

Напредни концепти елементарне математике, пример испита

1. а) [7] У скупу $\mathbb{R}$ решити једначину $|||x - 1| - 1| - 1| - 1| = 0$;
б) [7] Израчунати $\arcsin\left(\cos\frac{42\pi}{11}\right)$.
2. У скупу $\mathbb{R}$ решити неједначину:
а) [7] $x(2 + \sqrt{12 - 2x - x^2}) \leq x^2$; б) [7] $2\sin^3 x + 3\cos^2 x + \sin x < 3$.
3. Одредити све $x \in \mathbb{R}$ за које је дефинисан следећи израз:
а) [4] $\ln \log_{\frac{1}{2}} \frac{x-1}{x+1}$; б) [4] $\arcsin \sqrt{x^2 + x - 2}$; в) [4] $\sqrt{\operatorname{ctg}(x - \pi)}$.
4. [12] Скицирати график функције $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ задате се $f(x) = |\sqrt{2}(\sin(x - \frac{\pi}{6}) - \cos(x - \frac{\pi}{6}))|$, за $x \in \mathbb{R}$.
5. [14] Нека су $a_1, a_2, \dots, a_n$ дужине страница неког n -тоугла, а $f(x)$ квадратна функција таква да је $f(a_1) = f(a_2 + a_3 + \dots + a_n)$. Доказати да важи следеће: ако произвољно изаберемо k ($1 \leq k \leq n - 1$) страница овог n -тоугла, суму дужина тих страница означимо са A , а суму дужина преосталих страница са B , тада је $f(A) = f(B)$.
6. [14] Одредити све $x, y \in (0, \frac{\pi}{2})$ такве да важи $\sin x + \sin y = \sin(xy)$.
7. [14] Нека је $f(x)$ полином непарног степена са реалним коефицијентима који има n различитих реалних нула. Доказати да полином $f(f(x))$ има барем n различитих реалних нула.
8. а) [6] Нека је $n \in \mathbb{N}$. У скупу $\mathbb{C}$ одредити сва решења једначине $z^n = 1$.
б) [7] Доказати да за $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ важи $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$.