4.19 Одредити остатак при дељењу броја 17^{2012} са 7.

4.20 Решити једначину $15x \equiv_{33} 18$.

4.21 Решити систем конгруенција: $x \equiv_7 1 \quad x \equiv_9 4 \quad x \equiv_5 3$.

4.22 Решити систем конгруенција: $x \equiv_6 5 \quad x \equiv_8 3$.

4.23 Одредити последње две цифре броја 2011^{4043}.

4.24 Доказати да је број $3333^{7777} + 7777^{3333}$ дељив са 10.

4.25 Одредити остатак при дељењу броја $5^{5^{5^5}}$ са 17.

4.26 Одредити остатак при дељењу 1943^{1942} са 5, 7 и 35.

4.27 Одредити остатак при дељењу броја $(12!)^2 + 22^{19^{12}}$ са 143.

4.28 Одредити остатак при дељењу броја $9! \cdot 27!$ са 333.

4.29 Ако је $p \geq 11$ прост број, доказати да $504 \mid p^6 - 1$.

4.30 Нека је $p > 2$ прост број. Ако су скупови $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ и $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_p\}$ различити потпуни системи остатака по модулу p, доказати да скуп $\{a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_pb_p\}$ није потпун систем остатака по модулу p.

С обзиром на то да је $12 \cdot 11 \cdot 10! = 12! \equiv_{13} 12$ и $\text{nzd}(12, 13) = 1$, на основу тврђења 4.57 закључујемо да је $11 \cdot 10! \equiv_{13} 1$. Даље је $11 \cdot 10! \equiv_{13} 1 \equiv_{13} 66 = 11 \cdot 6$. Како је $\text{nzd}(11, 13) = 1$, још једном применом тврђења 4.57 добијамо да је $10! \equiv_{13} 6$. Дакле,

$$a \equiv_{13} 12 \cdot 6 \equiv_{13} 7.$$

Тражени остатак је 7.

4.19 Приметимо да је $17 \equiv_7 3$, па је тражени остатак једнак остатку броја 3^{2012} при дељењу са 7. На основу Мале Фермаове теореме важи да је $3^6 \equiv_7 1$. Према томе,

$$17^{2012} \equiv_7 3^{2012} \equiv_7 3^{335 \cdot 6 + 2} \equiv_7 (3^6)^{335} \cdot 3^2 \equiv_7 1^{335} \cdot 9 \equiv_7 1 \cdot 2 \equiv_7 2,$$

па је тражени остатак 2.

4.20 Како је $\text{nzd}(15, 33) = 3$ и $3 \mid 18$ једначина има решење. Решење једначине $5x \equiv_{11} 6$ је $x \equiv_{11} 10$, па су решења полазне једначине $x \equiv_{33} 10$, $x \equiv_{33} 21$ и $x \equiv_{33} 32$.

4.21 На основу напомене 4.65 закључујемо да систем има решење. Из прве једначине следи да је $x = 7y + 1$, за $y \in \mathbb{Z}$. Заменом у другу једначину добијамо

$$7y + 1 \equiv_9 4.$$

Једно решење ове једначине је 3, па је опште решење $y = 3 + 9z$, за $z \in \mathbb{Z}$. Тада је $x = 7y + 1 = 7(3 + 9z) + 1 = 22 + 63z$. Заменом ове једнакости у трећу једначину добијамо $22 + 63z \equiv_5 3$. Како је $22 \equiv_5 2$ и $63 \equiv_5 3$, једначина је еквивалентна са $2 + 3z \equiv_5 3$, то јест

$$3z \equiv_5 1.$$

Опште решење ове једначине је $2 + 5t$, за $t \in \mathbb{Z}$. Добили смо да је

$$x = 22 + 63z = 22 + 63(2 + 5t) = 148 + 315t,$$

што је решење полазног система.

4.22 Како $\text{nzd}(6, 8) \mid (5 - 3)$, према Кинеској теореми о остацима систем има решење. На основу прве једначине следи $x = 5 + 6y$, за неко $y \in \mathbb{Z}$. Заменом претходне једнакости у другу једначину добијамо да је $6y \equiv_8 6$ (приметимо да то није еквивалентно $y \equiv_8 1$ јер је $\text{nzd}(6, 8) \neq 1$). Решавање једначине $6y \equiv_8 6$ своди се на решавање једначине $3y \equiv_4 3$. Како је $\text{nzd}(3, 4) = 1$, последња једначина еквивалентна је једначини

$$y \equiv_4 1,$$

чије је опште решење $y = 1 + 4z$, за $z \in \mathbb{Z}$. Дакле, опште решење полазног система је

$$x = 5 + 6y = 5 + 6(1 + 4z) = 11 + 24z, \quad \text{где је } z \in \mathbb{Z}.$$

Приметимо да је $\text{nzs}(6, 8) = 24$, па је добијени резултат у сагласности са Кинеском теоремом о остацима.

4.23 Последње две цифре датог броја знамо ако нађемо његов остатак при дељењу са 100. Како је $2011 \equiv_{100} 11$, то је $2011^{4043} \equiv_{100} 11^{4043}$. Бројеви 11 и 100 су узајамно прости и $\varphi(100) = \varphi(2^2 \cdot 5^2) = \varphi(2^2)\varphi(5^2) = 2(2-1) \cdot 5(5-1) = 40$, па је према Ојлеровој теореми (теорема 4.73) следи да је

$$11^{40} \equiv_{100} 1.$$

Даље треба одредити остатак при дељењу броја 4043 са 40. То је 3, па је $4043 = 40k + 3$, за неко $k \in \mathbb{Z}$. Коначно је

$$2011^{4043} \equiv_{100} 11^{4043} = 11^{40k+3} = (11^{40})^k \cdot 11^3 \equiv_{100} 1 \cdot 121 \cdot 11 \equiv_{100} 21 \cdot 11 \equiv_{100} 31,$$

па су две последње цифре датог броја 3 и 1.

4.24 Треба доказати да је остатак при дељењу датог броја са 10 једнак нули. Одредимо прво остатак при дељењу 3333^{7777} са 10. Како је $3333 \equiv_{10} 3$, важи $3333^{7777} \equiv_{10} 3^{7777}$. На основу Ојлерове теореме, из $\mathrm{nzd}(3,10) = 1$ и $\varphi(10) = 4$ следи да је $3^4 \equiv_{10} 1$. Такође је $7777 \equiv_4 1$, па је $7777 = 4k + 1$, за неко $k \in \mathbb{Z}$. Даље је

$$3333^{7777} \equiv_{10} 3^{7777} = 3^{4k+1} = (3^4)^k \cdot 3^1 \equiv_{10} 3.$$

Сличан је поступак и за други сабирак: $7777^{3333} \equiv_{10} 7^{3333}$. Из $\mathrm{nzd}(7,10) = 1$ следи да је $7^4 \equiv_{10} 1$. Како је и $3333 \equiv_4 1$, важи

$$7777^{3333} \equiv_{10} 7^{3333} = 7^{4l+1} = (7^4)^l \cdot 7^1 \equiv_{10} 7.$$

Сада можемо закључити да је

$$3333^{7777} + 7777^{3333} \equiv_{10} 3 + 7 \equiv_{10} 0.$$

4.25 Како је $\mathrm{nzd}(5,17) = 1$ и $\varphi(17) = 16$, на основу Ојлерове теореме важи $5^{16} \equiv_{17} 1$. Треба одредити остатак при дељењу 5^{5^5} са 16. Важи да је $\mathrm{nzd}(5,16)$ и $\varphi(16) = \varphi(2^4) = 2^3(2-1) = 8$, па још једном применом Ојлерове теореме добијамо да је $5^8 \equiv_{16} 1$. Даље је потребно одредити остатак при дељењу 5^5 са 8. Бројеви 5 и 8 су узајамно прости и $\varphi(8) = \varphi(2^3) = 4$, па је $5^4 \equiv_8 1$. Из последњег израза закључујемо да је

$$5^5 = 5^4 \cdot 5 \equiv_8 1 \cdot 5 \equiv_8 5.$$

Даље је

$$5^{5^5} = 5^{8k+5} = (5^8)^k \cdot 5^5 \equiv_{16} 1 \cdot 5^5 \equiv_{16} 25 \cdot 25 \cdot 5 \equiv_{16} 9 \cdot 9 \cdot 5 \equiv_{16} 81 \cdot 5 \equiv_{16} 1 \cdot 5 \equiv_{16} 5.$$

Вратимо се на почетак:

$$5^{5^{5^5}} = 5^{16l+5} = (5^{16})^l \cdot 5^5 \equiv_{17} 1 \cdot 5^5 \equiv_{17} 25 \cdot 25 \cdot 5 \equiv_{17} 8 \cdot 8 \cdot 5 \equiv_{17} 64 \cdot 5 \equiv_{17} 13 \cdot 5 \equiv_{17} 65 \equiv_{17} 14.$$

Дакле, остатак је број 14.