Напредни концепти елементарне математике, Септембар 1, 2023/2024. *29. август 2024.*

1. У скупу $\mathbb{R}$ решити једначину:

а) [7] $3\mathrm{tg}x(1-\sin x)=\cos x$; б) [7] $\log_2\log_{\frac{1}{3}}\frac{|x-2|}{x+4}=1$.

2. У скупу $\mathbb{R}$ решити неједначину:

а) [7] $\frac{|1-x|}{1-|x|}<\frac{1+|x|}{|1+x|}$; б) [7] $\frac{(x^2-4)(5^{2x}-6\cdot 5^{x+1}+5^3)}{\sqrt{9-3^{x^2-3x+2}}}\leq 0$.

3. Одредити све $x\in\mathbb{R}$ за које је дефинисан следећи израз:

а) [4] $f(x)=\mathrm{arctg}\sqrt{1-\mathrm{ctg}x+\frac{1}{\sin x}}$; б) [4] $f(x)=\ln\log_3 2^{x^2-5x-14}$; в) [4] $f(x)=\sqrt[3]{e^{2x}+5e^x}$.

4. [12] Израчунати $\arccos\left(\sin\frac{29\pi}{9}\right)$.

5. [14] Нека су $a_1,a_2,\ldots,a_n$ дужине страница неког n-тоугла, а $f(x)$ квадратна функција таква да је $f(a_1)=f(a_2+a_3+\cdots+a_n)$. Доказати да важи следеће: ако произвољно изаберемо k $(1\leqslant k\leqslant n-1)$ страница овог n-тоугла, суму дужина тих страница означимо са A, а суму дужина преосталих страница са B, тада је $f(A)=f(B)$.

6. [14] Одредити све $x,y\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ такве да важи $\sin x+\sin y=\sin(xy)$.

7. [14] Нека је $f(x)$ полином непарног степена са реалним коефицијентима који има n различитих реалних нула. Доказати да полином $f(f(x))$ има барем n различитих реалних нула.

8. [13] Доказати тежинску неједнакост између средина.

Напредни концепти елементарне математике, Септембар 1, 2023/2024. *29. август 2024.*

1. У скупу $\mathbb{R}$ решити једначину:

а) [7] $3\mathrm{tg}x(1-\sin x)=\cos x$; б) [7] $\log_2\log_{\frac{1}{3}}\frac{|x-2|}{x+4}=1$.

2. У скупу $\mathbb{R}$ решити неједначину:

а) [7] $\frac{|1-x|}{1-|x|}<\frac{1+|x|}{|1+x|}$; б) [7] $\frac{(x^2-4)(5^{2x}-6\cdot 5^{x+1}+5^3)}{\sqrt{9-3^{x^2-3x+2}}}\leq 0$.

3. Одредити све $x\in\mathbb{R}$ за које је дефинисан следећи израз:

а) [4] $f(x)=\mathrm{arctg}\sqrt{1-\mathrm{ctg}x+\frac{1}{\sin x}}$; б) [4] $f(x)=\ln\log_3 2^{x^2-5x-14}$; в) [4] $f(x)=\sqrt[3]{e^{2x}+5e^x}$.

4. [12] Израчунати $\arccos\left(\sin\frac{29\pi}{9}\right)$.

5. [14] Нека су $a_1,a_2,\ldots,a_n$ дужине страница неког n-тоугла, а $f(x)$ квадратна функција таква да је $f(a_1)=f(a_2+a_3+\cdots+a_n)$. Доказати да важи следеће: ако произвољно изаберемо k $(1\leqslant k\leqslant n-1)$ страница овог n-тоугла, суму дужина тих страница означимо са A, а суму дужина преосталих страница са B, тада је $f(A)=f(B)$.

6. [14] Одредити све $x,y\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ такве да важи $\sin x+\sin y=\sin(xy)$.

7. [14] Нека је $f(x)$ полином непарног степена са реалним коефицијентима који има n различитих реалних нула. Доказати да полином $f(f(x))$ има барем n различитих реалних нула.

8. [13] Доказати тежинску неједнакост између средина.