АНАЛИЗА 1

Домаћи задатак 6: Основне теореме диференцијалног рачуна

1. Наћи диференцијал функције (u и v су диференцијабилне функције):

   (а) $y = \ln|x + \sqrt{x^2+1}|$; (б) $y = \dfrac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}$; (в) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{u}{v}$.

2. Доказати да је:

   (а) $\arcsin x = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ за све $x \in (-1, 1)$;

   (б) $\dfrac{1}{2} \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2} = -\operatorname{arctg} x + C(x)$, за $|x| > 1$, где је $C(x) = \begin{cases} -\pi/2, & x < -1, \\ \pi/2, & x > 1. \end{cases}$

3. Доказати неједнакости:

   (а) $\sin x > x - \dfrac{x^3}{6}$ за $x > 0$; (б) $e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ за $x > 0$;

   (в) $\dfrac{a-b}{a} < \ln \dfrac{a}{b} < \dfrac{a-b}{b}$ за $0 < b < a$.

4. Ако је функција f непрекидна на $[a, b]$, диференцијабилна на (a, b), $ab > 0$, доказати да постоји $c \in (a, b)$ тако да је $\dfrac{1}{a-b} \begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = f(c) - cf'(c)$.

5. Наћи, ако је могуће, следеће лимесе применом Лопиталовог правила:

   (а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x}$; $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin x}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-x}}{x^n}$, $n \in \mathbf{N}$;

   (б) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\operatorname{ctg} x - \dfrac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{1}{\ln(x + \sqrt{1+x^2})} - \dfrac{1}{\ln(1+x)}\right]$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - a^{\sin x}}{x^3}$;

   (в) $\lim\limits_{x\to+0} x^x$; $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x - x}{\ln x - x + 1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x\right)^x$; $\lim\limits_{x\to 1} (2-x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}$.