Белешке са курса Дискретна математика 2017/2018.

Марко Радовановић

Упозорење

Овај текст не може заменити одговарајуће уџбенике, нити предавања. Циљ текста је да помогне приликом припреме испита, а не да буде основна литература.

У документу недостају слике, па препоручујем да их сами нацртате приликом читања. Такође, пожељно је да пре него што доказ неког тврђења прочитате добро размислите о том тврђењу и покушате да до доказа сами дођете. Јер, чак и ако у овоме не успете, добићете пуно – једино тако ћете приликом каснијег читања доказа схватити идеје које се у њему крију.

Материјал ће трпети сталне (ненајављене) промене.

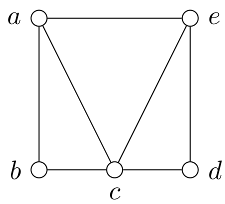
Предавање 1

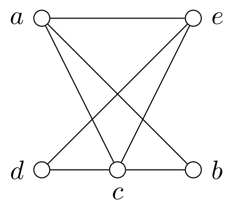
Основни појмови

1.1 Дефиниција графа

Граф је уређен пар $G = (V, E)$, где је V коначан скуп, а E подскуп скупа[1] двочланих подскупова од V. Елементи скупа V су *чворови* (или *темена*), а елементи скупа E *гране* (или *ивице*) графа G.[2]

Да бисмо лакше радили са графовима најчешће их цртамо у равни, и то на следећи начин. Ако је $G = (V, E)$ граф, тада сваком чвору овог графа доделимо једну тачку равни, а затим тачке које одговарају чворовима x и y спојимо кривом ако и само ако је $\{x, y\} \in E$ (погледати фигуру 1).





Слика 1. Два представљања графа $G = (V, E)$, при чему је $V = \{a, b, c, d, e\}$ и $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}\}$.

Уколико је $\{x, y\} \in E$, скраћено пишемо и $xy \in E$. Такође, за грану e и чвор x кажемо да *e садржи x* уколико је $x \in e$. Ако је $xy \in E$, тада за чворове x и y кажемо да су *суседни*, као и да су они *крајеви* гране xy. Скуп суседа чвора v означавамо са $N(v)$, тј. $N(v) := \{u \in V \mid uv \in E\}$. *Степен* чвора v, у ознаци $d(v)$, је број његових суседа, тј. $d(v) := |N(v)|$. За дати граф G са $\delta(G)$ и $\Delta(G)$ означавамо минимални и максимални степен његових чворова, тј.

$$\delta(G) := \min\{d(v) \mid v \in V\} \quad \text{и} \quad \Delta(G) := \max\{d(v) \mid v \in V\}.$$

Тврђење 1.1 *У сваком графу $G = (V, E)$ важи*

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

Доказ. Број $d(v)$ је број грана које садрже чвор v. Дакле, број $\sum_{v \in V} d(v)$ можемо добити тако што за сваки чвор $v \in V$ посматрамо број грана које садрже v и затим све ове бројеве саберемо. Како свака грана садржи два чвора, приликом овог бројања сваку грану xy смо рачунали два пута (једном као грану која садржи x, а други пут као грану која садржи y), тако да је дати збир заиста једнак $2|E|$. $\square$

Последица 1.1 *У сваком графу број чворова непарног степена је паран.*

[1] Можемо претпоставити да је $E \cap V = \emptyset$, јер никада неки објекат нећемо посматрати и као чвор и као грану истог графа.

[2] У литератури постоје различите дефиниције појма граф, а често се под графовима подразумевају и објекти који нису обухваћени дефиницијом која је овде наведена. За појам који је у овом тексту дефинсан као *граф* у неким књигама користе се и термини *неоријентисан граф* и *прост граф*.

Доказ. По претходном тврђењу број $\sum_{v\in V} d(v)$ је паран. У овом збиру неки бројеви су парни, а неки непарни. Како је збир (неких) бројева паран ако и само ако је у њему паран број непарних сабирака, закључујемо да је парно бројева $d(v)$ непарно, што је и требало доказати. $\square$

Шетња у графу је <u>низ</u> чворова $v_1, v_2, \ldots, v_n$, такав да за свако $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ важи $v_i v_{i+1} \in E$. За ову шетњу кажемо да је *од* v_1 *до* v_n или да је v_1-v_n *шетња*. За гране $v_i v_{i+1}$, $1 \leq i \leq n-1$, кажемо да су *садржане* у овој шетњи. Приметимо да је могуће да за неке $1 \leqslant i < j \leqslant n$ важи $v_i = v_j$, или чак да је $v_i v_{i+1} = v_j v_{j+1}$ (тј. могуће је да се чворови или гране шетње понављају више пута). Даље, кажемо да је шетња:

- *затворена* ако је $v_1 = v_n$;

- *пут* ако су чворови $v_1, v_2, \ldots, v_n$ различити;

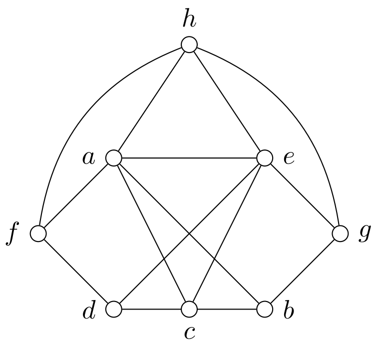
- *циклус* ако је $v_1 = v_n$, а чворови $v_2, v_3, \ldots, v_{n-1}$ су различити и различити од v_1 (и v_n).

Приметимо да ако је $v_1, v_2, \ldots, v_n = v_1$ циклус, тада је и $v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{n-1}, v_n = v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k$, за свако $1 \leqslant k \leqslant n-1$, такође циклус.

Дужина пута (циклуса)[3] је број различитих чворова на овом путу (циклусу). Дакле, пут v_1, v_2, v_3 је дужине 3 – приметимо да он садржи 2 гране. Циклус v_1, v_2, v_3, v_1 је такође дужине 3, али садржи 3 гране.

Можемо дефинисати и дужину шетње, која је у складу са претходним дефиницијама пута и шетње. Напоменимо да ћемо ову дефиницију користити само у доказима, па нам зато неће превише сметати што ће она зависити од v_1 и v_n. Дакле, *дужина* шетње $v_1, v_2, \ldots, v_n$ је једнака n ако је $v_1 \neq v_n$, а једнака $n-1$ ако је $v_1 = v_n$. Како се у шетњи чворови и гране могу понављати, дужина шетње не мора бити једнака ни броју чворова ни броју грана који су садржани у овој шетњи.

Пример 1 Посматрајмо следећи граф $G = (V, E)$ (из овог примера је јасно да је често практичније граф „задати” графички, него експлицитно наводити скупове V и E):



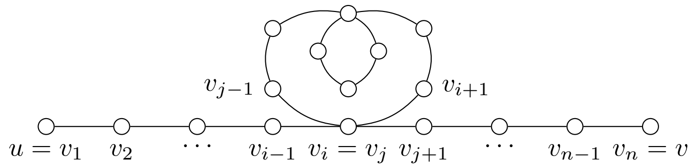
Тада је a, h, g, e, h, a, f, d шетња дужине 8 која није затворена и није пут; c, e, h, g је пут дужине 4; b, c, d, e, c, a, b је затворена шетња дужине 6 која није циклус; f, d, c, e, h, f је циклус дужине 5; a, b, g, a, f није шетња, јер ga није грана овог графа.

Ако је са P означена шетња $v_1, v_2, \ldots, v_n$, тада је P одговарајући низ чворова (при томе, користимо и запис $P : v_1, v_2, \ldots, v_n$). Такође, ако је ова шетња пут или циклус, онда са P означавамо и одговарајући скуп чворова, тј. $P = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

Тврђење 1.2 *Нека је $G = (V, E)$ граф и $u, v \in V$. Ако у графу G постоји u-v шетња, тада у G постоји и u-v пут.*

[3]Овај појам се у неким књигама дефинише и на други начин, па је потребно обратити пажњу на дефиницују пре читања доказа.

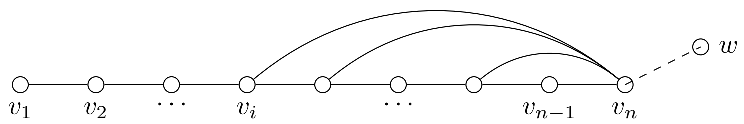
Доказ. Нека је P најкраћа[4] u-v шетња у G, тј. P је $u = v_1, v_2, \ldots, v_n = v$ (погледати слику).



Ако је P пут, тада је доказ завршен. Претпоставимо зато да P није пут. Тада је за неке i и j, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, испуњено $v_i = v_j$. Међутим, тада је $u = v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_i = v_j, v_{j+1}, \ldots, v_n = v$ једна u-v шетња, која је краћа од P, што је контрадикција. $\square$

Тврђење 1.3 *Нека је $G = (V, E)$ граф за који важи $\delta(G) \geqslant k$. Тада постоји пут дужине $k+1$ у графу G. Уз то, ако је $k \geqslant 2$, тада у графу G постоји циклус дужине барем $k+1$.*

Доказ. Нека је $P = v_1, v_2, \ldots, v_n$ најдужи пут у графу G. Посматрајмо чвор v_n. По претпоставци он има барем k суседа. Ако постоји $w \in V \setminus \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ тако да је $v_n w \in E$, тада је $v_1, v_2, \ldots, v_n, w$ пут дужи од P, што је контрадикција (погледати слику). Дакле, сви суседи[5] чвора v_n су у $\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$, па како v_n има барем k суседа, то је $n - 1 \geqslant k$, тј. $n \geqslant k+1$, што је и требало доказати.



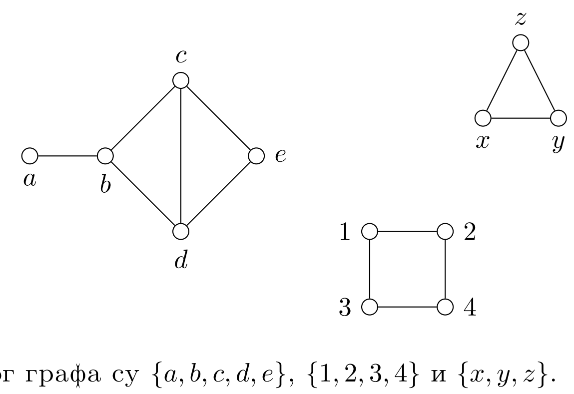
Уз претходно, претпоставимо да је $k \geqslant 2$ и нека је i најмање тако да је v_i сусед од v_n. Тада су сви суседи од v_n у скупу $\{v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{n-1}\}$ па овај скуп има барем k елемената, а самим тим циклус $v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{n-1}, v_n, v_i$ је дужине барем $k+1$ (ово је заиста циклус, јер је $k+1 \geqslant 3$). $\square$

На скупу чворова графа G можемо увести релацију $\sim$ на следећи начин:

$$a \sim b \quad \text{ако и само ако} \quad \textit{постоји шетња од } u \textit{ до } v \textit{ у } G.$$

Овако дефинисана релација је релација еквиваленције[6] на V. Класе еквиваленције релације $\sim$ су *компоненте повезаности* графа G. Ако граф G има тачно једну компоненту повезаности, тада кажемо да је G *повезан.*

Пример 2 Нека је G граф задат на следећој слици:



Компоненте повезаности овог графа су $\{a, b, c, d, e\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$ и $\{x, y, z\}$.

Граф $G' = (V', E')$ је *подграф* графа $G = (V, E)$, ако је $V' \subseteq V$ и за све $xy \in E'$ важи $xy \in E$. Граф $G' = (V', E')$ је *индукован подграф* графа $G = (V, E)$ ако је $V' \subseteq V$ и за све $x, y \in V'$ важи $xy \in E'$ ако и само ако $xy \in E$.

---

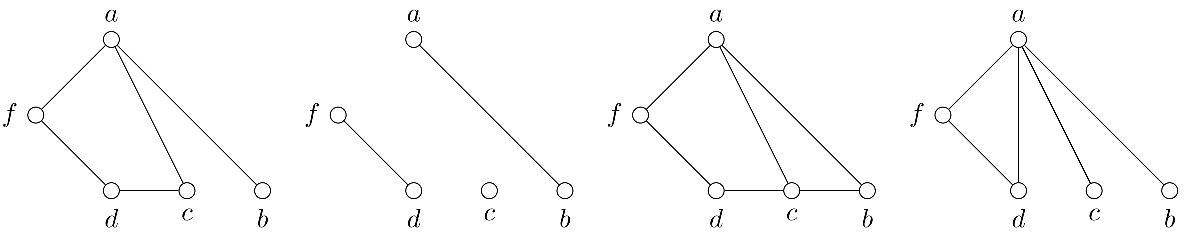
[4] Објекти са којима радимо су коначни, тако да (најчешће) постоји „најмањи" и „највећи" објекат са датом особином. По правилу, ови „екстремални" објекти имају додатна својства, која могу бити корисна у доказима. Обратите пажњу на овај и наредних неколико доказа, где ће одабир оваквих објеката бити кључан.

[5] Ову особину најдужег пута ћемо често користити.

[6] Ово је заиста лако проверити и зато није лоше да то сами урадите.

Нека је $G = (V, E)$ граф и $S \subseteq V$. Тада граф G може имати више подграфова чији је скуп чворова S, али има само један индукован подграф чији је скуп чворова S. Овај (индукован) подграф означавамо са $G[S]$.

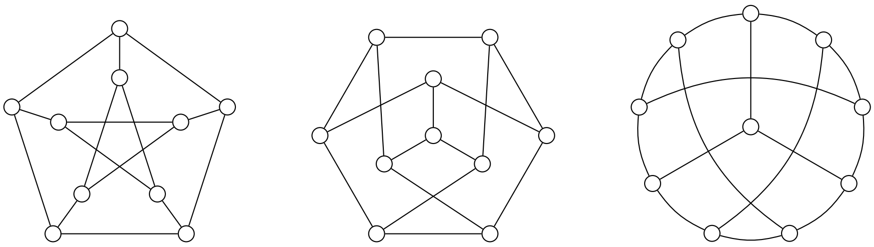
Пример 3 Посматрајмо граф G из примера 1. Од следећих графова, са скупом чворова $S = \{a, b, c, d, f\}$, први, други и трећи су подграфови графа G, док четврти није подграф од G. При томе трећи је и (једини) индукован подграф са скупом чворова S, тј. трећи је једнак $G[S]$.



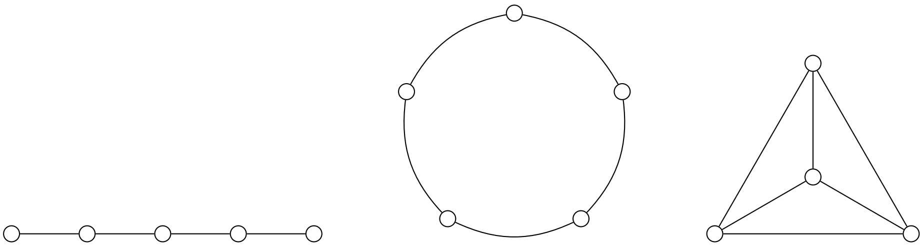
1.2 Изоморфизам графова

Нека су $G = (V, E)$ и $G' = (V', E')$ графови. За пресликавање $f : V \to V'$ кажемо да је *изморфизам графова* G и G' ако је f бијекција и за све $x, y \in V$ важи $xy \in E$ ако и само ако $f(x)f(y) \in E'$. Уколико за графове $G = (V, E)$ и $G' = (V', E')$ постоји барем један изоморфизам кажемо да су они изоморфни и пишемо $G \cong G'$. Није тешко проверити да је $\cong$ релација еквиваленције[7].

Пример 4 Три графа на слици су изоморфна[8] (сваки је изоморфан тзв. *Петерсеновом графу*):



Са P_n означавамо путеве[9] дужине n, са C_n циклусе дужине n, а са K_n клике са n чворова (*клика* је граф у коме су свака два чвора спојена – за клике користимо и термин *комплетан граф*).



Слика 2. Графови P_5, C_5 и K_4.

Кажемо да граф G *садржи* граф H, ако G има индукован подграф који је изоморфан са H. Да бисте боље разумели ове појмове, размислите како изгледа граф који не садржи P_2, односно граф који не садржи P_3.

[7]Проверите!
[8]Проверите!
[9]Тачније једног представника одговарајуће класе еквиваленције у односу на релацију $\cong$.

Предавање 2

Шетње специјалног типа

2.1 Бипартитивни графови

Граф $G = (V, E)$ је *бипартитиван* ако постоје непразни скупови A и B такви да важи:

- $A \cap B = \emptyset$ и $A \cup B = V$;
- за све $xy \in E$ је тачно један елемент скупа $\{x, y\}$ у A и тачно један у B.

Уколико је претходно испуњено кажемо да је (A, B) *партиција* бипартитивног графа G.

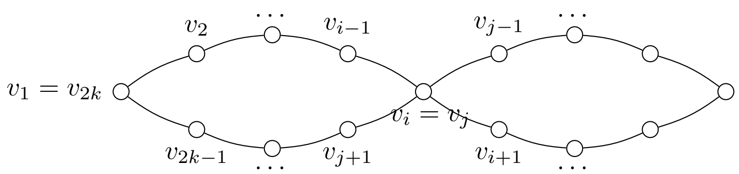
Теорема 2.1 *Нека је $G = (V, E)$ граф такав да је $|V| \geqslant 2$. Тада је G бипартитиван ако и само ако је сваки циклус графа G парне дужине.*

Доказ. ($\Rightarrow$:) Нека је (A, B) партиција (бипартитивног) графа G и нека је $v_1, v_2, \ldots, v_n = v_1$ циклус у G. Овај циклус садржи чворове из A и B, па можемо претпоставити (без умањења општости) да је $v_1 \in A$. Граф G је бипартитиван, па свака грана у G има један чвор у A, а други у B. Стога, како су $v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{n-1}v_n$ гране графа G закључујемо да је $v_2 \in B$, $v_3 \in A$, $v_4 \in B$, итд. Тачније, важи $v_{2k+1} \in A$ и $v_{2k} \in B$, за све k. Посебно, из $v_n \in A$ закључујемо да је n непаран број, па је циклус $v_1, v_2, \ldots, v_n = v_1$ парне дужине.
($\Leftarrow$:) У овом делу доказа биће нам потребна следећа лема.

Лема. Ако граф садржи затворену шетњу непарне[1] дужине, тада садржи и циклус непарне дужине.

Доказ леме. Претпоставимо супротно, тј. да граф садржи затворену шетњу непарне дужине, али да не садржи циклус непарне дужине. Нека је $C : v_1, v_2, \ldots, v_{2k-1}, v_{2k} = v_1$ најкраћа затворена шетња непарне дужине у овом графу. По претпоставци ова шетња није циклус, па постоје $i \neq j$ тако да је $v_i = v_j$. Посматрајмо (затворене) шетње (погледати слику)

$$v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_i = v_j, v_{j+1}, \ldots, v_{2k-1}, v_{2k} = v_1 \qquad \text{и} \qquad v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_j = v_i.$$



Прва шетња је дужине $i + (2k - 1 - (j + 1) + 1) = 2k - j + i - 1$, а друга дужине $j - 1 - i + 1 = j - i$, па је барем једна од њих непарне дужине (прва ако је $j - i$ паран, а друга ако је $j - i$ непаран). Како су обе шетње краће од C, долазимо до жељене контрадикције. $\square$

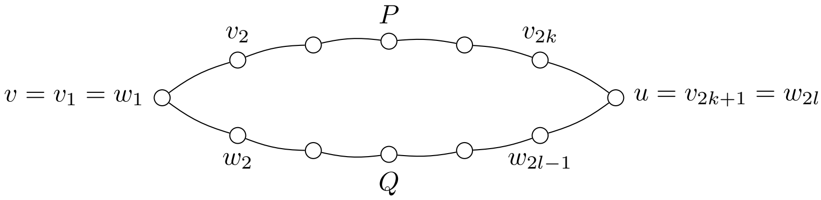
Вратимо се на доказ теореме. Приметимо да, по претходној леми, граф не садржи затворену шетњу непарне дужине, јер би у супротном садржао и циклус непарне дужине.

Претпоставимо прво да је G повезан. Нека је $v \in V$ произвољан чвор и нека је

$$A = \{u \in V \mid \text{постоји } u\text{-}v \text{ пут парне дужине}\}, \quad B = \{u \in V \mid \text{постоји } u\text{-}v \text{ пут непарне дужине}\}.$$

[1]Проверите да ово тврђење не важи ако се „непаран” замени са „паран”.

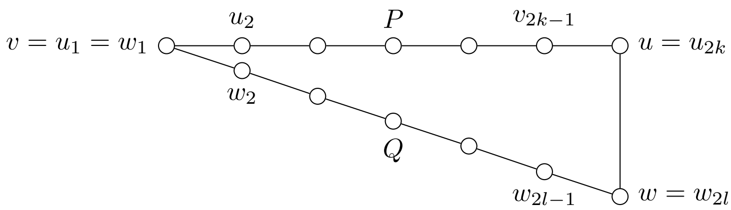
Јасно је да важи $A \cup B = V$, $A \neq \emptyset$ (јер $v \in A$) и $B \neq \emptyset$ (јер v има барем једног суседа). Докажимо да је $A \cap B = \emptyset$. Претпоставимо супротно, тј. да је $u \in A \cap B$. Тада постоје путеви $P : v = v_1, v_2, \ldots, v_{2k+1} = u$ (јер је $u \in B$) и $Q : v = w_1, w_2, \ldots, w_{2l} = u$ (јер је $u \in A$).



Међутим, тада је

$$v = v_1, v_2, \ldots, v_{2k+1} = u = w_{2l}, w_{2l-1}, \ldots, w_2, w_1 = v$$

затворена шетња дужине $2k + 1 + 2l - 2 = 2(k + l) - 1$, што је контрадикција са лемом. Докажимо и да свака грана у G има један чвор у A и један у B. Претпоставимо супротно, и нека је $uw \in E$ таква да је $u, w \in A$ (случај $u, w \in B$ се разматра на сличан начин). Тада, по дефиницијa скупа A, постоје путеви $P : v = u_1, u_2, \ldots, u_{2k} = u$ и $Q : v = w_1, w_2, \ldots, w_{2l} = w$.



Међутим, сада је $v = u_1, u_2, \ldots, u_{2k-1}, u_{2k} = u, w = w_{2l}, w_{2l-1}, \ldots, w_2, w_1 = v$ затворена шетња дужине $2k + 2l - 1 = 2(k + l) - 1$, што је у контрадикцији са лемом.

Коначно, размотримо општи случај, тј. када граф није обавезно повезан. Нека су $C_1, C_2, \ldots, C_k$ компоненте повезаности графа G. Тада је C_i повезан граф који не садржи непарне циклусе, па по претходном делу доказа постоји партиција (A_i, B_i) његових чворова таква да свака грана у C_i има један чвор у A_i, а други у B_i (ако C_i има само један чвор, можемо узети да је $B_i = \emptyset$). Нека је $A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ и $B = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$ (у случају[2] да за свако i важи $B_i = \emptyset$, тада у дефиницији скупа A један од скупова A_i можемо заменити са B_i, и слично у дефиницији скупа B). Тада је (A, B) жељена партиција графа G.

2.2 Ојлерова шетња

За затворену[3] шетњу $P : v_1, v_2, \ldots, v_n = v_1$ графа $G = (V, E)$ кажемо да је *Ојлерова шетња* ако је свака грана графа G садржана тачно једном у P (тачније, за свако $e \in E$ постоји тачно једно $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ тако да је $e = v_i v_{i+1}$).

Следећа теорема даје потребан и довољан услов за постојање Ојлеровог шетње у графу.

Теорема 2.2 (Ојлер 1736) *Нека је $G = (V, E)$ повезан граф. Тада у G постоји Ојлерова шетња ако и само ако је сваки чвор у G парног степена.*

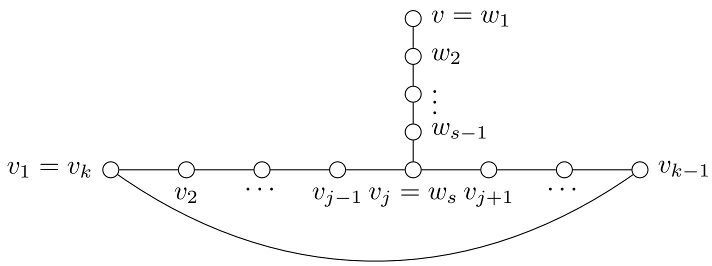
Доказ. ($\Rightarrow$:) Нека је $P : v_1, v_2, \ldots, v_n = v_1$ Ојлерова шетња графа G и нека је $v \in V$ произвољан чвор. Желимо да докажемо да је $d(v)$ паран број. Чвор v се више пута може појављивати у P; означимо $I_v = \{i \in \{1, 2, \ldots, n\} \mid v = v_i\}$.

Претпоставимо прво да $1 \notin I_v$. Како су све гране графа G садржане у P, то су и све гране које садрже v на путу P, тј. $N(v) = \{v_{i-1}, v_{i+1} \mid i \in I\}$. Другачије речено, сваком појављивању чвора v на путу P одговарају две гране које садрже v, тако да је јасно $d(v) = |N(v)|$ паран број. Слично, ако је $1 \in I_v$, важи $N(v) = \{v_{i-1}, v_{i+1} \mid i \in I \setminus \{1, n\}\} \cup \{v_1, v_{n-1}\}$, па и у овом случају закључујемо да је $d(v) = |N(v)|$ паран број.

[2] Ово је заиста једноставан случај. Како изгледа граф у овом случају?
[3] На сличан начин може се разматрати и Ојлерова шетња која није затворена.

(⇐:) Нека је $P : v_1, v_2, \ldots, v_k$ најдужа шетња у графу G у којој нема поновљених грана (тј. не постоје $1 \leqslant i < j \leqslant n-1$ тако да је $v_i v_{i+1} = v_j v_{j+1}$). Као што нам је већ познато, суседи чворова v_1 и v_k налазе се на шетњи P (јер је P најдужа шетња у G у којој нема поновљених грана). При томе, ако је w сусед од v_1 (односно v_k), тада се wv_1 (односно wv_k) налази на шетњи P, јер је у супротном $w, v_1, v_2, \ldots, v_k$ (односно $v_1, v_2, \ldots, v_k, w$) шетња дужа од P у којој нема поновљених грана. Дакле, све гране које садрже v_1 налазе се на P. Како је степен чвора v_1 паран, разматрањем као у првом делу доказа закључујемо да је $v_1 = v_k$ (ако би важило $v_1 \neq v_k$, тада би степен од v_1 био непаран). Дакле, P је затворена шетња. Докажимо да је P Ојлерова шетња графа G.

Претпоставимо супротно, тј. да постоји $e \in E \setminus \{v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{k-1}v_k\}$. Нека је $e = vv'$. Ако је $v, v' \in \{v_1, \ldots, v_k\}$, тј. $v = v_i$ и $v' = v_j$ за неке $1 \leq i < j \leq k$ (без умањења општости), тада је $v_i, v_j, v_{j+1}, \ldots, v_k, v_{k-1}, \ldots, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j$ шетња у којој нема поновљених грана и која је дужа од P, што је контрадикција. Нека је зато $v \notin \{v_1, \ldots, v_k\}$. Како је G повезан граф постоји пут од неког чвора скупа $\{v, v'\}$ до неког чвора скупа $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$. Ако је Q најкраћи овакав пут, тада надовезивањем гране e на овај пут добијамо пут $v = w_1, v' = w_2, \ldots, w_s = v_j$ или $v' = w_1, v = w_2, \ldots, w_s = v_j$ који садржи грану e (могуће је да је овај пут једнак v, v'). Без умањења општости можемо претпоставити да је пут Q првог типа. Приметимо да због минималности пута Q важи $\{w_1, \ldots, w_{s-1}\} \cap \{v_1, \ldots, v_k\} = \emptyset$.



Тада $w_{s-1}w_s \notin \{v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{k-1}v_k\}$, па је

$$w_{s-1}, w_s = v_j, v_{j+1}, \ldots, v_k = v_1, v_2, \ldots, v_{j-1}, v_j = w_s$$

шетња у G у којој нема поновљених грана. Ова шетња је дужа од P, што је контрадикција. □

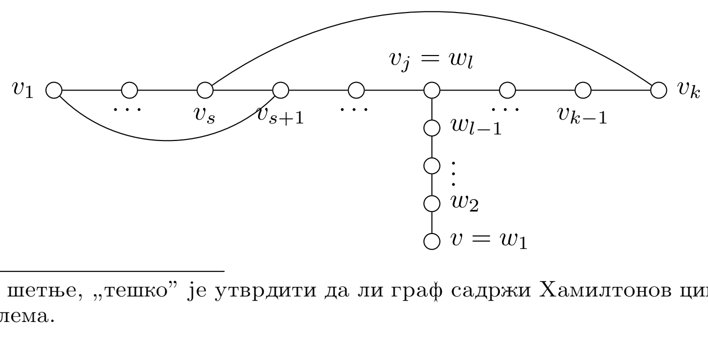
2.3 Хамилтонов циклус

За циклус $v_1, v_2, \ldots, v_n = v_1$ графа $G = (V, E)$ кажемо да је *Хамилтонов циклус* ако за свако $v \in V$ постоји $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ тако да је $v = v_i$.

Следећа теорема даје довољан[4] услов за постојање Хамилтоновог циклуса у графу.

Теорема 2.3 (Дирак 1952) *Нека је $G = (V, E)$ повезан граф такав да је $|V| \geqslant 3$. Ако је $\delta(G) \geqslant |V|/2$, тада G има Хамилтонов циклус.*

Доказ. Нека је $n = |V|$ и $P : v_1, v_2, \ldots, v_k$ најдужи пут графа G. Као што нам је већ познато, суседи чворова v_1 и v_k налазе се на путу P. Посматрајмо парове (v_i, v_{i+1}), за $1 \leqslant i \leqslant k-1$. За овај пар кажемо да је лево-добар ако је $v_i v_k \in E$, односно десно-добар ако је $v_1 v_{i+1} \in E$. Парова (v_i, v_{i+1}) има $k - 1 \leqslant n - 1$. Како је њих барем $\delta(G) \geqslant n/2$ лево-добро и њих барем $\delta(G) \geqslant n/2$ десно-добро, постоји пар (v_s, v_{s+1}) који је и лево-добар и десно-добар. Тада је $v_1, v_2, \ldots, v_{s-1}, v_s, v_k, v_{k-1}, \ldots, v_{s+2}, v_{s+1}, v_1$ циклус графа G. Докажимо да је ово Хамилтонов циклус графа G.



[4] За разлику од Ојлерове шетње, „тешко” је утврдити да ли граф садржи Хамилтонов циклус. Тачније, овај проблем је у класи NP-тешких проблема.

Претпоставимо супротно, тј. да постоји $v \in V \setminus \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$. Како је G повезан граф постоји пут $v = w_1, \ldots, w_t = w$ од чвора v до неког чвора $w \in \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$. Нека је $l \in \{2, 3, \ldots, t\}$ најмање тако да је $w_l \in \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ и нека је $w_l = v_j$. Тада $w_{l-1} \notin \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$. Претпоставимо да је $j \geqslant s + 2$ (слично разматрамо и случајеве $j < s$, $j = s$ и $j = s + 1$). Тада је

$$w_{l-1}, w_l = v_j, v_{j+1}, \ldots, v_k, v_s, v_{s-1}, \ldots, v_2, v_1, v_{s+1}, v_{s+2}, \ldots, v_{j-1}$$

пут у G који је дужи од P, што је контрадикција. $\square$

Предавање 3

Стабла

У претходном поглављу приметили смо да особине графа који није повезан (често) можемо испитивати посматрањем његових компонената повезаности. Дакле, често је приликом испитивања својстава графа довољно ограничити се на повезане графове. Зато ћемо се у наставку курса усресредити на повезане графове.

Граф $G = (V, E)$ је *стабло* (или *дрво*) ако је повезан и у њему не постоји циклус. За стабла се може рећи да су најједноставнији повезани графови – циљ овог предавања је да се у ову тврдњу уверимо.

Докажимо прво следећу лему. За чвор стабла кажемо да је *лист* ако је степена 1.

Лема 3.1 *Нека је $G = (V, E)$ стабло такво да је $|V| \geqslant 2$. Тада G има барем два листа.*

Доказ. Нека је $P : v_1, v_2, \ldots, v_n$ најдужи пут у G (важи $n \geqslant 2$). Као у претходним доказима, закључујемо да се сви суседи чворова v_1 и v_n налазе на P. Претпоставимо да v_1 није степена 1, тј. да v_1 има суседа v_i, за неко $i > 2$. Тада је $v_1, v_2, \ldots, v_i, v_1$ циклус у G, што је контрадикција. Дакле, v_1 је степена 1. Слично је и v_n степена 1, чиме је доказ завршен. □

Теорема 3.1 *Нека је $G = (V, E)$ граф и нека је $n = |V|$. Следећа тврђења су еквивалентна:*

(1) G је стабло;

(2) G је повезан и важи $|E| = n - 1$;

(3) G не садржи циклус и важи $|E| = n - 1$;

(4) за све $u, v \in V$ постоји тачно један u-v пут у G.

Доказ. Довољно је доказати следећи низ импликација (1) ⇒ (2) ⇒ (3) ⇒ (4) ⇒ (1).

(1) ⇒ (2) Довољно је доказати да свако стабло са n чворова има $n - 1$ грана. Ово тврђење доказујемо индукцијом по n.

За $n = 1$ тврђење очигледно важи. Претпоставимо зато да твђење важи за сва стабла са $n - 1$ чворова и докажимо га за стабло G са n чворова.

По претходној леми, стабло G садржи лист v и нека је v' једини сусед од v у G. Посматрајмо граф $G' = (V', E')$, где је $V' = V \setminus \{v\}$ и $E' = E \setminus \{vv'\}$ (граф G' је настао од графа G брисањем чвора v). Докажимо да је G' стабло. Пре свега, G' не садржи циклус, јер би у супротном и G садржао (тај исти) циклус. Докажимо да је G' повезан, тј. да за $u, w \in V'$ постоји пут од u до w у G'. Како је $u, w \in V$ и G је стабло, то постоји пут P од u до w у G. Приметимо да су једини чворови на P који могу бити степена 1 чворови u и w. Како $v \notin \{u, w\}$ закључујемо да v није на P, па је P пут у G'. По индуктивној претпоставци важи $|E'| = |V'| - 1$, па како је $|E'| = |E| - 1$ и $|V'| = |V| - 1$, тврђење следи.

(2) ⇒ (3) Претпоставимо супротно, тј. да G садржи циклус $v_1, v_2, \ldots, v_l, v_1$. Посматрајмо граф $G_1 = (V, E_1)$, где је $E' = E \setminus \{v_1v_2\}$ (граф G_1 је настао од графа G брисањем гране v_1v_2). Докажимо да је граф G' повезан, тј. да за $u, w \in V$ постоји пут од u до w у G_1. Како је граф G повезан постоји пут $P : u = u_1, u_2, \ldots, u_k = w$ у G. Ако нити једна грана овог пута није v_1v_2, овај пут се налази и у G_1. Претпоставимо зато да за неко $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ важи $v_1v_2 = u_iu_{i+1}$, тј. да је $(v_1, v_2) = (u_i, u_{i+1})$ или $(v_1, v_2) = (u_{i+1}, u_i)$. Размотримо први случај (у другом случају доказ се аналогно изводи). Тада је

$$u = u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, u_i = v_1, v_l, v_{l-1}, \ldots, v_3, v_2 = u_{i+1}, u_{i+2}, \ldots, v_{k-1}, v_k = w$$

шетња од u до w у G'. По Тврђењу 1.2 у G' постоји и пут од u до w, чиме је доказ завршен.

Дакле, добили смо граф G_1 који је повезан има n чворова и $n-2$ гране. Наставимо даље сличан поступак. Тачније, ако граф G_1 садржи циклус конструишемо повезан граф G_2, затим ако граф G_2 садржи циклус конструишемо граф G_3, итд. Овај поступак се мора завршити, тј. за неко $k \geqslant 1$ граф G_k не садржи циклус. По конструкцији, граф G_k је повезан (а тиме и стабло), има n чворова и $n-k-1$ грана, што је у контрадикцији са (1) $\Rightarrow$ (2) (свако стабло са n чворова има $n-1$ грану).

(3) $\Rightarrow$ (4) Докажимо прво да за сваки пар чворова из G постоји барем један пут између њих, тј. да је граф G повезан. Претпоставимо супротно и нека су $C_1, C_2, \dots, C_k$ $(k \geqslant 2)$ компоненте повезаности графа G, при чему C_i има n_i чворова. Приметимо да је свака компонента повезаности повезан граф који не садржи циклусе, тј. свака компонента повезаности је стабло. Из импликације (1) $\Rightarrow$ (2) закључујемо да C_i има $n_i - 1$ грану, па граф G има $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ чворова и $\sum_{i=1}^{k}(n_i - 1) = n - k$ грана, што је контрадикција.

Докажимо и да између два чвора из V не могу постојати два различита пута у G. Претпоставимо супротно. Изаберимо $u, v \in V$ за које постоје различити путеви $P : u = u_1, u_2, \dots, u_k = v$ и $Q : u = v_1, v_2, \dots, v_l = v$ и за које је $k+l$ најмање могуће (дакле, од свих парова чворова таквих да између њих постоје барем два различита пута бирамо онај за који је укупна дужина ових путева најмања могућа). Ако је $\{u_2, u_3, \dots, u_{k-1}\} \cap \{v_2, v_3, \dots, v_{l-1}\} = \emptyset$, тада је $u = u_1, u_2, \dots, u_k = v = v_l, v_{l-1}, \dots, v_2, v_1 = u$ циклус у G, што је контрадикција. Претпоставимо зато да $\{u_2, u_3, \dots, u_{k-1}\} \cap \{v_2, v_3, \dots, v_{l-1}\} \neq \emptyset$, те нека је $i \geqslant 2$ најмањи такав да важи $u_i \in \{v_2, v_3, \dots, v_{l-1}\}$ и $u_i = v_j = w$. Нека је $P_1 : u = u_1, u_2, \dots, u_i = w$, $Q_1 : u = v_1, v_2, \dots, v_j = w$, $P_2 : w = u_i, u_{i+1}, \dots, u_k = v$ и $Q_2 : w = v_j, v_{j+1}, \dots, v_l = v$. Тада су P_1 и Q_1 путеви од u до w, а P_2 и Q_2 путеви од w до v. Како мора бити $P_1 \neq Q_1$ или $P_2 \neq Q_2$ (у супротном је $P = Q$), то између u и w или између w и v постоје два различита пута чија је укупна дужина мања од укупне дужине путева P и Q, што је контрадикција.

(4) $\Rightarrow$ (1) Како је G повезан, довољно је доказати да G не садржи циклус. Претпоставимо супротно, тј. да је $v_1, v_2, \dots, v_k, v_1$ циклус у G. Међутим, тада су v_1, v_2 и $v_1, v_k, v_{k-1}, \dots, v_3, v_2$ два различита пута од v_1 до v_2 у G, што је контрадикција. □

Нека је $G = (V, E)$ граф и $e \in E$. Тада $G \setminus e$ дефинишемо као граф[1] чији је скуп чворова V, а скуп грана $E \setminus \{e\}$. За грану e повезаног графа G кажемо да је *мост* ако је граф $G \setminus e$ неповезан.

Тврђење 3.1 *Нека је $G = (V, E)$ граф и $e = xy \in E$. Тада су следећа тврђења еквивалентна:*

(1) e је мост графа G;

(2) $G \setminus e$ не садржи x-y пут;

(3) G не садржи циклус чија је грана e.

Доказ. Довољно је доказати да важи (1) $\Leftrightarrow$ (2) и (2) $\Leftrightarrow$ (3).

(1) $\Rightarrow$ (2) Претпоставимо супротно, тј. да је $x = v_1, v_2, \dots, v_k = y$ један x-y пут у $G \setminus e$.

Докажимо да је тада $G \setminus e$ повезан[2], тј. да за свака два чвора $u, w \in V$ постоји u-w пут у $G \setminus u$. Како је граф G повезан, постоји пут $u = u_1, u_2, \dots, u_l = w$ у G. Ако овај пут не садржи грану e, тада је овај пут и у $G \setminus e$. Претпоставимо зато да за неко $i \in \{1, 2, \dots, l-1\}$ важи $u_i u_{i+1} = xy$, тј. да је $(u_i, u_{i+1}) = (x, y)$ или $(u_i, u_{i+1}) = (y, x)$. Размотримо случај $u_i = y$ и $u_{i+1} = x$ (доказ у случају $u_i = x$ и $u_{i+1} = y$ је сличан). Тада је

$$u = u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i = y = v_k, v_{k-1}, v_{k-2}, \dots, v_2, v_1 = x = u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_l = w$$

шетња од u до w у $G \setminus e$, па по Тврђењу 1.2 у $G \setminus e$ постоји и пут од u до w. Овим је доказано да је $G \setminus e$ повезан, чиме је добијена жељена контрадикција.

(2) $\Rightarrow$ (1) Претпоставимо супротно, тј. да је граф $G \setminus e$ повезан. Тада у $G \setminus e$ постоји x-y пут, што је очигледно контрадикција.

(2) $\Rightarrow$ (3) Ако у графу G постоји циклус чија је грана $e = xy$, тада овај циклус можемо записати као $x = v_1, y = v_2, v_3, \dots, v_k = x$. Међутим, тада је $x = v_k, v_{k-1}, \dots, v_3, v_2 = y$ један x-y пут у $G \setminus e$, што је контрадикција.

(3) $\Rightarrow$ (2) Ако у $G \setminus e$ постоји пут $x = v_1, v_2, \dots, v_k = y$, тада је $x = v_1, v_2, \dots, v_k = y, x$ циклус у G чија је једна грана $e = xy$, што је контрадикција. □

[1] Пажљиви читалац ће приметити да смо овако дефинисан граф користили у доказу претходне теореме.

[2] Упоредите овај доказ са доказом импликације (2) $\Rightarrow$ (3) у Теореми 3.1.

Последица 3.1 *Нека је $G = (V, E)$ повезан граф. Тада је G стабло ако и само ако је свака грана графа G мост.*

Доказ. ($\Rightarrow$:) Нека је e грана графа G. Како је G стабло, граф G не садржи циклус, па не садржи ни циклус чија је грана e. Из Тврђења 3.1 закључујемо да је e мост.

($\Leftarrow$:) Претпоставимо супротно, тј. да G садржи циклус C. Ако је e грана овог циклуса, онда по Тврђењу 3.1 e није мост графа G, што је контрадикција. $\square$

Нека је $G = (V, E)$ граф. За било који његов подграф облика $G' = (V, E')$ кажемо да је *разапињући подграф* графа G (другим речима, G' је разапињући подграф графа G ако садржи све чворове графа G). Специјално, ако је G' и стабло, кажемо да је овај подграф *разапињуће стабло* графа G.

Теорема 3.2 *Ако је $G = (V, E)$ повезан граф, тада G има разапињуће стабло.*

Доказ. Доказ изводимо индукцијом по броју грана m (дакле, m је једнако $|E|$).

Ако је $m = 1$, тада тврђење очигледно важи. Претпоставимо зато да тврђење важи за све графове са $m - 1 \geqslant 1$ грана и докажимо да важи за дати граф G са m грана. Прво, ако је G стабло, тада тврђење тривијално важи. Претпоставимо зато да G није стабло. По Последици 3.1 у G постоји грана e која није мост. Посматрајмо граф $G \setminus e$. Овај граф је повезан и има $m - 1$ грана, па по индуктивној претпоставци има разапињуће стабло $G' = (V, E')$. Међутим, тада је G' разапињуће стабло и графа G (јер је G' подграф графа $G \setminus e$, а $G \setminus e$ подграф графа G), чиме је доказ завршен. $\square$

Последица 3.2 *Нека је $G = (V, E)$ повезан граф. Тада важи $|E| \geqslant |V| - 1$.*

Доказ. Нека је $G' = (V, E')$ разапињуће стабло графа G. Тада по Теореми 3.1 важи $|E'| = |V| - 1$. Како је G' подграф од G важи и $|E| \geqslant |E'|$, чиме је доказ завршен. $\square$

Предавање 4

Повезаност графова

Нека је $G = (V, E)$ повезан граф и $S \subseteq V$. Означимо са $E' = \{xy \in E : x, y \in V \setminus S\}$ (E' је скуп грана из G којима нити један чвор није садржан у S). Тада дефинишемо $G \setminus S$ као граф чији је скуп чворова $V \setminus S$, а скуп грана E', тј. $G \setminus S = G[V \setminus S]$. При томе, за скуп S кажемо да је *пресечни скуп* графа G ако је граф $G \setminus S$ неповезан. Специјално, ако је $S = \{v\}$ пресечни скуп графа G, кажемо да је v *пресечни чвор* графа G.

За граф $G = (V, E)$ кажемо да је k-*повезан* ако је $|V| > k$ и граф $G \setminus X$ је повезан за све $X \subseteq V$ такве да је $|X| < k$. На пример, ако је граф повезан и има барем 2 чвора, онда је он 1-повезан. Приметимо да ако је граф k–повезан, онда је он и $(k-1)$–повезан.

За граф G кажемо да је *блок*[1] ако је повезан и нема пресечних чворова. Јасно, граф је блок ако и само ако је 2-повезан или је изоморфан K_1 или K_2.

4.1 2-повезани графови

Нека је $G = (V, E)$ повезан граф. *Блок графа* G је сваки максималан (у односу на инклузију) подграф које је блок.

Теорема 4.1 *Нека је $G = (V, E)$ повезан граф. Тада важи:*

(1) свака два блока графа G имају највише један заједнички чвор;

(2) сваки циклус графа G садржан је у неком блоку графа G;

(3) чвор v је садржан у два блока графа G ако и само ако је v пресечни чвор графа G.

Доказ. Доказаћемо прво следеће тврђење које је општије од делова (1) и (2).

Лема. Нека су дати 2-повезани графови G_1 и G_2 који имају барем два заједничка чвора. Тада је и $G_1 \cup G_2$[2] један 2-повезан граф.

Доказ леме. Нека су u и v заједнички чворови ових графова. Довољно је доказати да је за сваки чвор w графа $G_1 \cup G_2$ граф $(G_1 \cup G_2) \setminus \{w\}$ повезан. Изаберимо зато два чвора w' и w'' графа $(G_1 \cup G_2) \setminus \{w\}$ и докажимо да постоји пут од w' до w'' у графу $(G_1 \cup G_2) \setminus \{w\}$. Размотримо прво случај када се оба w' и w'' налазе у G_i, за неко $i \in \{1, 2\}$. Како је G_i 2-повезан, чвор w није пресечни чвор графа G_i, па у $G_i \setminus \{w\}$ постоји пут од w' до w''. Како је ово пут и у графу $(G_1 \cup G_2) \setminus \{w\}$, доказ у овом случају је завршен. Преостаје случај када је w' у $G_1 \setminus \{u, v\}$, а w'' у $G_2 \setminus \{u, v\}$. Чвор w различит је од барем једног од чворова u и v, па нека је, без умањења општости, $w \neq u$. Како је граф $G_1 \setminus \{w\}$ (односно $G_2 \setminus \{w\}$) повезан у њему постоји пут $w' = u_1, u_2, \ldots, u_k = u$ (односно $u = v_1, v_2, \ldots, v_l = w''$). Тада је $w' = u_1, u_2, \ldots, u_k = u = v_1, v_2, \ldots, v_l = w''$ пут од w' до w'' у графу $(G_1 \cup G_2) \setminus \{w\}$, чиме је доказ ове леме завршен. □

Вратимо се на доказ теореме.

(1) Претпоставимо супротно, тј. да постоје блокови B' и B'' графа G који имају барем два заједничка чвора. Како су B' и B'' максимални, то оба имају барем 3 чвора, тј. оба су 2-повезана. По

[1] Приметимо да се дефиниција блока не разликује превише од дефиниције 2-повезаног графа. Разлика је у техничким детаљима, који ће бити неопходни за формулацију најзначајнијих тврђења у наставку поглавља.

[2] Нека су $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ графови. Тада је $G_1 \cup G_2$ граф $(V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$.

доказаној леми следи да је $B' \cup B''$ 2-повезан, што је контрадикција (јер тада блокови B' и B'' нису максимални).

(2) Претпоставимо супротно, тј. да циклус C није садржан у једном блоку графа G. Нека је B блок графа који садржи неку грану циклуса C. Приметимо да B има барем 3 чвора, јер би у супротоном C био 2-повезан граф који садржи блок B. Дакле, C и B су 2-повезани графови који имају барем два заједничка чвора (јер имају заједничку грану), па је по доказаној леми и $C \cup B$ 2-повезан граф, што је контрадикција (јер тада блок B није максималан).

(3) ($\Rightarrow$:) Нека је v (једини) заједнички чвор блокова B' и B'' графа G. Претпоставимо да v није пресечни чвор графа G. Тада за чворове w' из $B' \setminus \{v\}$ и w'' из $B'' \setminus \{v\}$ постоји пут $w' = v_1, v_2, \ldots, v_k = w''$ у $G \setminus \{v\}$. Тада постоје[3] индекси $1 \leqslant i < j \leqslant k$ такви да је чвор v_i у B', чвор v_j у B'', а чворови $v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_{j-1}$ нису у $B' \cup B''$. Граф B' (односно B'') је повезан, па постоји пут $v_i = u_1, u_2, \ldots, u_l = v$ (односно $v_j = w_1, w_2, \ldots, w_s = v$) у B' (односно B''). Међутим, тада је

$$v_i = u_1, u_2, \ldots, u_l = v = w_s, w_{s-1}, \ldots, w_2, w_1 = v_j, v_{j-1}, \ldots, v_{i+1}, v_i$$

циклус у G који није садржан у блоку графа G, што је контрадикција са (2).

($\Leftarrow$:) Претпоставимо да постоји пресечни чвор v графа G који се налази у тачно једном блоку B графа G. Јасно је да су тада сви суседи чвора v такође садржани у B.

Да бисмо добили контрадикцију, докажимо да је $G \setminus \{v\}$ повезан, тј. да за свака два чвора w' и w'' графа $G \setminus \{v\}$ постоји пут од w' до w'' у $G \setminus \{v\}$. Како је граф G повезан, постоји пут P : $w' = v_1, v_2, \ldots, v_k = w''$ у G. Ако P не садржи v овај пут је и у графу $G \setminus \{v\}$, па је доказ завршен. Претпоставимо зато да је $v = v_i$, за неко $2 \leqslant i \leqslant k-1$. Тада су v_{i-1} и v_{i+1} суседи чвора v, па се налазе у B. Дакле, граф B има барем 3 чвора, па је 2-повезан. Самим тим, граф $B \setminus \{v\}$ је повезан, па у њему постоји пут $v_{i-1} = u_1, u_2, \ldots, u_l = v_{i+1}$. Коначно,

$$w' = v_1, v_2, \ldots, v_{i-1} = u_1, u_2, \ldots, u_l = v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_k = w''$$

је шетња од w' до w'' у графу $G \setminus \{v\}$, па по Тврђењу 1.2 у $G \setminus \{v\}$ постоји пут од w' до w''. Овим је доказ завршен. □

Нека је $G = (V, E)$ повезан граф који није 2-повезан. *Блок-пресек граф* графа G, у ознаци $BP(G)$, дефинишемо на следећи начин. Нека су $B_1, B_2, \ldots, B_k$ блокови графа G, а $v_1, v_2, \ldots, v_l$ пресечни чворови графа G. Тада је $BP(G)$ бипартитиван граф са партицијом (X, Y), тако да је $X = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ (b_i су нови чворови), $Y = \{v_1, v_2, \ldots, v_l\}$ и $b_i v_j$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $1 \leqslant j \leqslant l$, је грана ако и само ако је $v_j \in B_i$.

Последица 4.1 *Нека је $G = (V, E)$ повезан граф који није 2-повезан. Тада је $BP(G)$ стабло.*

Доказ.. Докажимо прво да је $BP(G)$ повезан[4]. Нека су u и v чворови графа $BP(G)$ и нека u одговара или је садржано у блоку B_i графа G, а v одговара или је садржано у блоку B_j графа G. Ако је $i = j$, тада је uv грана графа $BP(G)$ и доказ је завршен. Нека је зато $i \neq j$ и нека је v_i произвољан чвор блока B_i, а v_j произвољан чвор блока B_j. Како је граф G повезан постоји v_i-v_j пут у њему. Претпоставимо да овај пут редом пролази кроз блокове $B_i = B_{i_1}, B_{i_2}, \ldots, B_{i_s} = B_j$. Тада овај пут садржи и једине заједничке чворове блокова B_{i_1} и B_{i_2}, B_{i_2} и B_{i_3}, $\ldots$, $B_{i_{s-1}}$ и B_{i_s}, тј. (редом) пресечне чворове $v_{j_1}, v_{j_2}, \ldots, v_{j_{s-1}}$. Тада је $u, b_{i_1}, v_{j_1}, b_{i_2}, v_{j_2}, b_{i_3}, \ldots, b_{i_{s-1}}, v_{j_{s-1}}, b_{i_s}, v$ један u-v пут у $BP(G)$.

Докажимо и да граф $BP(G)$ не садржи циклус. Претпоставимо супротно, тј. да је

$$b_{i_1}, v_{j_1}, b_{i_2}, v_{j_2}, \ldots, b_{i_{s-1}}, v_{i_{s-1}}, b_{i_s} = b_{i_1}$$

циклус у $BP(G)$ (граф $BP(G)$ је бипартитиван, тако да се на њему смењују чворови из X и Y, а код сваког циклуса можемо изабрати „почетни” чвор, па у овом случају бирамо да је он из X). Приметимо да се чворови v_{j_r} и $v_{j_{r+1}}$ налазе у блоку $B_{i_{r+1}}$, за све $1 \leqslant r \leqslant s-1$, као и да се чворови v_{j_1} и v_{j_s} налазе у блоку B_{i_1}. Како је сваки од ових блокова повезан, закључујемо да постоје путеви P_r од v_{j_r} до $v_{j_{r+1}}$ у блоку $B_{i_{r+1}}$, за све $1 \leqslant r \leqslant s-1$, као и пут P_s од v_{j_1} до v_{j_s} у блоку B_{i_1}. Надовезивањем ових путева добијамо циклус у G који није садржан у једном блоку графа G, што је контрадикција са делом (2) претходне теореме. □

Нека су $P_1, P_2, \ldots, P_k$ путеви од u до v у графу G. За ове путеве кажемо да имају *дисјунктне унутрашњости* ако су за све $1 \leqslant i < j \leqslant k$ једини заједнички чворови путева P_i и P_j чворови u и v.

[3] Зашто? Упутство: нацртајте слику.

[4] Овај доказ изгледа грозно, посебно због дуплих индекса који су у њему употребљени. Ипак, ако нацртате слику приметићете да је тврђење доста једноставно.

Теорема 4.2 (Витни 1932) *Нека је $G = (V, E)$ граф такав да је $|V| \geqslant 3$. Тада је G 2-повезан ако и само ако за свака два чвора $u, v \in V$ постоје барем два u-v пута у G са дисјунктним унутрашњостима.*

Доказ. ($\Rightarrow$:) Граф G је повезан, па за свака два чвора u и v постоји пут између њих. Доказ изводимо по дужини k најкраћег пута од u до v.

Нека је $k = 2$. Тада је $uv \in E$, па је довољно доказати да у $G \setminus uv$ постоји u-v пут. По Тврђењу 3.1, ово је еквивалентно са тврдњом да uv није мост графа G. Како граф G има барем 3 чвора, то барем један од чворова u и v има суседа који није у $\{u, v\}$ – нека је то чвор u. Тада, ако претпоставимо да је uv мост графа G, закључујемо да је u пресечни чвор графа G, што је контрадикција.

Претпоставимо сада да тврђење важи за све чворове u' и v' између којих постоји пут дужине највише $k - 1 \geq 2$ и докажимо[5] да тврђење важи и за чворове u и v за које је дужина најкраћег пута између њих једнака k. Нека је $u = v_1, v_2, \ldots, v_k = v$ један пут дужине k од u до v и нека је $w = v_{k-1}$ (приметимо да $w \notin \{u, v\}$, јер је $k \geqslant 3$). По индуктивној претпоставци (примењеној[6] на чворове u и w) постоје путеви $P_1 : u = u_1, u_2, \ldots, u_l = w$ и $P_2 : u = w_1, w_2, \ldots, w_s = w$, такви да је $\{u_2, u_3, \ldots, u_{l-1}\} \cap \{w_2, w_3, \ldots, w_{s-1}\} = \emptyset$. Даље, граф $G \setminus \{w\}$ је повезан, тако да у њему постоји пут $u = t_1, t_2, \ldots, t_r = v$. Нека је $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$ највећи број за који је t_j на путу P_1 или P_2 (могуће је да је $j = 1$, тј. $t_j = u$). Претпоставимо, без умањења општости, да је t_j на путу P_1, тј. да је $t_j = u_i$, за неко $1 \leqslant i \leqslant l - 1$. Тада су

$$u = u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, u_i = t_j, t_{j+1}, \ldots, t_{r-1}, t_r = v \qquad \text{и} \qquad u = w_1, w_2, \ldots, w_s = w, v$$

u-v путеви у G са дисјунктним унутрашњостима.

($\Leftarrow$:) Претпоставимо супротно, тј. да граф G има пресечни чвор v. Нека су w' и w'' произвољна два чвора из $G \setminus \{v\}$. Тада у G постоје два w'-w'' пута P_1 и P_2 са дисјунктним унутрашњостима. Како највише један од ових путева садржи v, закључујемо да постоји пут од w' до w'' у $G \setminus \{v\}$. Дакле, граф $G \setminus \{v\}$ је повезан, што је контрадикција. $\square$

Нека је $G = (V, E)$ граф и $u, v \in V$ такви да је $uv \in E$. Кажемо да је граф $G' = (V', E')$ настао од графа G *поделом гране* uv ако за неке $v_1, v_2, \ldots, v_k \notin V$, $k \geqslant 1$, важи $V' = V \cup \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ и $E' = (E \setminus \{uv\}) \cup \{uv_1, v_1v_2, \ldots, v_{k-1}v_k, v_kv\}$. Такође, у овој ситуацији кажемо да граф G' *подела* графа G и да је граф G' добијен од G *заменом гране* uv *путем* $u, v_1, v_2, \ldots, v_k, v$.

Лема 4.1 *Нека је $G = (V, E)$ један 2-повезан граф. Тада је и свака подела графа G такође 2-повезан граф.*

Доказ. Нека је G' подела графа G која је настала тако што је грана $uv \in E$ замењена путем $P : u, v_1, v$. Приметимо да је доказ довољно извести у овом (најједноставнијем) случају, јер се свака подела може добити применом неколико узастопних подела овог типа.

Претпоставимо да граф G' није 2-повезан, тј. да G' има пресечан чвор w. Довољно је размотрити следећа два случаја[7]: $w \in V$ и $w = v_1$. Нека су x, y произвољни чворови графа $G' \setminus \{w\}$. У оба случаја доказујемо да постоји пут од x до y у $G' \setminus \{w\}$, чиме ћемо добити жељену контрадикцију.

1° $\underline{w \in V}$. Ако су x и y чворови графа G (тј. ако су оба различита од v_1), тада у графу $G \setminus \{w\}$ постоји x-y пут Q (јер је G 2-повезан). Ако пут Q не садржи грану uv, тада је Q пут и у $G' \setminus \{w\}$, а ако је садржи, да бисмо добили пут у $G' \setminus \{w\}$, довољно је у Q грану uv заменити путем P. Дакле, у случају да су x и y чворови графа G доказ је завршен. Нека је даље, без умањења општости, $x = v_1$. Такође, како је један од чворова u и v различит од w, можемо претпоставити да је $u \neq w$. Граф G је 2-повезан, па у графу $G \setminus \{w\}$ постоји пут $u = u_1, u_2, \ldots, u_k = y$. Ако је $u_2 \neq v$, тада је $x = v_1, u = u_1, u_2, \ldots, u_k = y$ пут од x до y у $G' \setminus \{w\}$. Ако је $u_2 = v$, тада је $x = v_1, u_2, \ldots, u_k = y$ пут од x до y у $G' \setminus \{w\}$. Овим је доказ у случају 1° завршен.

2° $\underline{w = v_1}$. Како су x и y чворови графа $G' \setminus \{w\}$, они су чворови и графа G. Граф G је 2-повезан, па по Теореми 4.2 у G постоје x-y путеви P_1 и P_2 са дисјунктним унутрашњостима. Највише један од ових путева садржи грану uv, па без умањења општости можемо претпоставити да пут P_1 не садржи ову грану. Овако изабран пут P_1 је садржан у $G' \setminus \{w\}$, чиме је доказ завршен и у овом случају. $\square$

Лема 4.2 *Нека је $G = (V, E)$ повезан граф такав да је $|V| \geqslant 3$. Тада је G 2-повезан граф ако и само за сваке две гране графа G постоји циклус у G који их садржи.*

[5] Уверите се да је ово еквивалентно индуктивном кораку.

[6] Зашто ови чворови задовољавају индуктивну претпоставку?

[7] Препоручујем да доказ завршите сами, јер то може бити добра вежба (у наставку доказа нема нових идеја, само је потребно испитати неколико сличних случајева).

Доказ. ($\Rightarrow$:) Нека су $e_1 = x_1y_1$ и $e_2 = x_2y_2$ гране графа G. Поделимо ове две гране чворовима z_1, односно z_2 (тј. грану e_1 мењамо путем x_1, z_1, y_1, а грану e_2 мењамо путем x_2, z_2, y_2). Ако је G^* граф добијен на овај начин, по Леми 4.1 граф G^* је 2-повезан. По Теореми 4.2 у графу G^* постоје z_1-z_2 путеви P_1 и P_2 који имају дисјунктне унутрашњости. Како су чворови z_1 и z_2 степена 2 у графу G^*, то без умањења општости можемо претпоставити да важи $P_1 : z_1 = v_1, x_1 = v_2, v_3, \ldots, v_{n-1} = x_2, v_n = z_2$ и $P_2 : z_1 = u_1, y_1 = u_2, u_3, \ldots, u_{m-1} = y_2, u_m = z_2$ (ово су путеви у G^*). Сада је $u_2 = y_1, x_1 = v_2, v_3, \ldots, v_{n-1} = x_2, y_2 = u_{m-1}, u_{m-2}, \ldots, u_3, u_2 = y_1$ циклус у G који садржи e_1 и e_2.

($\Leftarrow$:) Претпоставимо да G није 2-повезан, тј. да постоји пресечни чвор v графа G. Ако нека компонента повезаности графа $G \setminus \{v\}$ има тачно један чвор w, тада је w степена 1 (у G), па у G не постоји циклус који садржи грану vw, што је контрадикција. Дакле, свака компонента повезаности графа $G \setminus \{v\}$ има барем два чвора. Нека су $e_1 = x_1y_1$ и $e_2 = x_2y_2$ гране графа G које су садржане у различитим компонентама повезаности графа $G \setminus \{v\}$. По претпоставци постоји циклус који садржи e_1 и e_2 – без умањења општости можемо претоставити да је ово циклус $C : x_1 = v_0, y_1 = v_1, v_2, \ldots, v_{n-1} = y_2, v_n = x_2, v_{n+1}, \ldots, v_{m-1}, v_m = x_1$. Међутим, сваки од путева $y_1 = v_1, v_2, \ldots, v_{n-1} = y_2$ и $v_n = x_2, v_{n+1}, \ldots, v_{m-1}, v_m = x_1$ мора садржати v (јер су y_1 и y_2, односно x_1 у x_2, у различитим компонентама повезаности графа $G \setminus \{v\}$), па C није циклус. Контрадикција! $\square$

Нека је $G = (V, E)$ и $u, v \in V$. Кажемо да је граф $G' = (V', E')$ добијен од G *додавањем пута* (или *додавањем пута чији су крајеви u и v*), ако за неке $u, v \in V$ и $v_1, v_2, \ldots, v_k \notin V$, где је $k \geqslant 0$, важи $V' = V \cup \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ и $E' = E \cup \{uv_1, v_1v_2, \ldots, v_{k-1}v_k, v_kv\}$ (за $k = 0$ је $V' = V$ и $E' = E \cup \{uv\}$). *Декомпозиција путевима* графа G је низ графова $G_0, G_1, \ldots, G_n = G$, такав да је G_0 циклус и за свако $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ граф G_{i+1} добија се од графа G_i додавањем пута.

Теорема 4.3 (Витни 1932) *Нека је $G = (V, E)$ граф такав да је $|V| \geqslant 3$. Тада је G 2-повезан ако и само ако постоји декомпозиција путевима графа G.*

Доказ. ($\Rightarrow$:) Нека је G_0 произвољан циклус у G (он постоји по Леми 4.2). Покажимо како можемо конструисати графове $G_1, G_2, \ldots$ тако да за неко $n \geqslant 0$ важи $G_n = G$ и да је за свако $i \leqslant n-1$ граф G_{i+1} добијен од графа G_i додавањем пута.

Претпоставимо да смо конструисали графове $G_0, G_1, \ldots, G_i$. Ако је $G_i = G$, доказ је завршен. Претпоставимо зато да постоји нека грана $xy = e \in E$ која није грана графа G_i и нека је e' произвољна грана графа G_i. По Леми 4.2 постоји циклус $C : x, y = v_0, v_1, \ldots, v_{m-1}, v_m = x$ у G који садржи гране e и e' и нека је $v_jv_{j+1} = e'$. Даље, нека је l најмањи број $\geqslant j+1$, а s највећи број $\leqslant j$ тако да су v_l и v_s чворови графа G_i (приметимо да је тада $v_l \neq v_s$). Дефинишемо пут $P : v_s, v_{s+1}, \ldots, v_m = x, v_0 = y, v_1, \ldots, v_{j-1}, v_j$. Тада је граф $P \cup G_i$ добијен од G_i додавањем пута чији су крајеви v_s и v_l, па можемо узети $G_{i+1} = P \cup G_i$.

Како је граф G коначан, овај поступак се мора завршити, тј. за неко n важи $G_n = G$.

($\Leftarrow$:) Претпоставимо да је $G_0, G_1, \ldots, G_n = G$ декомпозиција путевима графа G. Како је G_0 2-повезан граф (јер је G_0 циклус), довољно је доказати да ако је G_i 2-повезан граф, да је онда и G_{i+1} 2-повезан граф.

Нека је G_{i+1} добијен од G_i додавањем пута чији су крајеви u и v – нека је то пут $u, v_1, v_2, \ldots, v_k, v$. Ако је $k = 0$ доказ тривијално следи. Претпоставимо зато да је $k \geqslant 1$. Размотримо прво случај $uv \notin E_i$, где је E_i скуп грана графа G_i. Нека је G_i^* граф добијен од G_i додавањем гране uv (тј. $G_i = G_i^* \setminus uv$). Тада је јасно G_i^* 2-повезан, па како се G_{i+1} добија од G_i^* поделом гране uv, по Леми 4.1 и граф G_{i+1} је 2-повезан. Претпоставимо сада да је $uv \in E_i$. Приметимо да се граф $G_{i+1}^* = G_{i+1} \setminus uv$ добија од графа G_i поделом гране uv, па је граф G_{i+1}^* 2-повезан по Леми 4.1. Како се граф G_{i+1} добија од графа G_{i+1}^* додавањем гране uv, закључујемо да је G_{i+1} 2-повезан. $\square$

Предавање 5

Повезаност графова

Нека је $G = (V, E)$ и S неки пресечни скуп графа G. Тада је граф $G \setminus S$ неповезан, тј. има барем две компоненте повезаности. Нека су $C_1, C_2, \ldots, C_k$ $(k \geqslant 2)$ све компоненте повезаности графа $G \setminus S$. Поделимо ове компоненте у два непразна дела, тј. нека је $\emptyset \subsetneq I \subsetneq \{1, 2, \ldots, k\}$, те $X = \bigcup_{i \in I} C_i$ и $Y = \bigcup_{j \notin I} C_j$. Тада кажемо да је (X, Y) *разбијање* графа $G \setminus S$. Приметимо да ако је S пресечни скуп графа G, тада граф $G \setminus S$ може имати више разбијања (X, Y), али да увек можемо изабрати разбијање, тако да је један од скупова X или Y повезан (тако што изаберемо да се тај скуп састоји од једне компоненте повезаности). Наравно $X \cup Y$ је скуп свих чворова графа $G \setminus S$ и при томе не постоји грана чији је један чвор у X, а други у Y. Уз то, ако је P било који пут (у G) од неког чвора из X до неког чвора из Y, тада P мора садржати барем један чвор из скупа S.

Обрнуто, нека је $G = (V, E)$ граф и S подскуп од V за који постоји партицији (X, Y) скупа $V \setminus S$ (тј. $X \cap Y = \emptyset$, $X \cup Y = V \setminus S$) таква да свака грана из E има оба чвора у $X \cup S$ или оба чвора у $Y \cup S$. Тада је S пресечни скуп графа G и (X, Y) разбијање графа $G \setminus S$.

Ово ћемо често користити у наредним доказима.

5.1 3-повезани графови

Нека је $G = (V, E)$ и $e = xy \in E$. Тада за граф $G' = (V', E')$ дефинисан са $V' = (V \setminus \{x, y\}) \cup \{v_{xy}\}$ $(v_{xy} \notin V)$ и $E' = (E \setminus U) \cup U'$, где је $U = \{xx' : x' \in N(x)\} \cup \{yy' : y' \in N(y)\}$ и $U' = \{v_{xy}z : z \in (N(x) \cup N(y)) \setminus \{x, y\}\}$, кажемо да је добијен од G *контракцијом* гране e. Овај граф обележавамо са G/e.

Лема 5.1 *Нека је $G = (V, E)$ 3-повезан граф такав да је $|V| > 4$. Тада постоји грана $e \in E$ таква да је граф G/e 3-повезан.*

Доказ. Претпоставимо супротно. Нека је $e = xy$ произвољна грана графа G. По претпоставци, граф G/e није 3-повезан, па он има пресечни скуп $\{u, v\}$ такав да је (X, Y) разбијање графа G/e. Претпоставимо да је $v_{xy} \in X$. Тада се сви суседи овог чвора налазе у $(X \setminus \{v_{xy}\}) \cup \{u, v\}$, па се и сви суседи (у графу G) чворова x и y налазе у $(X \setminus \{v_{xy}\}) \cup \{u, v\}$ (погледајте дефиницију контракције). Међутим, тада је $\{u, v\}$ пресечни скуп графа G (такав да је $((X \setminus \{v_{xy}\}) \cup \{x, y\}, Y)$ разбијање графа $G \setminus \{u, v\}$), па G није 3-повезан, што је контрадикција. Аналогно доказујемо да важи $v_{xy} \notin Y$, па је $v_{xy} \in \{u, v\}$. Нека је без умањења општости $v_{xy} = u$. Јасно, $\{x, y, v\}$ је пресечни скуп графа G такав да је (X, Y) разбијање графа $G \setminus \{x, y, v\}$. При томе сваки од чворова из скупа $\{x, y, v\}$ има суседа и у X и у Y. Заиста, уколико нпр. x нема суседа у X, тада је $\{y, v\}$ пресечни скуп графа G такав да је $(X, Y \cup \{x\})$ разбијање графа $G \setminus \{y, v\}$, што није могуће, јер је граф G 3-повезан.

Резимирајмо шта смо доказали у претходном пасусу: за сваку грану xy постоји чвор v, такав да је $\{x, y, v\}$ пресечни скуп графа G и да при томе за разбијање (X, Y) графа $G \setminus \{x, y, v\}$ важи да сваки чвор из скупа $\{x, y, v\}$ има суседа и у X и у Y.

Изаберимо сада грану xy тако да је скуп Y (описан у претходном пасусу) најмањи могућ (у односу на инклузију). Нека су чвор v и скуп X као из претходног пасуса. Нека је w неки чвор[1] скупа Y такав да је $vw \in E$ (по претходном делу доказа овакав чвор постоји). Применимо сада оно што је доказано у првом пасусу доказа на грану vw (тврђење из претходног пасуса важи за сваку грану). Дакле, постоји чвор t такав да је $\{v, w, t\}$ пресечни скуп графа G и нека је (X', Y') разбијање графа $G \setminus \{v, w, t\}$. При томе, нека је Y' тако изабрано да се састоји од једне компоненте повезаности и не

[1] Ако до сада нисте нацртали слику, предлажем да то урадити што пре.

садржи чворове x и y (како је xy грана, чворови x и y се не могу налазити у различитим компонентама повезаности грана $G \setminus \{v, w, t\}$).

Чвор w има барем једног суседа у Y', па $Y' \cap Y \neq \emptyset$ (јер w нема суседа у X). Такође, $Y' \cap X \neq \emptyset$, јер је у супротном $Y' \subseteq Y \setminus \{w\} \subset Y$, што је у контрадикцији са одабиром скупа Y. Дакле, Y' има чворове и у X и у Y, па како је Y' повезан граф, у Y' постоји пут P од неког чвора из X до неког чвора из Y. Међутим, овакав пут мора проћи кроз неки чвор скупа $\{x, y, v\}$, што није могуће (јер $x, y, v \notin Y'$). $\square$

Теорема 5.1 (Тат 1961) *Граф $G = (V, E)$ је 3-повезан ако и само ако постоји низ графова $G_0, G_1, \ldots, G_n$ такав да важи:*

(1) $G_0 \cong K_4$ и $G_n = G$;

(2) G_{i+1} садржи неку грану xy такву да је $d(x), d(y) \geqslant 3$ (степен посматрамо у графу G_{i+1}) и $G_i = G_{i+1}/xy$, за свако $0 \leqslant i \leqslant n-1$.

Доказ. ($\Rightarrow$:) Конструишимо тражени низ „наопачке”, тј. од G ка G_0 (зато уводимо нове ознаке). Нека је $G^0 = G$. Граф G^0 је 3-повезан граф, па по претходној леми постоји грана xy таква да је G^0/xy такође 3-повезан граф. Приметимо да је сваки чвор графа G^0 степена барем 3. Заиста, ако је чвор v графа G^0 степена највише два, тада је $N(v)$ пресечни скуп графа G^0 са највише два чвора, што није могуће. Дакле, можемо узети да је $G^1 = G^0/xy$. Граф G^1 је 3-повезан, па овај поступак можемо наставити. Како сваки наредни граф има један чвор мање него претходни, овај поступак се мора завршити. На овај начин добијамо низ графова $G^0, G^1, \ldots, G^n$. По Леми 5.1, граф G^n има 4 чвора (иначе поступак можемо наставити), па како је сваки 3-повезан граф са 4 чвора комплетан[2], то је $G^n \cong K_4$. Ако означимо $G_0 = G^n, G_1 = G^{n-1}, \ldots, G_n = G^0$, добијамо жељени низ графова који, по конструкцији, задовољава (1) и (2).

($\Leftarrow$:) Докажимо да је сваки граф низа $G_0, G_1, \ldots, G_n$ 3-повезан (ово је довољно доказати, јер је $G = G_n$). Доказ изводимо индукцијом по (индексу) $i \geqslant 0$. За $i = 0$ тврђење важи (граф K_4 је 3-повезан).

Претпоставимо зато да је граф G_i 3-повезан и докажимо да је и граф G_{i+1} 3-повезан. Претпоставимо супротно, тј. да постоје чворови u и v такви да је $\{u, v\}$ пресечни скуп графа G_{i+1} и (X, Y) разбијање графа $G_{i+1} \setminus \{u, v\}$. Нека је v_{xy} чвор који настаје контракцијом гране xy (подсетимо се, $G_i = G_{i+1}/xy$). Ако је $x, y \in X$ или $x, y \in Y$, тада је $\{u, v\}$ пресечни скуп графа G_i, што није могуће. Дакле, важи $\{x, y\} \cap \{u, v\} \neq \emptyset$, а уз то и $\{x, y\} \neq \{u, v\}$ (јер је у супротном v_{xy} пресечни чвор графа G_i), па без умањења можемо претпоставити да је $u = x$ и да се y налази (рецимо) у Y. Међутим, сви суседи чвора y се налазе у $Y \cup \{x, v\}$, па у случају да је $Y \setminus \{y\} \neq \emptyset$ скуп $\{v_{xy}, v\}$ је пресечни скуп графа G_i такав да је $(X, Y \setminus \{y\})$ разбијање графа $G_i \setminus \{v_{xy}, v\}$. Дакле, $Y = \{y\}$, па је y степена највише два, што је контрадикција. $\square$

5.2 Менгерова теорема

Нека је $G = (V, E)$ граф и $u, v \in V$. Тада са $p(u, v)$ означавамо највећи број k такав да постоје u-v путеви $P_1, P_2, \ldots, P_k$ у G са дисјунктним унутрашњостима.

Претпоставимо да $uv \notin E$. Тада са $c(u, v)$ означавамо најмање k за које постоји[3] пресечни скуп S, такав да је $|S| = k$ и чворови u и v се налазе у различитим компонентама повезаности графа $G \setminus S$. У овом случају кажемо да S *раздваја* чворове u и v или да су чворови u и v *раздвојени са* S.

Теорема 5.2 (Менгер 1927) *Нека је $G = (V, E)$ граф и $u, v \in V$ такви да $uv \notin E$. Тада је $p(u, v) = c(u, v)$.*

Доказ. Докажимо прво да је $p(u, v) \leqslant c(u, v)$. Нека је S произвољан пресечни скуп графа G који раздваја u и v. Тада сваки u-v пут пролази кроз S, па у G постоји највише $|S|$ путева од u до v са дисјунктним унутрашњостима. Како у G постоји пресечни скуп S који раздваја u и v и такав да је $|S| = c(u, v)$, наведена неједнакост следи.

Докажимо и неједнакост $c(u, v) \leqslant p(u, v)$. Нека је T пресечни скуп са најмањим бројем чворова који раздваја u и v ($|T| = c(u, v)$). Довољно је доказати да у G постоји $c(u, v)$ путева од u до v са дисјунктним унутрашњостима. Ово доказујемо индукцијом по броју грана m графа G (тј. $m = |E|$).

[2] Проверите ову тврдњу!
[3] Наравно, ако је $uv \in E$, овакав скуп не постоји.

Тврђење тривијално важи за $m = 0$ (тада је $c(u,v) = 0$). Претпоставимо зато да тврђење важи за све графове (и све парове несуседних чворова ових графова) са мање од m грана и докажимо га за дати граф $G = (V,E)$, $|E| = m$, и $u, v \in V$ такве да $uv \notin E$.

Нека је $e = xy$ произвољна грана[4] графа G таква да је $\{x,y\} \cap \{u,v\} = \emptyset$. Посматрајмо граф $H = G \setminus e$. У доказу ћемо радити са графовима G и H, па на ознаке $c(u,v)$ и $p(u,v)$ додајемо индекс тако да знамо на који граф се односе[5]. По индуктивној претпоставци важи $c_H(u,v) = p_H(u,v)$. Нека је S пресечни скуп графа H за који важи $|S| = c_H(u,v)$ и који раздваја чворове u и v (у H). При томе, нека је (X,Y) разбијање графа $H \setminus S$ такво да је $u \in X$ и $v \in Y$.

Докажимо да је $c_G(u,v) \leqslant p_G(u,v) + 1$. Пре свега, ако су $P_1, P_2, \ldots, P_l$ неки u-v путеви у H са дисјунктним унутрашњостима, ови путеви се налазе и у G, где такође имају дисјунктне унутрашњости. Дакле, $p_H(u,v) \leqslant p_G(u,v)$. Даље, посматрајмо скупове X и Y у G. Једина грана у G са једним крајем у X, а другим крајем у Y може бити xy. Дакле, између скупова $X \setminus \{x\}$ и $Y \setminus \{x\}$ нема грана, па је $S \cup \{x\}$ пресечни скуп графа G који раздваја u и v, тј. важи $c_G(u,v) \leqslant |S| + 1 = c_H(u,v) + 1$. Уз претходно, закључујемо да је заиста $c_G(u,v) \leqslant p_G(u,v) + 1$.

Претпоставимо да је $c_G(u,v) = p_G(u,v) + 1$, јер је у супротном доказ завршен. Тада, из претходних неједнакости закључујемо да важи $p_G(u,v) = p_H(u,v) = |S|$. Ако је $x, y \in X$, тада је S пресечни скуп графа G који раздваја u и v, па важи $c_G(u,v) \leqslant c_H(u,v) = p_H(u,v) \leqslant p_G(u,v)$, што је контрадикција са претходном претпоставком. Аналогно закључујемо да не важи ни $x, y \in Y$, па без умањења општости можемо претпоставити да је $x \in X$ и $y \in Y$. Конструишимо[6] сада графове G_X и G_Y на следећи начин (опис дајемо за G_X, јер G_Y конструишемо аналогно). Скуп чворова графа G_X је $X \cup S \cup \{\widetilde{y}\}$, при чему су гране између чворова у $X \cup S$ као у G, а чвор $\widetilde{y}$ је спојен са свим чворовима из скупа $S \cup \{x\}$. Докажимо да је величина најмањег пресечног скупа, нека је то број[7] t, графа G_X који раздваја u и $\widetilde{y}$ једнак $c_G(u,v) = |S| + 1$. Пре свега, скуп $S \cup \{x\}$ је пресечни скуп графа G_X који раздваја u и $\widetilde{y}$ (јер је $S \cup \{x\}$ скуп суседа чвора $\widetilde{y}$ у G_X), па важи $t \leqslant c_G(u,v)$. Да бисмо доказали и обрнуту неједнакост, означимо са S' пресечни скуп графа G_X који раздваја u и $\widetilde{y}$, такав да је $|S'| = t$. Јасно $S' \subseteq V$. Докажимо да је S' пресечни скуп графа G који раздваја u и v. Претпоставимо да ово није тачно, тј. да постоји пут $P : u = u_1, u_2, \ldots, u_l = v$ у $G \setminus S'$ од u до v. Овај пут мора садржати неки чвор v_i из скупа $S \cup \{x\}$. Међутим, тада је $u = u_1, u_2, \ldots, u_j = v_i, \widetilde{y}$ пут од u до $\widetilde{y}$ у графу $G_X \setminus S'$, што је контрадикција. Дакле, $|S'| \geqslant c_G(u,v)$, па је заиста $t = c_G(u,v)$. По индуктивној претпоставци у графу G_X постоји $t = c_G(u,v)$ путева $P_1, P_2 \ldots, P_t$ од u до $\widetilde{y}$ са дисјунктним унутрашњостима. Аналогно доказујемо да и у графу G_Y постоји $t = c_G(u,v)$ путева $Q_1, Q_2 \ldots, Q_t$ од $\widetilde{x}$ до v са дисјунктним унутрашњостима. Приметимо да за свако $w \in S$ тачно један од путева $P_1, P_2 \ldots, P_t$ и тачно један од путева $Q_1, Q_2 \ldots, Q_t$ садржи w. Уколико из првог пута избацимо $\widetilde{y}$, а из другог $\widetilde{x}$ и ове путеве надовежемо (као низове), добијамо пут од u до v који садржи w. На овај начин добијамо $|S|$ путева од u до v у G са дисјунктним унутрашњостима. Последњи пут добијамо на сличан начин – тачно један од путева $P_1, P_2 \ldots, P_t$ садржи x, а тачно један од путева $Q_1, Q_2 \ldots, Q_t$ садржи y, па ако из првог пута избацимо $\widetilde{y}$, а из другог $\widetilde{x}$ и ове путеве надовежемо (као низове), добијамо пут од u до v који садржи x и y. Дакле, конструисали смо $c_G(u,v) > p_G(u,v)$ путева са дисјунктним унутрашњостима од u до v, што је контрадикција. □

[4]Оваква грана не мора да постоји, али тада граф изгледа доста једноставно (зар не?). Завршите доказ у овом случају.

[5]Рецимо, $p_H(u,v)$ је највећи број k такав да постоје u-v путеви $P_1, P_2, \ldots, P_k$ у H са дисјунктним унутрашњостима.

[6]Наставак доказа можете испратити једино ако нацртате довољан број слика.

[7]t је заправо једнако $c_{G_X}(u, \widetilde{y})$, али ова ознака је ипак превише ружна да бисмо је користили у доказу.

Предавање 6

Упаривања и покривачи

6.1 Упаривања у графу

Нека је $G = (V, E)$ граф. За скуп $M \subseteq E$ кажемо да је *упаривање у* G ако никоје две гране из M немају заједнички чвор. За два чвора u и v таква да је $uv \in M$ кажемо да су *упарена у* M. За упаривање M кажемо да *садржи* чвор v ако постоји грана из M која садржи v; за чвор v кажемо да је M*-садржан* ако M садржи v. За упаривање M кажемо да је *перфектно* ако је сваки чвор графа G садржан у M. Упаривање M је *максимално* ако не постоји упаривање у G са већим бројем грана.

Нека је M упаривање у G. M*-алтернирајући пут у* G је пут чије су гране наизменично у M и $E \setminus M$ (сваки пут дужине 2 је M-алтернирајући). За M-алтернирајући пут кажемо да је M*-повећавајући* ако му крајњи чворови нису садржани у M.

Теорема 6.1 (Берж 1957) *Нека је $G = (V, E)$ граф. Упаривање M је максимално у G ако и само ако G не садржи M-повећавајући пут.*

Доказ. ($\Rightarrow$:) Претпоставимо да је M максимално упаривање, али да G садржи M-повећавајући пут $v_0, v_1, \ldots, v_m$. По дефиницији M-повећавајућег пута важи $v_{2i+1}v_{2i+2} \in M$ и $v_{2i}v_{2i+1} \in E \setminus M$, за све $i \geqslant 0$, као и да је m облика $2n + 1$. Међутим, тада је скуп $M' = (M \setminus \{v_{2i+1}v_{2i+2} : 0 \leqslant i \leqslant n-1\}) \cup \{v_{2i}v_{2i+1} : 0 \leqslant i \leqslant n\}$ упаривање које има једну грану више од упаривања M, што је контрадикција.

($\Leftarrow$:) Претпоставимо да G не садржи M-повећавајући пут, али да M није максимално упаривање. Нека је M^* максимално упаривање у G ($|M^*| > |M|$). Нека је H граф чији је скуп грана $M^* \triangle M$. Посматрајмо компоненте повезаности овог графа. Како је у овом графу степен сваког чвора највише два (јер се сваки чвор налази у највише једној грани из M и највише једној грани из M^*), свака компонента повезаности је пут или циклус[1], при чему се на њима смењују гране из M^* и M. Како је $|M^*| > |M|$, а у H има више грана из M^* него из M, то постоји комонента повезаности која је пут и у којој је прва и последња грана из M^*. Међутим, овај пут је M-повећавајући пут графа G, што је контрадикција. $\square$

Теорема 6.2 (Хол 1935) *Нека је G бипартитиван граф са партицијом (X, Y). Тада G има упаривање које садржи сваки чвор из X ако и само ако за свако $S \subseteq X$ важи $|N(S)| \geqslant |S|$.*

Доказ. ($\Rightarrow$:) Претпоставимо да је M упаривање такво да је сваки чвор из X садржан у M. Нека је $S \subseteq X$. Како је G бипартитиван, свака грана у M има један крај у X, а други у Y, а како M садржи сваки чвор из X, за свако $x \in X$ постоји $x' \in Y$, тако да је $xx' \in M$. Дакле, за скуп $S' = \{s' : s \in S\} \subseteq Y$ важи $S' \subseteq N(S)$ и $|S| = |S'|$, чиме је доказ овог смера завршен.

($\Leftarrow$:) Нека је M максимално упаривање у графу G. Претпоставимо да постоји чвор $u \in X$ који није садржан у M. Нека је Z скуп чворова v таквих да постоји M-алтернирајући пут од u до v у G, и нека је $S = X \cap Z$ и $T = Y \cap Z$. Јасно, $u \in S$.

Нека је $v \in S \setminus \{u\}$ и P један M-алтернирајући пут од u до v. Тада P има непарно чворова (јер $u, v \in X$, а граф G је бипартитиван), тј. $P : u = v_0, v_1, \ldots, v_{2n} = v$. Како $v_0v_1 \notin M$, то је $v_1v_2, v_3v_4, \ldots, v_{2n-1}v_{2n} \in M$, па су v_{2n-1} и v_{2n} садржани у M. Специјално, $|T| \geqslant |S \setminus \{u\}|$ (јер се за свако $v \in S \setminus \{u\}$ његов „пар” из M налази у T). Уз то, ако је w сусед од v, тада је w садржан у M, јер је у супротном $u = v_0, v_1, \ldots, v_{2n} = v, w$ један M-повећавајући пут, што није могуће по Бержовој теореми. Дакле, сваки чвор из $N(S)$ је садржан у M, а по дефиницији Z и у T. Дакле, $N(S) \subseteq T$.

[1] Докажите ову тврдњу.

Нека је сада $v \in T$ и $P : u = v_0, v_1, \ldots, v_{2n+1} = v$ један M-алтернирајући пут од u до v. Како $v_0v_1 \notin M$, закључујемо да је $v_{2i+1}v_{2i+2} \in M$, за све $0 \leqslant i \leqslant n-1$, па су чворови $v_1, v_3, \ldots, v_{2n-1}$ садржани у M. Такође, чвор v_{2n+1} је садржан у M, јер је у супротном P један M-повећавајући пут, што није могуће по Бержовој теореми. Уз то, ако је $v_{2n+1}w \in M$, по дефиницији скупа Z важи $w \in S \setminus \{u\}$. Дакле, сваки чвор скупа T је садржан у M и важи $|S \setminus \{u\}| \geqslant |T|$ (јер се за свако $v \in T$ његов „пар" из M налази у $S \setminus \{u\}$), као и $T \subseteq N(S)$ (јер је свако $v \in T$ сусед неког чвора из $S \setminus \{v\}$).

Из претходног је $|S \setminus \{v\}| = |T|$ и $T = N(S)$. Међутим, тада је $|N(S)| = |T| = |S \setminus \{v\}| < |S|$, што је контрадикција. □

Последица 6.1 *Нека је G бипартитиван граф у коме је степен сваког чвора исти. Тада G има перфектно упаривање.*

Доказ. Нека је степен сваког чвора графа G једнак k и нека је (X, Y) партиција графа G. Тада је број грана једнак $k|X|$ (свака грана има тачно један чвор у X), али и $k|Y|$ (свака грана има тачно један чвор у Y), па је $|X| = |Y|$. Дакле, довољно је доказати да постоји упаривање које садржи сваки чвор из X. По Холовој теореми, да бисмо ово доказали довољно је проверити да за све $S \subseteq X$ важи $|N(S)| \geqslant |S|$. Запишимо суседе сваког чвора из S. У овим листама записани су чворови скупа $N(S)$ (неки можда више пута), а укупан број записаних чворова је $k|S|$. Како је степен сваког чвора из $N(S)$ једнак k, то се он може налазити у највише k листа, а самим тим $|N(S)| \geqslant |S|$. □

Нека су $S_1, S_2, \ldots, S_k$ коначни скупови. За $(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ кажемо да је *систем различитих представника за* $(S_1, S_2, \ldots, S_k)$, ако је $s_i \in S_i$ и $s_i \neq s_j$, за све $1 \leqslant i < j \leqslant k$.

Последица 6.2 (Хол 1935) *Нека су $S_1, S_2, \ldots, S_k$ коначни скупови. Тада $(S_1, S_2, \ldots, S_k)$ има систем различитих представника ако и само ако је за све $I \subseteq \{1, 2, \ldots, k\}$ испуњено $\left|\bigcup_{i \in I} S_i\right| \geqslant |I|$.*

Доказ. Нека је $\bigcup_{i=1}^{k} S_i = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. Дефинишимо бипартитиван граф G са партицијом (X, Y) на следећи начин: $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$ (ови чворови одговарају скуповима $S_1, \ldots, S_k$), $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ и

$$x_i y_j \text{ је грана графа } G \qquad \text{ако и само ако} \qquad y_j \in S_i.$$

Приметимо да $(S_1, S_2, \ldots, S_k)$ има систем различитих представника ако и само ако граф G има упаривање које садржи сваки елемент скупа X. По Холовој теореми ово важи ако и само ако је за свако $S \subseteq X$ испуњено $|N(S)| \geqslant |S|$. Овде је доказ већ завршен – довољно је само погледати шта је $N(S)$. Заиста, ако запишемо $S = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_l}\}$ и $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_l\}$, важи $N(S) = \bigcup_{i \in I} S_i$, тј. за свако $S \subseteq X$ је испуњено $|N(S)| \geqslant |S|$ ако и само ако је за свако $I \subseteq \{1, 2, \ldots, k\}$ испуњено $\left|\bigcup_{i \in I} S_i\right| \geqslant |I|$. □

6.2 Покривачи у графу

Нека је $G = (V, E)$ граф. За скуп $K \subseteq V$ кажемо да је *покривач* графа G, ако свака грана у E има барем један чвор у K. Овај покривач је *минималан*, ако не постоји покривач са мањим бројем чворова. При томе, са $\beta(G)$ означавамо број елемената минималног покривача од G.

Приметимо да ако је M упаривање у графу G, тада је $|M| \leqslant |K|$. Дакле, ако је M^* максимално упаривање, а $\widetilde{K}$ минималан покривач у G, важи $|M^*| \leqslant |\widetilde{K}|$. У општем случају једнакост не мора да важи.

Лема 6.1 *Нека је M упаривање и K покривач граф G тако да важи $|M| = |K|$. Тада је M максимално упаривање, а K минимални покривач графа G.*

Доказ. Нека је M^* максимално покривање, а $\widetilde{K}$ минимални покривач графа G. По дефиницији и неједнакости изведеној у претходном пасусу важи $|M| \leqslant |M^*| \leqslant |\widetilde{K}| \leqslant |K|$, па је $|M| = |M^*|$ и $|\widetilde{K}| = |K|$, чиме је доказ завршен. □

Теорема 6.3 (Кониг 1931) *Нека је M^* максимално упаривање, а $\widetilde{K}$ минималан покривач бипартитивног графа G. Тада важи $|M^*| = |\widetilde{K}|$.*

Доказ. Нека је (X, Y) партиција графа G и U скуп чворова из X који нису садржани у M^*. Даље, нека је Z скуп свих чворова графа G који су неким M^*-алтернирајућим путем повезани са неким чвором из U, те нека је $S = X \cap Z$ и $T = Y \cap Z$. Наравно, $U \subseteq S$.

Слично као у доказу Холове теореме (коришћењем Бержове теореме), може се доказати[2] да за сваки чвор $v \in T$ важи: (1) v је садржан у M^*; (2) ако је $vv' \in M^*$, тада је $v' \in S$; (3) $T = N(S)$. Нека је $K = T \cup (X \setminus S)$. По (3) скуп K је покривач графа G, а важи и $|K| = |M^*|$, јер свака грана у M^* један крај има или у $X \setminus S$ (јер је $U \subseteq S$) или у T (због (1), (2) и (3)). По претходној леми K је минималан покривач графа G, чиме је доказ завршен. $\square$

За скуп $S \subseteq V$ кажемо да је *независан* ако за све $x, y \in S$ важи $xy \notin E$. При томе, са $\alpha(G)$ означавамо број елемената највећег независног скупа у графу G.

Лема 6.2 *У графу $G = (V, E)$ скуп S је независан ако и само ако је $V \setminus S$ покривач. Такође, важи једнакост $\alpha(G) + \beta(G) = |V|$.*

Доказ. ($\Rightarrow$:) Нека је S независан скуп. Тада свака грана у G (барем) један крај има у $V \setminus S$, па је $V \setminus S$ покривач од G.

($\Leftarrow$:) Нека је $V \setminus S$ покривач. Тада свака грана у G (барем) један крај има у $V \setminus S$, тј. не постоји грана која има оба краја у S, па је S независан скуп.

Докажимо и други део тврђења. Нека је S максималан независан скуп, а K минималан покривач графа G. Тада је $\alpha(G) = |S|$ и $\beta(G) = |K|$. По претходном делу тврђења је $V \setminus S$ покривач од G, па важи $\beta(G) \leqslant |V \setminus S| = |V| - \alpha(G)$, тј. $\alpha(G) + \beta(G) \leqslant |V|$. Такође, $V \setminus K$ је независни скуп у G, па важи $\alpha(G) \geqslant |V \setminus K| = |V| - \beta(G)$, па је $\alpha(G) + \beta(G) \geqslant |V|$. Ове неједнакости доказују други део тврђења. $\square$

[2] Докажите ову тврдњу.

Предавање 7

Бојења графова

7.1 Бојење чворова графа

Нека је $G = (V, E)$ граф и S произвољан скуп (његови елементи су „боје"). Свако пресликавање $c : V \to S$ је *бојење чворова* графа G бојама из S. За ово бојење кажемо да је *правилно* ако за све $uv \in E$ важи $c(u) \neq c(v)$ (другачије речено, суседни чворови су обојени различитим бојама). Уз то, ако је $|S| = k$, тада за ово правилно бојење чворова кажемо да је *k-бојење*.

Посматрајмо једно k-бојење c графа G, при чему је $S = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$. Тада је сваки од скупова $c^{-1}[c_1], c^{-1}[c_2], \dots, c^{-1}[c_k]$ независан (међу чворовима који су обојени бојом c_i нема суседних), па k-бојење можемо посматрати и као једну партицију скупа V на k независних скупова. Наравно, важи и обрнуто, тј. за сваку партицију скупа V на k независних скупова постоји k-бојење графа G (да бисмо добили ово бојење довољно је сваки чвор i-тог скупа ове партиције обојити бојом c_i). Специјално, сваки бипартитиван граф има 2-бојење.

Хроматски број графа $G = (V, E)$, у ознаци $\chi(G)$, је најмањи природан број k за који постоји k-бојење графа G. Ако је граф G произвољан, тада је број $\chi(G)$ тешко одредити, па је од значаја дати што боља ограничења за $\chi(G)$. Следеће тврђење је већ доказано у претходном пасусу.

Тврђење 7.1 *За сваки граф $G = (V, E)$ важи $\chi(G) \geqslant \dfrac{|V|}{\alpha(G)}$.*

Доказ. Свако $\chi(G)$-бојење графа G даје партицију графа G на $\chi(G)$ независних скупова. Како сваки од ових скупова има највише $\alpha(G)$ чворова, то је $|V| \leqslant \chi(G) \cdot \alpha(G)$. Овим је тврђење доказано. □

За граф G са $\omega(G)$ означавамо број чворова највећег подграфа који је клика (тј. комплетан). Приметимо да ако је комплетан граф H подграф графа G, тада сви чворови графа H морају бити обојени различитим бојама, па $\chi(G)$ мора бити барем колико граф H има чворова. Дакле, $\chi(G) \geqslant \omega(G)$.

За почетак, описаћемо један поступак којим се може добити правилно бојење чворова графа (али које није обавезно оптимално, тј. са најмањим бројем боја). Оно је засновано на следећој једноставној примедби:

> да бисмо добили правилно бојење чворова графа довољно је сваки његов чвор v обојити бојом која није употребљена за бојење чворова скупа $N(v)$.

Ова примедба се лако може преточити у рекурзивни алгоритам за добијање правилног бојења чворова графа G (као што можете приметити, ово је похлепни алгоритам, па га зато и називамо *похлепни алгоритам за бојење чворова графа*):

(1) изабаремо произвољан чвор v графа G;

(2) правилно обојимо чворове графа $G \setminus \{v\}$ (рекурзивно);

(3) чвор v обојимо бојом која није употребљена за бојење чворова из $N(v)$ (ови чворови су обојени као чворови графа $G \setminus \{v\}$).

Приметимо да се применом овог алгоритма може добити $(\Delta(G)+1)$-бојење графа G. Заиста, приликом бојења чворова графа $G \setminus \{v\}$ за бојење чворова из $N(v)$ је употребљено највише $|N(v)| \leqslant \Delta(G)$ боја, па је преостала барем једна боја којом можемо обојити чвор v. На овај начин доказали смо следеће тврђење.

Тврђење 7.2 *За сваки граф G важи $\chi(G) \leqslant \Delta(G) + 1$.*

Приметимо да за комплетан граф K_n важи $\chi(K_n) = n$ и $\Delta(K_n) = n - 1$, тј. за $G = K_n$ у претходној неједнакости важи једнакост. Размотримо и циклус непарне дужине C_{2n+1}. Јасно је $\Delta(C_{2n+1}) = 2$, а важи и $\chi(C_{2n+1}) = 3$ ($\chi(C_{2n+1}) \neq 2$ јер C_{2n+1} није бипартитиван граф), па и у овом случају у претходном тврђењу важи једнакост. Следећа теорема говори да су ово и једини (повезани) графови за које важи једнакост у Тврђењу 7.2.

Теорема 7.1 (Брукс 1941) *Нека је $G = (V, E)$ повезан граф. Ако G није комплетан граф, нити циклус непарне дужине, тада је $\chi(G) \leqslant \Delta(G)$.*

Доказ. Доказ изводимо индукцијом по $|G|$. Ако је $\Delta(G) \leqslant 2$, тада је G пут или циклус, па тврђење лако следи[1]. Нека је зато $\Delta(G) \geqslant 3$. Уведимо ознаку $\Delta := \Delta(G)$ и претпоставимо супротно, тј. да не постоји Δ-бојење графа G.

Нека је $v \in V$ произвољан чвор графа G. Посматрајмо граф $H = G \setminus \{v\}$. Докажимо прво да постоји Δ-бојење графа H. Јасно је да важи $\Delta(H) \leqslant \Delta$, па ако H није комплетан граф нити циклус непарне дужине, тврђење следи индукцијом. Ако је H комплетан граф, тада је сваки чвор из H степена $\Delta(H) = |H| - 1$ у H, па је сваки сусед v' чвора v степена $\Delta(H) + 1$ у G. Дакле, важи $\Delta(H) + 1 \leqslant \Delta$, па је $\Delta(H) \leqslant \Delta - 1$. Из Тврђења 7.2 закључујемо да постоји Δ-бојење графа H. Коначно, нека је H циклус непарне дужине. Тада је $\Delta(H) = 2$, па по Тврђењу 7.2 постоји 3-бојење графа H. Како је $\Delta \geqslant 3$, закључујемо да и у овом случају постоји Δ-бојење графа H.

Без умањења општости можемо претпоставити да је $\{1, 2, \ldots, \Delta\}$ скуп боја у Δ-бојењу графа H. Докажимо да је $d(v) = \Delta$ и да су у сваком Δ-бојењу графа H употребљене све боје за бојење чворова скупа $N(v)$. У супротном, ако нека боја i скупа $\{1, 2, \ldots, \Delta\}$ није употребљена за бојење чворова скупа $N(v)$, да бисмо добили Δ-бојење графа G довољно је чвор v обојити са i, што је контрадикција (са претпоставком да не постоји Δ-бојење графа G).

Посматрајмо сада произвољно Δ-бојење c графа H. Нека је $N(v) = \{v_1, v_2, \ldots, v_\Delta\}$, при чему је v_i сусед чвора v који је обојен са i у бојењу c. Даље, нека је $H_{i,j}$ индукован подграф[2] графа H чији су чворови сви они чворови графа H који су обојени бојом i или бојом j.

Докажимо прво да се v_i и v_j налазе у истој компоненти повезаности графа $H_{i,j}$. Претпоставимо супротно, тј. да компонента повезаности C графа $H_{i,j}$ која садржи v_i не садржи v_j. Тада можемо добити ново бојење графа H тако што свим чворовима из C заменимо боју, тј. ако су били обојени са i обојимо их са j и обрнутно. На овај начин добијамо Δ-бојење графа H у коме нису сви чворови из $N(v)$ обојени различитим бојама (сада су и v_i и v_j обојени бојом j), што је контрадикција са претходно доказаним.

Нека је $C_{i,j}$ компонента повезаности графа $H_{i,j}$. По дефиницији, у $C_{i,j}$ постоји пут $P : v_i = u_1, u_2, \ldots, u_k = v_j$. У следећем пасусу доказујемо да је $G[C_{i,j}]$ управо пут P.

Посматрајмо суседе чвора v_i у $C_{i,j}$. Сваки чвор у $C_{i,j}$ је обојен са i или j, тако да је сваки сусед од v_i у $C_{i,j}$ обојен са j. Са друге стране, чвор v_i има највише $\Delta - 1$ суседа у H. Ако је за бојење нека два од њих употребљена иста боја, тада су за бојење свих суседа од v_i у H употребљене највише $\Delta - 2$ боје, па се у Δ-бојењу од H осим i може искористити и нека друга боја t за бојење чвора v_i. Међутим, ако v_i обојимо са t, добијамо Δ-бојење од H такво да у бојењу скупа $N(v)$ нису искоришћене све боје скупа $\{1, 2, \ldots, \Delta\}$ (јер је боја t искоришћен два пута), што није могуће по претходно доказаном. Дакле, v_i има тачно једног суседа (у H) који је обојен са j (то је u_2), па и у $C_{i,j}$ има тачно једног суседа. Аналогно, чвор v_j има тачно једно суседа у $C_{i,j}$. Претпоставимо да $G[C_{i,j}]$ није (само) пут P. Тада, по претходно доказаном, неки чвор u_r из скупа $\{u_2, u_3, \ldots, u_{k-1}\}$ има суседа w у $C_{i,j}$ који је различит од u_{r-1} и u_{r+1}. Нека је r најмањи овакав индекс и нека је без умањења општости u_r обојен бојом j. Као у претходном делу доказа (тачније, као у овом пасусу) закључујемо да је w обојен бојом i, а затим и да постоји Δ-бојење графа H у коме је чвор u_r обојен бојом $l \notin \{i, j\}$. Међутим, у овом Δ-бојењу графа H чворови v_i и v_j се не налазе у истој компоненти повезаности подграфа индукованог са чворовима који су обојени са i или j, што је контрадикција са претходно доказаним.

Дакле, $C_{i,j}$ је пут за све $i \neq j$. Коначно, докажимо и да је $C_{i,j} \cap C_{i,s} = \{v_i\}$ за све $i \neq j \neq s \neq i$. Претпоставимо супротно, тј. да је $w \in C_{i,j} \cap C_{i,s}$ и $w \neq v_i$. Тада је чвор w обојен са i и има (барем) два суседа која су обојена са j и два која су обојена са s. Посматрајмо скуп $N(w)$. Важи $|N(w)| \leqslant \Delta$ и при томе су за бојење описана 4 чвора из $N(w)$ употребљене 2 боје, тако да су за бојење свих чворова

[1] Уверите се у то.

[2] Идеја је да од датог бојења графа H добијемо ново правилно бојење графа које можемо „проширити" на бојење графа G. Ово радимо тако што дато бојење мењамо, а најлакши начин на који то можемо урадити је променом боја неког подграфа који је обојен са две боје.

скупа $N(w)$ употребљене највише $\Delta - 2$ боје. Према томе, постоји Δ-бојење графа H у коме је чвор w обојен бојом $t \neq i$ (а јасно важи и $t \notin \{j, s\}$). Међутим, у овом Δ-бојењу чворови v_i и v_j се не налазе у истој компоненти повезаности пографа индукованог чворовима који су обојени са i или j, што је контрадикција са претходно доказаним.

Вратимо се на доказ главног тврђења. Ако су свака два чвор из $N(v)$ суседна, тада је G комплетан граф[3]. Зато можемо претпоставити да нека два од њих, без умањења општости v_1 и v_2, нису суседна. Тада је $C_{1,2} \setminus \{v_1, v_2\} \neq \emptyset$, а по претходном важи $C_{1,2} \cap C_{1,3} = \{v_1\}$. Нека је c' Δ-бојење графа H које је настало тако што су чворовима из $C_{1,3}$ замењене боје (чворови који су били обојени бојом 1 су сада обојени бојом 3 и обрнуто). За ово бојење дефинишемо чворове v'_i и скупове $C'_{i,j}$ као што је то урађено за бојење c. Тада важи $v'_1 = v_3$, $v'_2 = v_2$, $v'_3 = v_1$ и $C'_{1,3} = C_{1,3}$. Нека је u сусед чвора $v_1 = v'_3$ на $C_{1,2}$. Тада је $c(u) = c'(u) = 2$ (тј. у оба бојења је u обојен са 2). По претходно доказаном закључујемо да се u налази на $C'_{2,3}$ (као сусед од v'_3). Посматрајмо $C'_{1,2}$. По дефиницији $C'_{1,2}$ и претходно доказаном, $C'_{1,2}$ садржи све чворове из $C_{1,2}$ осим v_1 (јер је свим чворовима из $C_{1,2}$ осим v_1 боја остала непромењена), па $C'_{1,2}$ садржи u. Међутим, сада је $u \in C'_{1,2} \cap C'_{2,3}$, што је контрадикција са претходно доказаним. Овим је доказ завршен. □

7.2 Бојење грана графа

Нека је $G = (V, E)$ граф и S произвољан скуп (његови елементи су „боје"). Свако пресликавање $c : E \to S$ је *бојење грана* графа G бојама из S. За ово бојење кажемо да је *правилно* ако за све $uv, uw \in E$, $v \neq w$, важи $c(uv) \neq c(uw)$ (другачије речено, гране које имају заједнички чвор су обојене различитим бојама). Уз то, ако је $|S| = k$, тада за ово правилно бојење грана кажемо да је *k-бојење грана.*

Хроматски индекс графа $G = (V, E)$, у ознаци $\chi'(G)$, је најмањи природан број k за који постоји k-бојење грана графа G. Као и у случају хроматског броја, хроматски индекс (произвољног) графа је тешко одредити. Ипак, интересантно је да се за хроматски индекс графа могу наћи много боља ограничења него за хроматски број. Пре свега, ако чвор v има k суседа, можемо закључити да је за бојење грана које садрже v неопходно употребити барем k боја. Дакле, важи $\chi'(G) \geqslant \Delta(G)$. У следећој теореми дајемо и горње ограничење.

Теорема 7.2 (Визинг 1964) *За сваки граф $G = (V, E)$ важи $\Delta(G) \leqslant \chi'(G) \leqslant \Delta(G) + 1$.*

Доказ. Леву неједнакост смо већ доказали, тако да је довољно доказати десну, тј. да постоји $(\Delta(G)+1)$-бојење грана графа G. Овај доказ изводимо индукцијом по $|E|$. Нека је $\Delta = \Delta(G)$.

Ради лакшег записивања доказа уводимо неколико појмова. По индуктивној претпоставци за сваку грану e графа G важи да постоји $(\Delta+1)$-бојење грана граф $G \setminus e$. Нека су у овом бојењу искоришћене боје $\{1, 2, \ldots, \Delta+1\}$. Како је сваки чвор v овог графа степена највише Δ, то постоји боја α којом није обојена нити једна грана која садржи v. У овом случају кажемо да α *недостаје* код v. Нека су сада α и β неке боје из $\{1, 2, \ldots, \Delta+1\}$ и $u \in V$. Тада постоји јединствен максималан пут[4] са једним крајем у u на коме су гране наизменично обојене са α и β, при чему је прва грана обојена са α (пут може бити и дужине 1). Овај пут је *α/β пут од u.*

Вратимо се на доказ теореме. Претпоставимо супротно, тј. да за дати граф G не постоји $(\Delta+1)$-бојење грана графа G.

Докажимо прву следећу тврдњу:

> (*) Нека је $xy \in E$ и c неко $(\Delta+1)$-бојење грана графа $G \setminus xy$ (које постоји по индуктивној претпоставци), такво да боја α недостаје код x, а боја β код y. Тада је $\alpha \neq \beta$ и β/α пут од x други крај има у y.

Пре свега, ако је $\alpha = \beta$, тада грану xy можемо обојити са α и тако добити $(\Delta+1)$-бојење грана графа G, што је контрадикција. Посматрајмо сада β/α пут од x. Овај пут мора садржати y, јер у супротном на овом путу можемо заменити боје α и β и тако добити $(\Delta+1)$-бојење грана графа $G \setminus xy$, које је у супротности са претходно доказаним (у овом бојењу и код x и код y недостаје β). Такође, y мора бити крајњи чвор овог пута, јер је сваки унутрашњи чвор тог пута садржан у грани обојеној и са α и са β, а y није садржан у грани обојеној са β. Овим је (*) доказано.

[3] Ово важи јер је граф G повезан.
[4] Уверите се да ово заиста важи.

Вратимо се (још једном) на доказ теореме. Нека је x произвољан чвор и xy_0 произвољна грана[5] графа G. Нека је c_0 неко $(\Delta+1)$-бојење графа $G\setminus xy_0$ (c_0 постоји по индуктивној претпоставци). Даље, нека је α боја која недостаје код x у c_0. Дефинишимо чворове $y_1, y_2, \dots, y_k$ на следећи начин (сваки од ових чворова ће бити сусед чвора x). Нека је α_1 боја која недостаје код y_0. По (*) боја α_1 не недостаје код x, па постоји сусед y_1 од x тако да је $c_0(xy_1) = \alpha_1$. Наставимо овај поступак даље. Тачније, за свако i (тренутно је $i = 1$), конструишимо $(\Delta + 1)$-бојења грана[6] c_i графа $G_i := G \setminus xy_i$, за $1 \leqslant i \leqslant k$, на следећи начин

$$c_i(e) = \begin{cases} c_0(xy_{s+1}), & e = xy_s \text{ за } s \in \{0, \dots, i-1\} \\ c_0(e), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Нека је α_{i+1} боја која недостаје код y_i у бојењу c_i. Тада α_{i+1} не недостаје код x, па постоји грана xy_{i+1} таква да је $c_i(xy_{i+1}) = \alpha_{i+1}$ (наравно, важи $c_i(xy_{i+1}) = c_0(xy_{i+1})$).

Овај поступак настављамо све док су боје $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ различите (а самим тим и чворови $y_1, y_2, \dots$). Нека је y_k последњи чвор добијен на овај начин. По претходном закључујемо да ако је β боја која недостаје код y_k у c_0, тада постоји y_j, за неко $1 \leqslant j \leqslant k-1$, тако да је $c_0(xy_j) = \beta$.

Посматрајмо сада бојење c_k графа G_k. У овом бојењу α недостаје код x, а β код y_k. Нека је Q (претходно дефинисани) α/β пут од y_k. По (*) његов крај је у x. Такође, сусед од x на овом путу је y_{j-1}, јер је $c_k(xy_{i-1}) = c_0(xy_i) = \beta$. Посматрајмо и бојење c_{j-1} графа G_{j-1}. У овом бојењу $\alpha_j = \beta$ недостаје код y_{j-1}, а α недостаје код x. Нека је Q' α/β пут од y_{j-1} у G_{j-1}. Међутим, Q' је јединствено одређен, па садржи пут Q (гране пута Q су исто обојене у c_k и c_{j-1}), што није могуће, јер у бојењу c_{j-1} не постоји грана која садржи y_k и која је обојена са β. $\square$

[5] Зашто можемо претпоставити да она постоји?

[6] Уверите се да ово јесте правилно бојење грана графа G_i.

Предавање 8

Планарни графови

У претходним поглављима уверили смо се да је одређена својства датог графа лакше уочити уколико граф представимо (нацртамо) у равни. При томе, природно је граф нацртати тако да је слика „што лепша”, тачније да се његове гране секу у што мање тачака.

У овом поглављу разматраћемо проблем планарног представљања датог графа. Нека је $G = (V, E)$ граф. *Утапање графа G у раван* $\mathbb{R}^2$, у ознаци $\widetilde{G}$, задато је различитим тачкама $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^2$, где је $|V| = n$ (тачке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ одговарају чворовима графа), и скупом простих кривих[1] таквим да за тачке x_i и x_j постоји проста крива са крајевима у x_i и x_j ако и само ако су чворови графа G који одговарају тачкама x_i и x_j суседни. За $\widetilde{G}$ кажемо да је *планарно утапање* уколико се описане криве секу једино у њиховим крајевима и свака крива садржи тачно два чвора из скупа $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. За граф G кажемо да је *планаран* ако постоји планарно утапање графа G. Напоменимо да планаран граф G може имати и утапања у раван која нису планарна.

Из дефиниције одмах следи следеће тврђење.

Тврђење 8.1 *Граф G је планаран ако и само ако је свака подела графа G планаран граф.*

У наставку текста често ћемо користити следећу теорему коју дајемо без доказа (теорема је интуитивно јасна, али њен доказ није једноставан).

Теорема 8.1 (Жордан) *Проста затворена крива C у $\mathbb{R}^2$ дели $\mathbb{R}^2 \setminus C$ на два отворена повезана скупа (тј. области).*

Две области из претходне теореме називамо *унутрашњост од C* (то је област која је ограничена) и *спољашњост од C*. Као последица Жорданове теореме, може се доказати да свака проста крива чији је један крај у унутрашњости, а други у спољашњости криве C, мора сећи криву C.

8.1 Ојлерова формула

Нека је $\widetilde{G}$ планарно утапање (планарног) графа $G = (V, E)$. Може се доказати (а свакако је интуитивно јасно) да криве у $\widetilde{G}$ деле остатак равни на области, од којих су све осим једне ограничене. Тада, са $f(\widetilde{G})$ означавамо број ових област. Следећа теорема нам говори да $f(\widetilde{G})$ не зависи од планарног утапања $\widetilde{G}$, већ само од G.

Теорема 8.2 (Ојлерова формула 1752) *За повезан планаран граф $G = (V, E)$ важи $v - e + f(\widetilde{G}) = 2$, где је $v = |V|$, $e = |E|$ и $f(\widetilde{G})$ број области у планарном утапању $\widetilde{G}$ графа G.*

Доказ. Доказ изводимо индукцијом по e. Ако је $e = 0$, тада тврђење тривијално важи (јер је $v = 1$ и $f(\widetilde{G}) = 1$). Претпоставимо зато да тврђење важи за планарне повезане графове са највише $e - 1$ чворова и докажимо га за G.

Ако је G стабло, тада је $f(\widetilde{G}) = 1$, па тврђење следи из Теореме 3.1 (јер је $v = e+1$). Претпоставимо зато да G није стабло. Тада, по Последици 3.1, постоји грана $uv \in E$ тако да је граф $G' = G \setminus uv$ повезан. При томе, постоји циклус C графа G који садржи грану uv (по Тврђењу 3.1). Приметимо да се планарно утапање графа G' може добити од планарног утапања $\widetilde{G}$ графа G брисањем криве која

[1] *Прост крива* је инјективно непрекидно пресликавање $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$.

одговара грани uv. Означимо са $\widetilde{G'}$ ово планарно утапање графа G'. По индуктивној претпоставци (примењеној на граф G') важи $v-(e-1)+f(\widetilde{G'})=2$. Вратимо криву која одговара грани uv. Ова крива налази се у тачно једној области $\mathcal{O}$ утапања $\widetilde{G}$, па она у $\widetilde{G}$ дели област $\mathcal{O}$ на два дела (један део налази се у унутрашњости, а други у спољашњости области које ограничавају криве које одговарају гранама циклуса C). Дакле, $f(\widetilde{G})=f(\widetilde{G'})+1$, одакле тврђење следи. □

Последица 8.1 *Број области у сваком планарном утапању повезаног планарног графа је исти. Овај број означавамо са f.*

Последица 8.2 *Нека је $G=(V,E)$ планаран повезан граф, такав да је $|V|\geqslant 3$. Тада је $e\leqslant 3v-6$, где је $e=|E|$ и $v=|V|$.*

Доказ. За граф G важи Ојлерова формула, тј. $v-e+f=2$. Посматрајмо произвољну област F неког планарног утапања $\widetilde{G}$ графа G. Ако је F ограничена, тада је њена граница састављена од барем 3 гране; ако F није ограничена, тада је граница од F састављена од барем 3 гране или је граф G пут дужине 3. Како за пут дужине 3 тврђење важи (тада је $v=3$ и $e=2$), можемо претпоставити да је граница сваке област у $\widetilde{G}$ сасатљена од барем 3 гране. Посматрајмо границе свих области у $\widetilde{G}$. Према претходном, у њима се (укупно) налази барем $3f$ грана, а како свака грана може бити садржана у граници највише 2 области, то је у границама области највише $2e$ грана. Дакле, $2e\geqslant 3f$, па је по Ојлеровој формули $2e\geqslant 3(2+e-v)$, тј. $3v-6\geqslant e$. □

Последица 8.3 *Граф K_5 није планаран.*

Доказ. Граф K_5 има 5 чворова и $\binom{5}{2}=10$ грана, па како је $10>3\cdot 5-6$, то K_5 није планаран по Последици 8.2. □

Последица 8.4 *Сваки планаран граф $G=(V,E)$ има чвор степена не већег од 5.*

Доказ. Нека је $G'=(V',E')$ граф индукован једном компонентом повезаности графа G. Ако је $|V'|\leqslant 2$ тврђење чигледно важи[2], па можемо претпоставити да је $|V'|\geqslant 3$. Граф G' је планаран и повезан, па на њега можемо применити Последицу 8.2, тј. важи $3v'-6\geqslant e'$, где је $v'=|V'|$ и $e'=|E'|$. Довољно је доказати да граф G' има чвор степена не већег од 5 (степен чвора у графу G' једнак је степену тог чвора у графу G). Претпоставимо супротно, тј. да је $\delta(G')\geqslant 6$. Тада по Тврђењу 1.1 важи

$$2e'=\sum_{u\in V'}\deg(u)\geqslant 6|V'|=6v'\geqslant 2e'+12,$$

што је очигледно контрадикција. □

Последица 8.5 *За сваки планаран граф $G=(V,E)$ постоји 6-бојење.*

Доказ. Доказ изводимо индукцијом по $|V|$. Ако је $|V|=1$, тада тврђење тривијално важи. Претпоставимо зато да тврђење важи за све планарне графове са $|V|-1\geqslant 1$ чворова и докажимо га за граф G. По Последици 8.4, у графу G постоји чвор u степена највише 5. Како је граф $G'=G\setminus u$ планаран, то по индуктивној претпоставци постоји 6-бојење c' графа G'. Сада, да бисмо добили 6-бојење графа G довољно је чвор u обојити бојом која није искоришћена за бојење његових суседа у бојењу c'. □

Тврђење 8.2 *Граф $K_{3,3}$ није планаран.*

Доказ. Претпоставимо супротно. Нека је $\widetilde{G}$ планарно утапање графа $K_{3,3}$. Посматрајмо произвољну област F овог утапања. Граница области F је неки циклус[3] графа $K_{3,3}$, па како је овај граф бипартитиван, граница се састоји од парног броја грана, тј. барем 4. Као у доказу Последице 8.2, закључујемо да важи $2e\geqslant 4f$, тј. $9\geqslant 2f$ (важи $e=9$). Међутим, по Ојлеровој формули је $f=e+2-v=5$, чиме је добијена жељена контрадикција. □

[2] Зашто?
[3] Зашто? Упоредити са Лемом 9.2.

8.2 Теорема пет боја

У Последици 8.5 доказали смо да је сваки планаран граф 6-обојив. Међутим, ово тврђење се може побољшати. Наиме, по чувеној Теореми четири боје сваки планаран граф је 4-обојив. Доказ овог тврђења је ван домашаја овог курса, тако да ћемо се задовољити следећим побољшањем, познатим као Теорема пет боја.

Теорема 8.3 *За сваки планаран граф $G = (V, E)$ постоји 5-бојење.*

Доказ. Доказ изводимо индукцијом по $|V|$. Ако је $|V| = 1$, тада тврђење тривијално важи. Претпоставимо зато да тврђење важи за све планарне графове са $|V| - 1 \geqslant 1$ чворова и докажимо га за граф G.

По Последици 8.4 у графу G постоји чвор u степена највише 5. Како је граф $G' = G \setminus u$ планаран, то по индуктивној претпоставци постоји 5-бојење c' графа G'. Ако је степен чвора u највише 4 или ако су нека два суседа чвора u у бојењу c' обојена истом бојом, тада, да бисмо добили правилно бојење графа G довољно је чвор u обојити бојом која није искоришћена за бојење његових суседа у бојењу c'. Претпоставимо зато да је степен чвора u једнак 5 и да су у сваком 5-бојењу графа G' суседи чвора u обојени различитим бојама. Посматрајмо (поново) 5-бојење c' графа G'. Нека је $N(u) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$, тако да је $c'(u_i) = i$, за $1 \leqslant i \leqslant 5$. Без умањења општости можемо претпоставити да су у планарном утапању $\widetilde{G}$ графа G гране $uu_1, uu_2, uu_3, uu_4, uu_5$ дате у овом редослед када обилазимо око u у смеру казаљке на сату. Посматрајмо скуп чворова $H_{1,3}$ који су у бојењу c' обојени са 1 или 3 (јасно $u_1, u_3 \in H_{1,3}$). Тада, као у доказу Теореме 7.1, закључујемо да су чворови u_1 и u_3 у истој компоненти повезаности $C_{1,3}$ графа који је индукован чворовима из $H_{1,3}$. Нека је $P_{1,3}$ пут у овом графу од u_1 до u_3. Овај пут, заједно са чвором u и гранама uu_1 и uu_3 чини циклус C. Како слика пута u_5, u, u_2 у $\widetilde{G}$ сече слику циклуса C у једној тачки, то се један од чворова u_2 и u_5 налази унутар а други ван области ограничене циклусом C. Посматрајмо сада пут $C_{2,5}$ (који је дефинисан аналогно путу $C_{1,3}$). По Жордановој теореми слика овог пута у $\widetilde{G}$ сече слику циклуса C, па како је $\widetilde{G}$ планарно утапање, тачка пресека мора бити неки од чворова графа G'. Међутим, тај чвор је на путу $C_{1,3}$, па је обојен са 1 или 3, и на путу $C_{2,5}$, па је обојен са 2 или 5, што није могуће. $\square$

Предавање 9

Теорема Куратовског

У овом поглављу приказаћемо доказ теореме Куратовског, која даје потребан и довољан услов да би дати граф био планаран. Доказ који ћемо овде изложити дао је Томасен (1981). У доказу (и формулацији) теореме Куратовског кључни су појмови *минор* и *тополошки минор* графа.

За граф H кажемо да је *тополошки минор* графа G, ако се граф изоморфан са G може добити[1] од H са неколико подела грана графа H. За граф G кажемо да *садржи H-тополошки минор*, ако граф G садржи пограф G' такав да је H тополошки минор од G'.

Претпоставимо да G садржи H-тополошки минор G', где је $H = (V_H, E_H)$. Тада за свако $v \in V_H$ постоји чвор графа G' (означимо га са v') и за свако $e \in V_H$ постоји пут у графа G' (означимо га са P_e), тако да путеви P_e, за $e \in E_H$, имају дисјунктне унутрашњости, и да су крајеви пута P_e, где је $e = uv$, баш u' и v'. За човорове v' графа G', где је $v \in V_H$, кажемо да су *значајни*.

За граф H кажемо да је *минор* графа G, ако се граф изоморфан са H може добити од G применом операција[2]:

(1) брисање чвора;

(2) брисање гране;

(3) контракција гране.

За граф G кажемо да *садржи H-минор*, ако граф G садржи пограф G' такав да је H минор од G'. Приметимо да ако је H подграф графа G, тада је H минор графа G (јер се H може добити од G применом операција (1) и (2)).

Претпоставимо да граф $G = (V, E)$ садржи H-минор. Нека је $H' \cong H$ граф добијен од G применом операција (1)-(3) и нека је $H' = (V', E')$, при чему је $V' = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Нека је v произвољан чвор графа G. Приликом примене операција (1)-(3) овај чвор је или обрисан (у неком тренутку) или је „контракован" у неки чвор скупа V'. Нека је V_i, за $1 \leqslant i \leqslant n$, скуп чворова из V који су контраковани у чвор v_i, а V_0 скуп чворова који су обрисани. Приметимо прво да је $(V_0, V_1, \ldots, V_n)$ партиција скупа V. Такође, подграф од G индукован скупом V_i је повезан, за свако $1 \leqslant i \leqslant n$ (чвор v_i је добијен контракцијом скупа V_i), и ако је $v_i v_j \in E'$, тада у G постоји грана између неког чвора скупа V_i и неког чвора скупа V_j. Није тешко приметити да важи и обрнуто, тј. да постојање овакве партиције имплицира да G садржи H-минор.

Јасно[3], ако је H тополошки минор од G, онда је H и минор од G, али обрнутно не мора да важи. Ипак, у случају да је $H \in \{K_{3,3}, K_5\}$ важи следеће.

Лема 9.1 *Граф $G = (V, E)$ садржи K_5- или $K_{3,3}$-минор ако и само ако садржи K_5- или $K_{3,3}$-тополошки минор.*

Доказ. ($\Leftarrow$:) Сваки K_5- или $K_{3,3}$ -тополошки минор је уједно и K_5- или $K_{3,3}$-минор, па овај смер важи.

($\Rightarrow$:) Претпоставимо прво да G садржи K_5-минор и нека је $K = (V_K, E_K)$ минимални K_5-минор садржан у G (тада сваки подграф од K није K_5-минор). Нека су скупови V_i, $1 \leqslant i \leqslant 5$, подскупови

[1] Тачније, ако постоји низ графова $H = H_0, H_1, H_2, \ldots, H_n = G'$, такав да је граф H_{i+1} добијен поделом гране графа H_i, за све $0 \leqslant i \leqslant n-1$, и важи $G \cong G'$.

[2] Тачније, ако постоји низ графова $H' = H_0, H_1, H_2, \ldots, H_n = G$, такав да је за свако $0 \leqslant i \leqslant n-1$ важи или $H_i = H_{i+1} \setminus \{v\}$ за неки чвор графа H_{i+1}, или $H_i = H_{i+1} \setminus e$ или $H_i = H_{i+1}/e$ за неку грану графа H_{i+1}, и $H \cong H'$.

[3] Довољно је користити операцију (3).

скупа V_K дефинисани као у пасусима пре ове леме (скупови $V_1, V_2, \dots, V_5$ одговарају чворовима графа K_5, а због минималности графа K је $V_0 = \emptyset$). Тада сваки од скупова V_i индукује повезан граф, па због минималности графа K сваки од ових скупова индукује дрво. И више, због минималности графа K можемо претпоставити да између свака два скупа V_i и V_j постоји тачно једна грана. Посматрајмо скуп V_1 и 4 чвора (скуп ова 4 чвора означићемо са S_1) који нису у V_1 а који су суседи чворова из V_1 (ова 4 чвора налазе се у различитим скуповима V_2, V_3, V_4, V_5). Опет због минималности графа K закључујемо да $S_1 \cup V_1$ индукује стабло чија су једина 4 листа елементи скупа S_1. Нека је ово стабло T_1. Слично дефинишемо стабла T_2, T_3, T_4, T_5. Приметимо да свако од ових стабала има тачно један или тачно два чвора степена не мањег од 3 (ово се може закључити рецимо из Тврђења 1.1[4]). Уколико свако од стабала T_i, $1 \leqslant i \leqslant 5$, има тачно један чвор степена не мањег од 3 (по Тврђењу 1.1 овај чвор је степена 4), онда је K јасно K_5-тополошки минор[5]. Претпоставимо зато да неко од ових стабала, без умањења општости T_1, садржи 2 чвора, v' и v'', степена не мањег од 3 (по Тврђењу 1.1 ови чворови су степена 3). Нека је P (јединствен) пут од v' до v'' у T_1 и e нека грана на овом путу. Тада је e мост графа T_1, при чему граф $G \backslash e$ има две компоненте повезаности V_1' и V_1''. Јасно, тачно по два листа графа T_1 налазе се у свакој од ових компонената. Сада, није тешко приметити да скупови $V_1', V_1'', V_2, V_3, V_4, V_5$ чине партицију скупа V_K која доказује да је K уједно и $K_{3,3}$-минор.

Дакле, можемо претпоставити да G садржи $K_{3,3}$-минор. Нека је $K = (V_K, E_K)$ минимални $K_{3,3}$-минор садржан у G као подграф (тада сваки подграф од K није $K_{3,3}$-минор). Као у претходном делу доказу, постоје подскупови $V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6$ скупа V_K такви да сваки од њих индукује дрво које има тачно 3 листа и тачно један чвор степена не већег од 3 (тај чвор је степена тачно 3). Сада је јасно да је K уједно и $K_{3,3}$-тополошки минор. □

9.1 Случај 3-повезаних графова

Започећемо следећом лемом, коју ћемо користити у доказу теореме Куратовског за 3-повезане графове.

Лема 9.2 *У сваком планарном утапању 2-повезаног планарног графа $G = (V, E)$ граница сваке области је циклус.*

Доказ. Доказ изводимо индукцијом по $|E|$. Ако је $|V| = 3$ (и $|E| = 3$), тада тврђење важи. Претпоставимо зато да тврђење важи за све графове са мање од $|E|$ грана и докажимо га за граф G.

По Теореми 4.3, граф G има декомпозицију путевима $G_0, G_1, \dots, G_{n-1}, G_n = G$ (граф G_0 је циклус). Јасно, сваки од графова G_i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, је планаран, а по Теореми 4.3 и 2-повезан, па је, по индуктивној хипотези, у сваком планарном утапању ових графова граница сваке области циклус.

Нека је граф G добијен од графа G_{n-1} додавањем пута P. Посматрајмо планарно утапање $\widetilde{G}$ графа G. Брисањем пута P из овог планарног утапања добијамо планарно утапање $\widetilde{G'}$ графа G_{n-1}. По претходном, граница сваке области у $\widetilde{G'}$ је циклус. Приметимо да је свака област у $\widetilde{G}$ уједно и област у $\widetilde{G'}$, осим две област које су настале „враћањем" (тј. додавањем) пута P у $\widetilde{G'}$. На овај начин област $\mathcal{O}$ у $\widetilde{G'}$ подељена је на две, $\mathcal{O}'$ и $\mathcal{O}''$, па како је граница области $\mathcal{O}$ циклус C то ће и границе области $\mathcal{O}'$ и $\mathcal{O}''$ бити циклуси[6]. □

Теорема 9.1 *Сваки 3-повезан граф $G = (V, E)$ који не садржи K_5- и $K_{3,3}$-минор је планаран.*

Доказ. Доказ изводимо индукцијом по $|E|$. Приметимо да ако је $|V| = 4$, тада је G изоморфан са K_4, па тврђење важи. Зато, можемо претпоставити да $|V| > 4$ и да тврђење за графове са не више од $|E|-1$ грана. По Леми 5.1, граф G садржи грану $e = xy$ такву да је $G' = G/e$ такође 3-повезан граф. Нека је v_{xy} чвор графа G' добијен контракцијом гране e. Јасно, граф G' не садржи K_5- и $K_{3,3}$-минор (јер је G' добијен једном од операција у дефиницији минора графа), па је по индуктивној претпоставци граф G' планаран. Нека је $\widetilde{G'}$ планарно утапање графа G'. Идеја у наставку доказа је да од $\widetilde{G'}$ добијемо планарно утапање графа G, чиме ћемо доказати да је и он планаран.

Наравно, брисањем чвора v_{xy} у $\widetilde{G'}$ (и грана које садрже v_{xy}) добијамо планарно утапање графа $G'' = G' \setminus \{v_{xy}\}$. Како је G'' један 2-повезан граф, по Леми 9.2 граница сваке области у овом утапању

[4] Ако T_1 има n чворова и m грана важи $m = n - 1$, па по Тврђењу 1.1 важи $2m = 2n - 2 = \sum_{v \in T_1} \deg(v)$. Ако T_1 има k чворова који су степена барем 3, тада има $n - k - 4$ чворова степена 2, па је $2n - 2 = 4 + 2(n - k - 4) + \sum \deg(v) \geqslant 4 + 2(n - k - 4) + 3k$, тј. $k \leqslant 2$.

[5] Нацртајте слику!

[6] Нацртајте слику!

(дакле, утапању графа G'' добијеном од $\widetilde{G'}$ брисањем чвора v_{xy}) је циклус. Нека је f област у којој се налази чвор v_{xy} и C циклус који чини границу области f. Како је $\widetilde{G'}$ планарно утапање графа G', то се сви суседи чвора v_{xy} (у графу G') налазе на циклусу C, па се и сви суседи чворова x и y (у графу G), различити[7] од x и y, налазе на циклусу C. Нека су $x_1, x_2, \ldots, x_k$ суседи чвора x и нека су дати у том распореду када C обилазимо у смеру казаљке на сату. Такође, нека је C_i пут од x_i до x_{i+1} (узимамо да је $x_{k+1} = x_1$) на C који не садржи x_{i+2}, за $1 \leqslant i \leqslant k$. Доказаћемо да постоји $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ тако да се сви суседи чвора y (различити од x) налази на C_j. Приметимо да је тиме доказ завршен, јер тада лако од $\widetilde{G'}$ можемо добити[8] планарно утапање графа G.

Претпоставимо супротно. Размотримо прво случај када је y спојен са барем три чвора из скупа $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$; нека су то x_i, x_t и x_l. Међутим, тада[9] граф индукован са $C \cup \{x, y\}$ садржи K_5-тополошки минор (чији су значајни чворови x, y, x_i, x_t, x_l), што је контрадикција.

Докажимо сада да постоје суседи y' и y'' чвора y, и $1 \leqslant s, r \leqslant k$ тако да $\{y', y''\} \cap \{x_s, x_r\} = \emptyset$ и да се чворови x_s, y', x_r, y'' налазе у том редоследу када обилазимо C у смеру казаљке на сату. Размотримо прво случај када y има само два суседа y' и y'' на C. Нека се y' налази на C_s и нека је $y' \neq x_s$. Ако је $y' \neq x_{s+1}$ тада је довољно узети чворове x_s, y', x_{s+1}, y'', а ако је $y' = x_{s+1}$, тада је довољно узети чворове x_s, y', x_{s+2}, y''. Дакле, можемо претпоставити да y има барем три суседа на C. По претходном делу доказа, барем један од њих, без умањења општости y', није из скупа $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Ако се y' налази у C_s, тада је довољно узети чворове x_s, y', x_{s+1}, y'', где је $y'' \neq y'$ неки сусед од y на C.

Дакле, доказали смо да постоје суседи y' и y'' чвора y и $1 \leqslant s, r \leqslant k$ тако да $\{y', y''\} \cap \{x_s, x_r\} = \emptyset$ и да се чворови x_s, y', x_r, y'' налазе у том редоследу када обилазимо C у смеру казаљке на сату. Међутим, тада граф индукован са $C \cup \{x, y\}$ садржи $K_{3,3}$-тополошки минор (чији су значајни чворови x, x_s, x_r, y, y', y', при чему $\{x, y', y''\}$ одговара једној, а $\{y, x_s, x_r\}$ другој страни бипартиције), што је контрадикција. □

9.2 Завршетак доказа

За граф $G = (V, E)$ кажемо да је *E-максималан са својством $\mathcal{P}$* ако сваки граф $G' = (V, E')$ такав да је $E \subsetneq E'$ нема својство $\mathcal{P}$.

Приметимо да ако је граф планаран, тада је и сваки његов подграф такође планаран. Зато, довољно је доказати да су E-максимални графови који не садрже K_5- и $K_{3,3}$-тополошки минор, заиста планарни. У следеће две леме ово доказујемо за графове који нису 3-повезани.

Лема 9.3 *Нека је $G = (V, E)$ један E-максималан граф који не садржи K_5- и $K_{3,3}$-тополошки минор. Ако је S пресечни скуп графа G такав да је $|S| \leqslant 2$ и (X, Y) разбијање графа $G \setminus S$, тада је $S = \{x, y\}$, при чему је $xy \in E$, и важи да су графови индуковани са $X \cup S$ и $Y \cup S$ такође E-максимални графови који не садрже K_5- и $K_{3,3}$-тополошки минор.*

Доказ. Претпоставимо супротно. Довољно је размотрити следеће случајеве.

1° $S = \emptyset$. Тада граф G није повезан. Нека су C_1 и C_2 неке две (различите) компоненте повезаности графа G и z_1 и z_2 чворови у C_1 и C_2, редом (јасно $z_1 z_2 \notin E$). Нека је G' граф добијен од G додавањем гране $z_1 z_2$. Због E-максималности графа G, закључујемо да граф G' садржи K_5- или $K_{3,3}$-тополошки минор T. Како G не садржи T, то $z_1 z_2$ мора бити грана графа T. Међутим, тада је $z_1 z_2$ мост графа T, што није могуће јер је T 2-повезан (сваки K_5- или $K_{3,3}$-тополошки минор је 2-повезан).

2° $S = \{z\}$. Нека је (X, Y) разбијање графа $G \setminus \{z\}$. Можемо претпоставити да z има суседа x у X и суседа y у Y, јер у супротном граф G није повезан (а тај случај смо разматрали у 1°). Јасно, $xy \notin E$. Нека је G' граф добијен од G додавањем гране xy. Због E-максималности графа G, закључујемо да граф G' садржи K_5- или $K_{3,3}$-тополошки минор T. Како G не садржи T, то xy мора бити грана графа T. Како у графу T не постоји мост, то је и z чвор графа T. Претпоставимо, без умањења општости, да T има барем један значајан чвор у $X \setminus \{x\}$ (T има барем 5 значајних чворова, па барем један мора бити у $X \setminus \{x\}$ или у $Y \setminus \{y\}$). Како је $\{x, z\}$ пресечни скуп графа G', то је $\{x, z\}$ пресечни скуп графа T (који раздваја чворове из T који су у $X \setminus \{x\}$ и чворове из T који су у Y). Ово је могуће једино уколико су x и z на путу P графа T који је добијен поделом гране графа $K_{3,3}$ или K_5. Међутим, тада је део графа T који се налази у $Y \cup \{x, z\}$ заправо потпут P' пута P од x до z, па заменом у T

[7] По дефиницији, x и y су суседни, а овде разматрамо преостале суседе чворова x и y.
[8] Како?
[9] Нацртајте слику!

пута P' граном xz добијамо граф T' који је $K_{3,3}$- или K_5-тополошки минор и који је садржан у графу индукованом са $X \cup \{z\}$, контрадикција.

3° $S = \{x, y\}$ и $xy \notin E$. Нека је (X, Y) разбијање графа $G \setminus \{x, y\}$. Можемо претпоставити да x и y имају суседе и у X и у Y, јер се у супротном доказ своди на случај 1° или 2°. Нека је G' граф добијен од G додавањем гране xy. Због E-максималности графа G, закључујемо да граф G' садржи K_5- или $K_{3,3}$-тополошки минор T. Како G не садржи T, то xy мора бити грана графа T. Претпоставимо, без умањења општости, да T има барем један значајан чвор у X. Како је $\{x, y\}$ пресечни скуп графа G, то се сви чворови графа T из $Y \cup \{x, y\}$ налазе на путу P графа T који је добијен поделом гране графа $K_{3,3}$ или K_5. Како је xy грана графа T, ово је једино могуће ако T нема чворова у Y. Нека је P' произвољан пут од x до y графа G чији су сви чворови у $Y \cup \{x, y\}$. Ако је T' граф добијен од T заменом гране xy са P', тада је T' један K_5- или $K_{3,3}$-тополошки минор који је садржан у G, контрадикција.

4° $S = \{x, y\}$ и $xy \in E$. У овом случају довољно је доказати други део тврђења. Нека је G_X граф индукован са $X \cup \{x, y\}$ и $x_1, x_2 \in X \cup \{x, y\}$ такви да $x_1x_2 \notin E$ (ако чворови x_1 и x_2 не постоје, тј. ако је граф G_X комплетан, тада је G_X тривијално E-максималан). Довољно је доказати да граф G'_X добијен од G_X додавањем гране x_1x_2 садржи K_5- или $K_{3,3}$-тополошки минор. Нека је G' граф добијен од G додавањем гране x_1x_2. Због E-максималности графа G, закључујемо да граф G' садржи K_5- или $K_{3,3}$-тополошки минор T. Ако је T садржан у $X \cup \{x, y\}$, тада је доказ завршен. У супротном, закључујемо (као у претходном делу доказа) да се сви чворови графа T који су у $X \cup \{x, y\}$ или сви чворови графа T који су у $Y \cup \{x, y\}$, налазе на путу P графа T (који је добијен поделом гране графа $K_{3,3}$ или K_5). Први случај није могућ, јер тада заменом пута P граном xy добијамо K_5- или $K_{3,3}$-тополошки минор који је подграф графа G (тј. не садржи грану x_1x_2), што је контрадикција. Дакле, сви чворови графа T који су у $Y \cup \{x, y\}$ налазе се на путу P графа T који је добијен поделом гране графа $K_{3,3}$ или K_5, па заменом P са xy у T, добијамо K_5- или $K_{3,3}$-тополошки минор T' који је подграф графа G'_X. Овим је доказ завршен. □

Лема 9.4 *Нека је $G = (V, E)$, $|V| \geqslant 4$, E-максималан граф који не садржи K_5- и $K_{3,3}$-тополошки минор. Тада је G један 3-повезан граф.*

Доказ. Доказ изводимо индукцијом по $|V|$. Тврђење очигледно[10] важи када је $|V| = 4$. Претпоставимо зато да тврђење важи за све графове са барем 4 и мање од $|V|$ чворова, и докажимо га за G.

Претпоставимо супротно, тј. да G има пресечни скуп S такав да је $|S| \leqslant 2$. По претходној леми, важи $S = \{x, y\}$ и xy је грана графа G. Уз то, ако је (X, Y) разбијање графа $G \setminus S$, графови G_1 и G_2 индуковани са $X \cup S$ и $Y \cup S$, редом, су E-максимални графови који не садрже K_5- и $K_{3,3}$-тополошки минор. По индуктивној претпоставци, сваки од графова G_1 и G_2 има или највише 3 чвора или је 3-повезан, при чему ако неки од њих има тачно три чвора онда је изоморфан са K_3 (у супротном граф G има пресечни скуп са једним чвором). По Теореми 9.1 и Леми 9.1, закључујемо да су G_1 и G_2 планарни графови. Нека су $\widetilde{G}_1$ и $\widetilde{G}_2$ њихова планарна утапања. По Леми 9.2, граница сваке области ових планарних утапања је циклус. Нека је f_i област утапања $\widetilde{G}_i$ на чијој се граници налази xy и нека је $z_i \notin \{x, y\}$ чвор на граници ове области, за $i \in \{1, 2\}$.

Нека је G' граф који се од G добија додавањем гране z_1z_2. Због E-максималности графа G, граф G' садржи K_5- или $K_{3,3}$-тополошки минор.

Претпоставимо прво да G' садржи K_5-тополошки минор T. Без умањења општости претпоставимо да се у Y налази не више значајних чворова од T него у X. Јасно, тада се у Y налазе највише два значајна чвора од T. Претпоставимо прво да се у Y налазе тачно два значајна чвора t_1 и t_2 од T. Тада се, по нашој претпоставци, у X налазе барем два значајна чвора од T, па је највише један од чворова x и y значајан у T. Посматрајмо путеве у T од t_1 и t_2 до преосталих значајних чворова графа T. Ових путева има 6 и сваки од њих мора садржати x, y или z_1. Међутим, чвор графа T се налази на више путева једино ако је значај, па се највише два од чворова x, y или z_1 могу налазити на више од једном (и то на тачно два) од описаних 6 путева. Дакле, чворови x, y, z_1 садржани су у највише 5 описаних путева, чиме добијамо жељену контрадикцију. Размотримо сада случај када се у Y налази тачно један значајан чвор t од T. Слично као у претходном делу, у T постоје 4 пута од t до преосталих значајних чворова графа T, а сваки од њих мора садржати x, y или z_1. Како нити један од ових чворова не може бити садржан у два од описаних путева, опет добијамо жељену контрадикцију. Коначно, претпоставимо да у Y нема значајних чворова од T. Како G_1 не садржи K_5-тополошки минор, закључујемо да се неки чворови од T, а самим тим и делови путева, налазе у Y. Како сваки

[10] Зашто?

од описаних путева мора проћи кроз два од три чвора из скупа $\{x, y, z_1\}$, а највише један пут кроз z_1, закључујемо да постоје највише два оваква пута. Ако неки од ових путева садржи чворове x и y, тада у T овај пут можемо заменити граном xy чиме добијамо граф T' који је K_5-тополошки минор садржан у G, па зато можемо претпоставити да описани путеви не садрже и x и y. Тада постоји тачно један описани пут P и претпоставимо да он садржи z_1 и без умањења општости x. Нека је G_1' граф добијен од G_1 додавањем гране z_1x (ако је z_1x грана графа G_1, тада је $G_1' = G_1$). По начину избора чвора z_1 закључујемо да је граф G_1' планаран (довољно је у планарно утапање $\widetilde{G}_1$ уцртати грану z_1x). Међутим, ако је T'' граф добијен од T' заменом пута P граном z_1x, тада је T'' један K_5-тополошки минор који је садржан у G_1', што је контрадикција (са Последицом 8.3).

Претпоставимо сада да G' садржи $K_{3,3}$-тополошки минор T. Поступамо слично[11] као у претходном делу доказа. Без умањења општости претпоставимо да се у Y налази не више значајних чворова од T него у X. Јасно, тада се у Y налазе највише три значајна чвора од T. Претпоставимо прво да се у Y налазе тачно три значајна чвора t_1, t_2, t_3 од T (преостала три значајна чвора се налазе у X). Имамо две могућности: (1) скуп $\{t_1, t_2, t_3\}$ одговара једној страни бипартиције графа $K_{3,3}$; (2) два чвора, без умањења општости t_1 и t_2, се налазе на једној, а t_3 на другој страни бипартиције. Посматрајмо путеве у T од t_1, t_2, t_3 до преосталих значајних чворова графа T. Ових путева има 9 (у случају (1)) или 5 (у случају (2)), сваки од њих мора садржати један од чворова x, y или z_1, и од чворова x, y и z_1 једино z_1 може бити садржан у више од једном од ових путева (јер x и y нису значајни чворови). Ово је очигледно немогуће. Размотримо сада случај када се у Y налазе тачно два значајна чвор t_1 и t_2 од T. Опет имамо две могућности: (1') чворови t_1 и t_2 налазе се на истој страни бипартиције графа $K_{3,3}$; (2') чворови t_1 и t_2 налазе се на различитим странама бипартиције графа $K_{3,3}$. Слично као у претходном делу, у T од t_1 и t_2 до преосталих значајних чворова графа T постоји 6 путева (у случају (1')) или 4 пута (у случају (2')), а сваки од њих мора садржати x, y или z_1. Приметимо да ако два од ових путева садрже z_1, тада барем један од њих мора садржати x или y (поред z_1), тј. описаних путева има највише 5 и (1') није могуће. Нека зато важи (2'), тј. нека се чворови t_1 и t_2 налазе на различитим странама бипартиције графа $K_{3,3}$. Тада, сваки од описаних путева пролази кроз највише један од чворова x, y и z_1, јер је у супротном неки чвор $v \in \{x, y, z_1\}$ значајан у T, и у T постоји пут од v до t_1 и од v до t_2, што није могуће јер се t_1 и t_2 налазе на различитим странама бипартиције графа $K_{3,3}$. Дакле, ни (2') није могуће. Претпоставимо сада да се у Y налази тачно један значајан чвор t од T. У графу T од чвора t до преосталих значајних чворова графа T постоје 3 пут и сваки од њих садржи тачно један од чорова x, y и z_1. Нека је G_1'' граф добијен од графа G_1 додавањем чвора t' и грана $t'x, t'y, t'z_1$. По начину избора чвора z_1 закључујемо да је граф G_1'' планаран (довољно је у планарно утапање $\widetilde{G}_1$ додати чвор t' унутар области f_1 и затим уцртати гране $t'x$, $t'y$ и $t'z_1$). Међутим, ако је T'' граф добијен од T заменом путева од t до x, y и z_1 са гранама $t'x$, $t'y$ и $t'z_1$, тада је T'' један K_5-тополошки минор који је садржан у G_1'', што је контрадикција (са Тврђењем 8.2). Случај када у Y нема значајних чорова разматрамо као у претходном делу доказа. □

На овај начин доказали смо главни резултат овог поглавља.

Теорема 9.2 (Куратовски 1930) *Граф $G = (V, E)$ је планаран ако и само ако не садржи $K_{3,3}$- и K_5-тополошки минор.*

Доказ. ($\Rightarrow$:) Ова импликација следи из Последице 8.2, Последице 8.3 и Тврђења 8.1.

($\Leftarrow$:) По Леми 9.1 граф G не садржи $K_{3,3}$- и K_5-минор као подграф. Нека је G' E-максималан граф који не садржи $K_{3,3}$- и K_5-минор као подграф и чији је G подграф (дакле, G' је добијен додавањем грана у G). Јасно, ако докажемо да је G' планаран, тада је и G планаран. По Леми 9.4 граф G' је 3-повезан (или је $|V| = 3$, а тада тврђење очигледно важи), па је по Теореми 9.1 граф G' планаран. □

[11]Идеја доказа је иста, само је потребно бити пажљивији, јер треба размотрити више случајева.

Предавање 10

Клике и независни скупови

У овом поглављу пажљивије ћемо размотрити графове који не садрже одређене комплетне графове и независне скупове.

Прво ћемо разматрати графове који не садрже комплетан граф K_{r+1}, за неко $r \in \mathbb{N}$. Јасно, сваки овакав граф G (са $n \geqslant r+1$ чворова) не може имати „превише” грана. Наредна теорема даје (најбоље) горње ограничење за број грана графа G (у зависности од n).

Нека је $r \in \mathbb{N}$. За граф $G = (V, E)$ кажемо да је r-*партитиван* ако постоји партиција скупа V на непразне скупове $V_1, V_2, \ldots, V_r$, такве да за свако $xy \in E$ важи $x \in V_i$ и $y \in V_j$, за неке различите $i, j \in \{1, 2, \ldots, r\}$. Овај граф је *комплетан* k-*партитиван* ако важи: $xy \in E$ ако и само ако је $x \in V_i$ и $y \in V_j$, за неке различите $i, j \in \{1, 2, \ldots, r\}$. Приметимо да су појмови *2-партитиван* и *бипартитиван* еквивалентни.

Теорема 10.1 (Туран 1941) *Нека је $G = (V, E)$ граф који не садржи K_{r+1}, за неко $r \in \mathbb{N}$. Тада је број грана графа G највише $\left(1 - \dfrac{1}{r}\right) \cdot \dfrac{n^2}{2}$, где је $n = |V|$.*

Доказ. Нека је $G_n = (V_n, E_n)$ граф са n чворова који не садржи K_{r+1} и који има максималан број грана. Докажимо прво следећа два помоћна тврђења.

Тврдња 1. Ако је G_n r-партитиван граф са партицијом $(V_1, V_2, \ldots, V_r)$, тада је G_n комплетан r-партитиван граф и важи $|V_i| - |V_j| \leqslant 1$, за све $1 \leqslant i, j \leqslant r$.

Доказ Тврдње 1. Како G_n има максималан број грана, то је G_n комплетан r-партитиван граф. Докажимо и други део тврђења. Претпоставимо супротно, тј. да, без умањења општости, важи $|V_1| - |V_2| \geqslant 2$. Нека је $v \in V_1$ и $G'_n = (V_n, E'_n)$ комплетан r-партитиван граф задат партицијом $V_1 \setminus \{v\}, V_2 \cup \{v\}, V_3, \ldots, V_r$. Приметимо да је $E_n \setminus E'_n = \{vv'' : v'' \in V_2\}$ и $E'_n \setminus E_n = \{vv' : v' \in V_1 \setminus \{v\}\}$, па је $|E'_n| - |E_n| = |E'_n \setminus E_n| - |E_n \setminus E'_n| = |V_1 \setminus \{v\}| - |V_2| \geqslant 1$, тј. G'_n има више грана од G_n, што је контрадикција. Овим је Тврдња 1 доказана.

Тврдња 2. Нека је $H = (V, E)$ произвољан граф који не садржи K_{r+1}. Тада постоји комплетан r-партитиван граф $T = (V, E_T)$ такав да је $|E_T| \geqslant |E|$.

Доказ Тврдње 2. Доказ изводимо индукцијом по r. За $r = 1$ тврђење тривијално важи (тада је $E = \emptyset$). Претпоставимо зато да тврђење важи за све $r - 1 \geq 1$ и докажимо га за r и граф H.

Нека је $v \in V$ чвор највећег степена у H и $N(v)$ (као и обично) скуп суседа од v у H. Како H не садржи K_{r+1}, то граф индукован са $N(v)$ не садржи K_r (јер су сви чворови овог графа спојени са v). Дакле, по индуктивној претпоставци постоји комплетан $(r-1)$-партитиван граф $T' = (N(v), E')$ такав да је $|E'| \geqslant |E(N(v))|$, где је $E(N(v))$ скуп грана графа индукованог са $N(v)$ (у H). Нека је $S = V \setminus N(v)$ и нека је $T = (V, E_T)$ комплетан r-партитиван граф чија се партиција састоји од $(r-1)$-партиције скупа $N(v)$ (тачније одговарајућих $r-1$ скупова) и скупа S. Тада важи (присетимо се да је степен сваког чвора u графа H, у ознаци $\deg(u)$, највише $|N(v)|$)

$$|E_T| = |E'| + |N(v)| \cdot |S| \geqslant |E(N(v))| + \sum_{u \in S} \deg(u).$$

Како су у $\sum_{u \in S} \deg(u)$ све гране графа H које имају барем један чвор у S бројане барем једном[1], то је $|E(N(v))| + \sum_{u \in S} \deg(u) \geqslant |E|$. Овим је доказ Тврдње 2 завршен.

[1] Гране чија су оба краја у S су бројане два пута.

Вратимо се на доказ теореме. Нека је $n = kr + s$, где је $0 \leqslant s < r$. Из претходне две тврдње закључујемо да је G_n комплетан r-партитиван граф са партицијом $(V_1, V_2, \ldots, V_r)$, при чему $|V_1| = |V_2| = \ldots = |V_s| = k+1$ и $|V_{s+1}| = |V_{s+2}| = \ldots = |V_r| = k$. Тада је

$$\begin{aligned}
|E_n| &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant r} |V_i|\cdot|V_j| = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant s} |V_i|\cdot|V_j| + \sum_{s+1\leqslant i<j\leqslant r} |V_i|\cdot|V_j| + \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant s\\ s+1\leqslant j\leqslant r}} |V_i|\cdot|V_j| \\
&= \binom{s}{2}(k+1)^2 + \binom{r-s}{2}k^2 + s(r-s)(k+1)k \\
&= \frac{n^2(r-1)}{2r} + \frac{s(s-r)}{2r} \qquad \left[\text{коришћењем } k = \frac{n-s}{r}\right] \\
&\leqslant \frac{n^2(r-1)}{2r},
\end{aligned}$$

чиме је доказ завршен. □

У претходној теореми доказано је и више, тј. одређен је јединствен (до на изоморфизам) граф који има n чворова не садржи K_{r+1} и има максималан број грана. То је управо граф G_n (погледати последњи пасус претходног доказа), који се још назива и *Туранов граф* и обележава са $T_{n,r}$. Приметимо да $T_{n,r}$ има тачно $\dfrac{n^2(r-1)}{2r} + \dfrac{s(s-r)}{2r}$ грана.

Као илустрацију примене Туранове теореме доказаћемо следеће тврђење.

Тврђење 10.1 *Нека је S скуп који се састоји од n тачака у равни, чији је дијаметар[2] 1. Тада је број парова тачака из S чије је растојање веће од $1/\sqrt{2}$ највише $\left[\dfrac{n^2}{3}\right]$.*

Доказ. Нека је $S = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Посматрајмо граф $G = (V, E)$, такав да је $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, а $v_iv_j \in E$ ако и само ако је $|A_iA_j| > 1/\sqrt{2}$. Доказаћемо да G не садржи K_4.

Претпоставимо супротно, тј. да за неке $v_i, v_j, v_k, v_l \in V$ скуп $\{v_i, v_j, v_k, v_l\}$ индукује комплетан граф са 4 чвора. Тада су сваке две тачке из скупа $T = \{A_i, A_j, A_k, A_l\}$ на растојању већем од $1/\sqrt{2}$. Довољно је размотрити следећа три случаја (у њима посматрамо конвексан омотач скупа T).

1° Тачке из T образују конвексан четвороугао. Барем један од углова овог четвороугла је не мањи од 90° (не могу сва четири угла бити мања од 90°, јер је збир углова четвороугла 360°), па без умањења општости можемо претпоставити да је $\sphericalangle A_jA_iA_l \geqslant 90°$. Тада је по косинусној теореми

$$|A_jA_l|^2 = |A_iA_j|^2 + |A_iA_l|^2 - 2\cdot|A_iA_j|\cdot|A_iA_l|\cdot\cos\sphericalangle A_jA_iA_l \geqslant |A_iA_j|^2 + |A_iA_l|^2 > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

што је контрадикција.

2° Неке три тачке из T образују троугао, а четврта се налази унутар овог троугла. Нека је без умањења општости $A_iA_jA_k$ овај троугао. Тада је барем један од углова $A_iA_lA_j$, $A_jA_lA_k$, $A_kA_lA_i$ не мањи од 120° (јер је збир ова три угла једнак 360°). Нека је без умањења општости $\sphericalangle A_iA_lA_j \geqslant 120°$. Тада је по косинусној теореми

$$|A_iA_j|^2 = |A_iA_l|^2 + |A_jA_l|^2 - 2\cdot|A_iA_l|\cdot|A_jA_l|\cdot\cos\sphericalangle A_iA_lA_j \geqslant |A_iA_j|^2 + |A_iA_l|^2 + |A_iA_l|\cdot|A_jA_l| > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

што је контрадикција.

3° Тачке A_i, A_j, A_k и A_l су колинеарне. Ако је, без умањења општости, распоред ових тачака $A_i - A_j - A_k - A_l$, тада важи

$$|A_iA_l| = |A_iA_j| + |A_jA_k| + |A_kA_l| > \frac{3}{\sqrt{2}},$$

што је контрадикција.

Дакле, G је граф који не садржи K_4 и има n чворова. По Теореми 10.1, граф G има не више од $\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{n^2}{2} = \dfrac{n^2}{3}$ грана, тј. не више од $\left[\dfrac{n^2}{3}\right]$ грана (јер је број грана цео број). □

Није тешко доказати да, за свако n, у равни постоји скуп S од n тачака који је дијаметра 1 и такав да је број парова тачака из S чије је растојање веће од $1/\sqrt{2}$ једнак $\left[\dfrac{n^2}{3}\right]$.

[2] Дијаметар (коначног) скупа је највеће растојање неке две тачке тог скупа.

10.1 Ремзијеви бројеви

Нека су k и s дати природни бројеви. Интуитивно је јасно да за „довољно велико” n сваки граф са n чворова мора садржати комплетан граф са k чворова или независан скуп са s чворова. Циљ овог поглавља је да докажемо ово тврђење, као и да дамо неке процене о томе колико велик број n мора бити.

Дефиниција 10.1 *Нека су k и s дати природни бројеви. Ремзијев број $R(k,s)$ је најмањи природан број такав да сваки граф са барем $R(k,s)$ чворова садржи комплетан граф са k чворова или независан скуп са s чворова.*

Није тешко проверити[3] да за све $k,s \in \mathbb{N}$ важи

$$R(k,1)=1, \quad R(1,s)=1, \quad R(k,2)=k, \quad R(2,s)=s.$$

Из наредне теореме следиће да су Ремзијеви бројеви добро дефинисани (тј. да су коначни) за све $k,s \in \mathbb{N}$.

Теорема 10.2 *Нека је $k,s \geqslant 2$. Тада важи:*

(1) $R(k,s) \leqslant R(k-1,s)+R(k,s-1)$*;*

(2) $R(k,s) \leqslant \binom{k+s-2}{k-1}$*;*

(3) ако су $R(k-1,s)$ и $R(k,s-1)$ парни бројеви, тада је $R(k,s) \leqslant R(k-1,s)+R(k,s-1)-1$.

Доказ. (1) Претпоставимо супротно, тј. да постоји граф $G=(V,E)$ са $R(k-1,s)+R(k,s-1)$ чворова који не садржи комплетан граф са k чворова нити независан скуп са s чворова. Нека је v (произвољан) чвор графа G.

Посматрајмо подграф G' графа G који је индукован скупом $N(v)$. Како је сваки чвор графа G' спојен са v, то G' не садржи комплетан граф са $k-1$ чворова (јер у супротном G садржи комплетан граф са k чворова), а очигледно G' не садржи независан скуп са s чворова. Дакле, G' има мање од $R(k-1,s)$ чворова, па је $|N(v)| \leqslant R(k-1,s)-1$.

Посматрајмо сада подграф G'' графа G који је индукован скупом $V \setminus (N(v) \cup \{v\})$. Како ниједан чвор графа G'' није спојен са v, то G'' не садржи независан скуп са $s-1$ чворова (јер у супротном G садржи независан скуп са s чворова), а очигледно G'' не садржи комплетан граф са k чворова. Дакле, G'' има мање од $R(k,s-1)$ чворова, па је $|V \setminus (N(v) \cup \{v\})| \leqslant R(k,s-1)-1$.

Коначно, $|V| = |\{v\} \cup N(v) \cup (V \setminus (N(v) \cup \{v\}))| = 1+|N(v)|+|V \setminus (N(v) \cup \{v\})| \leqslant R(k-1,s)+R(k,s-1)-1$, што је контрадикција.

(2) Индукцијом по $k+s$ доказујемо да дата неједнакост важи за све $k,s \in \mathbb{N}$. Ако је $k=1$ или $s=1$, тада је $\binom{k+s-2}{k-1}=1$ и $R(k,s)=1$, па (не)једнакост важи. Претпоставимо зато да је $k,s \geqslant 2$ и да неједнакост важи за све $R(k',s')$ такве да је $k'+s' \leqslant k+s-1$. Тада је по делу (1)

$$R(k,s) \leqslant R(k-1,s)+R(k,s-1) \leqslant \binom{k-1+s-2}{k-2}+\binom{k+s-1-2}{k-1}, \qquad [\text{ по ИХ }]$$

па како за све $a,b \in \mathbb{N}_0$ важи[4] $\binom{a}{b}+\binom{a}{b+1}=\binom{a+1}{b+1}$, то је $\binom{k+s-3}{k-2}+\binom{k+s-3}{k-1}=\binom{k+s-2}{k-1}$, чиме је доказ овог дела завршен.

(3) Претпоставимо супротно, тј. да постоји граф $G=(V,E)$ са $R(k-1,s)+R(k,s-1)-1$ чворова који не садржи комплетан граф са k чворова нити независан скуп са s чворова. Како граф G има непарно чворова, а по Последици 1.1 број чворова непарног степена сваког графа је паран, то G садржи чвор v који је парног степена. Доказ настављамо[5] као у делу (1).

Као у делу (1) доказујемо да важи $|N(v)| \leqslant R(k-1,s)-1$. Међутим, $|N(v)| = \deg(v)$ је паран број, а $R(k-1,s)-1$ непаран, па се претходна неједнакост може поправити, тј. важи $|N(v)| \leqslant R(k-1,s)-2$. Даље, као у делу (1) доказујемо да важи $|V \setminus (N(v) \cup \{v\})| \leqslant R(k,s-1)-1$.

[3] Проверите ово.

[4] Подсетите се доказа овог тврђења.

[5] Пробајте да наставак урадите сами.

Коначно, $|V| = |\{v\} \cup N(v) \cup (V \setminus (N(v) \cup \{v\}))| = 1 + |N(v)| + |V \setminus (N(v) \cup \{v\})| \leqslant R(k-1,s) + R(k,s-1) - 2$, што је контрадикција. □

Коришћењем претходног тврђења можемо одредити $R(k,s)$ за мале вредности бројева $k, s \in \mathbb{N}$. По (1), важи $R(3,3) \leqslant R(2,3) + R(3,2) = 6$, а како је $R(3,3) > 5$ (посматрањем графа C_5), закључујемо да је $R(3,3) = 6$. Даље, како су $R(2,4)$ и $R(3,3)$ парни бројеви, то по (3) важи $R(3,4) \leqslant R(2,4) + R(3,3) - 1 = 9$. Није тешко конструисати граф са 8 чворова који не садржи комплетан граф са 3 чвора нити независан скуп са 4 чвора, па је $R(3,4) = 9$. Слично се може доказати да је $R(3,5) = 14$ и $R(4,4) = 18$.

Неједнакости дате у Теореми 10.2 често нису довољно добре. Тачније, вредности бројева $R(k,l)$ познате су за веома мало парова (k,l), таквих да је $k, l \geqslant 3$.

Ово поглавље завршавамо доњим ограничењем бројева $R(k,k)$.

Теорема 10.3 *За* $k \geqslant 2$ *важи* $R(k,k) \geqslant 2^{k/2}$.

Доказ. Тврђење важи за $k = 2$, па можемо претпоставити да је $k \geqslant 3$.

Нека је n природан број, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ скуп са n чворова и $\mathcal{G}_n$ скуп свих графова чији је скуп чворова једнак V (посматрамо све графове, тј. изоморфне графове посматрамо као различите). Сваки граф из $\mathcal{G}_n$ добијамо тако што за све $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$, одлучимо да ли ће $v_i v_j$ бити грана или не, тј. за све овакве i и j имамо две могућности. Дакле,

$$|\mathcal{G}_n| = 2^{\binom{n}{2}}.$$

Нека је са $\mathcal{G}_n^k$ означен скуп графова из $\mathcal{G}_n$ који садрже комплетан граф са k чворова. Тада важи следеће (грубо) ограничење

$$|\mathcal{G}_n^k| \leqslant \binom{n}{k} \cdot 2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2}}$$

(прво смо „одабрали" којих k чворова ће чинити комплетан граф – то можемо урадити на $\binom{n}{k}$; затим смо за сваки од преосталих $\binom{n}{2} - \binom{k}{2}$ парова (i,j), $i < j$, одабрали да ли ће $v_i v_j$ бити грана или не).

Нека је n произвољан број мањи од $2^{k/2}$. Тада важи

$$\frac{|\mathcal{G}_n^k|}{|\mathcal{G}_n|} \leqslant \frac{\binom{n}{k} 2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2}}}{2^{\binom{n}{2}}} = \frac{\binom{n}{k}}{2^{\binom{k}{2}}} = \frac{\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}}{2^{\binom{k}{2}}} < \frac{\frac{n^k}{k!}}{2^{\binom{k}{2}}} < \frac{\frac{2^{k^2/2}}{k!}}{2^{\binom{k}{2}}} = \frac{2^{k/2}}{k!}.$$

Индукцијом није тешко доказати да за $k \geqslant 2$ важи $2^{1+k/2} < k!$, па је

$$\frac{|\mathcal{G}_n^k|}{|\mathcal{G}_n|} < \frac{1}{2}.$$

Дакле, мање од половина графова из $\mathcal{G}_n$ садржи комплетан граф са k чворова. Слично, можемо доказати да мање од половина графова из $\mathcal{G}_n$ садржи независан скуп са k чворова, па постоји граф са n чворова (из $\mathcal{G}_n$) који не садржи комплетан граф са k чворова нити независан скуп са k чворова. Самим тим, $n < R(k,k)$, па је $R(k,k) \geqslant 2^{k/2}$. □