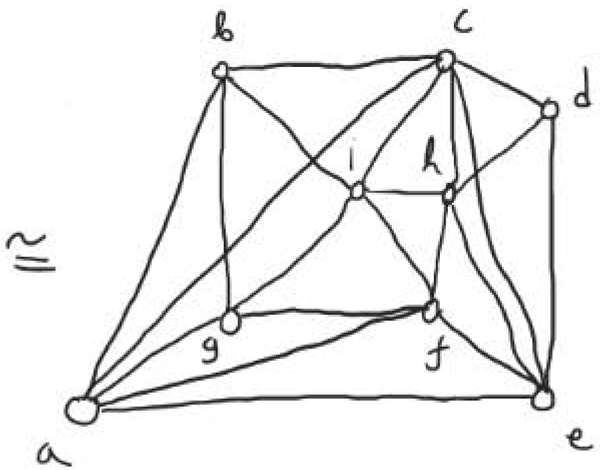
$20 \leq 3\cdot 11-6$ ✓

$20 > 2\cdot 11-4$: G nije planaran

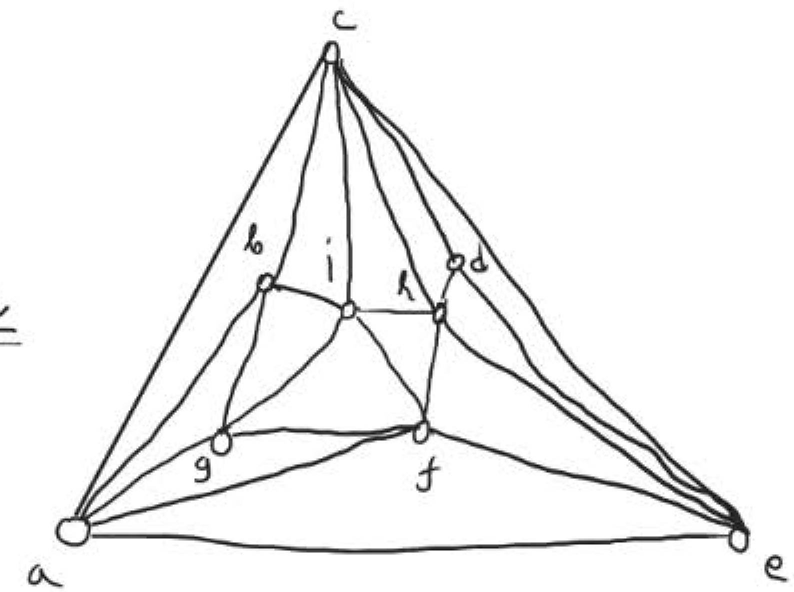
d)



$\cong$



$\cong$



planaran

6

1. U ravni je dato n tačaka, $n \geq 3$, takvih da je rastojanje između svake dve tačke najmanje 1. Pokazati da postoji najviše $3n-6$ parova tačaka t.d. je rastojanje između njih tačno 1.

$G=(V,E)$

V - skup tačaka $\subseteq \mathbb{R}^2$

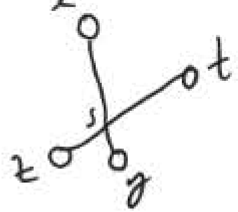
E - $xy \in E$ ako $d(x,y)=1$

Ako je G planaran, onda postoji najviše $3n-6$ parova tačaka koje su na rastojanju 1

pps G nije planaran

postoje $x,y,z,t \in V$ t.d. $xy, zt \in E$ i $[x,y] \cap [z,t] = \{s\}$ $\quad \left([a,b] = \{a+t(b-a) \mid 0 \leq t \leq 1\} \right)$

$s \neq x,y,z,t$



$$\left.\begin{array}{l} d(x,t) < d(x,s) + d(s,t) \\ d(y,z) < d(y,s) + d(s,z) \end{array}\right\} d(x,t) + d(y,z) < 2$$

$$\Downarrow$$

$$d(x,t) < 1 \text{ ili } d(y,z) < 1$$

$$\lightning \; d(a,b) \geq 1 \text{ za sve } a,b \in V$$

1

def: Graf H je minor grafa G ako se graf izomorfan sa H može dobiti od G:

- brisanjem čvora;
- brisanjem grane;
- kontrakcijom grane.

2. Dokazati da graf G sadrži K_3-minor ako sadrži ciklus.

$G=(V, E)$

$C = u_1 u_2 \dots u_k u_1$

$V = \{v_1, \dots, v_l, u_1, \dots, u_k\}$

$H' := G \setminus \{v_1, \dots, v_l\}$

$H := (\dots((H' / u_k u_1) / u_{k-1} u_k) \dots) / u_3 u_4$

H je K_3-minor

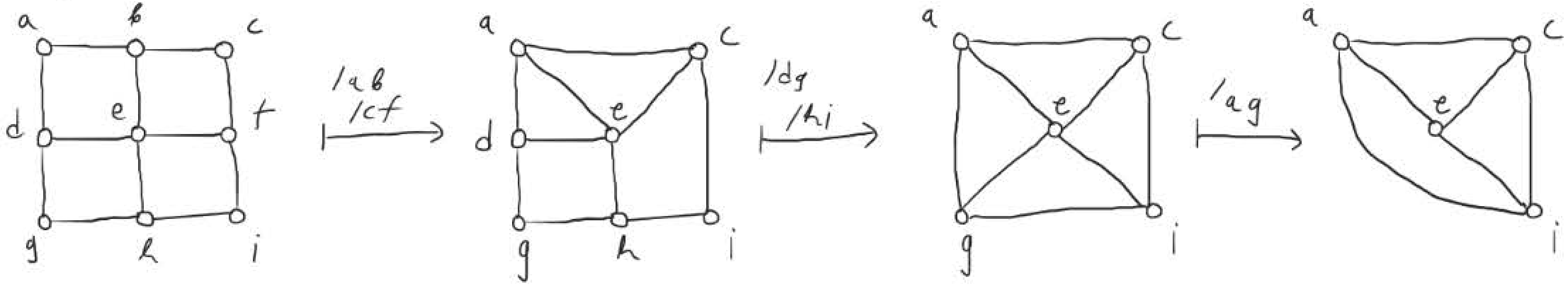
$\boxed{2}$

3. Dokazati da graf G sadrži K_3-minor ako je $\chi(G) \geq 3$.

$\chi(G) \geq 3 \longrightarrow G$ nije bipartitan $\longrightarrow G$ sadrži ciklus (neparne dužine) $\xrightarrow{\text{2. zad}} G$ ima K_3-minor

$\boxed{3}$

primer: (3×3)-mreža ima K_4-minor



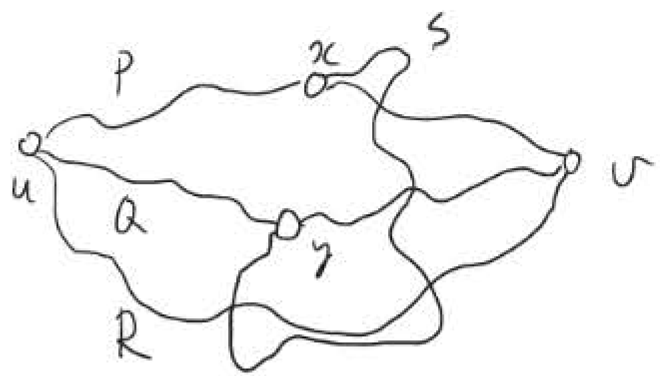
4. Dokazati da graf sadrži K_4-minor ako je 3-povezan.

$G=(V, E)$

$u, v \in V$

postoji tri u-v puta sa međusobno disj. unutrašnjostima P, Q, R

b.u.o. neka se na P i Q nalaze čvorovi x i y redom



Kako je G 3-povezan, postoji x-y put u $G \setminus \{u, v\}$

Ako S nema zajedničkih tačaka sa P, Q, R osim x i y onda kontrakcijom grana na P, Q, R, S t.d. dobijemo grane ux, xv, uy, yv, uv, xy i brisanjem suvišnih čvorova dobijamo K_4.

Neka je z prvi čvor na putu S koji se nalazi na Q $(\neq y)$ ili R.

- z na Q: Tada možemo da izbacimo grane od z do y i dobijemo x-z put S'. Kontrakcijom grana na S', P, Q, R možemo da dobijemo grane xu, xv, uy, yv, uv, xy, pa G ima K_4-minor.
- z na R: Tada možemo da izbacimo grane od z do y i dobijemo x-z put S'. Kontrakcijom grana na S', P, Q, R možemo da dobijemo grane xu, xv, uz, zv, uv, xz, pa G ima K_4-minor.

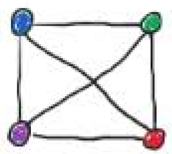
4

5. Dokazati da graf G sadrži K_4-minor ako $\chi(G) \geq 4$.

$G = (V, E)$

indukcijom po $|V|$

baza: $|V| = 4$



✓ (na osnovu Bruksove teoreme: $G = K_4$)

hipoteza: Ako $|V| \leq n$, G sadrži K_4-minor.

korak: $|V| = n+1$

1° G nije povezan

Tada G ima komponentu povezanosti H sa najviše n čvorova t.d. $\chi(H) \geq 4$

IH: H ima K_4-minor, pa i G ima K_4-minor

2° G povezan, a nije 2-povezan

Neka je $v \in V$ t.d. $G \setminus v$ nije povezan i neka su $H_1, \dots, H_k$ komponente povezanosti.

Neka je H_i' dobijen od H_i vraćanjem čvora v i odgovarajućih grana, $i \in [k]$.

Tada za neko H_j' imamo $\chi(H_j') \geq 4$ (u suprotnom $\chi(G) \leq 3$).

IH: H_j' ima K_4-minor, pa i G ima K_4-minor.

3° G 2-povezan, a nije 3-povezan

Neka su $u, v \in V$ t.d. $G \setminus \{u, v\}$ nije povezan i neka su $H_1, \dots, H_k$ komponente povezanosti.

Neka je H_i' dobijen od H_i vraćanjem čvorova u, v, odgovarajućih grana i dodavanjem grane uv, $i \in [k]$

Tada za neko H_j' imamo $\chi(H_j') \geq 4$ (u suprotnom $\chi(G)=4$)

IH: H_j' ima K_4-minor

Ako $uv \in E$, onda i G ima K_4-minor

Neka $uv \notin E$ i neka $s \in [k] \setminus \{j\}$.

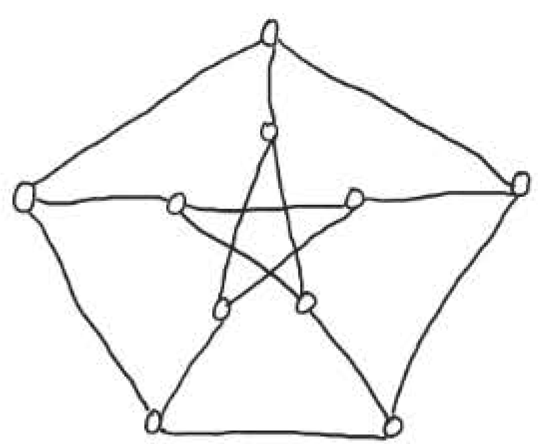
Tada je $H_s' \setminus uv$ povezan, pa postoji u-v put P čija unutrašnjost je u H_s

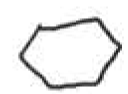
Neka je H_j'' dobijen od H_j vraćanjem čvorova u, v, odgovarajućih grana i dodavanjem puta P

Tada je H_j' minor od H_j'', pa H_j'' ima K_4-minor, a time i G.

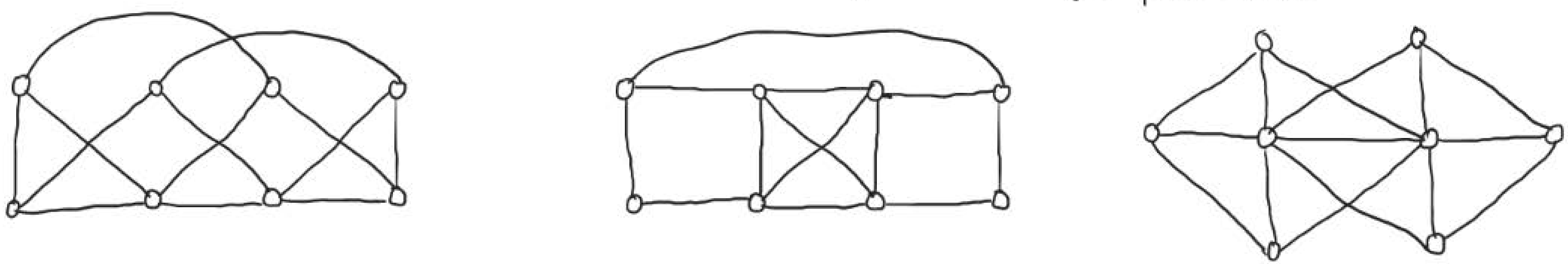
4° G 3-povezan: 4. zadatak

primer: Pitersonov graf ima K_5-minor, pa nije planaran.





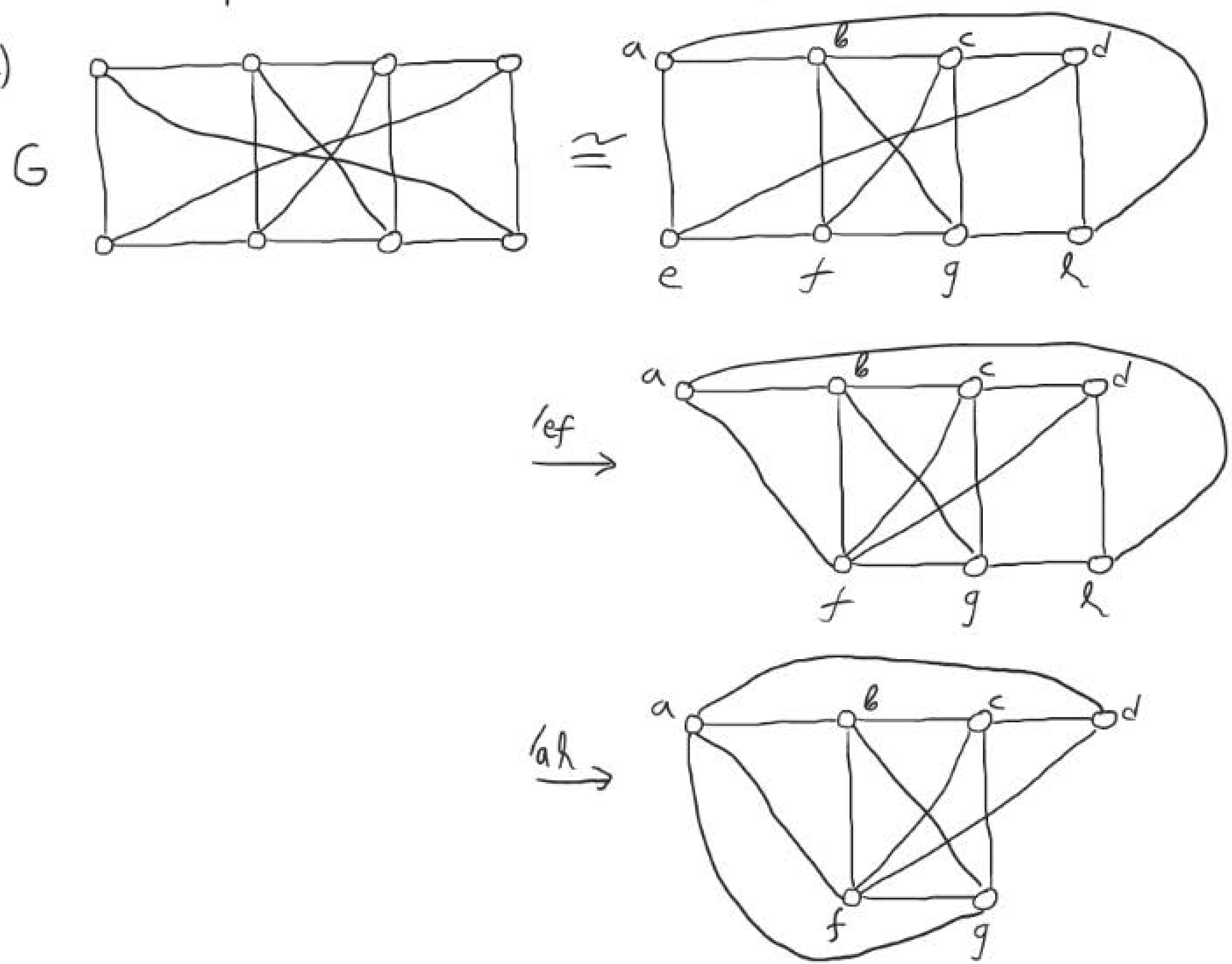
6. Pokazati da tačno jedan od sledećih grafova nije planaran

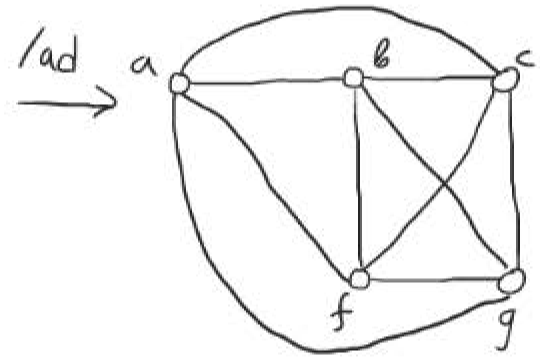


domaći

7. Ispitati planarnost sledećih grafova:

a)

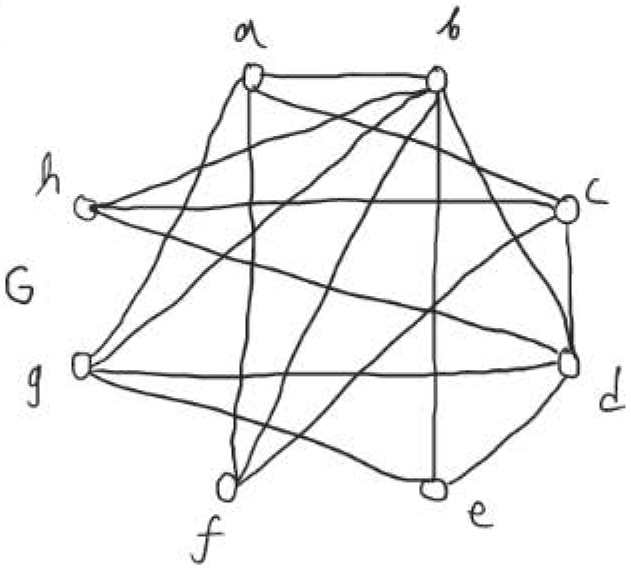




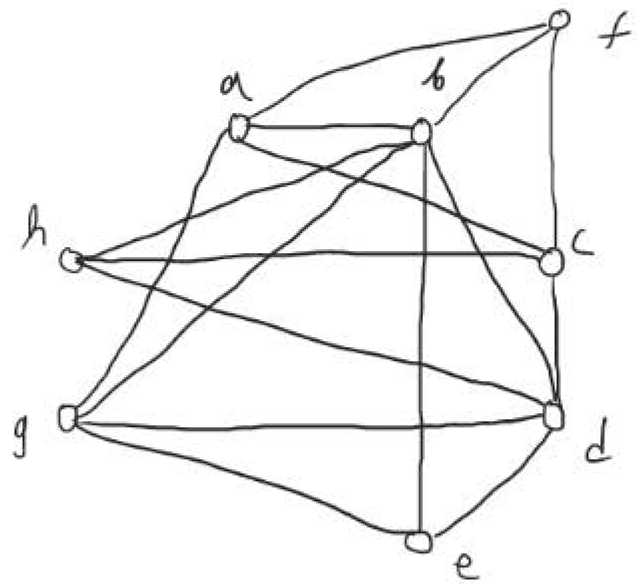
K_5

Kuratovski: G nije planaran

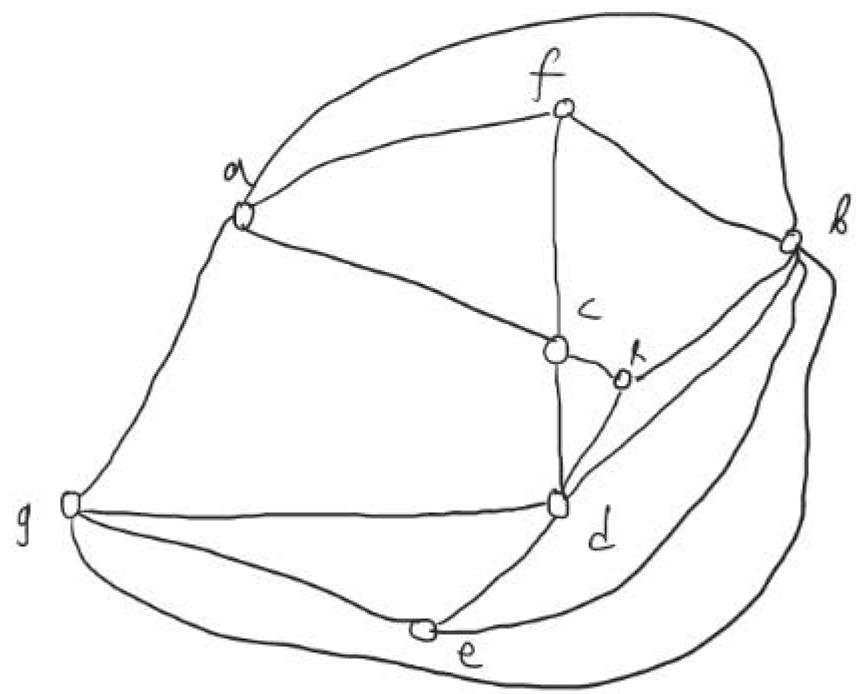
b)



$\cong$

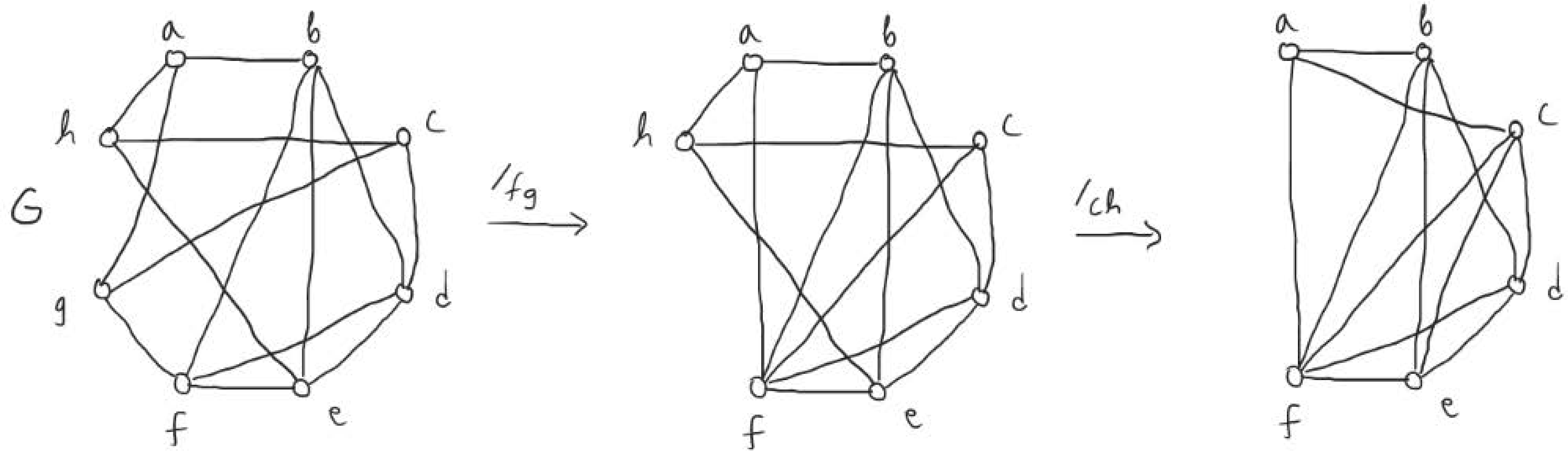


$\cong$

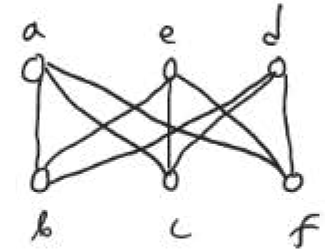


G je planaran

v)



G sadrži $K_{3,3}$-minor

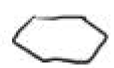


Kuratovski: G nije planaran

Remzijevi brojevi

def: Neka su k i s prirodni brojevi. Remzijev broj $R(k,s)$ je najmanji prirodan broj t.d. svaki graf sa barem $R(k,s)$ čvorova sadrži kompletan graf sa k čvorova ili nezavisan skup sa s čvorova

primer: $R(1,s) = R(k,1) = 1$

$R(2,s) = s \quad R(k,2) = k$ 

Teorema: Neka je $k,s \geq 2$. Tada važi:

1) $R(k,s) \leq R(k-1,s) + R(k,s-1)$;

2) $R(k,s) \leq \binom{k+s-2}{k-1}$;

3) ako su $R(k-1,s)$ i $R(k,s-1)$ parni brojevi, tada je $R(k,s) \leq R(k-1,s) + R(k,s-1) - 1$.

dokaz: 1) pps $G = (V,E)$, $|V| = R(k-1,s) + R(k,s-1)$ t.d. ne sadrži ni kompletan graf sa k čvorova, ni nezavisan skup sa s čvorova.

$v \in V$

Neka je H indukovan podgraf od G nad $N(v)$.

H ne može da sadrži K_{k-1} jer u tom slučaju G sadrži K_k (indukovani podgraf nad $N(v) \cup \{w\}$).

Takođe H ne sadrži nezavisan skup sa s čvorova. Dakle, $|N(v)| \leq R(k-1,s) - 1$.

Neka je H' indukovan podgraf od G nad $V \setminus (N(v) \cup \{v\})$.

H ne sadrži K_k.

H ne može da sadrži nezavisan skup sa $s-1$ čvorova (dodavanje čvora v tom skupu daje nezavisan skup sa s čvorova). Dakle, $|V \setminus (N(v) \cup \{v\})| \leq R(k, s-1) - 1$.

$$|V| = |N(v)| + |V \setminus (N(v) \cup \{v\})| + 1 \leq R(k-1, s) - 1 + R(k, s-1) - 1 + 1 = |V| - 1 \ \lightning$$

Dakle, $R(k,s) \leq R(k-1, s) + R(k, s-1)$.

2) Indukcijom po $k+s$

baza: $R(1,1) = 1 \leq \binom{1+1-2}{1-1}$ ✓

hipoteza: $R(k,s) \leq \binom{k+s-2}{k-1}$ kad $k+s = n$

korak: $k+s = n+1$

$$R(k,s) \overset{1)}{\leq} R(k-1, s) + R(k, s-1)$$
$$\leq \binom{k+s-3}{k-2} + \binom{k+s-3}{k-1}$$
$$= \binom{k+s-2}{k-1}$$

3) pps $G = (V, E)$, $|V| = R(k-1, s) + R(k, s-1) - 1$ t.d. ne sadrži ni kompletan graf sa k čvorova, ni nezavisan skup sa s čvorova.

$|V|$ neparan, pa G ima neparan broj čvorava parnog stepena

$v \in V \quad 2 \mid d(v)$

Kao u delu 1) $\underbrace{|N(v)|}_{\text{paran}} \leq \underbrace{R(k-1, s) - 1}_{\text{neparan}}$, pa $|N(v)| \leq R(k-1, s) - 2$

$$|V\setminus(N(v)\cup\{v\})| \le R(k,s-1)-1$$

$$|V| = |N(v)| + |V\setminus(N(v)\cup\{v\})| + 1 \le R(k-1,s)-2+R(k,s-1)-1+1 = |V|-1 \; \lightning$$

Dakle, $R(k,s) \le R(k-1,s) + R(k,s-1) - 1$ $\square$

1. Dokazati da važi $R(k,s)=R(s,k)$ za sve $k,s\in\mathbb{N}$.

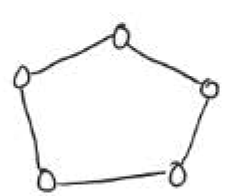
Neka je $G = K_{R(k,s)}$ čije grane su obojene crvenom ili plavom bojom.

Tada G sadrži crveni K_k ili plavi K_s.

Zamenom boja imamo graf $H = K_{R(k,s)}$ koji sadrži crveni K_s ili plavi K_k.

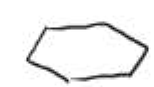
$$\left.\begin{array}{l} \text{Odavde sledi } R(s,k)\le R(k,s) \\ \text{Analogno } R(k,s)\le R(s,k) \end{array}\right\} R(k,s)=R(s,k).$$

primer: $R(3,3) \le R(2,3)+R(3,2) = 6$



ne sadrži ni 3-kliku, ni nezavisan skup sa 3 čvora

$R(3,3)=6$



2. U grupi od 17 ljudi, svake dve osobe su ili drugovi ili poznanici ili se ne poznaju uopšte. Dokazati da postoje tri osobe gde je svaka sa svakom ili drug

ili poznanik ili se ne poznaju međusobno.

Neka je $G=(V,E)$ K_{17} čije grane su obojene crvenom, plavom ili zelenom bojom.

Ako proizvoljno obojen K_{17} ima jednobojan trougao, onda postoje tražene tri osobe.

$u \in V$

b.u.o. $v_1, \dots, v_6 \in N(u)$ t.d. $uv_1, \dots, uv_6$ su crvene grane

Ako je $v_i v_j$ crvena, za neke $i,j \in [6]$, $i \neq j$, G ima jednobojan trougao.

Neka su sve $v_i v_j$ plave ili zelene grane, $i,j \in [6]$, $i \neq j$.

Međutim, kompletan graf nad $\{v_1, v_2, \dots, v_6\}$ ima jednobojan trougao jer $R(3,3)=6$.

3. Pokazati da je $R(3,4)=9$ i $R(3,5)=14$. $\boxed{2}$

domaći

4. Pokazati da je $R(4,4)=18$.

$$R(4,4) \leq R(3,4)+R(4,3) = 2R(3,4) \leq 2(R(2,4)+R(3,3)-1) = 2(4+6-1) = 18$$

Neka je $G=(\mathbb{Z}_{17}, E)$ K_{17} gde su grane obojene na sledeći način: uv crvena ako je $u-v=2^k$ za $k \geq 0$ (u $\mathbb{Z}_{17}$)

uv plava u suprotnom

$C=\{1,2,4,8,9,13,15,16\}$

$P = \{3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 14\}$

1° Neka G sadrži crveni K_4 (čvorovi t, a, b, c t.d. $t < a < b < c$ u $\mathbb{Z}$)

možemo da uzmemo $t = 0$

$$\left(\begin{array}{c} a-t, b-t, c-t, b-a, c-a, c-b \in C \\ \text{akko} \\ (a-t)-(t-t), (b-t)-(t-t), (c-t)-(t-t), (b-t)-(a-t), (c-t)-(a-t), (c-t)-(b-t) \in C \end{array} \right)$$

1.1° $a = 1$: $\{b, c\} \subseteq \{2, 9, 16\}$ što nije moguće jer $c - b \notin C$

1.2° $a = 2$: $\{b, c\} \subseteq \{4, 15\}$ $\lightning$

1.3° $a = 4$: $\{b, c\} \subseteq \{8, 13\}$ $\lightning$

1.4° $a = 8$: $\{b, c\} \subseteq \{9, 16\}$ $\lightning$

ni ostali slučajevi nisu mogući jer smo uzeli $a < b < c$

2° Neka G sadrži plavi K_4 (čvorovi t, a, b, c t.d. $t < a < b < c$ u $\mathbb{Z}$)

možemo da uzmemo $t = 0$

$$\left(\begin{array}{c} a-t, b-t, c-t, b-a, c-a, c-b \in P \\ \text{akko} \\ (a-t)-(t-t), (b-t)-(t-t), (c-t)-(t-t), (b-t)-(a-t), (c-t)-(a-t), (c-t)-(b-t) \in P \end{array} \right)$$

2.1° $a = 3$: $\{b, c\} \subseteq \{6, 10, 14\}$ što nije moguće jer $c - b \notin P$

2.2° $a = 5$: $\{b, c\} \subseteq \{10, 11, 12\}$ $\lightning$

2.3° $a = 6$: $\{b, c\} \subseteq \{11, 12\}$ $\lightning$

2.4° $a=7$: $\{b,c\} \subseteq \{10,12,14\}$ ↯

ni ostali slučajevi nisu mogući jer smo uzeli $a<b<c$

Teorema: Za $k \geq 2$ važi $R(k,k) \geq 2^{\frac{k}{2}}$.

dokaz: $R(2,2) = 2 \geq 2^{\frac{2}{2}}$

Neka je $k \geq 3$.

$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

$\mathcal{G}_n$ = skup svih grafova nad V (bez poistovećivanja izomorfnih grafova)

$|\mathcal{G}_n| = 2^{\binom{n}{2}}$

$\mathcal{G}_n^k$ = skup svih grafova nad V koji sadrže k-kliku

$|\mathcal{G}_n^k| \leq \binom{n}{k} 2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2}}$

Slično, ako je $\mathcal{H}_n^k$ skup svih grafova nad V koji sadrže nezavisan skup sa k čvorova, onda $|\mathcal{H}_n^k| \leq \binom{n}{k} 2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2}}$.

$$\frac{|\mathcal{H}_n^k|}{|\mathcal{G}_n|} = \frac{|\mathcal{G}_n^k|}{|\mathcal{G}_n|} \leq \frac{\binom{n}{k}}{2^{\binom{k}{2}}} = \frac{\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}}{2^{\binom{k}{2}}} < \frac{\frac{n^k}{k!}}{2^{\binom{k}{2}}} < \frac{\frac{2^{\frac{k^2}{2}}}{k!}}{2^{\binom{k}{2}}} = \frac{2^{\frac{k}{2}}}{k!} < \frac{1}{2}$$

$2^{\frac{k}{2}+1} < k!$ za $k \geq 3$

baza: $\sqrt{32} < 6$ ✓

hipoteza: $2^{\frac{k}{2}+1} < k!$

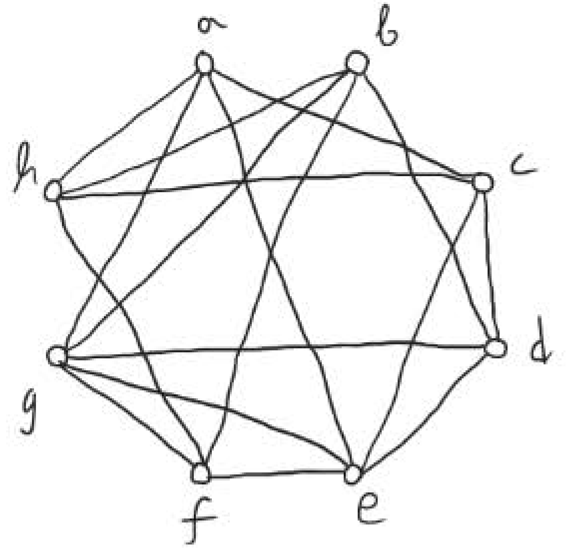
korak: $2^{\frac{k+1}{2}+1} = \sqrt{2}\,(2^{\frac{k}{2}+1}) < \sqrt{2}\,k! < (k+1)!$ $\lrcorner$

Kako $|\mathcal{H}_n^k| + |\mathcal{G}_n^k| < |\mathcal{G}_n|$, postoji graf nad V koji ne sadrži K_k, niti nezavisan skup sa k čvorova. Dakle, $R(k,k) \geq 2^{\frac{k}{2}}$ $\square$

1. Ispitati da li su sledeći grafovi Ojlerovi, odnosno Hamiltonovi. Ukoliko jesu, naći Ojlerovu šetnju, odnosno Hamiltonov ciklus:

a)

G



G nije Ojlerov ($2 \nmid d_G(e)$)

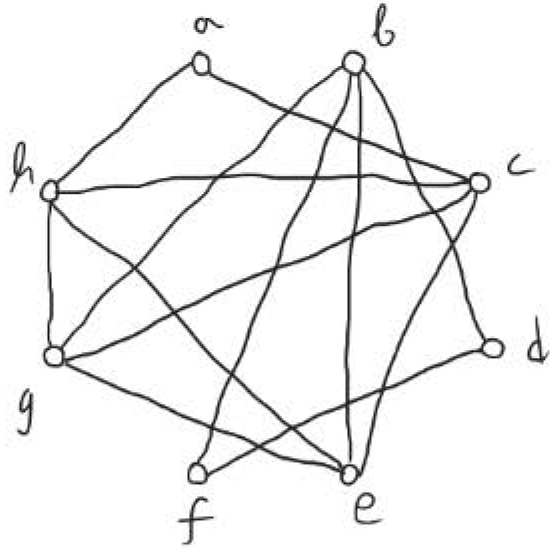
$\delta(G) = 4 \geq \frac{8}{2}$, pa je na osnovu Dirakove teoreme G Hamiltonov.

Hamiltonov ciklus:

acdefgbha

b)

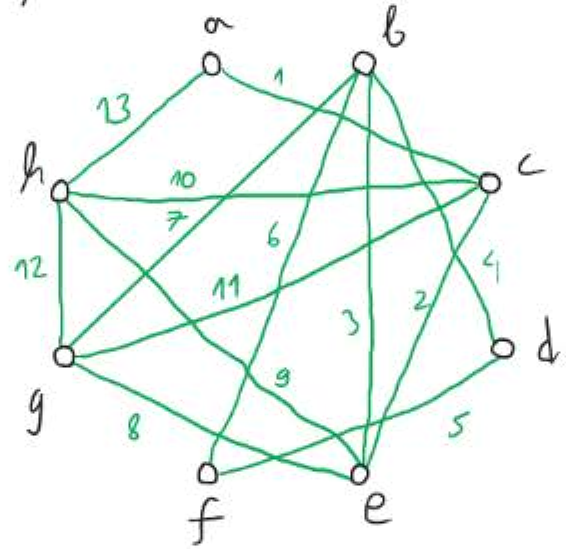
G



G je Ojlerov ($2 | d_G(v)$ za sve čvorove v)

Ojlerov ciklus:

acebdfbgehcgha



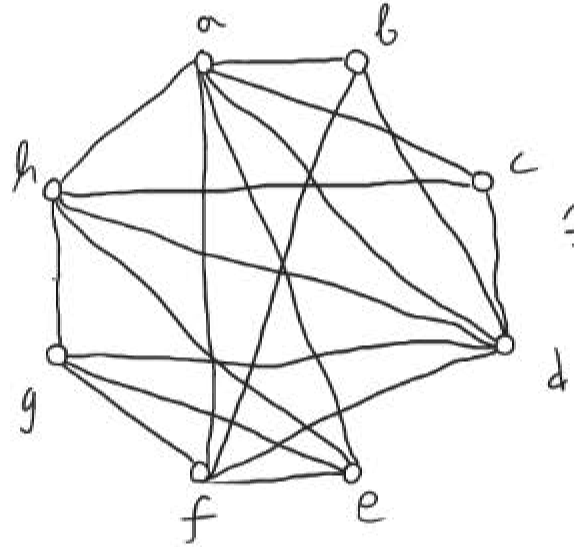
zbog trougla bcd, svaka zatvorena šetnja koja sadrži sve čvorove, mora da sadrži taj trougao, pa G nije Hamiltonov.

2. Ispitati planarnost sledećih grafova:

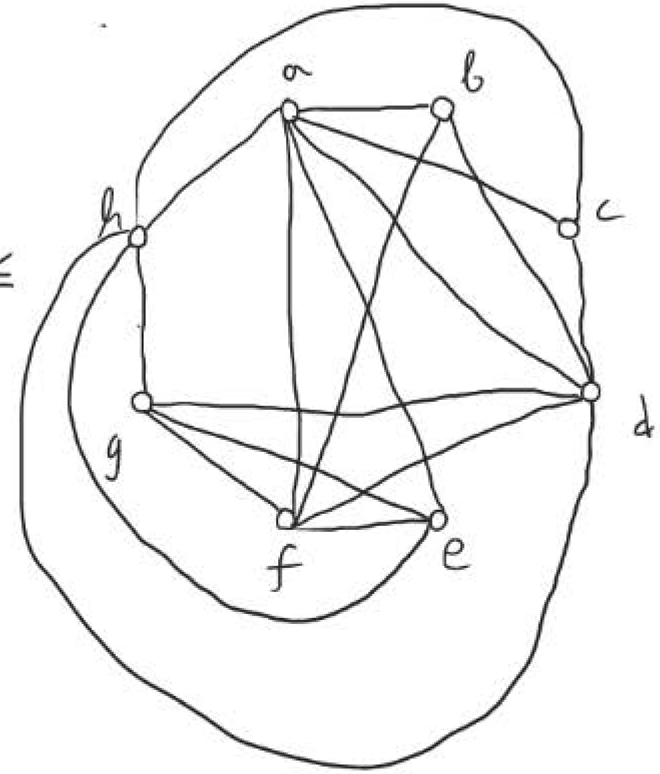
a)

$G=(V,E)$

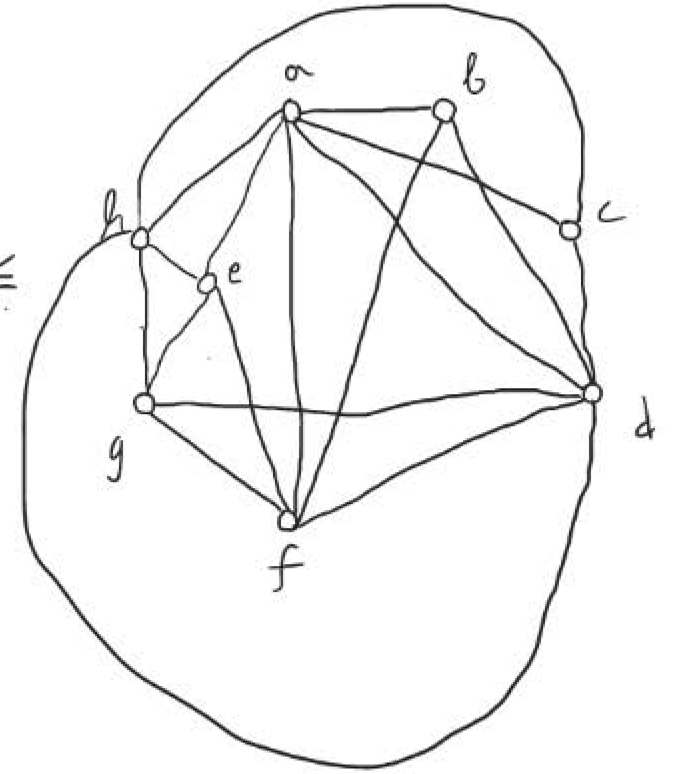
$|E|=18 \leq 18=3|V|-6$



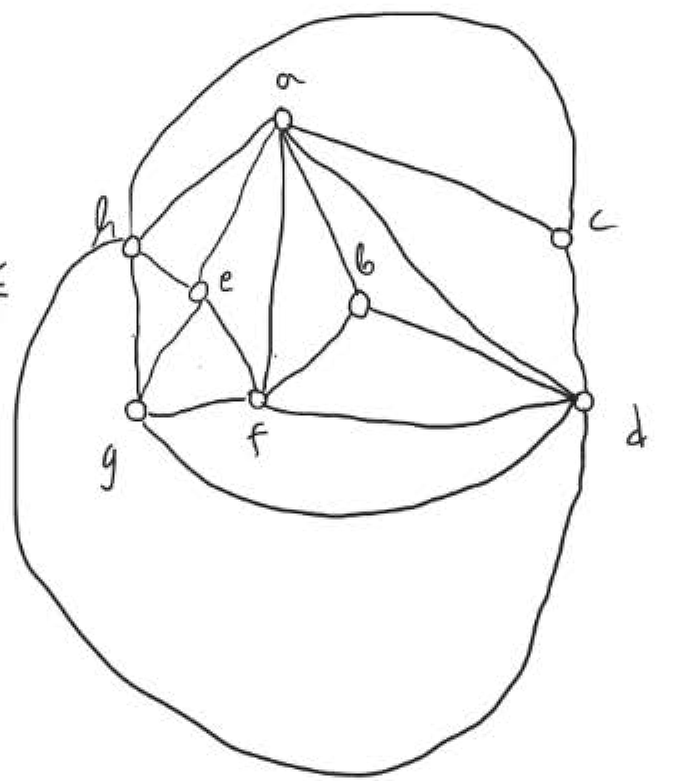
$\cong$



$\cong$



$\cong$

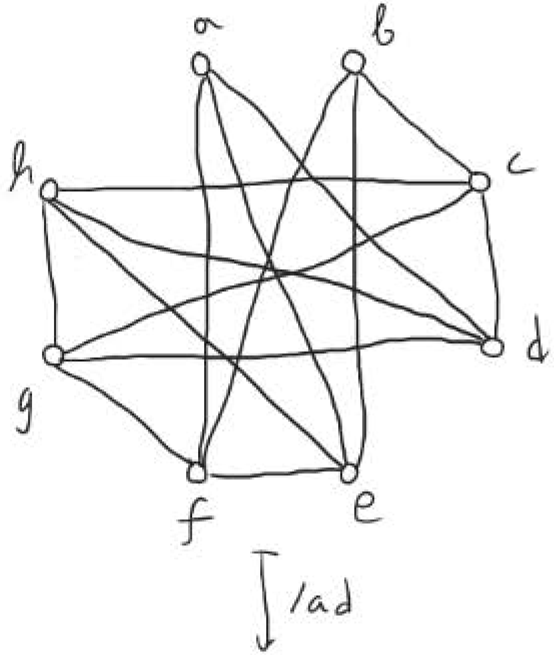


G je planaran

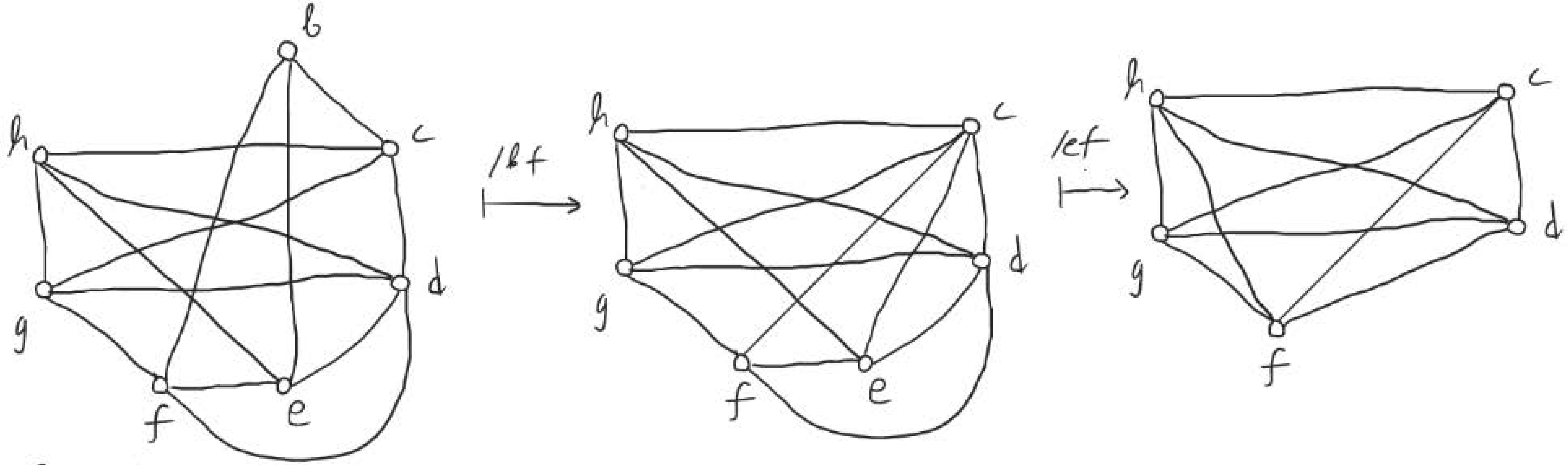
b)

$G=(V,E)$

$|E| = 15 \leq 18 = 3|V| - 6$



indukovani podgraf nad $\{c,d,g,h\}$ je K_4

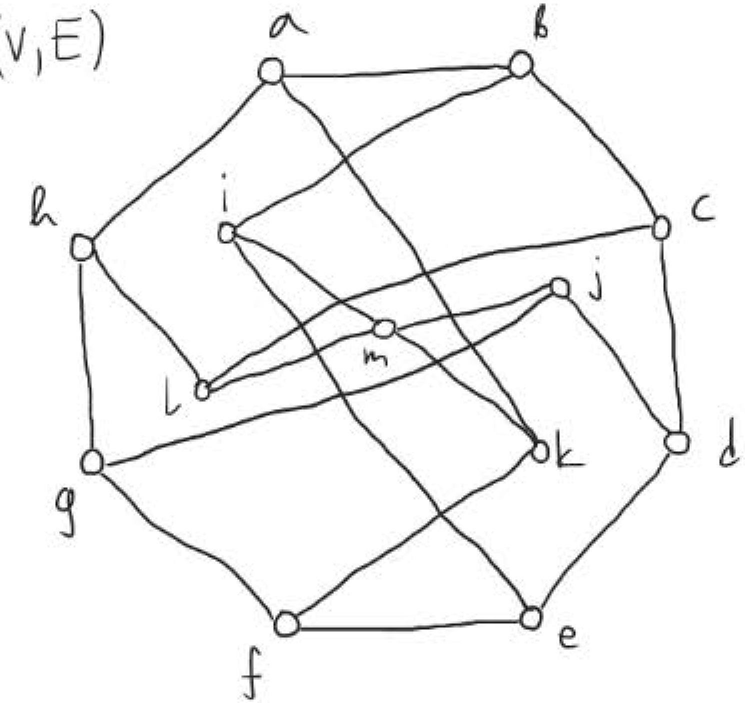


G sadrži K_5-minor, pa G nije planaran

2

3. Odrediti hromatski broj i indeks sledećeg grafa:

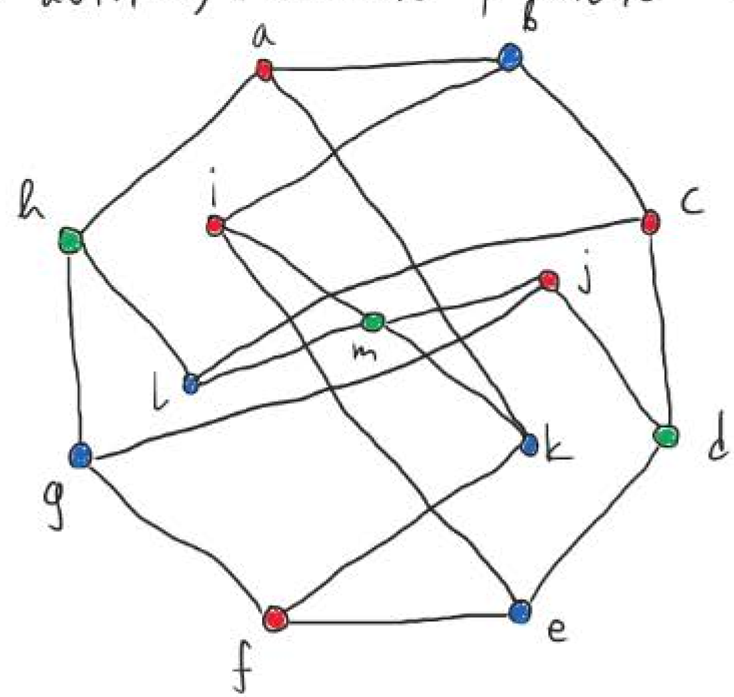
$G=(V,E)$



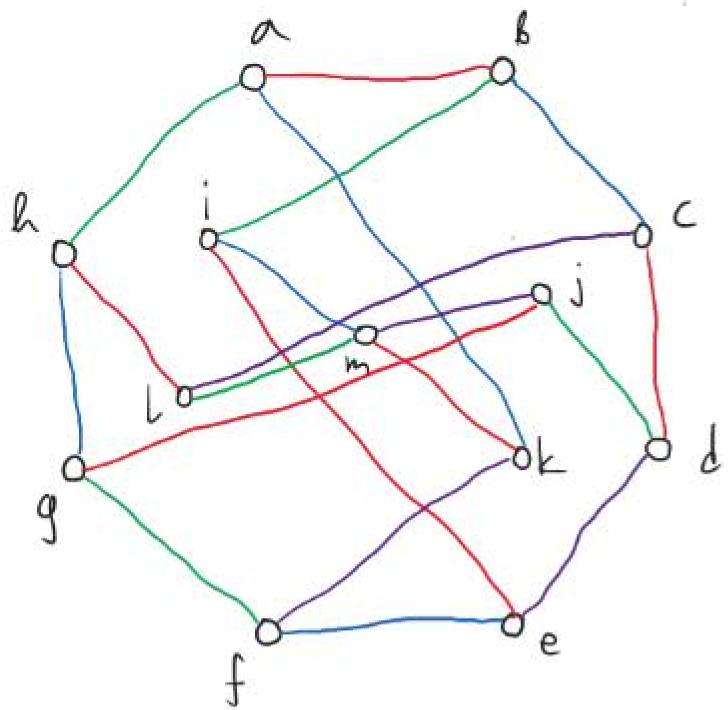
G nije ni kompletan graf, ni ciklus neparne dužine, pa na osnovu Bruksove teoreme $\chi(G) \le \Delta(G) = 4$.

G nije bipartitan (abimka) ciklus dužine 5), pa $\chi(G) \ge 3$.

Pokušajmo da obojimo G sa tri boje (krenimo od abimka). Imamo pravilno 3-bojenje. Dakle, $\chi(G)=3$.



Vizingova teorema: $4 \le \chi'(G) \le 5$.



Dato je pravilno 4-bojenje grana, pa $\chi'(G)=4$.

4. Neka je G graf sa jedinstvenim savršenim uparivanjem M:

a) Dokazati da G nema M-alternirajući ciklus;

b) Ako je G bipartitan sa particijom $X \sqcup Y$, dokazoti da X i Y sadrže po čvor stepena 1.

domaći

5. Dokazati da je graf bipartitan akko za svaka dva susedna čvora ne postoji čvor koji nije na istom rastojanju od oba.

$G=(V,E)$

$\rightarrow$: Neka su $u,v,w \in V$ t.d. $uv \in E$ i $d(u,w)=d(v,w)=s$

Neka su $uu_1 \dots u_{s-1}w$ i $vv_1 \dots v_{s-1}w$ putevi pomoću kojih se ostvaruju ova rastojanja. Ako $\{u_1, \dots, u_{s-1}\} \cap \{v_1, \dots, v_{s-1}\} = \emptyset$, $uu_1 \dots u_{s-1}wv_{s-1} \dots v_1vu$ je ciklus neparne dužine, pa G nije bipartitan.

Neka $u_i = v_j$ za neke $i,j \in [s-1]$. Bez umanjenja opštosti $i \leq j$.

Ako $i<j$, onda je $uu_1 \dots u_i v_{j+1} \dots v_{s-1}w$ kraći put od $uu_1 \dots u_{s-1}w$, što nije moguće.

Dakle, $i=j$, pa je $uu_1 \dots u_i v_{i-1} \dots v_1 vu$ zatvorena šetnja neparne dužine, pa G sadrži ciklus neparne dužine, te G nije bipartitan.

$\leftarrow$: Neka za svaka dva susedna čvora ne postoji čvor koji je na istom rastojanju od oba.

$v \in V$

$X = \{u \in V \mid 2 \nmid d(u,v)\}$ $\quad V = X \sqcup Y$

$Y = \{u \in V \mid 2 \mid d(u,v)\}$

Neka $uw \in E$

pps $u, w \in X$ ili $u, w \in Y$

1° $u, w \in X$

$u, w \neq v$

$d(v,u) = s$, $d(v,w) = t$

Ako $s < t$ $(t < s)$, onda $s \leq t-2$ $(t \leq s-2)$, pa postoji kraći v-w $(v$-$u)$ put preko u (w).

Dakle, $s = t$, a to nije moguće. $\lightning$

2° $u, w \in Y$

Analogno slučaju 1°, samo treba primetiti da $u, w \neq v$ jer $d(v,u) \geq 2$ ili $d(v,w) \geq 2$ što nije moguće jer $uw \in E$.

5

6. Neka je G povezan graf koji nije kompletan. Dokazati da je G k-povezan akko za svaka dva čvora u, v koji su na međusobnom rastojanju 2 postoji k uv puteva sa međusobno disj. unutrašnjostima.

domaći