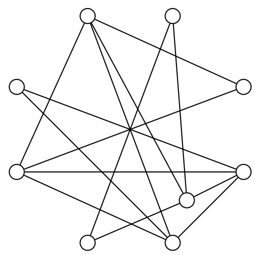
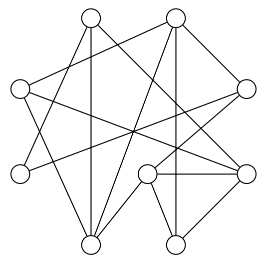
Писмени испит из Дискретне математике, Јануар 1 *19. јануар 2024.*

1. Испитати да ли су следећи графови Ојлерови, односно Хамилтонови. Уколико јесу, наћи Ојлерову шетњу, односно Хамилтонов циклус:

а)

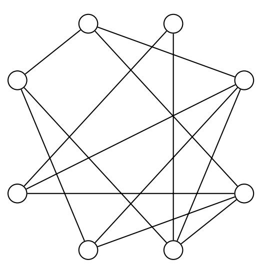


б)

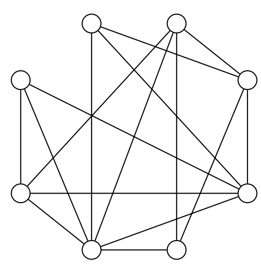


2. Испитати планарност следећих графова:

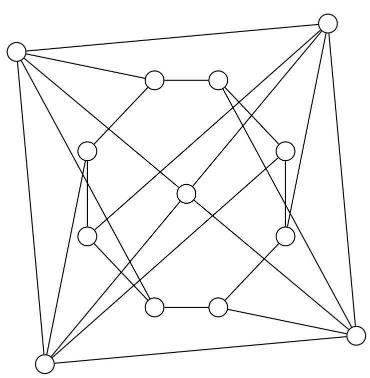
а)



б)



3. Одредити хроматски број и индекс следећег графа:



4. Доказати да је граф $G = (V, E)$ 2-повезан ако и само ако за свака три различита чвора $x, y, z \in V$ постоји $x - y$ пут у G који садржи z.

5. За матрицу из $M_n(\mathbb{R})$ кажемо да је *дупло-стохастичка* ако су сви њени елементи ненегативни, а збир елемената сваке њене врсте, као и сваке колоне је 1. За матрицу из $M_n(\mathbb{R})$ кажемо да је *пермутациона* ако је сваки њен елемент једнак 0 или 1, а у свакој њеној врсти и у свакој колони се налази тачно један елемент једнак 1.

(а) Доказати да за дупло-стохастичку матрицу $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ постоји пермутација $\pi \in \mathbb{S}_n$ таква да је $a_{i,\pi(i)} \neq 0$ за све $1 \leqslant i \leqslant n$.

(б) Доказати да за сваку дупло-стохастичку матрицу $A \in M_n(\mathbb{R})$ постоји природан број m, пермутационе матрице $A_1, A_2, \ldots, A_m \in M_n(\mathbb{R})$ и позитивни реални бројеви $c_1, c_2, \ldots, c_m$ тако да је $c_1 + c_2 + \cdots + c_m = 1$ и

$$A = c_1 A_1 + c_2 A_2 + \cdots + c_m A_m.$$