ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБУ

§ Основне особине функција, линеарне функције

1. Оп2012.1Б.4. **2.** Оп2014.1Б.1. **3.** Оп2013.1Б.3. **4.** Ок2018.1Б.5.

5. Нека је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ линеарна функција таква да је $f(0) = -5$ и $f(f(0)) = -15$. Одредити све вредности $m \in \mathbb{R}$ за које је скуп решења неједначине $f(x) \cdot f(m-x) > 0$ интервал дужине 2.

6. Нека су $a, b, c \in \mathbb{R}$. Могу ли графици функција

$$y = ax + b, \quad y = ax + c, \quad y = bx + c, \quad y = bx + a, \quad y = cx + a, \quad y = cx + b,$$

да садрже четири странице и обе дијагонале неког четвороугла?

7. Ок2016.1Б.4. **8.** Др2013.1Б.1. **9.** Оп2014.1А.1. **10.** Др2019.1Б.4.

§ Квадратне једначине и функције

11. Оп2016.2Б.2. **12.** Оп2017.2Б.4. **13.** Оп2012.2Б.3. **14.** Ок2019.2Б.1.
15. Ок2017.2Б.4. **16.** Ок2012.2Б.2. **17.** Оп2015.2Б.2. **18.** Оп2019.4Б.2.
19. Оп2015.2А.1. **20.** Др2017.2Б.4. **21.** Др2015.2Б.4. **22.** Ок2015.3А.2.

23. Одредити скуп свих реалних параметара a за које неједначина $x^2 - a(a+1)x + a^3 \leqslant 0$ има тачно 5 целобројних решења.

24. Дате су квадратне једначине $x^2 + \frac{8}{a} \cdot x - 2a = 0$ и $x^2 + \frac{6}{a} \cdot x - a = 0$. Одредити све вредности реалног параметра a за које су сва четири решења ових двеју једначина реална и међусобно различита и при томе се тачно једно решење прве једначине налази између решења друге.

25. Одредити све $a \in \mathbb{R}$ такве да за свако $x \in [0,1]$ важи неједнакост $|x^2 - 2ax - a^2 - \frac{3}{4}| \leqslant 1$.

26. Одредити све $a \in \mathbb{R}$ такве да за свако $x \in [-1,1]$ важи неједнакост $|ax^2 - 3x - 4| \leqslant 5 - 3x$.

27. Нека су $a, b > 0$ такви да свака од једначина $(a+b-x)^2 = a - b$ и $(ab+1-x)^2 = ab - 1$ има два различита реална решења. Доказати да ако су већа решења ових једначина једнака, онда су и мања решења такође једнака.

28. Дате су квадратне функције $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$. Може ли скуп решења једначине $f(g(h(x))) = 0$ бити $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$?

§ Ирационалне једначине

29. Ок2012.2Б.1. **30.** Оп2015.2А.1. **31.** Оп2015.4Б.1. **32.** Ок2019.2Б.4.
33. Др2017.2Б.1. **34.** Ок2019.3Б.3. **35.** Ок2018.2Б.4. **36.** Ок2018.2А.1.
37. Др2019.2Б.3. **38.** Др2018.2Б.3. **39.** Др2013.4А.1. **40.** Др2015.2А.1.

§ Експоненцијалне и логаритамске функције

41. Оп2018.3Б.2. **42.** Оп2019.3Б.5. **43.** Др2018.3Б.1. **44.** Др2016.2Б.1.

45. Одредити све $x > 0$ такве да важи $x^{1-\frac{1}{3}\log_{10} x^2} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{100}}$.

46. Оп2014.3А.1. **47.** Др2013.2Б.2. **48.** Др2012.3Б.2. **49.** Др2012.2Б.2.

50. Одредити све вредности $a \in \mathbb{R}$ такве да неједнакост $\log_{a^2+a+1} \dfrac{3x^2+4}{x^2+1} > 1$ важи за све $x \in \mathbb{R}$.

51. Одредити све вредности реалног параметра a таквих да једначина $9^t - 4a3^t + 4 - a^2 = 0$ има тачно једно решење у интервалу $(0,1)$.

52. Одредити све природне бројеве n такве да је $\log_{n+1}(n^2+3n) + \log_{3n}(n^2-6) = \log_{2(n-1)}(n^3+9)$.

53. Доказати да за $z > y > x > 1$ важи неједнакост $\log_x(\log_x y) + \log_y(\log_y z) + \log_z(\log_z x) > 0$.

54. Др2018.4А.1. **55.** Оп2012.3А.2.

§ Тригонометријске и инверзне тригонометријске функција

56. Оп2016.3Б.3. **57.** Ок2012.3Б.2. **58.** Ок2019.3Б.1. **59.** Ок2016.3Б.1.
60. Оп2016.4Б.4. **61.** Ок2013.2А.1. **62.** Др2018.3Б.2. **63.** Оп2019.3Б.1.
64. Оп2018.2А.1. **65.** Оп2012.3Б.3. **66.** Др2013.3Б.2. **67.** Ок2019.3А.1.
68. Оп2014.2А.1. **69.** Ок2018.4А.2. **70.** Др2012.4Б.2. **71.** Ок2015.3Б.2.

72. Доказати да за $n \in \mathbb{N}$ важи: $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2\cdot 2^2} + \cdots + \operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2} = \operatorname{arctg}\frac{1}{n+1}$.

73. Одредити све вредности параметра $a \in \mathbb{R}$ за које систем једначина: $\sin x + \cos y = 4a + 6$, $\cos x + \sin y = 3a + 2$, има решење.

74. Доказати да је број $\dfrac{16\arcsin\frac{\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}}{2}}{\pi}$ природан.

75. Доказати да за $x, y \in \mathbb{R}$ важи

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \begin{cases} \varphi, & xy < 1 \\ \varphi + \pi, & xy > 1 \text{ и } x > 0 \\ \varphi - \pi, & xy > 1 \text{ и } x < 0 \\ \pi/2, & xy = 1 \text{ и } x > 0 \\ -\pi/2, & xy = 1 \text{ и } x < 0 \end{cases},$$

где је $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$.

76. Нека су $a, b, A, B \in \mathbb{R}$ такви да важи $a\cos x + b\sin x + A\cos 2x + B\sin 2x \leqslant 1$ за све $x \in \mathbb{R}$. Доказати да је $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{A^2+B^2} \leqslant 2$.

77. Нека је $f_k(x) = \dfrac{1}{k}\left(\sin^k x + \cos^k x\right)$. Одредити све вредности природних бројева m и n, $m \neq n$, за које је $f_m(x) - f_n(x)$ константна функција.

78. Др2015.3Б.3. **79.** Др2018.4Б.4. **80.** Оп2012.4Б.3.

§ Разни задаци из функција

81. Оп2019.3А.1. **82.** Ок2019.4А.1. **83.** Оп2018.2Б.5. **84.** Ок2019.4Б.2.

85. Одредити све $a \in \mathbb{R}$ такве да неједнакост $x^4 + ax^3 + (a+3)x^2 + ax + 1 > 0$ важи за све $x \in \mathbb{R}$.

86. Доказати да неједнакост $x\left(2\cdot 3^x - \dfrac{4x^2+x+2}{x^2+x+1}\right) \geqslant 0$ важи за све реалне бројеве x.

§ Комплексни бројеви

87. Ок2013.2Б.1. **88.** Оп2014.2Б.1. **89.** Оп2014.4Б.1. **90.** Оп2013.4Б.2.
91. Оп2013.3А.1. **92.** Др2013.4Б.1. **93.** Оп2019.2А.4. **94.** Др2014.2Б.1.
95. Ок2012.2А.2. **96.** Др2019.4Б.1. **97.** Др2018.2Б.4. **98.** Оп2013.2А.2.
99. Др2012.3Б.1. **100.** Оп2016.3А.5.

§ Полиноми

101. Одредити све реалне бројеве a, b, p, q такве да је полином $(2x-1)^{20} - (ax+b)^{20}$ једнак полиному $(x^2+px+q)^{10}$.

102. Др2012.4Б.1.

103. Одредити остатак при дељењу:

а) полинома $x^{2023} + x^{2022} + 1$ са $x^2 - x - 2$; б) полинома $x^{2023} + x^{2022} + 1$ са $x^2 - 2x + 1$.

104. Одредити остатак при дељењу полинома $x^{2023} + x^{2022} + 1$ са $x^3 + 1$.

105. Одредити све A и B такве да је полином $p(x) = Ax^{n+1} + Bx^n + 1$ дељив полиномом $(x-1)^2$.

106. Ок2016.4А.1. **107.** Др2015.4А.1.

108. Доказати да је 1 нула вишеструкости 3 полинома $x^{2n+1} - (2n+1)x^{n+1} + (2n+1)x^n - 1$.

109. Доказати да полином $\dfrac{x^n}{n!}+\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\cdots+\dfrac{x}{1}+1$ нема вишеструке нуле.

110. При дељењу полинома $P(x)$ полиномом $Q(x)=2x^{2021}-x^2-3x+2$ добија се остатак $R(x)=23x^2+5x+2021$. Одредити збир свих коефицијената полинома $P(x)$.

111. Нека су $k,a_1,\ldots,a_k\in\mathbb{N}$. Доказати да је полином $f(x)=x^{ka_1}+x^{ka_2+1}+\cdots+x^{ka_k+k-1}$ дељив полиномом $g(x)=x^{k-1}+x^{k-2}+\cdots+x+1$.

112. Нека је $n\in\mathbb{N}$ и $f(x)\in\mathbb{R}[X]$. Ако је полином $f(x^n)$ дељив полиномом $x-1$, доказати да је и полином $f(x)$ дељив полиномом $x-1$.

113. Нека су $f_1,f_2,f_3\in\mathbb{C}[X]$ такви да је

$$f_1(x^4)+xf_2(x^4)+x^2f_3(x^4)=(1+x+x^2+x^3)g(x)\quad\text{за све } x\in\mathbb{C}.$$

Доказати да је сваки од полинома $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ дељив са $x-1$.

114. Др2011.3А.1.

115. Ако су x_1, x_2, x_3 нуле полинома $4x^3+7x^2-5x-1$, одредити барем један полином чије су све нуле: а) x_1+1, x_2+1, x_3+1; б) x_1^2, x_2^2, x_3^2.

116. Нуле полинома $x^3+\lambda x^2+\mu x-\lambda-\mu$ су x_1,x_2,x_3. Одредити све вредности за λ,μ,ν тако да су x_1+x_2,x_2+x_3,x_3+x_1 нуле полинома $x^3+\nu x^2+(\mu-\nu)x-\nu$.

117. Др2016.4Б.1. **118.** Ок2017.3А.2. **119.** Др2011.4Б.5.

120. У зависности од a_1 и a_2 одредити нуле полинома $p(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n$ ако је познато да оне образују аритметичку прогресију.

121. Нека је $n\in\mathbb{N}$. За свако $i\in\{1,2,\ldots,n-1\}$ је са S_i означен збир свих производа по i елемената из скупа $\left\{\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\ldots,\dfrac{1}{n}\right\}$. Доказати да је $S_1+S_2+\cdots+S_{n-1}=\dfrac{n-1}{2}$.

122. Ок2016.4Б.5.

123. Одредити све $a\in\mathbb{R}$ такве да је модул сваке нуле полинома $P(x)=x^4+ax^2+a^2x-1$ једнак 1.

124. Одредити све полиноме $f(x)\in\mathbb{R}[X]$ такве да за свако $x\in\mathbb{R}$ важи

$$xf(x)f(1-x)+x^3+100\geqslant 0.$$

125. Нека су $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ полиноми трећег степена такви да је $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$ за све $x\in\mathbb{R}$. Ако је $f(x_0)=h(x_0)$ за неко $x_0\in\mathbb{R}$, доказати да постоји $k\in[0,1]$ тако да је

$$g(x)=kf(x)+(1-k)h(x)\quad\text{за свако } x\in\mathbb{R}.$$

126. Одредити све $a\in\mathbb{R}$ такве да за свако $x\in\mathbb{R}$ важи

$$(x+1)(x^3+ax^2+x+(a-2)^2)\geqslant 0.$$

127. Нека су $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ и $g(x)=x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n$ полиноми са комплексним коефицијентима, такви да су $x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{C}$ нуле полинома $f(x)$, а $x_1^2,\ldots,x_n^2$ нуле полинома $g(x)$. Ако су бројеви $a_1+a_3+\cdots$ и $a_2+a_4+\cdots$ реални, доказати да је и $b_1+b_2+\cdots+b_n$ реалан број.

128. Нека је $f(x)\in\mathbb{Z}[X]$ такав да су бројеви $f(0)$ и $f(1)$ непарни. Доказати да нуле полинома $f(x)$ нису цели бројеви.

129. Нека је $f(x)\in\mathbb{Z}[X]$ такав да су бројеви $f(2)$ и $f(3)$ дељиви са 6. Доказати да је и број $f(5)$ дељив са 6.

130. Нека је $f(x)\in\mathbb{Z}[X]$ такав да за четити различита цела броја a,b,c,d важи $f(a)=f(b)=f(c)=f(d)=1$. Доказати да не постоји цео број e такав да је $f(e)=-1$.

131. Др2019.1А.1. **132.** Др2012.1А.3.

133. Нека је $f(x)\in\mathbb{Z}[X]$ такав да при дељењу са $x^2-12x+11$ даје остатак $990x-889$. Доказати да нуле полинома $f(x)$ нису цели бројеви.

134. Нека су $a_1,a_2,\ldots,a_n$ различити цели бројеви. Доказати да је $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)-1$ нерастављив у $\mathbb{Z}[X]$.

135. Нека су $a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}\in\mathbb{Z}$ и p прост број такви да је $p>1+|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{n-1}|$. Доказати да је полином $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+p$ нерастављив у $\mathbb{Z}[X]$.

136. Нека је p прост број и $n, m, a \in \mathbb{N}$ тако да је $p < a - 1$. Доказати да је полином $f(x) = x^n(x-a)^m + p$ нерастављив у $\mathbb{Z}[X]$.

137. Нека је $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 7$, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ различити цели бројеви и $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$. Ако је $ax^2 + bx + 1$ нерастављив у $\mathbb{Z}[X]$, доказати да је тада и полином $af(x)^2 + bf(x) + 1$ нерастављив у $\mathbb{Z}[X]$, где је $f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$.

138. Нека $a_1, a_2, \ldots, a_n$ различити цели бројеви такви да је полином $f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) + 1$ растављив у $\mathbb{Z}[X]$. Доказати да је $n \leqslant 4$.

139. Доказати да не постоји полином $f(x)$ са целим коефицијентима такав да је

$$f(1) = f(5) = -1, \quad f(2) = f(4) = 2 \quad \text{и} \quad f(3) = 2021.$$

§ Неједнакости

140. Доказати да за $x > 0$ важи $x^2 + \dfrac{2}{x} \geqslant 3$.

141. Нека су $a, b, c > 0$. Доказати да је $\dfrac{a^2 + b^2 + 3c^2 + 1}{2c} \geqslant a + b + 1$.

142. Нека су $x, y, z > 0$ такви да је $x + y + z = 6$. Доказати да је $\sqrt{4x+1} + \sqrt{4y+1} + \sqrt{4z+1} \leqslant 9$.

143. Ок2014.3А.1.

144. Доказати да за $x > y \geqslant 0$ важи $x + \dfrac{4}{(x-y)(y+1)^2} \geqslant 3$.

145. У скупу реалних бројева решити једначину $(7 + \sqrt{48})^x + 17(2 - \sqrt{3})^x = 12$.

146. Доказати да за $a, b, c > 0$ важи $\sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{ca} - 1 \leqslant \dfrac{2}{3}(a + b + c)$.

147. Нека су $a, b, c > 0$ такви да је $a + b + c = 1$. Доказати да је $\left(1 + \dfrac{1}{a}\right)\left(1 + \dfrac{1}{b}\right)\left(1 + \dfrac{1}{c}\right) \geqslant 64$.

148. Нека су $a, b, c, d > 0$ такви да је $a + b + c + d = 1$. Доказати да је

$$\left(\frac{1}{a} - 1\right)\left(\frac{1}{b} - 1\right)\left(\frac{1}{c} - 1\right)\left(\frac{1}{d} - 1\right) \geqslant 81.$$

149. Нека су $a, b > 0$. Доказати да важи $a(1 + b^2) + b(1 + a^2) \leqslant (1 + a^2)(1 + b^2)$.

150. Доказати да за $x, y, z > 0$ важи $x^3y^2 + y^3z^2 + z^3x^2 \geqslant x^2y^2z + x^2yz^2 + xy^2z^2$.

151. Доказати да за $x, y, z > 0$ важи $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x} \geqslant \dfrac{x + y + z}{\sqrt[3]{xyz}}$.

152. Доказати да за $x, y, z > 0$ важи $\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{z^2} + \dfrac{z^2}{x^2} \geqslant \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x}$.

153. Нека је $a, b, c > 0$. Доказати да важи $\dfrac{a}{b} + \sqrt{\dfrac{b}{c}} + \sqrt[3]{\dfrac{c}{a}} > 2$.

154. Нека је $x_0 > x_1 > \ldots > x_n > 0$. Доказати да важи

$$x_0 + \frac{1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_1 - x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \geqslant x_n + 2n.$$

155. Одредити све $c \geqslant b \geqslant a > 0$ такве да је $(a + 3b)(b + 4c)(c + 2a) = 60abc$.

156. Одредити све $a, b > 0$ такве да је $(1 + a)(8 + b)(a + b) = 27ab$.

157. Доказати да за све $a, b, c > 0$ важи $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} \geqslant \dfrac{3}{2}$.

158. Доказати да за све $a, b, c > 0$ важи $\dfrac{a}{2c+b} + \dfrac{b}{2a+c} + \dfrac{c}{2b+a} \geqslant 1$.

159. Нека су $x, y, z > 0$ такви да је $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$. Доказати да је $(x-1)(y-1)(z-1) \geqslant 8$.

160. Нека су $x, y, z > 0$ такви да је $x + y + z \geqslant \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$. Доказати да је $x + y + z \geqslant \dfrac{3}{xyz}$.