

Напредни концепти елементарне математике, пример испита

1. У скупу $\mathbb{R}$ решити једначину:

а) [7] $(4 \cos^2 x + 4 \cos x - 3) \sqrt{5 \sin x} = 0$; б) [7] $1 + \log_x \frac{4-x}{10} = (\log_{10} x^2 - 1) \log_x 10$.

2. У скупу $\mathbb{R}$ решити неједначину:

а) [7] $\sqrt{x^2 + 2\sqrt{x^2 - 1}} - |x + 2| < 2$; б) [7] $\frac{5^{x+1} + 2}{5^x - 1} - \frac{1}{5^x - 25} \geq 5$.

3. Одредити све $x \in \mathbb{R}$ за које је дефинисан следећи израз:

а) [4] $\ln \left(\frac{1}{2 \cos^2 x} - \operatorname{tg} x \right)$; б) [4] $\cos \sqrt{e^{2x} - e^x + 1}$; в) [4] $\frac{5-x}{\log_2(7x+3)}$.

4. [12] Израчунати $\arccos \left(\sin \frac{32\pi}{7} \right)$.

5. [13] У скупу $\mathbb{R}$ решити једначину: $2^{x^2+x} + \log_2 x = 2^{x+1}$.

6. [15] Одредити све $a, b, c \in \mathbb{C}$ такве да је $|a| = |b| = |c|$ и $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + 1 = 0$.

7. [15] Нека је $f(x)$ полином са реалним коефицијентима степена 2024. Ако је познато да полином $f(x^2 - 1)$ има 3410 различитих реалних корена, а полином $f(1 - x^2)$ има 2640 различитих реалних корена, доказати да се нека два реална корена полинома $f(x)$ разликују за не више од 0,002.

8. а) [6] Доказати да за позитивне реалне бројеве a, b, c различите од 1 важи једнакост $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.

б) [6] Нека је $P(x) \in \mathbb{R}[X]$ и $\alpha \in \mathbb{C}$ једна његова нула. Доказати да је и $\bar{\alpha}$ нула полинома $P(x)$.