АНАЛИЗА 1

Домаћи задатак 12. Монотони низови. Број e. Услови конвергенције

1. Доказати да конвергирају и наћи граничне вредности низова датих са:

   (а) $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, $n \in \mathbf{N}$;

   (б) $a_1 = x > 0$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\Big(a_n + \dfrac{x}{a_n}\Big)$, $n \in \mathbf{N}$;

   (в) $u_0 = 0$, $u_n = \cos u_{n-1}$, $n \in \mathbf{N}$;

   (г) $x_1 = 0$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{a + x_n}$, $n \in \mathbf{N}$, $(a > 0)$.

2. Доказати неједнакости:

   (а) $\dfrac{1}{n+1} < \ln\Big(1 + \dfrac{1}{n}\Big) < \dfrac{1}{n}$;

   (б) $0 < e - \Big(1 + \dfrac{1}{n}\Big)^n < \dfrac{3}{n}$, $n \in \mathbf{N}$.

3. Наћи граничне вредности:

   (а) $\lim\limits_{n\to\infty} \Big(1 - \dfrac{1}{n}\Big)^n$;

   (б) $\lim\limits_{n\to\infty} \Big(\dfrac{n+1}{n-1}\Big)^n$;

   (в) $\lim\limits_{n\to\infty} \Big(\dfrac{2n+3}{2n+1}\Big)^{n+2}$.

4. Доказати да је:

   (а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^n}{(n!)^2} = 0$;

   (б) $\lim\limits_{n\to\infty} n(e^{1/n} - 1) = 1$.

5. Користећи Кошијев принцип доказати да:

   (а) низ $a_n = \dfrac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \dfrac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + \cdots + \dfrac{\cos n!}{n(n+1)}$ конвергира;

   (б) низ $a_n = \dfrac{1}{\ln 2} + \dfrac{1}{\ln 3} + \cdots + \dfrac{1}{\ln n}$ дивергира.