Напредни концепти елементарне математике, Јануар 1, 2023/2024. *19. јануар 2024.*

1. У скупу $\mathbb{R}$ решити једначину:

а) [7] $4 \cdot 7^{1-x} - 7^{1+x} = 21$; б) [7] $\dfrac{|x-2|}{x+1} - \left|\dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2}\right| = 1$.

2. У скупу $\mathbb{R}$ решити неједначину:

а) [7] $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} > \dfrac{x}{2}$; б) [7] $\log_5 \sqrt{2x-1} \cdot \log_x 5 > 1$.

3. Одредити све $x \in \mathbb{R}$ за које је дефинисан следећи израз:

а) [4] $\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{\ln(3x-5)}$; б) [4] $\sin\left(\arccos\frac{x}{x+1}\right)$; в) [4] $\operatorname{arctg}\left(e^{\sqrt{\cos x+2}}\right)$.

4. [12] Скицирати график функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задате са $f(x) = \left|\sin x - \sqrt{3}\cos x\right| + \frac{1}{2}$.

5. [14] Нека су $f(x), g(x), h(x)$ квадратне функције које немају реалне нуле. Ако све три функције имају исти коефицијент уз x^2 и сваке две различит коефицијент уз x, доказати да постоји реалан број c такав да систем једначина

$$f(x) + cg(x) = 0, \qquad f(x) + ch(x) = 0$$

има барем једно реално решење.

6. [14] Нека је $f(x)$ полином са реалним коефицијентима степена 2024. Ако је познато да полином $f(x^2-1)$ има 3410 различитих реалних корена, а полином $f(1-x^2)$ има 2640 различитих реалних корена, доказати да се нека два реална корена полинома $f(x)$ разликују за не више од $0,002$.

7. [14] Доказати да за све позитивне реалне бројеве a, b, c важи: $3(a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}) \leq 4(a+b+c)$.

8. а) [6] Нека је $n \in \mathbb{N}$. У скупу $\mathbb{C}$ одредити сва решења једначине $z^n = 1$.

б) [7] Нека је $P(x) \in \mathbb{Z}[X]$ и $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq b$. Доказати да $a-b$ дели $P(a) - P(b)$.

Напредни концепти елементарне математике, Јануар 1, 2023/2024. *19. јануар 2024.*

1. У скупу $\mathbb{R}$ решити једначину:

а) [7] $4 \cdot 7^{1-x} - 7^{1+x} = 21$; б) [7] $\dfrac{|x-2|}{x+1} - \left|\dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2}\right| = 1$.

2. У скупу $\mathbb{R}$ решити неједначину:

а) [7] $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} > \dfrac{x}{2}$; б) [7] $\log_5 \sqrt{2x-1} \cdot \log_x 5 > 1$.

3. Одредити све $x \in \mathbb{R}$ за које је дефинисан следећи израз:

а) [4] $\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{\ln(3x-5)}$; б) [4] $\sin\left(\arccos\frac{x}{x+1}\right)$; в) [4] $\operatorname{arctg}\left(e^{\sqrt{\cos x+2}}\right)$.

4. [12] Скицирати график функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задате са $f(x) = \left|\sin x - \sqrt{3}\cos x\right| + \frac{1}{2}$.

5. [14] Нека су $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ квадратне функције које немају реалне нуле. Ако све три функције имају исти коефицијент уз x^2 и сваке две различит коефицијент уз x, доказати да постоји реалан број c такав да систем једначина

$$f(x) + cg(x) = 0, \qquad f(x) + ch(x) = 0$$

има барем једно реално решење.

6. [14] Нека је $f(x)$ полином са реалним коефицијентима степена 2024. Ако је познато да полином $f(x^2-1)$ има 3410 различитих реалних корена, а полином $f(1-x^2)$ има 2640 различитих реалних корена, доказати да се нека два реална корена полинома $f(x)$ разликују за не више од $0,002$.

7. [14] Доказати да за све позитивне реалне бројеве a, b, c важи: $3(a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}) \leq 4(a+b+c)$.

8. а) [6] Нека је $n \in \mathbb{N}$. У скупу $\mathbb{C}$ одредити сва решења једначине $z^n = 1$.

б) [7] Нека је $P(x) \in \mathbb{Z}[X]$ и $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq b$. Доказати да $a-b$ дели $P(a) - P(b)$.