АНАЛИЗА 1

Домаћи задатак 4: Рачун са малим o. Непрекидност

1. Доказати да важи (у свим релацијама $x \to a$ за неко $a \in \mathbf{R}$:

   (а) $o(cf) = o(f)$ ако је $c = \text{const}$;

   (б) $\dfrac{o(f)}{g} = o\left(\dfrac{f}{g}\right)$ ако је $g(x) \neq 0$;

   (в) $o(o(f)) = o(f)$;

   (г) $o(f + o(f)) = o(f)$.

2. Наћи следеће граничне вредности:

   (а) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x}$ $(\alpha, \beta \in \mathbf{R})$;

   (б) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + x\sin x} - 1}{e^{x^2} - 1}$

   (в) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$;

   (г) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} (x + \sqrt{x^2 + x})$;

   (д) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1}$ $(m, n \in \mathbf{N})$;

   (ђ) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^\alpha x}{x^2}$ $(\alpha \in \mathbf{R})$;

   (е) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1 + \alpha x}\,\sqrt[n]{1 + \beta x} - 1}{x}$ $(m, n \in \mathbf{N},\ \alpha, \beta \in \mathbf{R})$.

3. Испитати непрекидност и врсте тачака прекида следећих функција:

   (а) $f(x) = \dfrac{\sin x}{|x|}$, $f(0) = 1$;

   (б) $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$, $f(0) = 0$;

   (в) $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x-1}}}$, $f(1) = 1$;

   (г) $f(x) = x \ln x^2$, $f(0) = a$;

   (д) $f(x) = 2^{\operatorname{tg} x}$, $f(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 1$;

   (ђ) $f(x) = \sqrt{x} - [\sqrt{x}]$;

   (е) $f(x) = \begin{cases} -2\sin x, & x \leqslant -\pi/2, \\ A\sin x + B, & |x| < \pi/2, \\ \cos x, & x \geqslant \pi/2 \end{cases}$.

4. Да ли квадрат прекидне функције мора бити прекидна функција?