АНАЛИЗА 1

Домаћи задатак 11: Низови. Лимес низа

1. По дефиницији показати да је:

(а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{n} = 2$;

(б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n^2+1} = 0$;

(в) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{\sqrt{n}} = +\infty$;

(г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3-n^2}{n} = -\infty$.

2. Наћи граничну вредност низа (a_n) ако је:

(а) $a_n = \dfrac{2n^3}{2n^2+3} - \dfrac{1+5n^2}{5n+1}$;

(б) $a_n = \dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$;

(в) $a_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$;

(г) $a_n = \dfrac{1+a+\cdots+a^n}{1+b+\cdots+b^n}$, $|a|<1$, $|b|<1$;

(д) $a_n = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{(n-1)n}$;

(ђ) $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}\sin(n!)$.

3. Показати да је:

(а) $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n = 0$ за $|q|<1$;

(б) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$;

(в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) = 1$;

(г) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{2}) = 2$;

(д) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n!} = 0$

4. Ако је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $a_n \geqslant 0$ за свако $n\in\mathbf{N}$, доказати да је $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.