

# Први домаћи

Анализа 4 за и смер, година 2025/2026

Професор: др Јована Николић, асистент Вук Симон Оваскаинен

1. [3п] (Коси хитац) Честица која се креће у  $xy$ -равни почиње своје кретање из тачке  $(x_0, y_0) \in [0, \infty)^2$  са почетном брзином интензитета  $v$ , чији вектор са хоризонталном осом заклапа угао од  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Честица се креће у гравитационом пољу чији је интензитет  $g$  и усмерено је вертикално наниже.

- а) Записати почетни проблем који описује кретање честице и одредити положај честице у зависности од времена.
- б) Колики је домет честице (хоризонтално растојање од почетног места до места док не падне на подлогу дату са  $y = 0$ )? За коју вредност угла  $\alpha$  је домет максималан?

2. [2п] Решити следеће Кошијеве проблеме.

- а)  $tx' = (\ln x - \ln t)x$ ,  $x, t > 0$ ,  $x(1) = 4$
- б)  $x' = e^{9x-t}$ ,  $x(0) = 0$

3. [5п] Наћи општа решења следећих диференцијалних једначина.

- а)  $tx' = t^2x^3 - x$
- б)  $x' \sin 2x = 10 \sin^2 x + \frac{2e^{-2t}}{\sin x}$
- в)  $x' + x^2 + \frac{4x}{t} + \frac{2}{t^2} = 0$
- г)  $x' = x^2 - \frac{x \sin t}{\cos t} + \frac{1}{\cos^2 t}$

4. [2п] Решити диференцијалну једначину

$$(x' + 1) \ln \left( \frac{x+t}{t+3} \right) = \frac{x+t}{t+3},$$

уводећи смене  $x = y + 3$ ,  $t = u - 3$ .

5. [2п] Дата је диференцијална једначина

$$(t + 2x)x' - kx + \frac{2}{t}(x^m + tx) + t = 0.$$

Одредити све парове  $(k, m) \in \mathbb{R}^2$  за које дата једначина постаје једначина тоталног диференцијала и решити је у тим случајевима.

6. [2п] Нека је дата линеарна диференцијална једначина првог реда и нека су  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  њена два различита решења. На основу њих записати шта је опште решење те једначине и образложити одговор.

7. [4п] Решити систем једначина  $X' = AX$  и скицирати одговарајући фазни портрет ако је

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}.$$