ОБЛАСТ 4

Диференцијабилност функција

Нека је $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ непрекидна функција. Посматрајмо две тачке са графика функције $A(x_0, f(x_0))$ и $B(x_0 + h, f(x_0 + h))$. Једначина праве која пролази кроз ове две тачке је

$$p \ : \ y = f(x_0) + \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}(x - x_0).$$

Дуж AB назива се и *тетивом* графика функције. Коефицијент правца ове праве (који је једнак тангенсу угла α између праве p и позитивног дела x-осе) је $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ (видети Слику 1). Ако померамо тачку B по графику функције и приближавамо је тачки A видимо да ће се тетива приближавати *тангенти* t на график функције у тачки A (видети Слику 2). Коефицијент правца тангента t ће бити

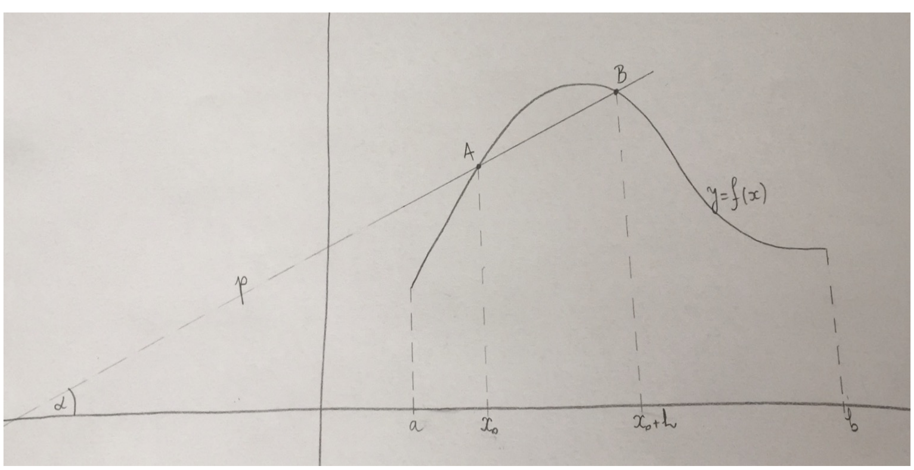
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

ако овај лимес постоји. Постојање овог лимеса еквивалентно је диференцијабилности.

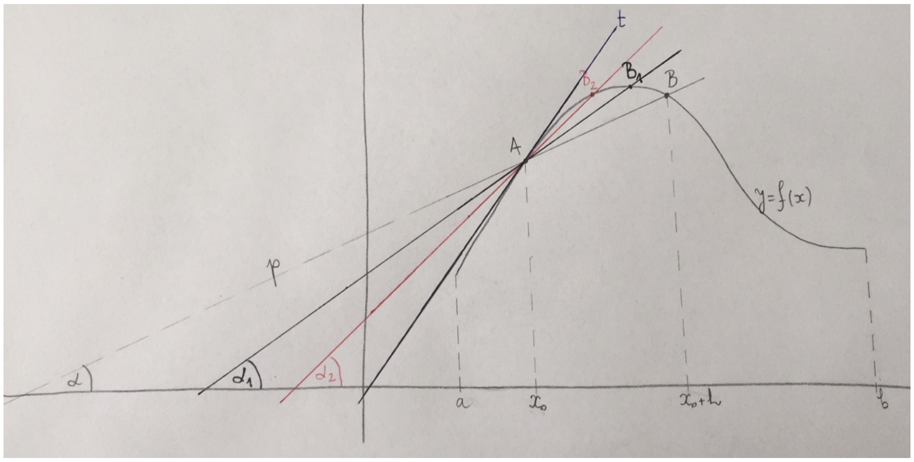
1. Извод функције

Дефиниција 1. Нека је $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ и нека је $x_0 \in (a, b)$. Ако постоји

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{1}$$



Слика 1. Тетива графика функције



Слика 2. Тетива функције се приближава тангенти графика у тачки A

кажемо да је функција *диференцијабилна у тачки* x_0. Овај лимес се назива *изводом функције* f *у тачки* x_0 и означава са $f'(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$ или $\frac{d}{dx}f(x_0)$. Кажемо да је функција *диференцијабилна* ако је диференцијабилна у свакој тачки свог домена. $\Diamond$

Прво питање које се природно поставља јесте која је веза између непрекидности у тачки и диференцијабилности у тачки. О томе нам говори следећа теорема.

Теорема 2. *Ако је функција* $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ *диференцијабилна у тачки* $x_0\in(a,b)$ *онда је она у тој тачки и непрекидна.*

Доказ. Приметимо да је

$$\lim_{h\to 0}\big(f(x_0+h)-f(x_0)\big)=\lim_{h\to 0}\left[h\cdot\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right].$$

Лимес може да прође кроз производ јер лимеси и једне и друге функције постоје па је

$$\lim_{h\to 0}\big(f(x_0+h)-f(x_0)\big)=0\cdot f'(x_0)=0.$$

Закључујемо да је $\lim\limits_{h\to 0}f(x_0+h)=f(x_0)$, односно функција f је непрекидна у тачки x_0. $\square$

Није свака непрекидна функција диференцијабилна у тачки, другим речима не важи обрнута импликација у претходној теореми. То ћемо видети у следећем примеру.

Пример 3. Функција апсолутне вредности $f(x)=|x|$ је непрекидна у тачки $x=0$ али није диференцијабилна у тој тачки. Заиста, не постоји $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$ јер су лимеси када $h\to 0+$ и $h\to 0-$ различити. Лимес када тачки 0 прилазимо са леве стране (где је функција једнака $f(x)=-x$) једнак је

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{-h}{h}=-1,$$

док са десне стране тачке 0 (где је функција једнака $f(x)=x$) добијамо лимес

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{h}{h}=1.$$

Ако се подсетимо графика те функције видимо да у тачки $x=0$ имамо шиљак, као да се график функције ломи на том месту. $\sharp$

Већ на овом месту видимо потребу да разматрамо случајеве када постоје леви и десни лимеси израза (1).

Дефиниција 4. Нека $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ и нека је $x_0\in(a,b)$. Ако постоји

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

он се назива *левим изводом функције* f *у тачки* x_0 и означава са $f'_-(x_0)$. *Десни извод функције* f *у тачки* x_0 једнак је лимесу (ако постоји)

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

и означава се са $f'_+(x_0)$. $\Diamond$

Знајући својства левог и десног лимеса можемо да закључимо да је функција диференцијабилна у тачки x_0 ако и само ако постоје леви и десни лимес у тој тачки и једнаки су.

У Примеру 3 смо показали да функција $|x|$ у тачки $x=0$ има леви извод и једнак је -1 док је десни извод једнак 1.

Сада ћемо испитати диференцијабилност неких елементарних функција.

Пример 5. Константна функција $f(x)=C$ је диференцијабилна у свакој тачки и њен извод је једнак нули јер је

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{C-C}{h}=0.$$

Закључујемо: **извод константне функције једнак је нули**. $\sharp$

Пример 6. Сада ћемо наћи извод степене функције $f(x)=x^n$ где је $n\in\mathbf{N}$ фиксиран природан број. Нека је $x\in\mathbb{R}$ произвољна тачка. Тада је

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}&=\frac{(x+h)^n-x^n}{h}\overset{(*)}{=}\frac{\sum\limits_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^{n-j}\cdot h^j-x^n}{h}\\&=\frac{x^n+n\cdot x^{n-1}\cdot h+...+n\cdot x\cdot h^{n-1}+h^n-x^n}{h}\\&=\frac{h\left(n\cdot x^{n-1}+\binom{n}{2}x^{n-2}\cdot h+...+h^{n-1}\right)}{h}\\&=n\cdot x^{n-1}+\binom{n}{2}x^{n-2}\cdot h+...+h^{n-1},\end{aligned}$$

где је једнакост $(*)$ добијена применом биномне формуле. Када прођемо лимесом по $h\to 0$ закључујемо да је $f'(x)=nx^{n-1}$. $\sharp$

Пример 7. У овом примеру испитујемо диференцијабилност експоненцијалне и логаритамске функције.

Нека је $f(x)=a^x$ где је $a>0$ фиксирано. Знамо да је домен експоненцијалне функције скуп $\mathbb{R}$. Показаћемо да је f диференцијабилна у свакој тачки домена. За произвољно $x\in\mathbb{R}$ важи

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=\lim_{h\to 0}\left[a^x\cdot\frac{a^h-1}{h}\right]=a^x\cdot\ln a,$$

јер је $\lim\limits_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=\ln a$. Примећујемо да је $\frac{d}{dx}e^x=e^x$ односно извод експоненцијалне функције e^x је опет експоненцијална функција e^x.

Нека је $g(x)=\ln x$. Знамо да је домен логаритамске функције $(0,+\infty)$ па има смисла испитивати диференцијабилност функције g само у тим тачкама. Опет применом основних лимеса добијамо

$$g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\dfrac{x+h}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\left[\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}\cdot\frac{1}{x}\right]=\frac{1}{x}$$

јер је $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1$ а $\frac{h}{x} \to 0$ када $h \to 0$. Видећемо још један начин да израчунамо извод логаритамске функције када будемо формулисали Теорему о изводу инверзне функције. ♯

Пример 8. Нека је $\alpha \in \mathbb{R}$ фиксиран број и посматрамо функцију $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ дефинисану са $f(x) = x^\alpha$. Желимо да испитамо диференцијабилност ове функције. Нека је $x > 0$ произвољно. Тада постоји извод функције $f'(x)$ и једнак је

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^\alpha(1+\frac{h}{x})^\alpha - x^\alpha}{h} = \lim_{h\to 0}\left[x^\alpha \cdot \frac{(1+\frac{h}{x})^\alpha - 1}{\frac{h}{x}} \cdot \frac{1}{x}\right] = \alpha \cdot x^{\alpha-1},$$

јер је $\lim\limits_{t\to 0}\frac{(1+t)^\alpha - 1}{t} = \alpha$. ♯

Пример 9. Желимо да нађемо извод синусне и косинусне функције.

Извод косинуса је

$$\frac{d}{dx}\cos x = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \overset{(**)}{=} \lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\frac{2x+h}{2}\sin\frac{h}{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\left[-\sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right] = -\sin x,$$

где је једнакост $(**)$ формула за разлику косинуса а последња једнакост је добијена применом основног лимеса $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$.

Аналогни кораци нам дају извод синусне функције

$$\frac{d}{dx}\sin x = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\frac{2x+h}{2}\sin\frac{h}{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\left[\cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right] = \cos x.$$

♯

Вратимо се сада на дефиницију извода. Нека је функција f диференцијабилна у тачки x_0. То значи да је

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

односно

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + o(1),\ h \to 0.$$

Када све помножимо са h добијамо једнакост

$$f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0)\cdot h + o(h),\ h \to 0. \tag{2}$$

Приметимо сада да смо диференцијабилност могли да дефинишемо на још један начин, функција f је диференцијабилна у тачки x_0 ако постоји број A такав да важи

$$f(x_0+h) = f(x_0) + A\cdot h + o(h),\ h \to 0.$$

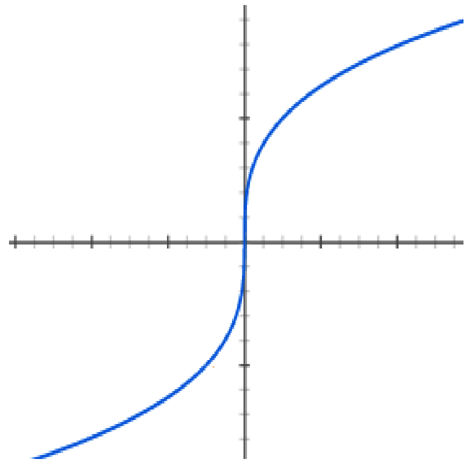
У том случају кажемо да је број A извод функције f у тачки x_0, $A = f'(x_0)$. Ова дефиниција је згоднија за уопштење извода када је функција f дефинисана на вишедимензионим просторима, нпр. $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$ а нама ће бити згодна и за доказ теореме о диференцирању композиције функција.

Истакнимо још једну лепу особину диференцијабилне функције коју можемо да уочимо из једнакости (2). Приметимо да заправо важи апроксимација

$$f(x_0+h) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot h$$

када је h довољно мало. Ако десну страну видимо као једначину праве где нам прираштај h игра улогу разлике $x - x_0$ видимо да је то једначина тангенте t на график функције у тачки x_0. Једначина (2) каже да се график диференцијабилне функције у малој околини тачке x_0 налази произвољно близу тангенте. Још једном ћемо нагласити да је једначина тангенте на график функције f у тачки x_0 у којој је функција диференцијабилна

$$t\ :\ y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$



Слика 3. График функције $f(x) = \sqrt[5]{x}$

Коефицијент правца ове праве који је дат изводом функције у тачки x_0, $f'(x_0)$, једнак је тангенсу угла који тангента гради са позитивним делом x-осе.

Напоменимо да диференцијабилност може да се дефинише и у проширеном смислу (и за леве и десне изводе) ако дозволимо да лимес у (1) узима вредности у $\overline{\mathbb{R}}$. На конкретним примерима ћемо видети шта геометријски значи да је извод у тачки (или једнострани извод) једнак $+\infty$ или $-\infty$.

Пример 10. Посматрајмо функцију $f(x) = \sqrt[5]{x}$ чији је домен $\mathbb{R}$. Желимо да испитамо њену диференцијабилност у тачки $x = 0$. Тражимо

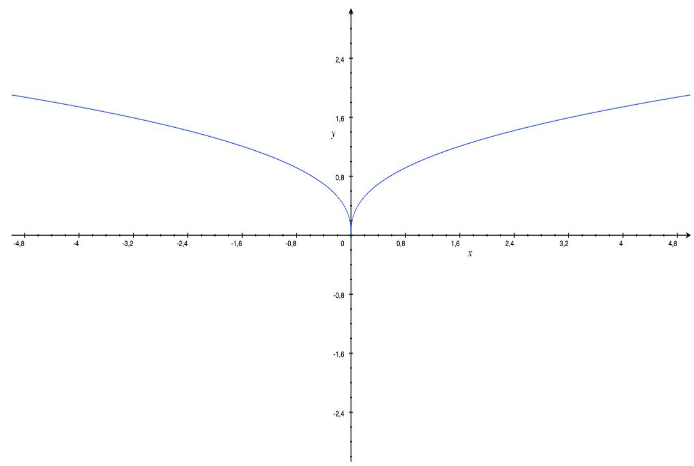
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[5]{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt[5]{h^4}} = +\infty.$$

Видимо да је функција $\sqrt[5]{x}$ диференцијабилна у проширеном смислу у тачки $x = 0$. Ако погледамо график ове функције (Слика 3) видимо да је график функције приљубљен уз y-осу у околини тачке $x = 0$, заправо тангента на график функције у тој тачки је права $x = 0$ (односно $y-$оса). Знамо да је тангенс угла који граде тангента и позитиван део $x-$осе (који је у овом случају једнак вредности $\frac{\pi}{2}$) једнак изводу функције. Ако се подсетимо особина тангенса, па приметимо да његова вредности тежи ка $+\infty$ када угао тежи ка $\frac{\pi}{2}-$ можемо да видимо да се ова диференцијабилност у проширеном смислу слаже са геометријском сликом обичне диференцијабилности коју смо изградили до сада. $\sharp$

Пример 11. У овом примеру ћемо разматрати функцију $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$. Домен функције је $\mathbb{R}$ а нас занима њена диференцијабилност у тачки $x = 0$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[5]{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt[5]{h^3}}.$$

Приметимо да се једнострани лимеси разликују јер је $\lim\limits_{h\to 0-} \frac{1}{\sqrt[5]{h^3}} = -\infty$ док је $\lim\limits_{h\to 0+} \frac{1}{\sqrt[5]{h^3}} = +\infty$. То значи да леви и десни извод у тачки $x = 0$ постоје у проширеном смислу. Ако погледамо график ове функције (Слика 4) можемо да приметимо да је график функције са леве стране тачке $x = 0$ приљубљен уз $y-$осу и да функција опада док је график са десне стране тачке $x = 0$ такође приљубљен уз $y-$осу али да ту функција расте (касније ћемо видети како нам знак извода одређује монотоност функције). Видимо да функција није диференцијабилна у проширеном смислу у тачки $x = 0$. $\sharp$



Слика 4. График функције $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$

2. Својства диференцијабилних функција

У овом делу показујемо како се извод понаша у односу на основне операције и композицију. Такође ћемо показати како се диференцира инверзна функција.

Теорема 12. (Линеарност извода) *Нека су функције $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ диференцијабилне у тачки $x_0 \in (a,b)$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тада је функција $\alpha f + \beta g$ диференцијабилна у тачки x_0 и важи*

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0).$$

Доказ. Доказ следи из познате линеарности лимеса

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{(\alpha f + \beta g)(x_0+h) - (\alpha f + \beta g)(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\alpha f(x_0+h) + \beta g(x_0+h) - \alpha f(x_0) - \beta g(x_0)}{h} \\ &\overset{(***)}{=} \alpha \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \beta \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \\ &= \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0).\end{aligned}$$

при чему смо у једнакости $(***)$ могли да прођемо лимесом кроз збир јер лимеси са десне стране постоје. $\square$

Следећа теорема нам каже како се диференцира производ диференцијабилних функција и позната је као Лајбницово правило.

Теорема 13. (Лајбницово правило) *Ако су функције $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ диференцијабилне у тачки $x_0 \in (a,b)$ тада је и функција $f \cdot g$ диференцијабилна у тачки x_0 и важи*

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

Доказ. Доказ теореме следи из следећих једнакости

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) \cdot g(x_0+h) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{h} \\ &\quad = \lim_{h\to 0} \left[f(x_0+h) \cdot \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} + g(x_0) \cdot \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right] \\ &\quad = f(x_0) \cdot g'(x_0) + g(x_0) \cdot f'(x_0).\end{aligned}$$

У последњој једнакости лимес пролази кроз суму и производ јер сви лимеси са десне стране постоје а функција f је непрекидна па ће важити $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$. $\square$

Сада ћемо показати како се диференцира количник две функције.

Теорема 14. *Нека су функције $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ диференцијабилне у тачки $x_0 \in (a, b)$ при чему важи $g(x_0) \neq 0$. Тада је и $\frac{f}{g}$ диференцијабилна у x_0 и важи*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{\left(g(x_0)\right)^2}. \tag{3}$$

Доказ. Показаћемо да важи

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{\left(g(x_0)\right)^2}$$

а онда ће једнакост (3) следити применом ове једнакости и Лајбницовог правила на производ $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$. Посматрамо прираштај функције $\frac{1}{g}$

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{g}(x_0+h) - \frac{1}{g}(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{g(x_0+h)} - \frac{1}{g(x_0)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0) - g(x_0+h)}{g(x_0+h) \cdot g(x_0) \cdot h} \\
&= -\lim_{h\to 0} \left[\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \cdot \frac{1}{g(x_0+h)} \cdot \frac{1}{g(x_0)}\right] \\
&= -\frac{g'(x_0)}{\left(g(x_0)\right)^2}.
\end{aligned}$$

Лимес на крају може да прође кроз производ јер сви лимеси постоје а функција g је непрекидна у тачки x_0. Приметимо да има смисла делити са $g(x_0+h)$ јер смо рекли да ако је нека функција непрекидна у x_0 и различита од нуле у тој тачки онда ће постојати нека околина од x_0 на којој је функција различита од нуле. □

Сада можемо да нађемо извод још неких тригонометријских функција.

Пример 15. Користећи правило диференцирања количника две функције можемо да закључимо да су тангенсна и котангенсна функција диференцијабилне на свом домену и да је њихов извод једнак

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\operatorname{tg} x &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{1}{\cos^2 x}, \\
\frac{d}{dx}\operatorname{ctg} x &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{(\sin x)^2} = -\frac{1}{\sin^2 x}.
\end{aligned}$$

♯

Композиција диференцијабилних функција ће бити диференцијабилна функција. Следећа теорема нам објашњава како се диференцира композиција две функције.

Теорема 16. (Извод сложене функције) *Нека је функција $f : (a, b) \to (\alpha, \beta)$ диференцијабилна у тачки $x_0 \in (a, b)$ а функција $g : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ диференцијабилна у тачки $y_0 = f(x_0)$. Тада је функција $g \circ f : (a, b) \to \mathbb{R}$ диференцијабилна у тачки x_0 и важи*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'\left(f(x_0)\right) \cdot f'(x_0). \tag{4}$$

Доказ. Занима нас да ли постоји следећи лимес

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{h}. \tag{5}$$

Најзгодније би било када бисмо израз под лимесом поделили и помножили са $f(x_0+h) - f(x_0)$ али то некада може да буде једнако нули. Зато нам је згодније да за испитивање прираштаја

$g(f(x_0+h))-g(f(x_0))$ користимо алтернативну дефиницију извода коју смо раније објаснили. Означимо са $t=f(x_0+h)-f(x_0)=f(x_0+h)-y_0$. Знамо да је функција f диференцијабилна у тачки x_0 па ће бити и непрекидна одакле закључујемо да $t\to 0$ када $h\to 0$.

$$\begin{aligned} g(f(x_0+h))-g(f(x_0)) &= g(y_0+t)-g(y_0)=g'(y_0)\cdot t+o(t)\\ &= g'(y_0)\cdot(f(x_0+h)-f(x_0))+o(f(x_0+h)-f(x_0))\\ &= g'(y_0)\cdot(f'(x_0)\cdot h+o(h))+o(f'(x_0)\cdot h+o(h))\\ &= g'(y_0)\cdot f'(x_0)\cdot h+o(h),\ h\to 0. \end{aligned}$$

У последњем кораку смо израз $g'(y_0)\cdot o(h)+o(f'(x_0)\cdot h+o(h))$ изједначили са $o(h)$ (то су особине релације $o(\cdot)$ које смо раније доказали). Закључујемо да је функција $g\circ f$ диференцијабилна у тачки x_0 и да је њен извод дат једнакошћу (4). □

Сада ћемо формулисати и доказати теорему која нам показује како изгледа извод инверзне функције.

Теорема 17. (Извод инверзне функције) *Нека је функција $f:(a,b)\to(\alpha,\beta)$ диференцијабилна у тачки $x_0\in(a,b)$ при чему је $f'(x_0)\neq 0$ и нека постоји њој инверзна функција $f^{-1}:(\alpha,\beta)\to(a,b)$ која је диференцијабилна у тачки $y_0=f(x_0)$. Тада је*

$$(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}.$$

Доказ. Теорема се доказује диференцирањем композиције $f\circ f^{-1}$. Приметимо да је ова композиција идентичко пресликавање

$$f\circ f^{-1}:(\alpha,\beta)\to(\alpha,\beta)$$

за које у свакој тачки $y\in(\alpha,\beta)$ важи $(f\circ f^{-1})(y)=y$. Ако се подсетимо Примера 6 можемо да закључимо да је извод идентичког пресликавања једнак јединици, односно

$$\frac{d}{dy}(f\circ f^{-1})(y)=1.$$

Применом Теореме 16 у тачки $y=y_0$ закључујемо

$$f'(f^{-1}(y_0))\cdot(f^{-1})'(y_0)=1,$$

што је и требало показати. □

Напомена 18. Претходна теорема важи и под слабијим условима. Довољно је претпоставити да је функција f^{-1} непрекидна у тачки y_0. Тада ће она бити и диференцијабилна. Доказ у овом облику не пролази за теорему са слабијим претпоставкама. ⋄

Пример 19. Сада ћемо на још један начин наћи извод логаритамске функције. Нека је $f(x)=e^x$. Знамо шта је њој инверзна функција, $f^{-1}(y)=\ln y$ а видели смо и да је извод експоненцијалне функције сама та функција, $f'(x)=e^x$. Применом Теореме 17 долазимо до једнакости

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}=\frac{1}{f'(\ln y)}=\frac{1}{e^{\ln y}}=\frac{1}{y},$$

а ово смо већ видели у Примеру 7. ♯

3. Основне теореме диференцијалног рачуна

У овом поглављу ћемо посматрајући извод функције испитивати нека својства функција. Прво ћемо дефинисати шта то значи да је нека тачка домена тачка локалног екстремум функције $f:X\to\mathbb{R}$.

Дефиниција 20. Кажемо да је тачка $x_0 \in X$ тачка

- *Локалног максимума* функције f ако постоји $\delta > 0$ тако да за свако $x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ важи $f(x) \leq f(x_0)$,
- *Локалног минимума* функције f ако постоји $\delta > 0$ тако да за свако $x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ важи $f(x_0) \leq f(x)$,
- *Строгог локалног максимума* функције f ако постоји $\delta > 0$ тако да за свако $x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ важи $f(x) < f(x_0)$,
- *Строгог локалног минимума* функције f ако постоји $\delta > 0$ тако да за свако $x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ важи $f(x_0) < f(x)$.

Кажемо да је $x_0 \in X$ тачка *тачка (строгог) локалног екстремума* ако је x_0 тачка (строгог) локалног максимума или тачка (строгог) локалног минимума. ◊

Теорема 21. (Фермаова теорема) *Ако функција $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ у тачки $x_0 \in (a, b)$ има локални екстремум и ако је она диференцијабилна у тој тачки тада је $f'(x_0) = 0$.*

Доказ. Не умањуући општост можемо претпоставити да је x_0 тачка локалног максимума (ако је x_0 локални минимум онда посматрамо функцију $-f$ која ће у x_0 имати локални максимум). Ако је прираштај $h > 0$ онда ће важити

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \tag{6}$$

у некој десној околини тачке x_0. Знамо да је f диференцијабилна у тачки x_0 па ће постојати и десни извод. Када неједнакост (6) нападнемо лимесом по $h \to 0+$ видимо да ће важити

$$f'_+(x_0) \leq 0.$$

За негативан прираштај $h < 0$ ће важити

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \tag{7}$$

у некој левој околини тачке x_0. Сада ову неједнакост нападнемо са лимесом $h \to 0-$ и закључујемо да важи

$$f'_-(x_0) \geq 0.$$

Из диференцијабилности функције у тачки x_0 знамо да су леви и десни извод једнаки па је

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = 0,$$

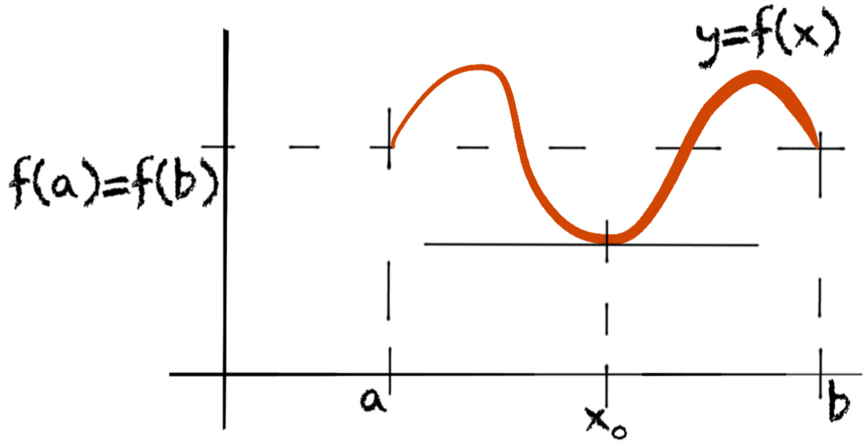
односно $f'(x_0) = 0$ а то је требало показати. □

Истакнимо да се ова теорема односи на унутрашње тачке домена. Видимо да је претпоставка да је **тачка x_0 у отвореном интервалу** (a, b). Тај услов је веома битан а то се види на следећем примеру.

Пример 22. Функција $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ дата са $f(x) = 3x^3 + 7x$ има локални минумум у тачки $x = 0$ а локални максимум у тачки $x = 1$, иако је $f'(x) = 9x^2 + 7 \neq 0$ за све x из домена функције. ♯

Као последицу Фермаове теореме можемо да извучемо следећи закључак. Да би функција $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ имала локални екстремум у тачки $x_0 \in (a, b)$ (отвореног интервала) потребно је да буду испуњена један од следећа два услова: или f није диференцијабилна у тачки x_0 или је f диференцијабилна у x_0 и важи $f'(x_0) = 0$.

Пример 23. Описани услов није довољан. Односно, ако је нека тачка нула првог извода она не мора да буде локални екстремум. Пример за то је функција $f(x) = x^3$, $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$. Тачка $x = 0$ је нула првог извода али не и тачка локалног екстремума. Приметимо да је $f(0) = 0$ и да је функција позитивна са десне стране тачке нула а негативна са леве стране нуле. То значи да вредност нула ни највећа ни најмања коју функција f може да узме. ♯



Слика 5. Пример функције која задовољава поставке Ролове теореме

Теорема 24. (Ролова теорема) *Нека је функција* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *непрекидна на* $[a,b]$ *и диференцијабилна на* (a,b) *при чему важи* $f(a) = f(b)$. *Тада ће постојати тачка* $x_0 \in (a,b)$ *таква да је* $f'(x_0) = 0$.

Пре него пређемо на доказ теореме даћемо једну геометријску интерпретацију која нам (на нивоу слика) омогућава да боље разумемо саму теорему. Ролова теорема нам каже да ће постојати тачка у којој је тангента на график функције паралелна са $x-$осом а уједно и са правом која спаја две тачке са графика $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$ (видети Слику 5). У овом конкретном примеру са слике видимо да ће то бити тачка локалног минимума а када прођемо кроз доказ теореме видећемо да је то главна идеја.

Доказ. Како је функција f непрекидна то значи да ће на основу Вајерштрасове теореме она достизати свој максимум и минимум на $[a,b]$, максимум у некој тачки $M \in [a,b]$ а минимум у некој тачки $m \in [a,b]$. Јасно је да сада желимо да завршимо доказ користећи се Фермаовом теоремом. Мораћемо пре тога посебно да разматрамо случај када ови екстремуми нису у отвореном интервалу.

Дакле ако се екстремуми достижу у тачкама a или b, односно ако имамо једнакост скупова $\{m, M\} = \{a, b\}$ тада је максимална вредност функције једнака њеној минималној вредности јер је $f(a) = f(b)$. То значи да је функција константна на целом интервалу па ће њен извод свуда бити једнк нули, односно за тачку x_0 можемо да узмемо било коју тачку из (a,b).

Ако је бар једна тачка m или M у отвореном интервалу (a,b) тада ће она бити тачка локалног екстремума, у њој је f диференцијабилна јер је диференцијабилна свуда на (a,b) па ће на основу Фермаове теореме то бити нула првог извода. То је тражена тачка x_0. □

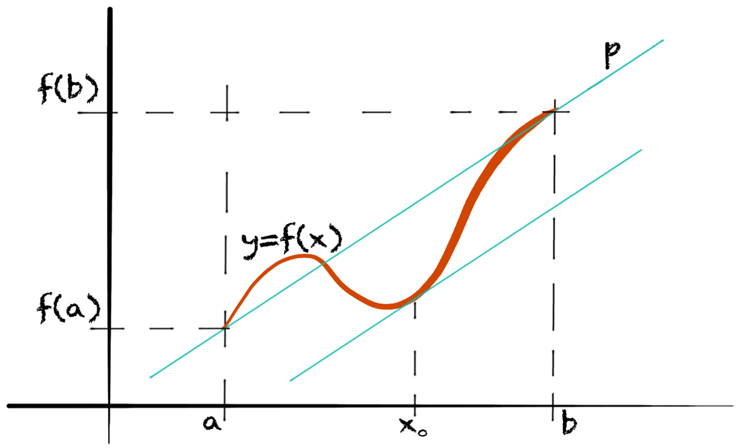
Теорема 25. (Кошијева теорема) *Нека су дате две функције* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *које су непрекидне на* $[a,b]$ *и диференцијабилне на* (a,b) *при чему је* $g'(x) \neq 0$ *за све* $x \in (a,b)$. *Тада ће постојати тачка* $x_0 \in (a,b)$ *таква да важи*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Напомена 26. Приметимо да у поставци теореме има смисла делити са $g(b) - g(a)$ јер овај израз није једнак нули. Ако би он био једнак нули онда би на основу Ролове теореме постојала нула првог извода функције g а претпоставка теореме је да је $g' \neq 0$ на (a,b). ◇

Доказ. Посматрајмо функцију

$$F(x) = (f(b) - f(a))\, g(x) - (g(b) - g(a))\, f(x).$$



Слика 6. Геометријска интерпретација Лагранжеве теореме

Важи $F(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a)$ и $F(b) = g(a)f(b) - f(a)g(b)$. Функција F је непрекидна на $[a,b]$ и диференцијабилна на (a,b) као композиција таквих. Видимо да F задовољава услове Ролове теореме па ће њен први извод имати нулу у некој тачки $x_0 \in (a,b)$. Правилима диференцирања закључујемо

$$F'(x) = (f(b) - f(a))\, g'(x) - (g(b) - g(a))\, f'(x)$$

па је

$$(f(b) - f(a))\, g'(x_0) - (g(b) - g(a))\, f'(x_0) = 0.$$

□

Сада ћемо формулисати теорему која је директна последица Кошијеве теореме а има лепу геометријску интерпретацију.

Теорема 27. **(Лагранжева теорема)** *Нека је функција* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *непрекидна на* $[a,b]$ *и диференцијабилна на* (a,b)*. Тада ће постојати тачка* $x_0 \in (a,b)$ *таква да важи*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0). \tag{8}$$

Напомена 28. Лева страна једначине (8) представља нагиб тетиве која спаја две тачке на графику $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$ (то је права p на Слици 6). Десна страна једначине (8) представља нагиб тангентне на график функције f у тачки x_0. Лагранжева теорема каже да ће постојати тачка на графику диференцијабилне функције у којој је тангента паралелна тетиви која спаја две тачке на графику.

И Кошијева теорема има геометријску интерпретацију али за њу морамо прво да објаснимо шта је крива. График функције је једна крива у равни али није свака крива график функције. Још неки примери кривих су права у равни или круг. Круг није график ни једне функције а нпр. праву $y = 0$ не можемо да видимо као график неке функције $y = f(x)$. У том случају можемо криве да задамо *параметарски*, односно да тачке са криве $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ опишемо као пресликавање чији је аргумент *параметар* t, $(x,y) = (\alpha(t), \beta(t))$ где су α и β неке функције. Ово нам омогућава да рачунамо и радимо са кривама као да су графици неких функција. Круг у равни задат једначином $x^2 + y^2 = 1$ има параметризацију $(x,y) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ где је параметар φ заправо угао између позитивног дела x-осе и праве која спаја центар са тачком на кругу. Кошијева теорема има исти геометријску интерпретацију као и Лагранжева теорема за график параметарски задате криве $(x,y) = (f(t), g(t))$ где су f и g функције из поставке теореме. ◇

Доказ. Доказ следи из Кошијеве теореме када специјално узмемо да је $g(x) = x$. □

Сада долазимо до последице која на основу знака првог извода функције испитује да ли је функција (строго) монотона или константна.

Последица 29. *Нека је дата диференцијабилна функција $f : (a,b) \to \mathbb{R}$. Тада важи*

- $f'(x) = 0$ *за све* $x \in (a,b) \iff f$ *константна функција,*
- *Ако је* $f'(x) \geq 0$ *за све* $x \in (a,b) \iff f$ *растућа функција,*
- *Ако је* $f'(x) > 0$ *за све* $x \in (a,b) \implies f$ *строго растућа функција,*
- *Ако је* $f'(x) \leq 0$ *за све* $x \in (a,b) \iff f$ *опадајућа функција,*
- *Ако је* $f'(x) < 0$ *за све* $x \in (a,b) \implies f$ *строго опадајућа функција,*

Доказ. Свака тачка се доказује применом Лагранжеве теореме. Нека су $x_1, x_2 \in (a,b)$ два тачке за које је $x_1 < x_2$. Тада ће важити

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \tag{9}$$

за неку тачку $\xi \in (x_1, x_2)$.

Из овога је очигледно да ако је $f' \equiv 0$ онда ће f у свим тачкама интервала имати исту вредност а већ од раније знамо да је извод контанте једнак нули. Тиме је показана прва тачка.

Ако је $f' > 0$ (односно $f' < 0$) онда ће и разлика бити истог знака $f(x_2) - f(x_1) > 0$ (односно $f(x_2) - f(x_1) < 0$) па тиме смо показали трећу и пету тачку.

Преостаје нам да покажемо другу и четврту тачку. Смерови са леве на десну страну следе исто из једнакости (9). За обрнуте смерови се враћамо на дефиницију извода у произвољно тачки $x_0 \in (a,b)$. Како је фунција диференцијабилна довољно је посматрати само нпр. леви извод. Знамо да је у левој околини, односно за приращтаје $h < 0$ количник

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

ненегативан ако је f растућа функција а непозитиван ако је f опадајућа. А преласком на лимес по $h \to 0-$ добијемо да је знак извода исти као из исказа последице. □

Пример 30. Истакнимо још једну битну ствар у претходним тврђењима. Домени функција су свуда интервали. Ако имамо рупу у домену онда тврђења неће важити. Најједноставнији пример за тако нешто је следећа функција $f : [0,1] \cup [3,5] \to \mathbb{R}$ дефинисана са

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 15, & 3 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

Ова функција је непрекидна на свом домену и диференцијабилна на $(0,1) \cup (3,5)$. Њен извод је свуда једнак нули али f није константна функција. Напоменимо још једном, ово није у контрадикцији са Последицом 29 јер домен ове функције није интервал па на њу и не можемо да применимо последицу. ♯

Пример 31. Приметимо да у претходној последици неки искази садрже импликације а неки еквиваленције. У исказима са импликацијом обрнут смер не важи. Пример за то у трећој тачки је функција $f(x) = x^3$ која је строго растућа али не важи $f' > 0$ на њеном домену јер први извод $f'(x) = 3x^2$ има вредност нула у тачки $x = 0$. ♯

4. Лопиталова правила

Када смо дефинисали операције у проширеном скупу реалних бројева $\overline{\mathbb{R}}$ рекли смо да су изрази облика

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ \frac{0}{0}\ ,0\cdot(\pm\infty),\ +\infty-(+\infty),\ 1^{\pm\infty},\ (+\infty)^0,\ 0^0$$

неодређени. Када смо те изразе посматрали као лимесе видели смо да као резултат можемо да добијемо различите вредности. Сада ћемо доказати теорему која нам помаже да у неким случајевима израчунамо лимесе који су облика $\frac{0}{0}$ или било шта кроз $\pm\infty$.

Теорема 32. (Лопиталова правила) *Нека су функције $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ диференцијабилне на (a,b), $-\infty\le a<b\le+\infty$, и нека је $g'(x)\neq 0$ за све $x\in(a,b)$. Нека је*

$$\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A\in\overline{\mathbb{R}}.$$

Ако је $\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\lim\limits_{x\to a+}g(x)=0$ или $\lim\limits_{x\to a+}g(x)=\infty$ тада ће постојати и $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}$ и важиће

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=A.$$

Напомена 33. Претходно тврђење важи и ако посматрамо $\lim\limits_{x\to b-}$. Приметимо у поставци теореме да a може да узима вредност $-\infty$ и b може да узме вредност $+\infty$, па теорема важи и ако посматрамо $\lim\limits_{x\to-\infty}$ или $\lim\limits_{x\to+\infty}$. ◇

Доказ. Прво ћемо извести доказ када је $\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\lim\limits_{x\to a+}g(x)=0$. Додефинисаћемо функције у тачки $x=a$ тако да добијемо непрекидне функције,

$$F(x)=\begin{cases}f(x), & a<x<b\\ 0, & x=a,\end{cases}\qquad \text{и}\qquad G(x)=\begin{cases}g(x), & a<x<b\\ 0, & x=a.\end{cases}$$

Функције F и G су непрекидне на $[a,b)$ и диференцијабилне на (a,b). Ако узмемо произвољно $x\in(a,b)$ тада су F и G непрекидне на $[a,x]$ и диференцијабилне на (a,x), важи $G'=g'\neq 0$ на (a,x). Дакле можемо да применимо Кошијеву теорему на ове две функције па ће важити

$$\frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$$

за неку тачку $\xi\in(a,x)$. Када погледамо дефиниције функција видимо да је

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Сада ову једнакост нападнемо лимесом по $x\to a+$. Тада ће и $\xi\to a+$ јер важи $a<x<\xi$. Одатле добијемо закључак теореме

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\xi\to a+}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=A\in\overline{\mathbb{R}}.$$

Нека је сада $\lim\limits_{x\to a+}g(x)=+\infty$ и нека је $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A\in\mathbb{R}$ (посебно ћемо разматрати случај када је $A=\infty$). Узмимо $\varepsilon>0$ произвољно. Тада ће постојати $\delta>0$ такво да је

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-A\right|<\varepsilon \tag{10}$$

за све $x\in(a,a+\delta)$. Одаберимо $\beta\in(a,a+\delta)$ произвољно. Како $g\to+\infty$ онда ће постојати $\delta_1<\beta-a$ такво да је

$$g(t)>g(\beta)$$

за све $t \in (a, a+\delta_1)$. Даља идеја је да β фиксирамо а да нам параметар t тежи ка $a+$. Сада применимо Кошијеву теорему на тачке t и β за функције f и g. Важиће

$$\frac{f(t)-f(\beta)}{g(t)-g(\beta)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

за неко $\xi \in (t, \beta)$. Како је ово ξ у интервалу $(a, a+\delta)$ онда ће важити процена (10) па је

$$A-\varepsilon < \frac{f(t)-f(\beta)}{g(t)-g(\beta)} < A+\varepsilon.$$

Када средимо овај израз долазимо до следећег облика

$$(A-\varepsilon)\left(1-\frac{g(\beta)}{g(t)}\right)+\frac{f(\beta)}{g(t)} < \frac{f(t)}{g(t)} < (A+\varepsilon)\left(1-\frac{g(\beta)}{g(t)}\right)+\frac{f(\beta)}{g(t)}.$$

Када пустимо да $t \to a+$ онда $\frac{g(\beta)}{g(t)} \to 0$ и $\frac{f(\beta)}{g(t)} \to 0$ јер $g(t) \to +\infty$ а β је фиксирано. У неједнакости скроз лева страна тежи ка $A-\varepsilon$ и скроз десна страна тези ка $A+\varepsilon$ при чему је ε произвољно мало па ће и $\frac{f(t)}{g(t)}$ тежити ка A када $t \to a+$.

Ако је $\lim\limits_{x\to a+} g(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$. Тада узмемо произвољно $C > 0$ уместо $\varepsilon > 0$ и ово C ће нам бити произвољно велика величина. Неједнакост (10) заменимо са

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} > C$$

и долазимо до неједнакости

$$\frac{f(t)}{g(t)} > C\left(1-\frac{g(\beta)}{g(t)}\right)+\frac{f(\beta)}{g(t)}.$$

Десна страна неједнакости је произвољно велика када $t \to a+$ па ће и $\frac{f(t)}{g(t)}$ тежити ка $+\infty$ када $t \to a+$. □

Сада ћемо видети неке примере у којима нам Лопиталова правила помажу да лако срачунамо лимесе.

Пример 34. Нека је $\alpha > 0$ фиксирана константа. Тада је

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0.$$

Овде смо у првом кораку искористили Лопиталова правила што смемо јер $x^\alpha \to +\infty$ када $x \to +\infty$. Када диференцирамо и бројилац и именилац долазимо до средњег израза. Знамо да лимес тог израза постоји па ће постојати лимес количника функција $\ln x$ и x^α и биће једнак нули. Приметимо да је прва једнакост под знаком питања све док не закључимо да лимес количника извода постоји. Када закључимо да постоји онда прва једнакост заиста важи. ♯

Пример 35. Нека су сада $\alpha > 0$ и $a > 1$ фиксиране константе. Занима нас чему је једнак

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x}.$$

Када једном искористимо Лопиталова правила долазимо до следећег лимеса

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{a^x \ln a}.$$

Снизили смо степен од x у бројиоцу али лимес израза зависи од знака $\alpha - 1$. Ако је $\alpha - 1 \le 0$ онда цео израз тежи ка нули. Ако је $\alpha - 1 > 0$ онда добијемо облик $\frac{\infty}{\infty}$. Идеја је да у том случају још једном искористимо Лопиталова правила па заправо проблем сводимо на питање

да ли постоји
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}}{a^x(\ln a)^2}.$$
А сада знамо да је овај лимес 0 ако је $\alpha-2\le 0$ а у супротном опет искористимо Лопиталова правила. Како је $\alpha>0$ фиксиран број сигурно постоји природан број $m\in\mathbb{N}$ такав да је $\alpha-m\le 0$. После m корака наше питање се своди на то да ли постоји
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-m+1)x^{\alpha-m}}{a^x(\ln a)^m}?$$
Очигледно је да ће овај лимес бити једнак нули, па је
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{a^x}=0.$$
♯

На овај начин смо добили поредбену скалу
$$\ln x\ll x^\alpha\ll a^x,\ x\to+\infty$$
за све $a>1$ и $\alpha>0$.

5. Изводи вишег реда

Ако је функција $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ диференцијабилна онда можемо да посматрамо извод изводне функције $f':(a,b)\to\mathbb{R}$. Ако је функција f' диференцијабилна у тачки $x_0\in(a,b)$ онда тај извод $(f')'(x_0)$ називамо *другим изводом функције* f и означавамо га са $f''(x_0)$.

На тај начин за свако $n\in\mathbb{N}_0$ можемо да дефинишемо *$n-$ти извод функције* f, у ознаци $f^{(n)}$. Узимамо да је по дефиницији нулти извод функције сама та функција
$$f^{(0)}(x):=f(x).$$
Ако знамо извод реда $(n-1)$, $f^{(n-1)}(x)$, онда се $n-$ти извод дефинише као
$$f^{(n)}(x):=\left(f^{(n-1)}\right)'(x).$$
Користићемо још једну ознаку за $n-$ти извод, $\frac{d^nf}{dx^n}$.

Кажемо да је функција f *n пута диференцијабилна* ако има $n-$ти извод. Ако функција има извод сваког реда кажемо да је она *бесконачно пута диференцијабилна.*

Сада ћемо кроз примере видети како се рачунају изводи вишег реда неких елементарних функција.

Пример 36. Посматрајмо линеарну функцију $f(x)=x+17$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Ова функција је диференцијабилна на свом домену и њен први извод је $f'(x)=1$ за сваку тачку $x\in\mathbb{R}$. Сада је и изводна функција (која је константа) диференцијабилна свуда на $\mathbb{R}$ и њен дуги извод је једнак нули, $f''(x)=0$ за свако $x\in\mathbb{R}$. Сви следећи изводи вишег реда једнаки су нули.

Ако хоћемо да диференцирамо неки полином трећег степена $p(x)=x^3+7x$ долазимо до следећих извода. $p'(x)=3x^2+7$, затим $p''(x)=6x$, трећи извод је константа $p'''(x)=6$ док је четврти и сваки извод вишег реда једнак нули $p^{(n)}(x)=0$, $n\ge 4$.

И општије, изводи вишег реда степене функције $g(x)=x^\alpha:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ једнаки су
$$g^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)\cdot x^{\alpha-n}.$$
Видимо да ако је α природан број онда ће сви изводи реда већег од α бити једнаки нули. ♯

Пример 37. Раније смо рекли да је извод експоненцијалне функције e^x сама та функција. Када наставимо индукцијом закључујемо да је $n-$ти извод функције e^x такође e^x и то за свако $n\in\mathbb{N}_0$, $(e^x)^{(n)}=e^x$. ♯

Пример 38. Можемо да одредимо n-те изводе синусне и косинусне функције. Знамо да је $(\sin x)' = \cos x$ и $(\cos x)' = -\sin x$. Када још једном диференцирамо синусну функцију закључујемо

$$(\sin x)'' = ((\sin x)')' = (\cos x)' = -\sin x.$$

Трећи извод једнак је

$$(\sin x)''' = ((\sin x)'')' = (-\sin x)' = -\cos x,$$

док је четврти извод

$$(\sin x)^{(4)} = ((\sin x)''')' = (-\cos x)' = \sin x.$$

Сада се изводи понављају па закључујемо да је

$$(\sin x)^{(n)} = \begin{cases} \sin x, & n = 4k \\ \cos x, & n = 4k+1 \\ -\sin x, & n = 4k+2 \\ -\cos x, & n = 4k+3. \end{cases}$$

Слична идеја се користи при налажењу извода вишег реда косинусне функције

$$(\cos x)^{(n)} = \begin{cases} \cos x, & n = 4k \\ -\sin x, & n = 4k+1 \\ -\cos x, & n = 4k+2 \\ \sin x, & n = 4k+3. \end{cases}$$

$\sharp$

Пример 39. Сада ћемо видети чему су једнаки изводи вишег реда логаритамске функције. Означимо са $h(x) = \ln x : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Ова функција ће бити бесконачно пута диференцијабилна на свом домену и знамо да је њен први извод

$$h'(x) = \frac{1}{x}.$$

Када ову функцију диференцирамо добијамо

$$h''(x) = -\frac{1}{x^2},$$

а онда и

$$h'''(x) = \frac{2}{x^3}.$$

Видимо да се у сваком кораку степен од x (који се налази у имениоцу) повећава а да бројиоц у сваком кораку множимо са природним бројем који је за један мањи од реда извода. На тај начин долазимо до једнакости

$$h^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$$

која важи за свако $n \in \mathbb{N}$ и која се једноставно доказује индукцијом. $\sharp$

Следећа теорема сумира својства извода вишег реда.

Теорема 40. *Нека функције $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ имају изводе реда n у тачки $x \in (a, b)$. Тада важи*

- **(Линеарност извода)** $(\lambda f + \mu g)^{(n)}(x) = \lambda f^{(n)}(x) + \mu g^{(n)}(x)$ *за све* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
- **(Уопштено Лајбницово правило)** $(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$.

Доказ. Линеарност извода вишег реда тривијално следи из линеарности првог извода а то смо показали у Теореми 12.

Уопштено Лајбницово правило се доказује индукцијом по n. За $n = 1$ тврђење важи јер је то обично Лајбницово правило које смо показали у Теореми 13. Нека формула важи за природан број n желимо да покажемо да важи и за $n+1$ односно да извод реда $n+1$ може да се представи као

$$(f \cdot g)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x).$$

Кренемо од леве стране

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)^{(n+1)}(x) &= \left((f \cdot g)^{(n)}\right)'(x) && \text{//искористимо индукцијску хипотезу}\\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)\right)' && \text{//линеарност првог извода + Лајбинц}\\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)}(x) g^{(n-k)}(x) + f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x)\right) && \text{//сада раздвојимо суме}\\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} f^{(j)}(x) g^{(n-j+1)}(x) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x)
\end{aligned}$$

//посебно напишемо чланове $j = n+1$ и $k = 0$ а преостале две суме спојимо

$$= f^{(n+1)}(x) g(x) + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x) + f(x) g^{(n+1)}(x)$$

//сада срачунамо збир ова два биномна коефицијента

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!}$$
$$= \frac{n! \cdot k + n! \cdot (n-k+1)}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = \binom{n+1}{k}$$

$$= f^{(n+1)}(x) g(x) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x) + f(x) g^{(n+1)}(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x),$$

и долазимо до једнакости коју је требало показати. □

6. Тејлорова формула

Нека је дат полином степена m у следећем облику

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 \ldots + a_{m-1}(x - x_0)^{m-1} + a_m(x - x_0)^m.$$

Ово је бесконачно пута диференцијабилна функција и видимо да је $p(x_0) = a_0$. Када једном диференцирамо полином долазимо до изводне функције

$$p'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \ldots + (m-1)a_{m-1}(x - x_0)^{m-2} + ma_m(x - x_0)^{m-1},$$

чија је вредност у тачки $x = x_0$ дата са $p'(x_0) = a_1$. Диференцирање још једном даје нам други извод

$$p''(x) = 2a_2 + 6a_3(x - x_0) + \ldots + (m-1)(m-2)a_{m-1}(x - x_0)^{m-3} + m(m-1)a_m(x - x_0)^{m-2},$$

а вредност другог извода у тачки x_0 је $p''(x_0) = 2a_2$. Идеја је јасна, вредности извода вишег реда у тачки $x = x_0$ и коефицијенти полинома повезани су на следећи начин

$$p^{(n)}(x_0) = n! a_n, 0 \leq n \leq m.$$

Већ смо споменули у Примеру 36 да ће изводи реда $m+1, m+2, \ldots$ бити једнаки нули па је $p^{(n)}(x_0) = 0$ за $n > m$. Тиме долазимо до следеће особине полинома. Сваки полином можемо да напишемо у облику

$$p(x) = \sum_{n=0}^{m} \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Описану идеју желимо да пренесемо и на произвољне функције.

Дефиниција 41. Нека је дата функција $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ која је n пута диференцијабилна у тачки $x_0 \in (a, b)$. Полином облика

$$P_n(x_0, x; f) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

назива се *Тејлоровим полиномом степена* n *функције* f *у тачки* x_0. Разлика

$$r_n(x_0, x; f) = f(x) - P_n(x_0, x; f)$$

назива се n*-тим остатком Тејлоровог полинома.* Када је $x_0 = 0$ Тејлоров полином се често назива *Маклореновим полиномом.* ♢

Из дефиниције видимо да важи

$$f(x) = P_n(x_0, x; f) + r_n(x_0, x; f).$$

Ако се присетимо једнакости (2) долазимо до закључка да за диференцијабилну функцију у тачки x_0 важи

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0),\ x \to x_0.$$

Приметимо да смо уместо аргумента h прешли на $x = x_0 + h$. То значи да први Тејлоров полином $P_1(x_0, x; f) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ апроксимира диференцијабилну функцију до на нешто што је занемарљиво у односу на $x - x_0$. Поставља се питање колико добро Тејлорови полиноми вишег степена апроксимирају функцију. Формулисаћемо и доказати две теореме које нам боље описују остатак Тејлоровог полинома.

Теорема 42. (Пеанов облик остатка) *Нека је функција* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ n*-пута диференцијабилна у тачки* $x_0 \in (a, b)$. *Тада је*

$$r_n(x_0, x; f) = o\left((x - x_0)^n\right),\ x \to x_0.$$

Доказ. Означимо (због лакшег записа) са $\varphi(x)$ остатак Тејлоровог полинома

$$\varphi(x) = r_n(x_0, x; f) = f(x) - P_n(x_0, x; f).$$

Теорема каже да важи $\varphi(x) = o((x - x_0)^n)$ када $x \to x_0$.

Функција φ има изводе до реда n у тачки x_0 и важи

$$\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \varphi''(x_0) = \cdots = \varphi^{(n)}(x_0) = 0. \tag{11}$$

Ове једнакости једноставно добијемо када знамо да је

$$P_n^{(k)}(x_0, x; f) = f^{(k)}(x_0),\ 0 \le k \le n.$$

Сада ћемо индукцијом по n показати да свака функција φ која је n пута диференцијабилна у тачки x_0 и за коју важе једнакости (11) задовољава релацију $\varphi(x) = o\left((x - x_0)^n\right),\ x \to x_0$. Када то покажемо наш доказ је завршен.

За $n = 1$ тврђење важи јер следи директно из дефиниције диференцијабилности функције φ у тачки x_0,

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0),\ x \to x_0.$$

Када заменимо једнакости $\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = 0$ добијемо да важи $\varphi(x) = o(x - x_0),\ x \to x_0$.

Нека сада тврђење важи за $n \geq 1$ желимо да покажемо да важи за $n+1$. Дакле нека је функција φ диференцијабилна у тачки x_0 и то $n+1$ пут и нека важи $\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \varphi''(x_0) = \cdots = \varphi^{(n)}(x_0) = \varphi^{(n+1)}(x_0) = 0$. Применимо Лагранжеву теорему на функцију φ и видимо да важи

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi'(\xi)(x - x_0), \tag{12}$$

за неку тачку ξ која је између тачака x и x_0. Посматрамо функцију $g(x) = \varphi'(x)$ која је n пута диференцијабилна у тачки x_0 и која задовољава неједнакости

$$g(x_0) = g'(x_0) = g''(x_0) = \cdots = g^{(n)}(x_0) = 0,$$

па на њу применимо индукцијску хипотезу. Она каже да ће важити $g(x) = o\left((x - x_0)^n\right),\ x \to x_0$, односно $\varphi'(x) = o\left((x - x_0)^n\right),\ x \to x_0$. Нама се у једначини (12) јавља аргумент ξ уместо x па ако се вратимо на дефиницију релације мало o закључујемо да је

$$g(\xi) = \alpha(\xi)(\xi - x_0)^n$$

за неку функцију α која тежи нули када $\xi \to x_0$. Тада је

$$|\varphi(x)| = |\alpha(\xi)| \cdot |\xi - x_0|^n \cdot |x - x_0| \leq |\alpha(\xi)| \cdot |x - x_0|^{n+1},$$

при чему смо последњу неједнакост добили из чињенице да се ξ налази између x и x_0. Када $x \to x_0$ тада $\xi \to x_0$ па $\alpha(\xi) \to 0$. Тиме смо показали да важи $\varphi(x) = o((x - x_0)^{n+1})$ када $x \to x_0$. □

Теорема 43. (Лагранжев облик остатка) *Нека је функција $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ n пута диференцијабилна у тачкама затвореног интервала са крајевима $x, x_0 \in (a, b)$ и нека је њен n-ти извод непрекидан у свим тачкама тог затвореног интервала. Додатно, нека функција има извод реда $n+1$ у тачкама отвореног интервала са крајевима x и x_0. Тада је*

$$r_n(x_0, x; f) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}$$

за неко ξ које је између x и x_0.

Доказ. Дефинисаћемо две нове функције $F(t) = f(x) - P_n(t, x; f)$ и $G(t) = (x-t)^{n+1}$. Видимо да је

$$F(t) = f(x) - \left(f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x - t) + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n\right)$$

па је F непрекидна у тачкама затвореног и диференцијабилна у тачкама отвореног интервала са крајевима x и x_0. Функција G задовољава исте особине и још је $G' \neq 0$ на отвореном интервалу па можемо да применимо Кошијеву теорему на ове две функције. Она каже да ће важити

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$$

за неку тачку ξ која је између x и x_0. Јасно је да је $F(x) = 0$, $F(x_0) = r_n(x_0, x; f)$, $G(x) = 0$, $G'(\xi) = -(n+1)(x - \xi)^n$. Преостало нам је да нађемо извод функције F. Он је у тачки t једнак

$$\begin{aligned} F(t) &= -\left(f'(t) + \frac{f''(t)}{1!}(x - t) - \frac{f'(t)}{1!} + \ldots + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n - \frac{f^{(n)}(t)}{n!} n (x - t)^{n-1}\right) \\ &= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n. \end{aligned}$$

Када се замене све претходне једнакости добија се

$$\frac{0 - r_n(x_0, x; f)}{0 - (x - x_0)^{n+1}} = \frac{-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n}{-(n+1)(x - \xi)^n},$$

односно једнакост коју је требало показати. □

Пример 44. Можемо да видимо чему су једнаки Маклоренови полиноми за неке основне функције.

Већ смо у Примеру 37 видели чему су једнаки изводи експоненцијалне функције па једноставно закључујемо да важи

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),\ x \to 0.$$

Овде смо остатак описали у Пеановом облику.

Даље, користећи изводе вишег реда синусне и косинусне функције из Примера 38 долазимо до следећих развоја ових функција

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}),\ x \to 0,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}),\ x \to 0.$$

У Примеру 39 смо видели како се диференцира $\ln x$, а ако променимо аргумент па уместо $\ln x$ посматрамо $\ln(1+x)$ долазимо до следеће једнакости

$$\frac{d^n}{dx^n} \ln(1+x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

а онда и до Маклореновог полинома са остатком у Пеановом облику

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + o(x^n),\ x \to 0.$$

Знамо да диференцирамо x^α (Пример 36) па једноставно закључујемо да је

$$\frac{d^n}{dx^n}(1+x)^\alpha = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}.$$

Сада знамо да развијемо и функцију $(1+x)^\alpha$ у околини нуле

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \ldots + \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^n),\ x \to 0,$$

где је

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

♯

7. Монотоност и локални екстремуми

У Теореми 21 смо видели који су потребни услови да у некој диференцијабилној тачки функција има локални екстремум. Напоменимо сада да се тачка x_0 у којој је функција f диференцијабилна и важи $f'(x_0) = 0$ назива *стационарном* (или *критичном*) *тачком* функције f. У Примеру 23 смо видели да услов из Теореме 21 није и довољан. Наиме, за функцију $f(x) = x^3$ тачка $x = 0$ је стационарна али не и тачка локалног екстремума. Ако погледамо функцију $f(x) = x^2$ видимо да је и за њу $x = 0$ стационарна тачка али у овој тачки квадратна функција има локални минимум. Сада ћемо формулисати и доказати теорему која даје довољан услов постојања локалног екстремума.

Теорема 45. *Нека је функција $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ два пута диференцијабилна у тачки $x_0 \in (a, b)$ при чему је x_0 стационарна тачка функције f и важи $f''(x_0) \neq 0$. Тада је*

- *x_0 тачка локалног максимума ако је $f''(x_0) < 0$,*

- x_0 *тачка локалног минимума ако је* $f''(x_0) > 0$.

Доказ. У доказу користимо развој функције помоћу Тејлоровог полинома реда два док остатак описујемо у Пеановом облику

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o\left((x - x_0)^2\right),\ x \to x_0.$$

Знамо да је x_0 стационарна тачка па је

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o\left((x - x_0)^2\right),\ x \to x_0.$$

Како је функција $o\left((x - x_0)^2\right)$ произвољно мала онда знак разлике $f(x) - f(x_0)$ зависи од знака израза $\frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$, односно од знака $f''(x_0)$ јер је $\frac{1}{2}(x - x_0)^2$ увек позитивно. Када је $f''(x_0) < 0$ разлика $f(x) - f(x_0)$ је негативна за свако x из неке мале околине тачке x_0 па је x_0 тачка локалног максимума. Ако је други извод у x_0 позитиван онда је и $f(x) - f(x_0)$ позитивно па је x_0 тачка локалног минимума. □

Теорема има и општији облик. Нека је функција f n пута диференцијабилна у тачки x_0 при чему су сви изводи до реда $n - 1$ једнаки нули а извод реда n различит од нуле. Постојање локалног екстремума и врсту екстремума испитујемо посматрањем Тејлоровог полинома реда n при чему остатак опет описујемо у Пеановом облику

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right),\ x \to x_0.$$

Ако је n паран број онда знак разлике $f(x) - f(x_0)$ зависи од знака израза $f^{(n)}(x_0)$ (приметимо да је израз $\frac{1}{n!}(x - x_0)^n$ позитиван за свако x из неке мале околине тачке x_0). Сада имамо исти закључак као и у претходној теореми (у којој је $n = 2$): ако је $f^{(n)}(x_0) < 0$ онда је x_0 тачка локалног максимума а ако је $f^{(n)}(x_0) > 0$ онда је x_0 тачка локалног минимума.

Закључак је потпуно другачији ако је n непаран број. У том случају знак разлике $f(x) - f(x_0)$ неће бити сталан ни у једној околини тачке x_0. Видимо да је знак од $f(x) - f(x_0)$ једнак знаку израза $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$. А знак овог израза није константан. Знамо да је $(x - x_0)^n$ негативно када је $x < x_0$ а позитивно када је $x > x_0$. Дакле променљивог је знака па у том случају x_0 није тачка локалног екстремума. Приметимо да је овај случај уопштење онога што смо већ описали у Примеру 23.

8. Конвексне функције

Подсетимо се елементарног појма конвексности. Конвексни скупови су они код којих се спајањем линијом било које две тачке унутар скупа не напушта сам скуп. Сада ћемо тај појам формулисати и за функције.

Дефиниција 46. Кажемо да је функција $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *конвексна* ако за произвољне тачке $x_1, x_2 \in (a, b)$ важи

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2), \tag{13}$$

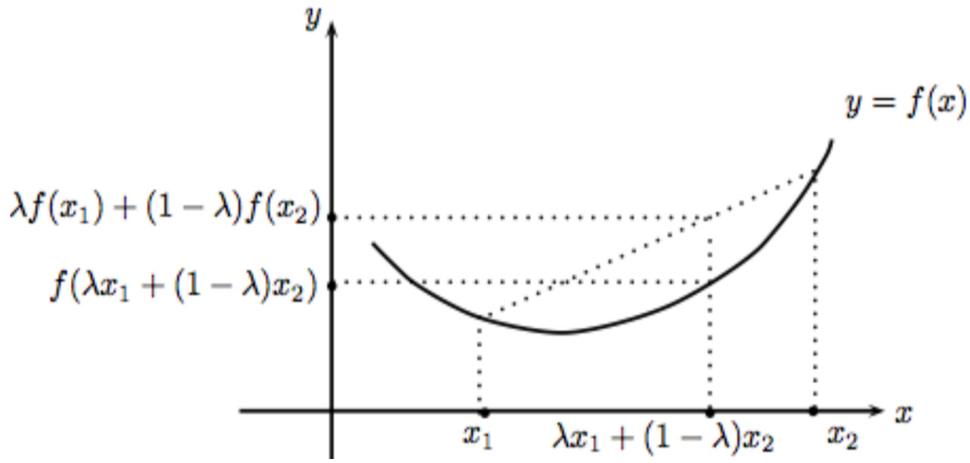
где је λ параметар из интервала $[0, 1]$.

Ако важи обрнута неједнакост

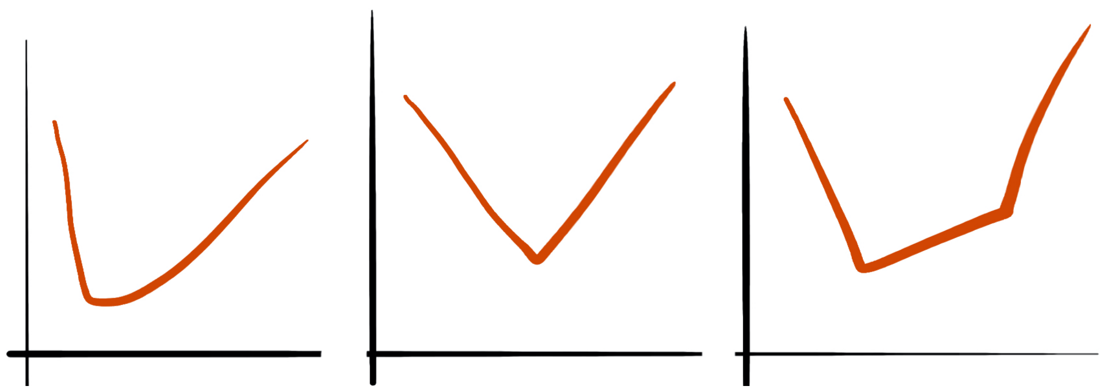
$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

онда кажемо да је функција f *конкавна*. ♢

Геометријска интерпретација појма конвексности је да се свака тетива графика функције (то је свака дуж која спаја две тачке са графика) налази изнад тог графика (видети Слику 7). Тачка $(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2))$ се налази на тетиви која спаја тачке $A_1(x_1, f(x_1))$



Слика 7. Тетива графика конвексне функције се налази изнад графика



Слика 8. Примери конвексних функција

и $A_2(x_2, f(x_2))$ (то је нека линеарна комбинација тачака A_1 и A_2). Док је тачка $(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2))$ тачка са графика функције. И неједнакост (13) нам каже да је тачка са графика испод тачке на тетиви.

На Слици 8 се виде неки примери конвексних функција, док на Слици 9 видимо примере конкавних функција. Ако погледамо дефиницију видимо да је константна функција и конвексна и конкавна на свом домену. И линеарна функција има то својство. На Слици 10 видимо примере функција које нису ни конвексне ни конкавне. Приметимо да је функција у примеру в) прво конвексна (до тачке c) а онда постаје конкавна (после тачке c). Тачке у којима се дешавају овакве промене издвајамо следећом дефиницијом.

Дефиниција 47. Ако је функција f конвексна на интервалу $(c-\delta_1, c)$ а конкавна на $(c, c+\delta_2)$ (или конкавна на $(c-\delta_1, c)$ а конвексна на $(c, c+\delta_2)$) онда се тачка c назива *превојном тачком* функције f. Овде су δ_1 и δ_2 неки позитивни бројеви. $\Diamond$

Надграф функције f је скуп

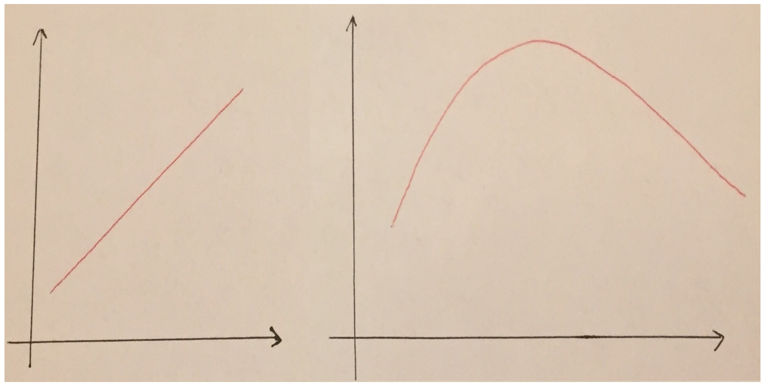
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a \le x \le b,\ y \ge f(x)\},$$

видети Слику 11. Приметимо да је функција конвексна ако и само ако је њен надграф конвексан скуп. Овим смо повезали појам конвексне функције са појмом конвексног скупа.

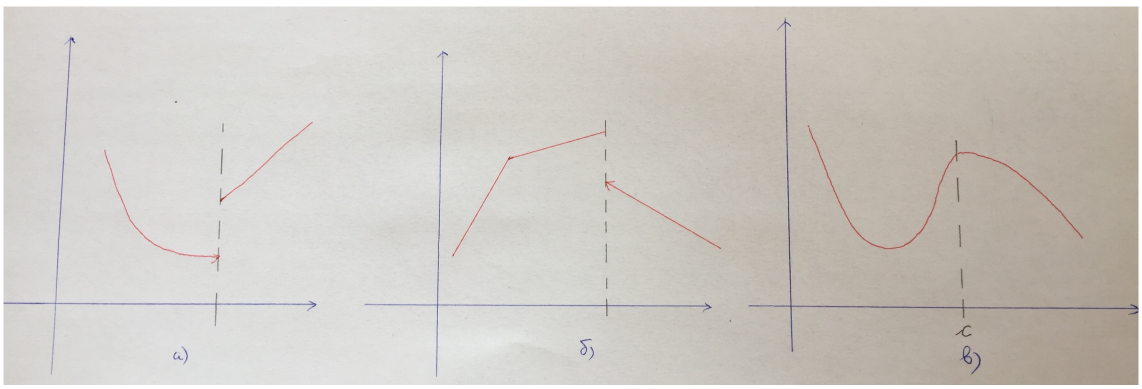
Сада ћемо видети да знак другог извода функције (ако други извод постоји) одређује конвексност и конкавност функције.

Нека је дата функција $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ и означимо са

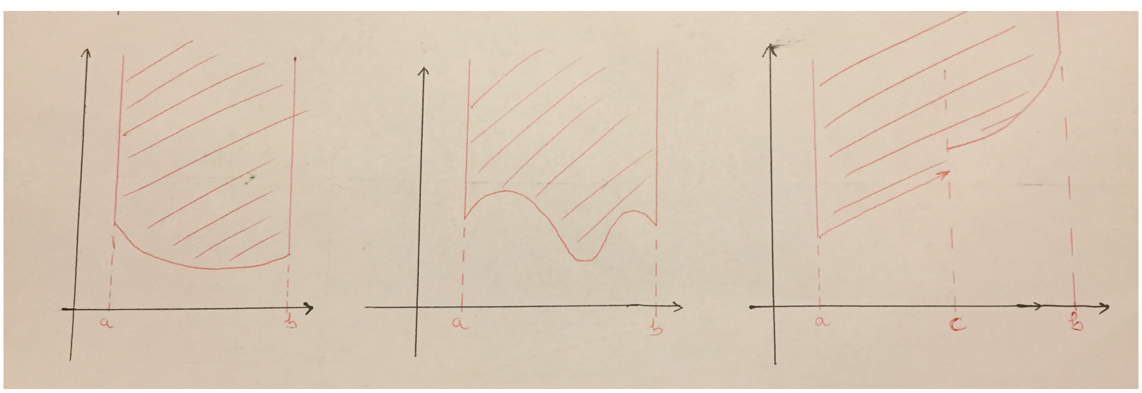
$$n_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



Слика 9. Примери конкавних функција



Слика 10. Примери функција које нису ни конвексне ни конкавне на свом домену

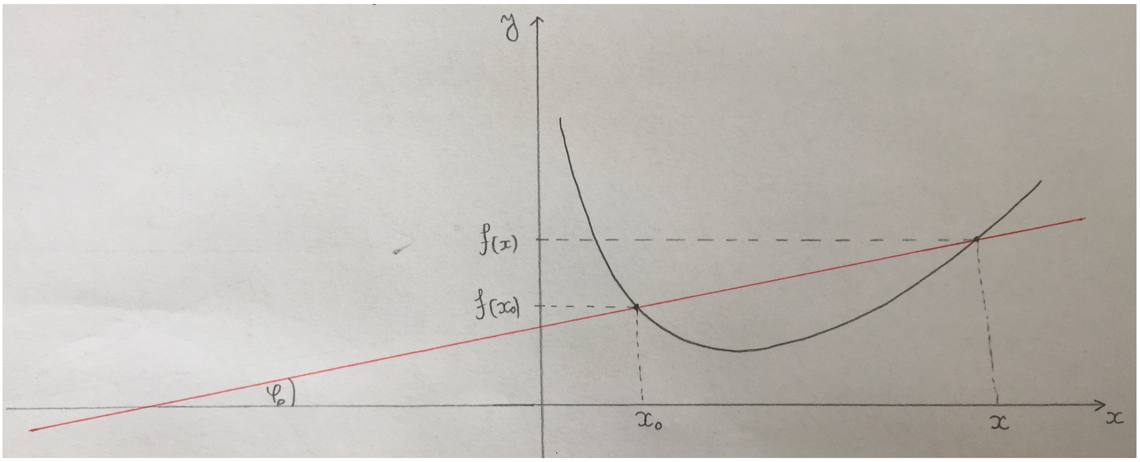


Слика 11. Примери функција и њихових надграфова који су скицирани црвеном бојом

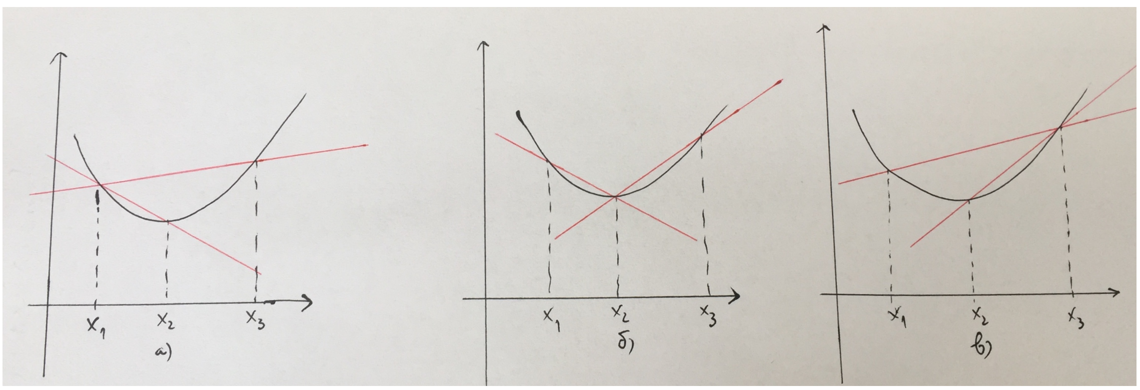
нагиб праве која пролази кроз две тачке $(x_0, f(x_0))$ и $(x, f(x))$ са графика функције f (приметимо да нагиб n_{x_0} није дефинисан у тачки $x = x_0$). Нагиб је заправо коефицијент правца праве која пролази кроз $(x_0, f(x_0))$ и $(x, f(x))$ и једнак је тангенсу угла који та права гради са позитивним делом $x-$осе (то је угао φ_0 на Слици 12).

Желимо неједнакост (13) да сведемо на однос међу нагибима одређених правих. Означимо са $x_0 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ тачку која се налази између x_1 и x_2. Тада је $\lambda = \frac{x_0-x_2}{x_1-x_2}$. Претпоставићемо да је $x_1 < x_2$. Тада неједнакост (13) има облик

$$f(x_0) \leq \frac{x_0 - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{x_1 - x_0}{x_1 - x_2} f(x_2).$$



Слика 12. Нагиб праве која пролази кроз две тачке на графику функције



Слика 13. Примери који показују да је нагиб растућа функција

Након множења са $x_2 - x_1 > 0$ долазимо до следеће неједнакости

$$(x_2 - x_0)f(x_1) + (x_0 - x_1)f(x_2) + (x_1 - x_2)f(x_0) \geq 0. \tag{14}$$

Ако $x_0 - x_1$ уз $f(x_2)$ представимо као $(x_0 - x_2) + (x_2 - x_1)$ онда долазимо до неједнакости

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}.$$

Сада се опет враћамо на неједнакост (14) и представимо $x_2 - x_0$ уз $f(x_1)$ као $(x_2 - x_1) + (x_1 - x_0)$. Тада ова неједнакост постаје

$$\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Сада ћемо претходне две неједнакости спојити и закључујемо да за конвексну функцију $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ и све тачке $x_1, x_2, x_3 \in (a, b)$ за које је $x_1 < x_2 < x_3$ важи

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}. \tag{15}$$

Ако ове изразе видимо као нагибе ми смо заправо добили следеће неједнакости

$$n_{x_1}(x_2) \leq n_{x_1}(x_3), \text{ из неједнакости првог и другог члана (Слика 13а)},$$
$$n_{x_2}(x_1) \leq n_{x_2}(x_3), \text{ из неједнакости првог и трећег члана (Слика 13б)},$$
$$n_{x_3}(x_1) \leq n_{x_3}(x_2), \text{ из неједнакости другог и трећег члана (Слика 13в)}.$$

Овим смо показали да је за фиксирано x_0 нагиб $n_{x_0}(x)$ растућа функција по x. Какав год да је распоред тачака x_0, x_1, x_2 ако је $x_1 < x_2$ тада је $n_{x_0}(x_1) \leq n_{x_0}(x_2)$.

Важиће и обрнуто, ако је нагиб $n_{x_0}(x)$ (задат функцијом f) растућа функција по x за све $x_0 \in (a,b)$ тада је функција f конвексна. Покажимо ово. Нека су $x_1, x_2 \in (a,b)$ произвољне тачке. Тачка $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ налази се између ове две тачке. Означимо је са

$$x_0 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2.$$

Раније смо видели да је тада $\lambda = \frac{x_0 - x_2}{x_1 - x_2}$ а важиће и $\frac{\lambda}{1-\lambda} = \frac{x_0 - x_2}{x_1 - x_0}$. Имамо сада две могућности $x_1 < x_2$ или $x_2 < x_1$. У првом случају из чињенице да је n_{x_0} растућа закључујемо да је

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0},$$

па множењем обе стране са $x_2 - x_0 > 0$ долазимо до

$$(f(x_0) - f(x_1))\frac{x_0 - x_2}{x_1 - x_0} \leq f(x_2) - f(x_0),$$

односно

$$\frac{\lambda}{1-\lambda}(f(x_0) - f(x_1)) \leq f(x_2) - f(x_0).$$

Ако је $x_2 < x_1$ онда долазимо до неједнакости

$$\frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

коју множењем са $x_0 - x_2 > 0$ сводимо на исту неједнакост

$$f(x_0) - f(x_2) \leq (f(x_1) - f(x_0))\frac{x_0 - x_2}{x_1 - x_0} = (f(x_1) - f(x_0))\frac{\lambda}{1-\lambda}, \tag{16}$$

(ако је $\lambda = 1$ онда је неједнакост (13) тривијално задовољена). Који год био распоред тачака x_1 и x_2 важиће неједнакост (16) а одатле једноставно закључујемо

$$f(x_0) = f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2),$$

односно функција f је конвексна.

Претходним дискусијама смо показали следеће тврђење.

Тврђење 48. Функција $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ је конвексна ако и само ако је функција нагиба $n_{x_0}(x)$ растућа функција по x за све $x_0 \in (a,b)$.

У претходној дискусији смо показали неједнакости (15) помоћу којих можемо да закључимо да конвексна функција има леви и десни извод у свакој тачки (који не морају да буду једнаки). Постојање левог и десног извода у тачки је довољно за непрекидност функције у тачки. Дакле **конвексна функција на (a,b) је непрекидна**.

Сада можемо нешто више да кажемо о првом изводу (ако постоји) конвексне функције.

Тврђење 49. Нека је функција $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ диференцијабилна. Тада је функција конвексна ако и само ако је њен први извод растућа функција.

Доказ.

$\Longrightarrow$:

Нека је функција конвексна и узмемо две тачке $x_1, x_2 \in (a,b)$ за које важи $x_1 < x_2$. За сваку тачку x која је између ових вредности, $x_1 < x < x_2$ важе неједнакости (15), односно

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Означимо са $C = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ (примећујемо да је ово константа и да не зависи од x). Сада је

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq C \leq \frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}.$$

Кроз неједнакост $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq C$ прођемо лимесом када $x \to x_1+$, знамо да постоје леви и десни изводи у свим тачкама (јер је f диференцијабилна) и закључујемо

$$f'_+(x_1) \leq C.$$

Знамо да за диференцијабилне функције важи $f'(x_1) = f'_+(x_1)$. На тај начин долазимо до неједнакости

$$f'(x_1) \leq C. \tag{17}$$

Следећи корак је да кроз неједнакост $C \leq \frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}$ прођемо лимесом када $x \to x_2-$. Како је $f'_-(x_2) = f'(x_2)$ онда је

$$C \leq f'(x_2). \tag{18}$$

Неједнакости (17) и (18) кажу да је функција f' растућа на (a,b).

$\Longleftarrow$:

Нека је сада f' растућа функција. Показаћемо да је тада и нагиб растућа функција па користећи Тврђење 48 можемо да закључимо да је f ковексна. Довољно је показати да је $n_{x_0}(x_1) \leq n_{x_0}(x_2)$ ако је распоред тачака $x_1 < x_0 < x_2$. Знамо да је

$$n_{x_0}(x_1) = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

а важи $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = f'(c_1)$ према Лагранжевој теореми за неко $c_1 \in (x_1, x_0)$ (знамо да је f дифеенцијабилна на (a,b) па ће бити непрекидна на $[x_1, x_0]$ и диференцијабилна на (x_1, x_0)). Важиће и

$$n_{x_0}(x_2) = \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0} = f'(c_2)$$

за неко $c_2 \in (x_0, x_2)$. Први извод је растућа функција, важи $c_1 < x_0 < c_2$ па је $f'(c_1) \leq f'(c_2)$ односно

$$n_{x_0}(x_1) \leq n_{x_0}(x_2).$$

□

Знак другог извода (ако постоји) нам у потпуности одређује конвексност односно конкавност функције.

Тврђење 50. Нека је $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ два пута диференцијабилна функција. Тада је f конвексна функција ако и само ако је други извод ненегативан на (a,b).

Доказ. Знамо да ће f бити диференцијабилна па на основу претходног тврђења важи f је конвексна ако и само ако је први извод растућа функција а онда је то на основу Последице 29 (друга тачка) еквивалентно томе да је $(f')' = f'' \geq 0$ на (a,b). □

Преостала нам је још дискусија о конкавним функцијама. Приметимо да је f конкавна ако и само ако је функција $-f$ конвексна. То значи да је конкавност еквивалентна томе да је нагиб опадајућа функција (Тврђење 48). Аналогно својство из Тврђења 49 каже да је диференцијабилна функција конкавна ако и само ако је први извод опадајућа функција. Док за два пута диференцијабилне функције важи да су конкавне ако и само ако им је други извод мањи или једнак од нуле.

Ако је $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ два пута диференцијабилна функција и ако је c њена превојна тачка тада је $f''(c) = 0$. Ова карактеризација превојне тачке као нула другог извода је могућа само ако унапред знамо да функција има други извод у тој тачки. Може да се деси да је c превојна тачка а да функција има прекид у тој тачки па онда не можемо да причамо о изводима функције у тој тачки.

9. Испитивање функција и скицирање графика

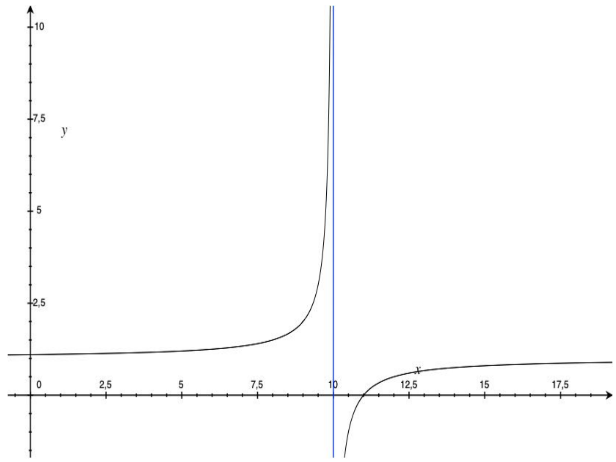
При испитивању функција и скицирању графика користимо сва претходна знања о функцијама (елементарне функције, лимеси, непрекидност, диференцијабилност, изводи вишег реда...) Сада ћемо истаћи неке ствари које су најбитније, али не и једине јер се испитивање функција разликује од примера до примера.

- **Домен функције** је као што знамо скуп тачака за који функција може да се дефинише. Означаваћемо га са $Dom(f)$ или $D(f)$. Када тражимо домен функције битно нам је да избегнемо дељење нулом, да избегнемо кореновање негативних бројева када то није могуће (нпр. $\sqrt[4]{-6}$ није дефинисано у скупу $\mathbb{R}$, док $\sqrt[5]{-6}$ јесте добро дефинисано). Овде је важно знати домене елементарних функција јер нам се често јављају у конкретним примерима. Као пример наводимо функцију природног логаритма, $\ln x$ за коју знамо да је дефинисана само за $x > 0$.
- **Парност, непарност, периодичност.** Функција је парна ако је $f(-x) = f(x)$ за све $x \in Dom(f)$ а непарна ако је $f(-x) = -f(x)$ на целом домену. Прва ствар која мора да важи да би функција била парна или непарна јесте да је њен домен симетричан око нуле. Нема смисла испитивати парност/непарност функција чији је домен скуп $(-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$ или $(-7, 19)$. Када скицирамо график функције треба имати у виду да је график парне функције симетричан око $y-$осе док је график непарне функције централно-симетричан око координатног почетка. Примери парних функција су косинусна функција и квадратна функција, док су синусна и кубна функција непарне.

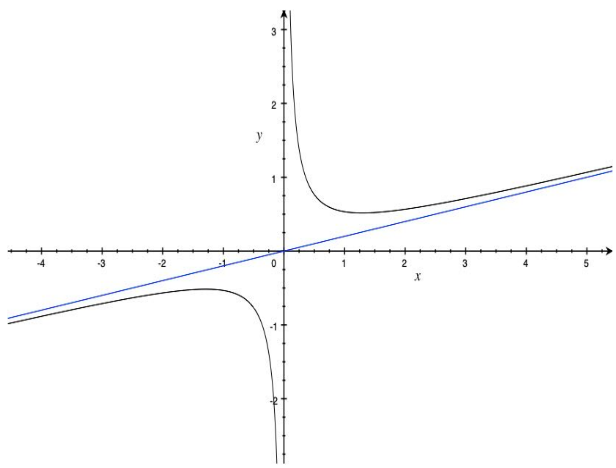
  Кажемо да је функција f периодична ако постоји реалан број $T > 0$ такав да важи $f(x + T) = f(x)$ за све $x \in Dom(f)$. Најмањи такав позитиван број назива се периодом функције. Функције $\sin x$ и $\cos x$ су периодичне са периодом 2π док је функција $\operatorname{tg} x$ периодична са периодом π. Када скицирамо график периодичне функције довољно је испитати функцију на једном интервалу ширине T, на пример $[0, T)$ или $(-2T, -T]$ а онда само копирамо тај део графика на цео домен функције.
- **Нуле и знак функције.** Нуле функције, односно тачке x_0 у којима важи $f(x_0) = 0$, су тачке у којима график функције сече $x-$осу. Када испитујемо знак функције тражимо скуп тачака у којима је функција позитивна и скуп тачака у којима је функција негативна, $Dom_+(f) := \{x \in Dom(f) \mid f(x) > 0\}$ и $Dom_-(f) := \{x \in Dom(f) \mid f(x) < 0\}$.

  У зависности од примера неће увек бити једноставно да одредимо нуле и знак. Некада ће нам први извод бити од помоћи, па ћемо на основу тога да ли функција негде расте или опада моћи да закључимо да ли функција има неку нулу и да ли је негде позитивна или негативна. Биће и примера где не можемо тачно да одредимо нулу већ можемо само да закључимо у ком интервалу се налази.
- **Асимптоте.** Већ смо рекли да функција може имати вертикалне асимптоте у неким коначним тачкама и косе или хоризонтале асимптоте у бесконачности. Може се десити да неке од ових асимптоте не постоје.

  Када цртамо график постојање асимптота значи да је график функције произвољно близу неке праве. На Слици 14 видимо пример функције која има вертикалну асимптоту $x = 10$ (и то сад леве стране) па се график функције приближава овој правој како ближе прилазимо тачки $x = 10$ са леве стране. На Слици 15 видимо пример функције $f(x) = \frac{x}{5} + \frac{1}{3x}$ која има косу асимптоту $y = \frac{x}{5}$ када $x \to +\infty$ и исту косу



Слика 14. График се приближава вертикалној асимптоти (плава линија на слици) са леве стране



Слика 15. График функције $y = \frac{x}{5} + \frac{1}{3x}$

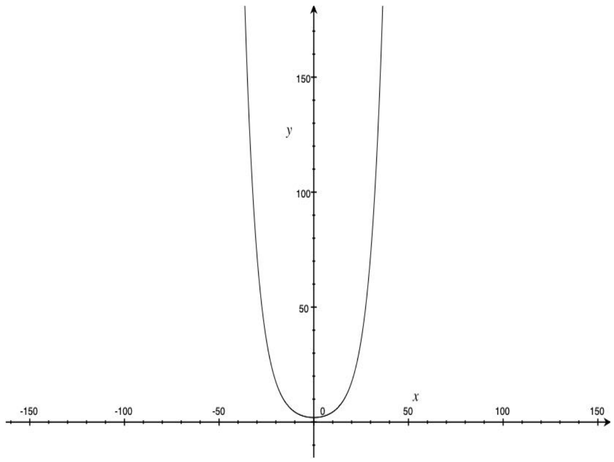
асимптоту када $x \to -\infty$. Приметимо да је разлика између наше функције и асимптоте $f(x) - y = \frac{x}{5} + \frac{1}{3x} - \frac{x}{5} = \frac{1}{3x}$ и да је ова разлика позитивна када је $x > 0$ а негативна када је $x < 0$. То значи да се график функције налази изнад асимптоте када $x \to +\infty$ а испод асимптоте када $x \to -\infty$. Ова функција има и вертикалну асимптоту $x = 0$.

Имаћемо примере када функција нема ни једну асимптоту. На Слици 16 видимо график функције $y = e^x + e^{-x}$ која нема ни једну асимптоту на свом домену.

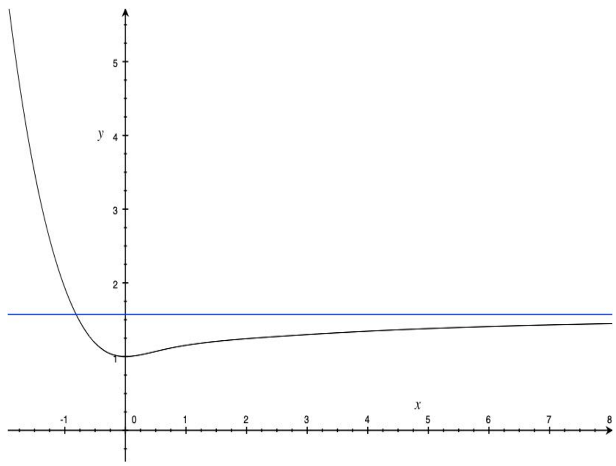
Функција $y = e^{-x} + \arctan x$ има хоризонталну асимптоту $y = \frac{\pi}{2}$ када $x \to +\infty$ док нема ни једну асимптоту када $x \to -\infty$ (видети Слику 17). Ова функција нема никаквих рупа у домену па не може имати вертикалних асимптота.

- **Непрекидност и диференцијабилност.** Подсетимо се да су елементарне функције непрекидне у тачкама у којима су дефинисане. Знамо да ако имамо тачку прекида у некој тачки домена онда нам се график „кида” на том месту, односно при цртању графика оловку морамо да подигнемо са папира. Једна од метода за испитивање непрекидности јесте тражење левог и десног лимеса у тачки. Леви лимес нам каже како график функције прилази тачки прекида са леве стране а десни лимес како график прилази тачки прекида са десне стране.

  За тражење првог извода и испитивање диференцијабилности такође је важно знати како се диференцирају елементарне функције. Знамо да график изгледа као да се ломи у тачки у којој функција није диференцијабилна. Леви и десни извод су такође битни



Слика 16. График функције $y = e^x + e^{-x}$



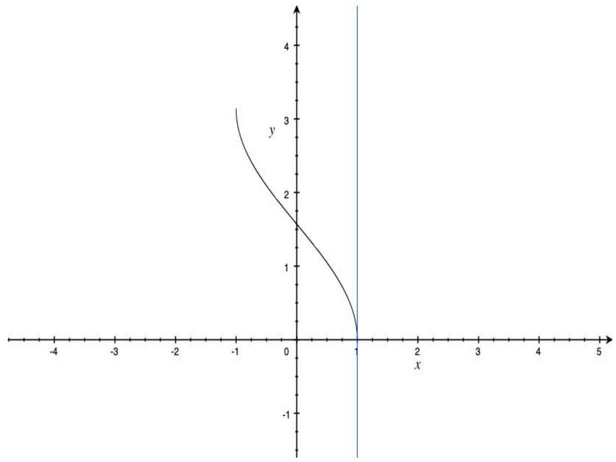
Слика 17. График функције $y = e^{-x} + \arctan x$

(ако постоје) у некој тачки где функција није диференцијабилна. Они нам говоре о томе под којим углом график прилази тачки у којој немамо диференцијабилност или под којим углом се прилази неким крајевима домена или тачкама које нису у домену. На Слици 18 видимо график функције $f(x) = \arccos x$. Знамо да је извод ове функције $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ па закључујемо да је $\lim\limits_{x\to 1-} f'(x) = -\infty$ па график прилази тачки $x = 1$ са леве стране приљубљен уз праву која је паралелна $y-$оси (односно под углом од $\frac{\pi}{2}$).

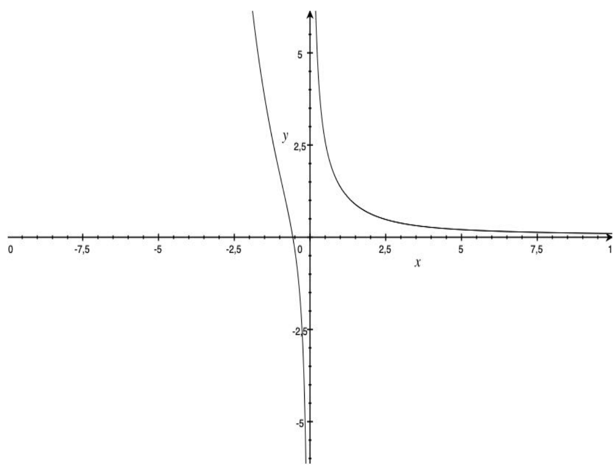
- **Екстремне вредности и монотоност.** Од раније знамо да ако је $f' \geq 0$ на неком интервалу онда функција расте на том интервалу а ако је $f' \leq 0$ на неком интервалу онда функција опада на том интервалу. Овде је битно да закључак о монотоности важи само ако је на неком интервалу у свим тачкама задовољена неједнакост.

Погледајмо пример на Слици 19. Видимо да је извод функције $f(x) = \frac{1}{x} + e^{-x}$ дат са $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - e^{-x} \leq 0$ на целом домену $Dom(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. На основу тога можемо да закључимо да f опада на $(-\infty, 0)$ и да f опада на $(0, +\infty)$, никако на целом домену. Функција и не опада на целом домену а то можемо да видимо и са графика или упоређивањем вредности у неке две тачке. На пример $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -2 + \sqrt{e} < 0 < f(1) = 1 + \frac{1}{e}$ а важи $-\frac{1}{2} < 1$. Дакле f не опада на целом домену већ закључак о монотоности важи само на интервалима који су садржани у домену.

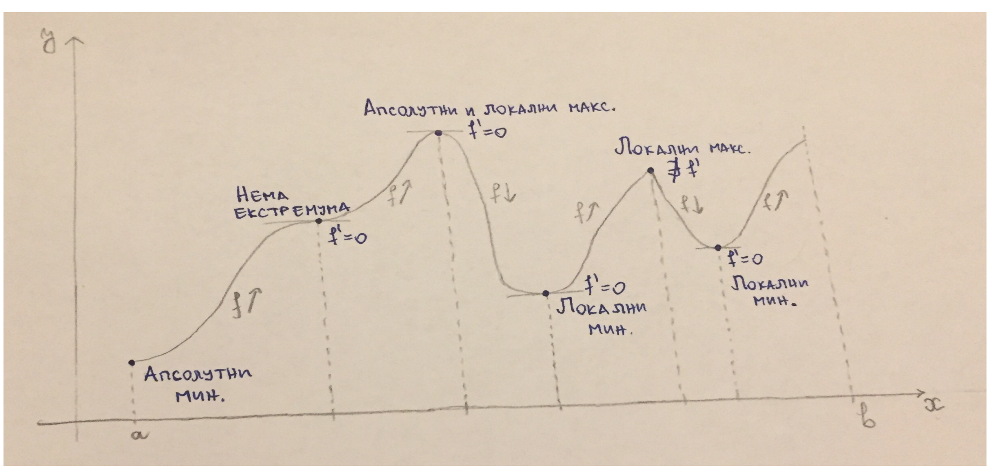
Раније смо рекли да су нам кандидати за локалне екстремуме тачке у којима извод функције има нулу (стационарне тачке) или тачке у којима извод уопште не постоји. Када тражимо апсолутне максимуме и апсолутне минимуме (то су тачке у којима



Слика 18. График функције $y = \arccos x$

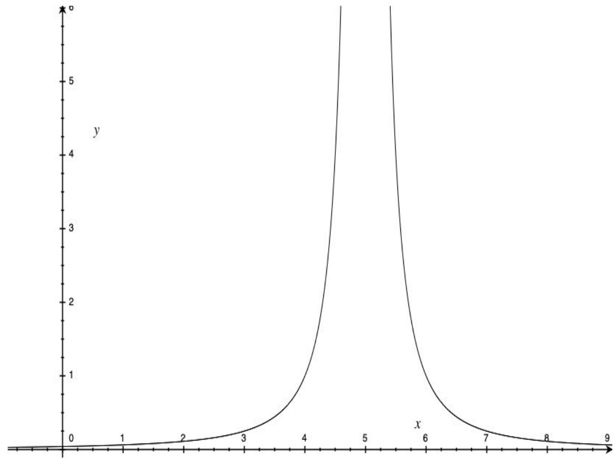


Слика 19. График функције $y = \frac{1}{x} + e^{-x}$

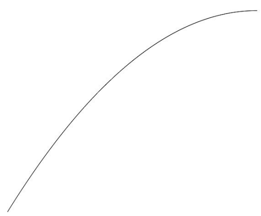


Слика 20. Први извод, екстремуми и монотоност

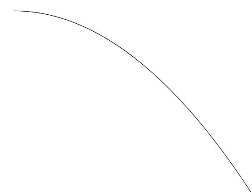
функција достиже максимум и минимум на целом домену) онда проверимо вредност функције у свим локалним екстремумима и видимо које су вредности функције на крајевима домена и закључимо која је највећа а која најмања вредност. На Слици 20 приказане су разне могуће ситуације.



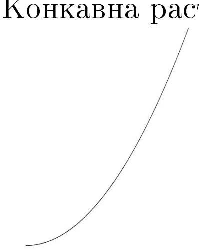
Слика 21. График функције $y = \frac{1}{(x-5)^2}$



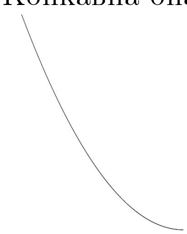
Слика 22. Конкавна растућа функција



Слика 23. Конкавна опадајућа функција



Слика 24. Конвексна растућа функција



Слика 25. Конвексна опадајућа функција

- **Конвексност, конкавност и превојне тачке.** Својство конвексности и конкавности нам каже како се график функције савија или скреће. За његово испитивање најчешће користимо други извод функције. Знамо да је функције конвексна на неком интервалу ако је њен други извод ненегативан, а конкавна је ако је $f'' \leq 0$. Опет истичемо да је овде битно да то важи у свим тачкама интервала (и да други извод постоји и да је одређеног знака).

  Погледајмо функцију $f(x) = \frac{1}{(x-5)^2}$ (Слика 21). Њен други извод је $f''(x) = \frac{6}{(x-5)^4} > 0$ на целом домену $Dom(f) = (-\infty, 5) \cup (5, +\infty)$. Оно што можемо да закључимо јесте да је функција конвексна на $(-\infty, 5)$ и да је конвексна на $(5, +\infty)$ али да није конвексна на целом домену.

  На Слици 22 видимо како изгледа график функције која је на једном делу конкавна и растућа. Слика 23 приказује функцију која је на једном делу конкавна и опадајућа.

  Конвексна растућа и конвексна опадајућа функција су редом приказане на Сликама 24 и 25.

  Превојне тачке су оне тачке у којима функција мења конвексност и конкавност. Ако други извод постоји у тој тачки онда је он једнак нули. Може се десити да је нека тачка превојна а да у њој функција нема други извод.

- **Скицирање графика функције.** На основу претходно описаних корака долазимо до одређених особина функције на основу којих скицирамо график функције.

Задатак 51. Испитати ток и нацртати график функције $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x^3}$.

Решење.

- Како трећи корен постоји за све реалне бројеве и у изразу под кореном је полиномна функција закључујемо да израз $\sqrt[3]{x^2 - x^3}$ може да се израчуна за све реалне бројеве па је домен ове функције $D(f) = \mathbb{R}$.
- Приметимо да је $f(1) = \sqrt[3]{1^2 - 1^3} = 0$ и $f(-1) = \sqrt[3]{(-1)^2 - (-1)^3} = \sqrt[3]{2}$ па функција није ни пара ни непарна. Није ни периодична јер је бесконачно велика када аргумент x узима велике негативне вредности.
- Нуле и знак функције испитујемо одређивањем знака и нула полинома који се налази под трећим кореном. Закључујемо да је $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $f(x) < 0$ за све $x \in (1, +\infty)$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
x	$-$	$+$	$+$
x^2	$+$	$+$	$+$
$1 - x$	$+$	$+$	$-$
$x^2(1-x)$	$+$	$+$	$-$
f	$+$	$+$	$-$

  и $f(x) > 0$ за све $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$.
- Ни једна тачка нити скуп нису избачени из домена функције па немамо вертикалних асимптота. Развој функције у околинама бесконачно великих тачака нам каже да је

$$f(x) = \sqrt[3]{-x^3\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = -x\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} =$$
$$= -x\left(1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -x + \frac{1}{3} + o(1),\ x \to \pm\infty.$$

  Дакле, функција f има косу асимптоту $y = -x + \frac{1}{3}$ када $x \to +\infty$ и исту ту косу асимптоту када $x \to -\infty$.
- Функција f је непрекидна као комозиција таквих функција. Извод функције једнак је

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x^2 - x^3)^{-\frac{2}{3}}(2x - 3x^2) =$$
$$= \frac{x\cdot(2 - 3x)}{3\cdot\sqrt[3]{x^4(1-x)^2}} = \frac{2 - 3x}{3\cdot\sqrt[3]{x(1-x)^2}}$$

  у тачакама реалне осе које нису једнаке 0 и 1. Постојање извода тачкама $x = 0$ и $x = 1$ испитујемо по дефиницији. Прво проверавамо да ли постоји следећи лимес

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h^2 - h^3} - 0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-h}}{\sqrt[3]{h}}.$$

  Овај лимес не постоји јер је $\lim\limits_{h\to 0+}\frac{\sqrt[3]{1-h}}{\sqrt[3]{h}} = +\infty$, док је $\lim\limits_{h\to 0-}\frac{\sqrt[3]{1-h}}{\sqrt[3]{h}} = -\infty$. Што се тачке $x = 1$ тиче занима нас да ли постоји следећи лимес

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{(1+h)^2(1-(1+h))} - 0}{h} = -\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^{\frac{2}{3}}h^{\frac{1}{3}}}{h}.$$

  Овај лимес је једнак вредности $-\infty$ па је закључак да је функција диференцијабилна на скупу $D(f) \setminus \{0, 1\}$.

- Сада нас занима да одредимо знак првог извода у тачкама у којима он постоји. Видимо да знак првог извода зависи од знака израза x и $2-3x$ па ћемо у табели издвојити тачке $x=0$ и $x=\frac{2}{3}$. У табелу смо додали и тачку $x=1$ јер функција нема први извод у тој тачки. Закључујемо да функција f опада на интервалу $(-\infty,0)$, расте на интервалу $(0,\frac{2}{3})$, затим опада на $(\frac{2}{3},1)$ и опада на интервалу $(1,+\infty)$. Локални минумум се јавља у тачки $x=0$, $f(0)=0$, а локални максимум у тачки $x=\frac{2}{3}$, $f(\frac{2}{3})=\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$.

	$(-\infty,0)$	$(0,\frac{2}{3})$	$(\frac{2}{3},1)$	$(1,+\infty)$
x	$-$	$+$	$+$	$+$
$2-3x$	$+$	$+$	$-$	$-$
f'	$-$	$+$	$-$	$-$
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$

- Други извод има смисла рачунати у тачкама у којима постоји први извод тако да други извод неће постојати у тачкама $x=0$ и $x=1$. Што се осталих тачака домена тиче правила диференцирања кажу да је

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{-3\cdot 3\cdot \sqrt[3]{x(1-x)^2}-(2-3x)\cdot 3\cdot \frac{1}{3}(x(1-x)^2)^{-\frac{2}{3}}\cdot((1-x)^2+x\cdot 2(1-x)\cdot(-1))}{9\cdot\sqrt[3]{x^2(1-x)^4}} = \\
&= \frac{-9\cdot\sqrt[3]{x(1-x)^2}-(2-3x)\cdot\frac{1-2x+x^2-2x+2x^2}{\sqrt[3]{x^2(1-x)^4}}}{9\cdot\sqrt[3]{x^2(1-x)^4}} = \\
&= \frac{-9x(1-x)^2-(2-3x)(1-4x+3x^2)}{9\cdot\sqrt[3]{x^4(1-x)^8}} = \\
&= \frac{-9x(1-x)^2-(2-3x)(1-x)(1-3x)}{9\cdot\sqrt[3]{x^4(1-x)^2}\cdot(1-x)^2} = \\
&= \frac{-9x(1-x)-(2-3x)(1-3x)}{9\cdot f^2(x)\cdot(1-x)} = \\
&= \frac{-9x+9x^2-2+6x+3x-9x^2}{9\cdot f^2(x)\cdot(1-x)} = \frac{2}{9(x-1)\cdot f^2(x)}
\end{aligned}
$$

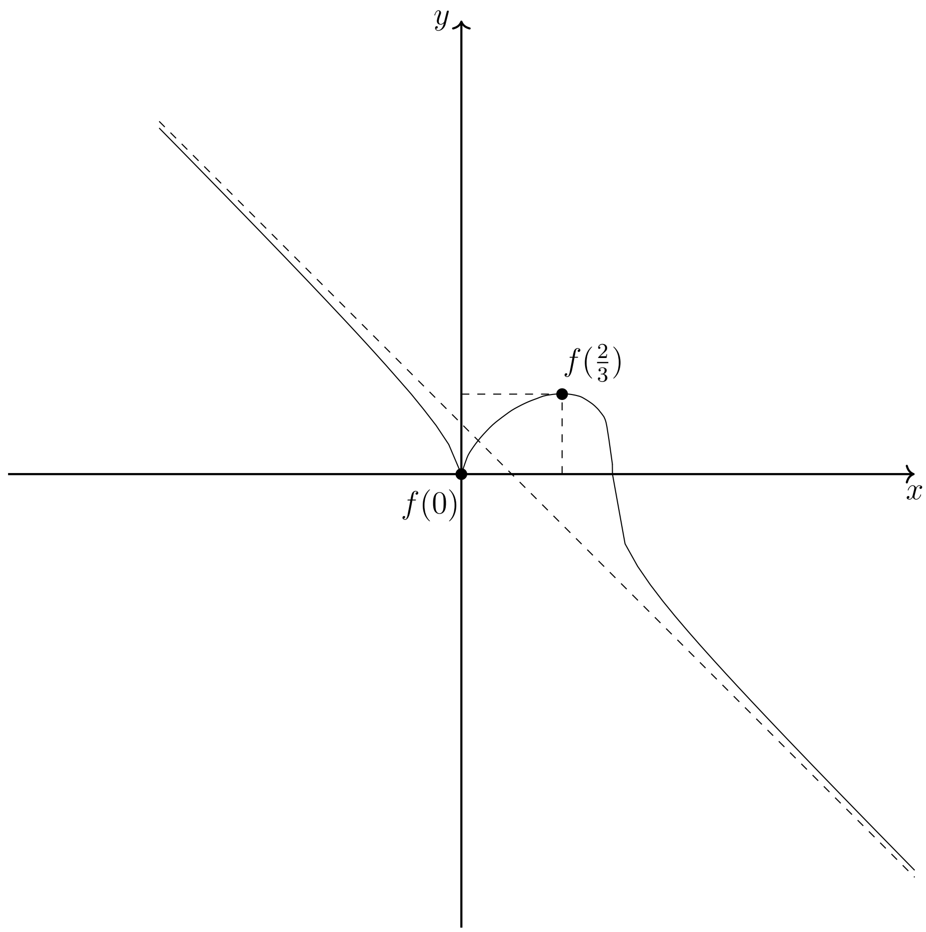
На основу претходног можемо да кажемо да је функција конкавна на интервалу

	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
f''	$-$	$-$	$+$
f	$\cap$	$\cap$	$\cup$

$(-\infty,0)$, на интервалу $(0,1)$ је такође конкавна док је конвексна на $(1,+\infty)$. Тачка $x=1$ је превојна тачка.

- При цртању графика је важно повести рачуна како изгледа график у околинама тачака 0 и 1. Како је $f'_-(0)=-\infty$ онда је график приљубљен уз $y-$осу са леве стране и са те стране функција опада. Са десне стране важи $f'_+(0)=+\infty$ па је график функције приљубљен уз $y-$осу и са десне стране тачке нула и са те стране функција расте. Како је $f'(1)=-\infty$ (овде се ради о изводу у проширеном смислу) онда је график функције приљубљен уз праву $x=1$ и ту функција опада. На Слици 26 приказан је график функције.

$\checkmark$



Слика 26. График функције $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x^3}$

10. Задаци

Задатак 52. Ако функција $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ има леви и десни извод у тачки x_0 показати да је она тада непрекидна. Приметимо да не захтевамо претпоставку да леви и десни извод буду једнаки већ да само постоје. ✓

Задатак 53. Наћи извод функције $h(x) = f(x)^{g(x)}$ у оним тачкама у којима су све функције дефинисане и диференцијабилне. ✓